

А.С. Филиппов

**Численные методы в механике деформируемого
твёрдого тела**
(конспект лекций)

Механика деформируемого твёрдого тела

Москва 2021

Оглавление

Введение: мотивация и назначение курса лекций.....	7
1. Напряжённое состояние и тензор напряжений	9
1.1. Твёрдое тело. Нагрузка и внутренние силы.	9
1.2. Формула Коши. Тензор напряжений.	14
1.3. Условия равновесия твёрдого деформируемого тела.	16
1.4. Инварианты тензора напряжений	19
1.5. Главные оси и главные значения компонент тензора напряжений	20
2. Деформирование и тензор деформаций	26
2.1. Движение, перемещение и деформация	26
2.2. Тензор деформаций	27
2.3. Физическая интерпретация компонент тензора малых деформаций.....	30
2.4. Инварианты тензора деформаций, главные оси. Объёмы и площади.....	31
2.5. Малое движение, тензоры малых вращений и деформаций	33
3. Упруго деформируемое тело и линейная упругость.....	37
3.1. Энергия упругой деформации.....	37
3.2. Определяющее соотношение упругого материала. Изотропные упругие постоянные	39
3.3. Единицы измерения и порядки величин.....	43
3.4. Шаровая и девиаторная составляющие тензоров напряжений и деформаций	44
4. Система уравнений МДТТ.....	46
4.1. Уравнения статической теории упругости.....	46
4.2. Нелинейность механического поведения.....	47
4.3. Ускорение деформируемого тела. Динамика сплошной среды.....	47
4.4. Динамика и статика.....	53
4.5. Принцип возможных работ.....	54
5. Частные постановки статической задачи МДТТ	57
5.1. Способы упрощения уравнений и г.у. задачи упругости. Принцип Сен-Венана.....	57
5.2. Плоские одно- и двумерные задачи.....	59
5.3. Цилиндрическая система координат. Осевая симметрия.....	63
5.4. Термоупругие деформации и напряжения	71
6. Элементарная теория изгиба: силовые характеристики	75
6.1. Действие поперечной концевой силы, приложенной к стержню	75
6.2. Силы, моменты и условия равновесия стержня.....	77
6.3. Напряжения при чистом изгибе	78
7. Неупругость: пластичность и ползучесть	83
7.1. Где в технике изучают неупругость	83
7.2. Пластичность	84
Эксперименты по пластическому деформированию и их истолкование	87
Разгрузка и циклическое нагружение.....	90
"Поликристаллическое" истолкование эффектов упрочнения	90
Схематизация диаграмм растяжения	91
Влияние скорости деформации на предел текучести.	92
7.3. Основные представления теории пластичности.....	93
Уравнения Прандтля–Рейсса с упрочнением	101
7.4. Пример: задача о пластической мембране.....	102
7.5. Температурные зависимости основных механических величин.....	104
7.6. Ползучесть.....	104
8. Неупругость: разрушение	107
8.1. Механическое разрушение и условия его развития	107
8.2. Механика с учётом разрушения	108
Основные понятия	110
Температурно-временные зависимости длительной прочности.....	111
9. Введение в МКЭ: дискретная основа решения задач МДТТ	114

9.1. РАЗВИТИЕ МКЭ.....	115
9.2. ИНЖЕНЕРНЫЕ МКЭ–ПАКЕТЫ.....	117
Замечание относительно наименования алгоритмических расчётных средств	117
О выборе и работе с программными средствами	119
9.3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ. УЗЛЫ И ЭЛЕМЕНТЫ.....	120
9.3.1. Процедура дискретизации МКЭ	120
9.3.2. Геометрическая модель в дискретном представлении	121
9.3.3. Матричные обозначения	125
9.4. ЛИНЕЙНАЯ УПРУГАЯ ПРУЖИНА.....	125
9.5. МАТРИЧНЫЙ АНАЛИЗ СЕТЕЙ.....	130
9.6. ЭЛЕМЕНТ СТЕРЖЕНЬ.....	132
10. МКЭ в форме метода перемещений	137
10.1. ЭТАПЫ ПРОЦЕДУРЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.....	137
10.2. Интерполирующие выражения. Треугольный линейный элемент.....	139
10.2.1. Перемещения и деформации в конечном элементе	142
10.2.2. Напряжения в элементе.	143
10.2.3. Узловые силы и условие равновесия.....	144
10.2.4. Учёт объёмных, поверхностных и точечных сил.....	146
10.2.5. Дискретная форма полного уравнения равновесия элемента.....	148
10.3. ОБЩЕЕ РАВНОВЕСИЕ В КЭ–МОДЕЛИ И СБОРКА ГЛОБАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ЖЁСТКОСТИ	148
10.3.1. Свойства матрицы жёсткости, ширина диагонали.....	150
10.3.2. Интегрирование по элементу	151
10.3.3. Осесимметричная геометрия.....	151
10.4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЯМ.....	152
10.4.1. Примеры задания условий закрепления.....	154
11. Общие формулировки МКЭ	158
11.1. ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ ФОРМЫ.....	159
11.1.1. Четырёхугольный 4–узловой элемент.....	159
11.2. КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МСС	161
11.3. ПИРАМИДАЛЬНЫЕ БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ.....	163
11.4. ФОРМУЛИРОВКА МКЭ ЧЕРЕЗ ПРИНЦИП МИНИМУМА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ	165
11.5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЭЛЕМЕНТУ.....	169
11.6. МКЭ КАК МЕТОД ВЗВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК	170
11.6.1. Пример: дискретизация уравнения нестационарной теплопроводности.....	172
Обобщённая (слабая) формулировка задачи	174
Метод Бубнова–Галёркина.....	175
12. Нелинейные задачи МДГТ	179
12.1. ФОРМУЛИРОВКИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ НАГРУЖЕНИЕ.....	179
12.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ: КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ	181
12.2.1. Компоненты тензора напряжений в системе элемента и в лабораторной системе.....	181
12.2.2. Поворот тензора напряжений.....	183
12.2.3. Производная по времени тензора напряжений.....	184
12.2.4. Обновление полного тензора напряжений. Давление и термодформации ...	184
12.3. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ.....	186
12.3.1. Процедура "радиального возврата" на поверхность текучести	186
12.3.2. Учёт упрочнения при деформировании	189
12.3.3. Нелинейное упрочнение и установившаяся ползучесть.....	192
12.3.4. К построению квазистатического численного алгоритма модели пластичности	193
13. Физически нелинейные задачи квазистатики.....	195
13.1. О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	195
13.1.1. Метод последовательных приближений: терминология.....	195
13.1.2. Итерационный процесс метода Ньютона.....	195

13.1.3. Нелинейности в теории пластичности	197
13.1.4. Матрица определяющего соотношения в модели линейного упрочнения.....	198
13.1.5. Свойства матрицы линейной системы: погрешность и число обусловленности	200
13.1.6. О критериях сходимости итераций и общих проверках решения	202
13.2. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В КОДЕ HEFEST- M.....	203
13.3. ОБЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МДТТ.....	205
13.3.1 Вычислительный цикл решения квазистатической задачи.....	206
13.3.2. Этапы получения численного решения МДТТ-пакетом	207
13.3.2.1. Построение расчётной области (Preprocessing) и решение	208
13.3.2.2. Работа с результатами решения	209
13.3.3. Режимы работы с универсальным пакетом программ.....	210
13.3.3.1. Интерактивный	210
13.3.3.2. Пакетный	210
14. Неполноразмерные элементы. Балочный элемент.....	212
14.1. ОСНОВНЫЕ НЕПОЛНОРАЗМЕРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ: БАЛКА И ОБОЛОЧКА	212
14.2. БАЛКА (ИЗГИБНЫЙ ЭЛЕМЕНТ).....	212
14.3 ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗГИБА	213
14.3.1. Точечное и распределённое нагружение.....	214
14.4. ПОСТРОЕНИЕ ИЗГИБНОГО КЭ	216
Функции формы изгибаемого КЭ	216
Дискретное уравнение равновесия изгибаемого КЭ.....	218
15. Динамические явления и методы их количественного описания.....	221
15.1 ВВЕДЕНИЕ: ОБЩАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ	221
15.2 ДИСКРЕТИЗАЦИЯ МКЭ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.....	222
15.2.1 Система уравнений динамики твёрдого деформируемого тела.....	222
15.2.2. Пространственная дискретизация уравнений динамики ДТТ	225
15.2.2.1. Обобщённая формулировка уравнения квазиравновесия	225
15.2.2.2 Дискретизация МКЭ	227
15.2.2.3 Матрица демпфирования. Псевдовязкость	230
15.2.2.4 Сосредоточенные массы. Явное интегрирование по времени	231
15.2.2.5 Процедура интегрирования по времени	232
15.2.2.5 Физические особенности динамики твёрдого тела и её численной модели	233
ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 1.....	234
ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 2.....	235
Приложение. Механика упруго-пластических трещин и численные расчёты.....	236
П.1. ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ МАТЕРИАЛОВ И ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ.....	236
Подходы к решению проблемы хрупкого разрушения	237
Силовой критерий разрушения	239
Упруго-пластическая трещина.....	240
П.2. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ В МЕХАНИКЕ ТРЕЩИН	243
Трещина Гриффитса в линейно-упругой бесконечной области.....	244
Определение коэффициента интенсивности напряжений (КИН)	245
Раскрытие трещины.....	248
Форма и размеры пластической зоны.....	249
ЛИТЕРАТУРА К ПРИЛОЖЕНИЮ.....	255

Обозначения

- a_i – начальные координаты
 A – (часто) площадь
 B_{ik} – тензор градиентов деформаций (гл. 2)
 $[B]$ – матрица деформаций
 E – модуль упругости
 $[E]$ – матрица упругости
 e_{ik} – тензор–девиатор деформаций, общий тензор деформаций Эйлера-Альманзи
 $I_1(s_{ik}), I_2(s_{ik}), I_3(s_{ik})$ – 1–й, 2–й, 3–й инварианты тензора–девиатора s_{ik}
 $J_1(a_{ik}), J_2(a_{ik}), J_3(a_{ik})$ – 1–й, 2–й, 3–й инварианты тензора a_{ik}
 $i, j, k, l, m, n, p, q, r, s$ – обозначение скользящих индексов при суммировании
 k – жёсткость пружины
 $[k]$ – элементная матрица жёсткости
 $[K]$ – матрица жёсткости системы
 n_i – компоненты единичного вектора нормали к площадке, линии
 $\{N\}=\{N(x,y)\}$ – матрица базисных функций, $N(x,y,z)$ – базисная функция
 M – момент силы
 s_{ik} – тензор–девиатор напряжений
 T – температура
 u_i – компоненты вектора (физического) перемещений
 \dot{u}_i – компоненты вектора массовой скорости
 x_i – текущие координаты точки
 ϵ_{ij} – тензор малых деформаций
 ϵ_{ij}^e – упругая часть тензора деформаций
 ϵ_{ij}^p – пластическая часть тензора деформаций
 ϵ^p – эффективная пластическая деформация
 δ – приращение
 δ_{ik} – символ Кронекера, единичный тензор
 ν – коэффициент Пуассона
 $[\phi]=[\phi(x,y)]$ – матрица функций форм элемента, $\phi(x,y)$ – функция формы
 ρ – плотность
 σ_{ik} – тензор напряжений
 ω – пробная функция; круговая частота
 ω_{ik} – тензор поворота на малый угол
 Ω_{ik} – тензор угловых скоростей
 Ω – область задания функции
 $\partial\Omega$ – граница области задания функции

Сокращения

- г.у. – граничные условия
ДТТ – деформируемое твёрдое тело
КБ – конструкторское бюро
КТР – коэффициент теплового расширения
КЭ – конечный элемент
МДТТ – механика деформируемого твёрдого тела
МЖ – матрица жесткости
МЖГ – механика жидкости и газа
МКЭ – метод конечных элементов
МСС – механика сплошной среды

НДС – напряжённо–деформированное состояние
НС – напряжённое состояние
с.к. – система координат
ТП – теория пластичности
ЭВМ – электронная вычислительная машина

Соглашения о словоупотреблении, полиграфии etc.

- Механическое сжатие – в контексте может означать как сжатие, так и растяжение;
- "Твёрдое тело" означает "твёрдое деформируемое тело";
- Союз (логическая связка) *или* понимается в неисключающем смысле, как в пропозициональной логике; для взаимоисключения используется связка *либо*;
- Для обозначения компонент векторов и тензоров большей частью используются индексные обозначения. Фиксированные индексы компонент векторов и тензоров обозначаются цифрами, а иногда также буквами, например, σ_{11} , σ_{xx} , σ_{12} , σ_{xy} и т.п.;
- Вектор как объект обозначается также жирным шрифтом, без индексов, либо обычным шрифтом в фигурных скобках. Это относится как к физическим векторам, так и к алгебраическим;
- Используется соглашение о суммировании по повторяющимся переменным (скользящим) индексам; если суммирования по повторяющимся индексам нет, они заключены в скобки, либо это явно оговорено;
- Термины, важные формулировки или акценты выделены *курсивом*;
- **Синим цветом** шрифта выделены упражнения.

Введение: мотивация и назначение курса лекций

Настоящее пособие представляет собой конспект лекций, в течение ряда лет читаемых автором на базовой кафедре МФТИ (Кафедра Проблем безопасного развития современных энергетических технологий) в стенах Института Проблем безопасного развития атомной энергии Российской Академии наук (ИБРАЭ РАН). Специфика тематики института и род занятий автора (численное моделирование процессов при тяжёлых авариях ядерных энергетических установок), в значительной степени определили содержание курса. В нём сделана попытка кратко изложить базовые сведения из механики деформируемого твёрдого тела (МДТТ) и основного численного метода, применяемого для этих целей – метода конечных элементов (МКЭ), необходимые для проведения численного анализа предельных механических состояний элементов конструкций ЯЭУ.

МДТТ изучает деформированное состояние твёрдого тела, возникающее при приложении к нему нагрузки. При неограниченном возрастании нагрузки любое "твёрдое" тело разрушается, и конечная цель изучения состояния конструкции под нагрузкой, наряду с оптимизацией конструкции, состоит именно в изучении условий, при которых возможно разрушение или иные нежелательные изменения состояния материала. Начало необратимых изменений, т.е. неупругости и разрушения, связано с распределением внутренних сил и деформаций, возникающих под действием приложенной нагрузки. Соотношения между ними до определённого момента описываются теорией упругости, а при дальнейшем росте нагрузки или при длительном нагружении постоянной нагрузкой – специфическими законами пластичности, ползучести и др. Поэтому основу МДТТ составляют уравнения теории упругости, дополняемые более сложными моделями и концепциями неупругого деформирования вместе с механическими критериями смены режимов деформирования.

Решение уравнений МДТТ в общей форме можно получить только численно. В данном учебном курсе ставится задача сообщить те сведения из механики и численных методов, которые полагаются необходимыми для понимания основных методов и критической интерпретации получаемых результатов численного решения нелинейных задач МДТТ. Студент, освоивший данный курс, должен -

- уметь свободно обращаться с компонентами тензоров напряжений и деформаций и др. механическими величинами, что, как показывает опыт, достигается не сразу;
- уметь делать "на бумаге – карандашом" оценки НДС в простейших случаях;
- усвоить базовые понятия метода конечных элементов;
- усвоить базовые понятия моделей неупругого поведения материалов;
- уметь ставить задачу численного расчёта НДС, понимать полученный результат и оценивать область применимости нелинейных механических моделей и численных методов.

Курс рассчитан на 2 семестра и представляет собой введение в предмет. Его профессиональное освоение требует гораздо большего времени, как на усвоение теории, так и на приобретение практических навыков. Соответственно, большая часть вопросов, традиционно излагаемых в курсах МДТТ, здесь, разве что, упоминается, основы же изложены кратко, с указанием источников. Знание основных понятий и уравнений МДТТ необходимо для построения численных методов, поэтому изложение ведётся с достаточно общих позиций, и отбор материала определяется его дальнейшим применением в численном моделировании (построение конечных элементов и схем дискретизации уравнений среды и т.п.). Относительно большое внимание уделяется нелинейному деформированию как преобладающему в механике конструкций АЭС при тяжёлых авариях (ТА). Для понимания вводимых механических понятий и допущений привлекается физическая интерпретация явлений, лежащая вне рамок приближения

сплошной среды, в частности, при изложении теории пластичности. Изложение МКЭ в применении к задачам МДТТ во второй части тесно связано с материалом первой.

При изложении МКЭ одной из методических целей служило по возможности подробное рассмотрение элементарных шагов процедуры МКЭ-дискретизации, от определений сеточных примитивов и простейших числовых примеров до схемы метода взвешенных невязок, применимой к широкому классу задач. Общая процедура при первом ознакомлении с МКЭ не позволяет увидеть, почему и как весьма абстрактные посылки и действия приводят к высокоэффективному и "конкретному" алгоритму решения технических проблем. Для отделения частных деталей от общих установок МКЭ рассмотрено несколько схем реализации метода, следуя от частного к общему, и комментарии к ним. Включён пример реализации алгоритма расчёта упруго-пластических течений как введение в нелинейные задачи. Количество разобранных конечных элементов минимально, громоздкие детали, примеры техники МКЭ и применений метода, разве что, упоминаются, поскольку они в изобилии имеются в литературе.

Таким образом, данный курс лекций адресован тем, кто, не планируя профессионально заниматься механикой и численными методами, хотел бы понимать постановку задач и результаты численных исследований в нелинейной МДТТ. Либо, приступая к работе с компьютерной программой и не желая ограничиваться только изучением рецептов проведения расчётов, хотел бы скорее войти в предмет. Отчасти по этой причине для ряда вводимых терминов приводится также их англоязычное написание в том виде, в каком оно может встретиться в описаниях зарубежных программных комплексов и цитируемой литературе. Это же определило сообщаемый минимум сведений из МДТТ и МКЭ. В настоящее время существует обширная литература, в которой все упоминаемые вопросы разбираются подробно и во всевозможных аспектах. В списке литературы приведены источники, использованные при написании.

Общее содержание настоящего пособия ясно из оглавления. Оно ни в коей мере не может претендовать на учебник по механике твёрдого тела или МКЭ. Практически весь основной материал лекций содержится в цитируемых учебниках и монографиях. Рассматривается квазистатическая постановка задачи, с кратким экскурсом в динамику, поскольку большая часть введённых механических понятий и законов едина в статике и динамике. Примеры, иллюстрирующие вводимые понятия, интересные с практической точки зрения и отчасти используемые в изложении, рассмотрены в тексте, либо в упражнениях. В Приложение вынесено изложение некоторых основных понятий механики трещин, основополагающей феноменологии хрупкого и квазихрупкого разрушения. Там же приведены примеры численного расчёта НДС и параметров трещин растяжения, иллюстрирующие применение численных методов к физически содержательным задачам МДТТ.

В заключение стоит упомянуть, что изложенный в данном пособии материал по постановке и МКЭ-дискретизации линейных и нелинейных задач МДТТ и теплопроводности вместе с алгоритмами их численного решения успешно применяется на практике. В частности, он является основой построения развиваемых в ИБРАЭ РАН программ для ЭВМ HEFEST-M и HEFEST, предназначенных для расчётов термомеханики и теплофизики конструкций при моделировании аварий АЭС [1], [2]. За время работы программы продемонстрировали свою эффективность при решении задач моделирования аварийного состояния корпуса ВВЭР и аналогичных проблем, нелинейных физически и геометрически.

1. Напряжённое состояние и тензор напряжений

1.1. Твёрдое тело. Нагрузка и внутренние силы.

Механика рассматривает движение материальных тел под действием сил. Введём основные, используемые далее, понятия механики деформируемого твёрдого тела. Они основаны на понятиях силы, равновесия сил и др., используемых в механике точки и недеформируемого (абсолютно жёсткого) тела. Обсуждение применимости этих идеализированных понятий в механике деформируемой сплошной среды см., например, в [3]. Ближайшие цели изложения: пояснить происхождение силовых характеристик состояния нагруженного тела, используемых в МСС, отметить их особенности и происхождение вводимых определений. Это важно для ясного понимания физического смысла результатов по МДТТ, получаемых аналитически и численно.

Сила – это то, что, в соответствии со вторым z -ну Ньютона, вызывает ускорение и перемещение материального тела, обладающего массой (инерцией). Приложенная к данному телу сила – *нагрузка*, может быть локальной – *сосредоточенной*, либо *распределённой* в пространстве. Распределённая нагрузка может быть *поверхностной* – распределённой в точках некоторой поверхности, обычно это внешняя граница контактного взаимодействия материальных тел, и *объёмной* – приложенной в каждой точке некоторой подобласти или ко всему материальному телу. Например, на Земле существенна объёмная сила земного тяготения, в неинерциальных системах отсчёта эффективные силы инерции действуют как сила тяготения. Особый вид нагружения – *момент силы*, вызывающий вращение тела конечных размеров. Приложенный момент может быть сведён к паре одинаковых сил противоположного направления, приложенных к разным точкам тела перпендикулярно соединяющей их линии.

Мы говорим, что тело *твёрдое*, если его форма и размеры сохраняются или достаточно слабо изменяются при неизменной нагрузке в течение некоторого характерного времени. Основное отличие твёрдого тела от жидкости связано с тем, что в состоянии покоя под действием нагрузки в нём существуют ненулевые внутренние касательные силы (см. ниже), препятствующие заметному формоизменению. В обычной жидкости эти силы в состоянии покоя практически нулевые. Именно из-за наличия этих сил твёрдое тело не может в поле земного тяготения "принять форму сосуда, в котором оно заключено", или растечься по поверхности опирания. Модель твёрдого тела – одна из идеализаций представления о сплошной среде, в котором можно рассматривать бесконечно малые объёмы, не заботясь о внутреннем строении вещества. Если деформация и распределение возникающих под действием нагрузки внутренних сил для нас несущественны, будем говорить об *абсолютно твёрдом теле*, в противном случае рассматривается *деформируемое твёрдое тело*.

Описание кинематики абсолютно твёрдого тела, вследствие неизменности расстояний между точками, просто. Поступательное движение всех его материальных точек одинаково, вращение сводится к общему повороту на одинаковый угол. Деформируемое твёрдое тело отличается в двух существенных аспектах, тесно связанных между собой: а) твердотельное движение в общем случае приблизительно однородно только в малой окрестности данной точки пространства; б) деформация – это новая степень свободы, связанная с изменением расстояния между точками. Соответственно, рассуждения в МДТТ относятся к "данному малому объёму" – "материальной точке". Вследствие пространственной неоднородности движения материального тела закон его движения (или равновесия под действием сил) в общем случае имеет вид системы дифференциальных уравнений в частных производных. Кинематика неоднородного деформирования твёрдого

тела "в целом" фактически является одним из разделов дифференциальной геометрии. Связь между динамикой (силами) и кинематикой (деформирование) сплошной среды даётся внешним эмпирическим законом – определяющим соотношением. Это – схема построения всей механики сплошной среды (МСС), не исключая механику жидкости и газа (см., например, [4], [5]).

Понятия, вводимые в МСС, вполне прозрачны с точки зрения теории атомного строения материальных тел. Атомы твёрдого тела связаны силовым взаимодействием, и приложение силы в любой точке тела передаётся остальным его атомам – возникает пространственно распределённое *напряжённое состояние* (НС). Если нас интересуют как напряжённое, так и деформированное состояние тела, мы будем говорить о *напряжённо-деформированном состоянии* (НДС). Представления об атомном строении далее иногда будут использоваться, но только для иллюстрации физического смысла вводимых понятий. Рассматриваемые "материальные точки", "частицы", "малые объёмы" практически во всех технических приложениях МДТТ имеют размеры более нескольких микрон, т.е. всегда содержат многие миллиарды атомов.

Приложение силы вызывает *де-*формацию, т.е. изменение формы и размеров твёрдого тела. Деформация вызывает реакцию – в теле возникают *внутренние силы*. Эти силы связаны с отклонением относительного расположения атомов тела от равновесного, т.е. эти силы – следствие деформации. В твёрдом теле всегда существует силовое взаимодействие его составляющих, благодаря которому, собственно, тело и является "твёрдым", конденсированным, в отличие от газа. Но это взаимодействие взаимоуравновешено и явно не проявляется в ненагруженном состоянии. Поэтому оно не рассматривается в феноменологическом механическом описании. С точки зрения сил межатомного взаимодействия внутренние силы в сплошной среде можно характеризовать как "*эффективные*" силы, проявляющиеся только при деформировании, отклонении от равновесия, как отклик системы на приложенное внешнее механическое воздействие.

Степень жёсткости деформируемого тела (сопротивления нагрузке, определяемого внутренними силами) связана с величиной деформации, вызываемой данной нагрузкой. Мы будем рассматривать малые деформации, при которых эта связь линейна. Если возникающие при нагружении деформации велики, рассчитывать НДС гораздо труднее из-за нелинейности отклика на внешнюю силу. Предположение о малости деформации существенно облегчает работу и соответствует практике для ряда типовых постановок задачи. Наконец, в большей части курса рассмотрены *статические* условия, когда внешняя нагрузка уравновешена внутренними силами, и во всех точках тела ускорение отсутствует. Задачи *динамики*, в которых ускорение, испытываемое телом, существенно, рассмотрены в конце, поскольку основные понятия динамики взяты из статики.

1.1.1. Механическое равновесие абсолютно твёрдого тела

Механика деформируемого тела строится по аналогии с механикой абсолютно жёсткого тела ("принцип отвердевания": равновесие системы не нарушается от наложения на него дополнительных связей, см. [3]). В частности, состояние покоя при равновесии сил, приложенных к деформируемому телу, отвечает однородной скорости всех точек тела, $\mathbf{u}(x)=\mathbf{const}$, которая для наших целей может быть положена нулевой. При однородном ускорении или вращении соответствующую динамическую задачу можно рассмотреть методами статики, переходя в неинерциальную систему отсчёта тела и вводя силы инерции, пропорциональные местному ускорению. Имея в виду эти возможности, в дальнейшем состояние покоя будет пониматься как условие нулевой скорости и ускорения *всех* точек тела *в выбранной системе отсчёта*, которая задана или понятна из контекста. Условием этого состояния будет условие *равновесия в каждой точке* сил, приложенных к любому малому объёму. Это условие аналогично принимаемому в механике абсолютно жёсткого тела.

Для формулировки условия равновесия напомним определение момента силы. Пусть в некоторой точке Р приложена сосредоточенная сила F . По определению, момент в точке Р *относительно точки* О есть векторное произведение плеча силы – радиуса–вектора из точки О в точку Р, на вектор силы :

$$M = r_A \times F . \quad (1.1)$$

Момент в точке Р *относительно оси*, характеризуемой направлением n , определяется как проекция на ось n вектора момента относительно любой точки этой оси:

$$M_n = (M, n) n = ((r_P \times F), n) n .$$

Нетрудно убедиться, что так определённый вектор M_n не зависит от выбора точки на оси.

Условия равновесия абсолютно жёсткого тела, находящегося под действием системы внешних сил $\{F_i\}$, это в геометрической статике – равенство нулю *главного вектора* этой системы сил и *главного момента* системы сил относительно некоторой точки О. Эти условия – частные случаи законов сохранения импульса и момента импульса:

$$F_0 = \sum_i F_i = 0 , \quad (1.2)$$

$$M_0 = \sum_i M_i = 0 . \quad (1.3)$$

В состоянии равновесия главный момент будет нулевым относительно любой точки О, что даёт возможность выбирать эту точку наиболее удобным образом. Выполнение условия (1.3) для моментов относительно точки влечёт выполнение этого условия для моментов относительно любой оси.

Если условия (1.2)–(1.3) выполняются для деформируемого твёрдого тела в любой его точке для внутренних сил и внешних сил, то по определению каждый малый объём тела находится в равновесии (в состоянии покоя).

1.1.2. Внутренние силы и напряжения

В состоянии покоя межатомные силы взаимоуравновешены, и они нас не интересуют. Внешняя нагрузка вызывает отклонение от равновесия, что сказывается и на распределении межатомных сил. Именно эти отклонения и представляют интерес, они и являются внутренними силами – реакцией на приложенные внешние. Но это определение пока не позволяет вычислить эти силы. Поскольку при изучении напряжённо–деформированного состояния мы отказываемся от рассмотрения атомного строения деформируемых тел, внутренние силы моделируются путем некоторых разумных и проверенных допущений. Систематическое изучение напряжённого состояния в любой внутренней точке тела методами механики сплошной среды возможно благодаря следующему принципу напряжений Эйлера–Коши (см., например, [6]):

Принцип напряжений (0). В каждом поперечном сечении, мысленно проведённом внутри тела, имеет место взаимодействие сил такого же характера, как и на внешней поверхности при приложенной поверхностной нагрузке.

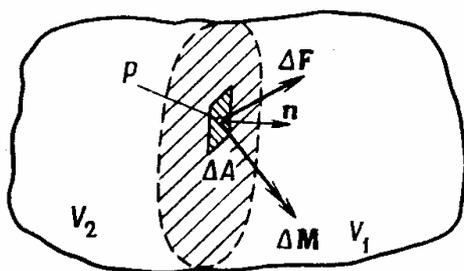


Рис.1.1. К определению внутренних сил

Указанное предположение позволяет изучать внутренние силы, недоступные прямому наблюдению, как определённого рода внешние силы на границе. В случае однородности и изотропности это означает полное подобие описания внутренних сил в любом сечении.

Локальное равновесие сил в каждом малом сечении удобно отнести к ед. площади сечения. Введём понятие *напряжения*, которое, как и момент, связано с *парой внутренних сил*. Это понятие напрямую связано с отмеченной выше характеристикой внутренних сил как эффективных, связанных только с приложением внешнего взаимодействия (возможно, протекающего от внутренней неоднородности – остаточные напряжения после пластического деформирования). Эти силы равны по величине, противоположны по направлению но действуют в одной точке или, точнее, на границах одного малого сечения – это силы воздействия друг на друга "половинок" (рис.1.1) физического тела, мысленно разделённого в данном месте сечением. Плоское сечение характеризуется направлением n нормали к его плоскости. По отношению к левой части сечения рис.1.1 действие правой части может считаться внешним и наоборот. В соответствии с принципом напряжений действие внутренних сил на внутренних границах вполне аналогично действию внешней силы, приложенной к внешней.

Для данного сечения с направлением нормали n (точнее, это два противоположных направления, одно из которых условно "левое", второе – "правое"; рассматривается также внешняя и внутренняя нормали к внешней границе тела) вектор напряжения вводится аналогично нормальному давлению (внешняя сила), т.е. как приложенная в сечении сила, действующая на одну из половин сечения, отнесённая к ед. площади:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} . \quad (1.4)$$

По 3–му закону Ньютона действия левой и правой половин тела друг на друга равны и противоположны, следовательно –

$$\sigma^{-n} = -\sigma^n . \quad (1.5)$$

Знак нормального напряжения как силы на ед. площади в данном сечении будет зависеть от того, на какой из двух противоположно ориентированных площадок сечения мы его вычисляем, и от выбора положительного направления. В дальнейшем, говоря о векторе напряжений, будем считать, что это направление определено, ниже будет дано соответствующее правило. Повторим, что числовое определение напряжения, введённое как сила на единицу площади, не сводится только к силе – напряжение связано с парой внутренних сил, приложенных в одном месте (к малой площадке). Эти силы являются поверхностными в определённом выше смысле, они наличествуют и в состоянии равновесия, когда ускорение равно нулю.

Принцип напряжений (1), исходя из сказанного, можно сформулировать в форме: *напряжённое состояние в каждой точке деформируемого тела определяется внутренними силами, сведёнными к напряжениям в каждой точке*. Наша ближайшая цель – дать определение этих сил в любой точке.

Нормальные и касательные составляющие. Сила, приложенная к данной площадке, и отвечающее ей напряжение раскладываются на *нормальную и касательную составляющие* (рис.1.2). Это разделение связано не только с удобством выбора координатной системы, но и несёт в себе глубокий механический смысл: нормальные и касательные силы задают разные типы деформаций, приводящие к различному поведению материалов под нагрузкой. Задание компонент напряжений показано на рис.1.2. Верхний индекс указывает направление нормали площадки в текущей с.к., нижний – направление компоненты силы в этой же с.к.

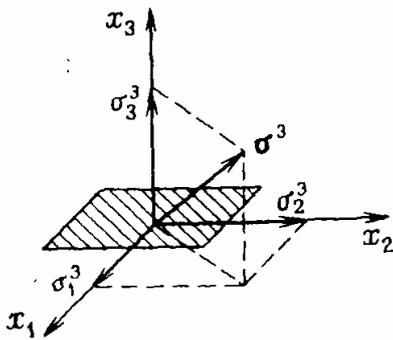
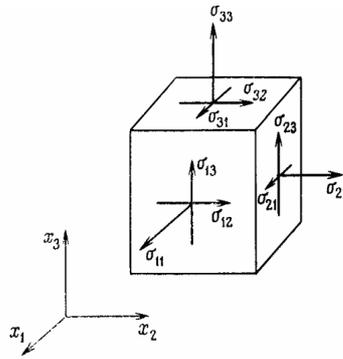


Рис.1.2. Нормальная касательная составляющие



и Рис. 1.3. Компоненты тензора напряжения в декартовой с.к.

Известный простой пример напряжения даёт давление в газе или жидкости. Оно может быть описано как скаляр, поскольку при нулевой массовой скорости в данном сечении в газе отсутствуют касательные силы, есть только нормальная, не зависящая от направления выбранной площадки. Для описания напряжённого состояния в твёрдом теле недостаточно скаляра и недостаточно даже вектора. Почему? Возникающие касательные и нормальные компоненты напряжения в твёрдом теле, характеризуемые внутренней силой, приложенной в данной точке на данной малой площадке, зависят от ориентации этой площадки или сечения, которое с ней связано. Взяв другое по направлению сечение, получим другие компоненты вычисляемого напряжения. Если, например, механический отклик материала зависит от направления приложенной нагрузки, то отношение величин касательных и нормальных компонент, зависящее от направления площадки, может быть существенно для состояния под нагрузкой.

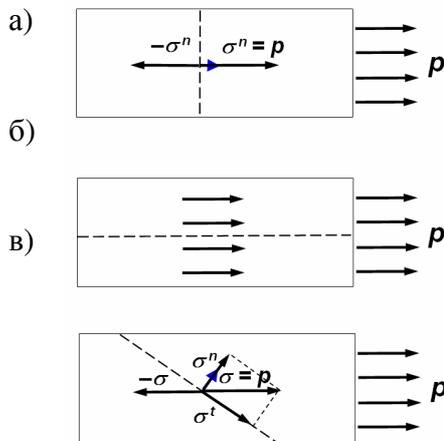


Рис. 1.4. Зависимость вектора напряжений от выбора площадки

Рассмотрим пример: однородное нагружение стержня сечением A силой P , приложенной вдоль его оси Ox (рис.1.4). Выберем три площадки в толще стержня, расположенные перпендикулярно, параллельно и наклонно оси стержня. В каждом из соответствующих сечений внутренние силы, приложенные к их противоположным краям, уравнивают друг друга, создавая напряжённое состояние. Интуитивно ясно и будет показано ниже, что на площадке, перпендикулярной оси, напряжение можно оценить как $\sigma = \sigma_x = -p = P/A$, оно направлено перпендикулярно к площадке (рис.1.4а), остальные компоненты напряжения – нулевые: $\sigma_y = \sigma_z = 0$. На параллельной площадке $\sigma_x = 0$ (рис.1.4б). На наклонной площадке все компоненты напряжений могут быть ненулевыми. Предположим, что стержень сделан из дерева. В зависимости от

способа вырезания стержня – вдоль волокон, поперёк, наклонно, прочность стержня (способность противостоять данной нагрузке) будет меняться на порядки. Таким образом, распределение нормальных/касательных компонент напряжений на всевозможных площадках разное и, в частности, имеет максимум, что важно для формулировки критериев прочности при разных нагрузках.

Таким образом, для дальнейшего продвижения необходимо получить связь между вектором направления площадки и вектором напряжения на ней. Она следует из формулы Коши, рассматриваемой ниже.

1.2. Формула Коши. Тензор напряжений.

Возьмём некоторую точку P тела, находящегося в равновесии под внешней нагрузкой, в ней зададим декартову систему координат. Рассмотрим в малой окрестности точки P площадку A общего положения с нормалью \mathbf{n} , пересекающую координатные плоскости октанта местной декартовой системы. Расположение осей системы координат произвольно, при соблюдении условия приближительной пространственной однородности напряжённого состояния в этой окрестности. Малость окрестности требуется для однородности НС, в пределах заданной погрешности, в окрестности точки P . Для дифференцируемой функции, что всегда предполагается, если не оговорено противное, такая окрестность всегда существует. Площадка A вместе с тремя гранями A_k на k -х координатных плоскостях, $k=1,2,3$, образует малый тетраэдр (рис.1.5).

Условие общего механического равновесия тела подразумевает, что любая его подобласть находится в состоянии механического равновесия, т.е. главная сила в любой точке (малом объёме) и главный момент относительно точки – нулевые. Для того чтобы воспользоваться приведёнными выше условиями равновесия твёрдого тела, рассмотрим условия равновесия в компонентах сил для введённого тетраэдра, рассматриваемого как абсолютно жёсткое тело (принцип отвердевания). Нас интересуют внутренние силы: к тетраэдру на его гранях приложены силы воздействия остальной части тела. Действие внешних объёмных сил учтено далее в общем уравнении равновесия. С точки зрения всего тела силы, отвечающие напряжениям во всех его сечениях – внутренние, с точки зрения тетраэдра приложенные к его граням силы будут внешними.

Под действием внешней нагрузки в сечении A возникает напряжение $\boldsymbol{\sigma}$, создаваемое парой взаимоположенных сил на ед. площади, $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}^{out} = -\mathbf{F}^{in} \equiv \boldsymbol{\sigma}A$. Аналогично, пары таких сил, сводимые к напряжениям, существуют и на каждой из остальных граней A_k тетраэдра. Суммарная сила, действующая на тетраэдр со стороны его окружения, в состоянии равновесия нулевая:

$$0 = \mathbf{F}^{out} + \mathbf{F}_1^{out} + \mathbf{F}_2^{out} + \mathbf{F}_3^{out} = \mathbf{F}^{out} - \mathbf{F}_1^{in} - \mathbf{F}_2^{in} - \mathbf{F}_3^{in} . \quad (1.6)$$

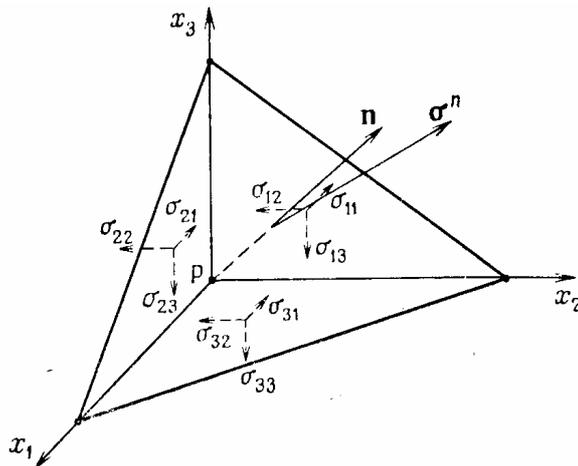


Рис.1.5. К формуле Коши

Обозначим направление площадки A направлением \mathbf{n} единичного вектора нормали к ней. В k -ой координатной плоскости, задаваемой координатным направлением k , сила \mathbf{F}_k^{in} , приложенная к соответствующей грани, может быть разложена на три силы, действующие вдоль осей координат, задаваемых каждая своим направлением i : $\mathbf{F}_k = \{\sigma_{k1}A_k, \sigma_{k2}A_k, \sigma_{k3}A_k\} \equiv \{A_{(k)}\boldsymbol{\sigma}_{(k)i}\}$, $i=1,2,3$. Эти силы связаны с общим напряжённым состоянием в точке P , и они в общем случае не

перпендикулярны координатным плоскостям

Условие равновесия (1.6) четырёх сил, приложенных к четырём площадкам тетраэдра, в проекции на i -е координатное направление имеет вид:

$$\begin{aligned} F_i^{out} = \sigma_i A &= F_{1i}^{in} + F_{2i}^{in} + F_{3i}^{in} = \sigma_{1i}A_1 + \sigma_{2i}A_2 + \sigma_{3i}A_3 = \\ &= \sigma_{1i}A \cos\varphi_1 + \sigma_{2i}A \cos\varphi_2 + \sigma_{3i}A \cos\varphi_3 , \text{ или } - \end{aligned}$$

$$\sigma_i = \sigma_{1i} \cos\varphi_1 + \sigma_{2i} \cos\varphi_2 + \sigma_{3i} \cos\varphi_3 \equiv \sigma_{1i} n_1 + \sigma_{2i} n_2 + \sigma_{3i} n_3 , \quad n_i = \cos\varphi_i .$$

В индексных обозначениях соотношение между компонентами напряжений на гранях –

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^3 n_i \sigma_{ik} . \quad (1.7)$$

Здесь введены косинусы углов, задающие проекции площадки A на координатные плоскости: $A_k = A \cos \varphi_k$. Как нетрудно показать, эти косинусы равны направляющим косинусам внешней нормали $\{n_i\}$ площадки A (для i -го косинуса надо рассмотреть сечение плоскостью, построенной на векторах \mathbf{n} и Ox_i). Знак в правой части выбран в соответствии с физическим смыслом: действие внешних (относительно тетраэдра) сил на площадке A уравновешено противодействием его внутренних сил на координатной площадке. Будем связывать этот знак с направлением внешней нормали к границе – с точки зрения объёма тетраэдра и объёма его окружения их *внешние* нормали к общей границе противоположны. В формуле Коши (1.7), следовательно, $\{n_i\}$ – внешняя нормаль с точки зрения выделенного объёма тетраэдра.

Соотношение (1.7.) определяет новый объект. Чтобы увидеть это, заметим, что n_i служат компонентами *вектора*, т.е. тензора 1-го ранга, равно как и компоненты $\{\sigma_i\}$ – напряжения на площадке – по (1.4) это тоже вектор, отвечающий приложенной к площадке A силе, поскольку при изменении расположения системы координат он преобразуется как вектор. Следовательно, согласно обратному тензорному признаку (см., например, [7]) наборы компонент напряжений σ_{ki} на трёх остальных гранях вместе образуют новый объект тензорной природы. В интерпретации рис. 1.5 первый индекс тензора указывает координатную площадку, одну из трёх проекций площадки A в текущей с.к., второй – направление компоненты силы на этой координатной площадке, одной из трёх, уравновешивающей силу на площадке A (см. также рис. 1.3).

Таким образом, соотношение (1.7), по причине независимости от выбора системы координат и произвольности направления площадки A , т.е. вектора \mathbf{n} , показывает, что:

- во-1, по обратному тензорному признаку, $\{\sigma_{ki}\}$ – тензор 2-го ранга;
- во-2, мы имеем соотношение для вычисления компонент вектора внутренней силы, приложенной при данном напряжённом состоянии к любой данной малой площадке, т.е. этого тензора достаточно для определения напряжения в любой точке.

Напряжённое состояние в целом, безотносительно выбора сечений, можно охарактеризовать как пространственное распределение полилинейного объекта второго порядка – тензора напряжений, который включает в себя зависимость внутренних сил от направления сечения, на котором они рассматриваются. Простейшие понятия из теории тензоров предполагаются известными (см. [7]). Тензор определён его компонентами в некоторой системе координат и законом преобразования координат.

Принцип напряжений (2) теперь приобретает конструктивную форму: *напряжённое состояние в каждой точке задано полем тензора напряжений*. Заметим, что знак нормальной компоненты *вектора* напряжений *зависит* от выбора направления нормали к площадке, а знак соответствующей компоненты *тензора* напряжений – *не зависит* (см. (1.4) и (1.7)). Задача определения равновесного напряжённого состояния деформируемого твёрдого тела сводится к нахождению поля тензора напряжений $\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3)$, возникающего при приложении нагрузки. Для него будет получено соответствующее *уравнение равновесия*, без которого тензор напряжений – это "вещь в себе". Отметим, что его не следует отождествлять с вектором напряжений, хотя их отдельные компоненты могут численно совпадать по абсолютной величине.

Пример. Пусть НС в теле, имеющем форму куба, возникло в результате сжатия однородной нагрузкой в направлении Ox_1 . Из соображений симметрии поле вектора

напряжений однородно в плоскостях, параллельных координатным плоскостям, тензор напряжения – диагонален и имеет одну компоненту, σ_{11} .

1.3. Условия равновесия твёрдого деформируемого тела.

1.3.1. Уравнение равновесия

Зная связь между направлением сечения и напряжением на нём, можно записать уравнение равновесия для любого малого объёма, используя условие локального механического равновесия. Напомним, что условия равновесия записываются как условие нулевых главной силы (1.2) и главного момента (1.3), приложенных к рассматриваемому объёму. Распространение условий механического равновесия, полученных для абсолютно жёсткого тела, на случай деформируемого тела осуществляется на основе предположения о том, что пространственные распределения внутренних сил и компонент тензора напряжений обладают достаточной гладкостью. Случаи трещин, сосредоточенных сил и аналогичных неоднородностей рассматриваются как особые.

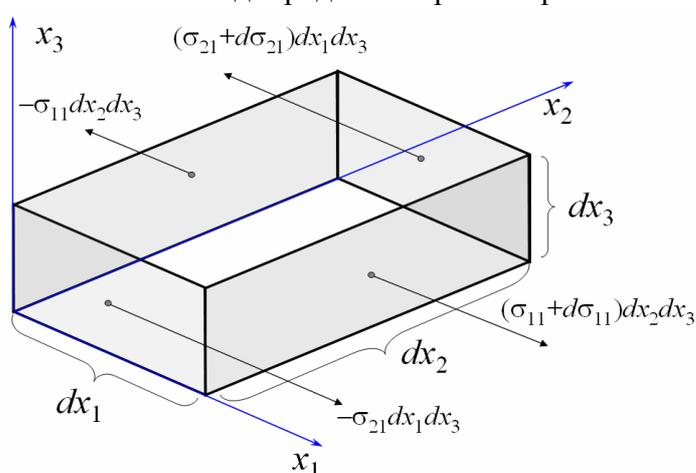


Рис.1.6. К уравнению равновесия: пары сил на двух парах граней

Далее мы будем работать в декартовой системе координат, и уравнения равновесия в точке могут быть получены путём рассмотрения сил, действующих на грани малого параллелепипеда, параллельные координатным плоскостям, с последующим переходом к пределу.

Сначала используем условие для главной силы. Пусть параллелепипед занимает область пространства в интервалах $\{x_1, x_2, x_3, x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3\}$. По отношению к нему силы, с которыми действует на его грани

остальная часть тела – внешние, и по 3–му з–ну Ньютона они уравновешены на каждой грани силами реакции со стороны рассматриваемого малого объёма (рис. 1.6).

Рассмотрим компоненты сил вдоль направления "1". Как и ранее, рассмотрим граничные площадки параллелепипеда, характеризуемые компонентами вектора $\mathbf{n}^{(i)}$ внешней нормали к ним. Нормальное напряжение на грани с меньшей координатой x_1 , имеющей внешнюю нормаль $\mathbf{n}^{(1)}$, направленную наружу из параллелепипеда, выражается по формуле Коши как $(-1) \cdot \sigma_{11}$, т.е. внешняя сила равна $-\sigma_{11} dx_2 dx_3$. Тензор напряжений, немного меняясь в направлении противоположной грани, имеющей противоположный вектор нормали $-\mathbf{n}^{(1)}$, равен на ней $\sigma_{11} + (\partial \sigma_{11} / \partial x_1) dx_1$, с точностью до малых второго порядка. На этой грани параллелепипеда, находящейся на расстоянии dx_1 , внешняя сила, согласно формуле Коши, имеет другой знак и равна $(\sigma_{11} + (\partial \sigma_{11} / \partial x_1) dx_1) dx_2 dx_3$. Суммарная компонента внешней силы в направлении 1, действующей на эти грани: $(-\sigma_{11} + \sigma_{11} + (\partial \sigma_{11} / \partial x_1) dx_1) dx_2 dx_3$. Аналогичные выражения справедливы для граней направлений $\mathbf{n}^{(2)}$ и $\mathbf{n}^{(3)}$, где напряжения в направлении "1" – касательные к этим граням. Вектор $\mathbf{n}^{(2)}$ имеет одну ненулевую компоненту $n_1^{(2)} = 1$, соответственно, при вычислении напряжения останется только компонента σ_{21} . Аналогично – для направления $\mathbf{n}^{(3)}$. Если имеется объёмная сила, приложенная в объёме, имеющая плотность \mathbf{f} , то уравнение равновесия компонент сил направления 1 имеет вид:

$$(-\sigma_{11} + \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1) dx_2 dx_3 + (-\sigma_{21} + \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2) dx_1 dx_3 + (-\sigma_{31} + \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3) dx_1 dx_2 + f_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0 .$$

Приводя подобные члены и деля на величину элементарного объёма это уравнение можно привести к виду

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = 0 .$$

Аналогичное выражение получается для направлений 2 и 3. Уравнение равновесия для всех трёх направлений будет иметь вид (суммирование по k):

$$\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_k} + f_j = 0 . \quad (1.8)$$

1.3.2. Граничные условия по напряжениям

Получим граничные условия для уравнения (1.8). Они определены нагрузкой – поверхностными силами: на внешней границе тела приложенная нагрузка, задаваемая вектором \mathbf{p} силы на единицу площади границы, уравновешена внутренними силами, описываемыми тензором напряжений. Граничное условие для тензора напряжений определено в исходной предпосылке принципа напряжений. Выпишем его явно. Рассмотрим напряжение на малой площадке \mathbf{n}' внутри тела и устремим её к внешней границе: $\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}$, где \mathbf{n} обозначает направление внешней нормали площадки на внешней границе тела и саму площадку (рис. 1.7).

В соответствии с принципом напряжений должен выполняться непрерывный переход от напряжённого состояния на площадке \mathbf{n}' к состоянию на внешней граничной площадке \mathbf{n} с нагрузкой \mathbf{p} . Векторы напряжений $\boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{n}}$ и $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}}$, задаваемые парами сил на единицу площади, действующих по направлению внутрь внешней границы и вовне, равны по величине и противоположны, в соответствии с определениями (1.5). В сечении \mathbf{n}' : $-\boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{n}'} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}'}$. На внешнем направлении одна из пары сил отвечает внешнему воздействию, имеем: $-\boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}} = \mathbf{p}$. Выражая компоненты векторов напряжений $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}'}$ и $\boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{n}'}$ по формуле Коши (1.7), получим при переходе к пределу $\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}$ граничное условие для компонент тензора напряжений, входящих в уравнение равновесия:

$$-\sigma_{ik}(-n_i) = \sigma_{ik}n_i = p_k . \quad (1.9)$$

В общем случае граничное условие (1.9) записано для трёх компонент вектора внешней нагрузки, каждое уравнение содержит в левой части сумму с тремя компонентами тензора напряжений.

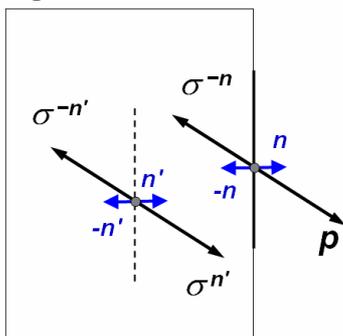


Рис.1.7. К заданию

граничных условий **Пример: знаки компонент нормальных напряжений.** Пусть в некоторой точке внешней границы направление внешней нормали, характеризуемой вектором \mathbf{n} , совпадает с координатным направлением "1", т.е. $\mathbf{n}^+ = \{1, 0, 0\}$. Соответственно, внутренняя нормаль: $\mathbf{n}^- = \{-1, 0, 0\}$. Пусть на границе задана внешняя нагрузка от гидростатического давления. Гидростатическое давление описывается скаляром p . Сила давления направлена вдоль нормали к границе. В данном примере $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, p_3\} = \{-n_1 p, 0, 0\}$, где компонента внешней нормали в направлении "1" $n_1 = 1$. Соотношение (1.9) для нормальных компонент граничных сил примет вид: $\sigma_{11} n_1 = -n_1 p$, т.е. $\sigma_{11} = -p$.

Когда внешнее давление положительно, тело сжимается, знак соответствующей нормальной компоненты σ_{11} тензора напряжений будет отрицательным. При растяжении отрицательным давлением знак нормальной компоненты напряжения положителен. Этот знак отвечает знаку объёмной деформации: при сжатии деформация отрицательна.

Заметим, что в двух касательных направлениях на данной площадке в общем случае нет выделенного, касательные силы не изменяют объёма, и знак касательных компонент не имеет интерпретации. В литературе встречаются определения знака компоненты касательного напряжения относительно нормалей к сечению и плоскости рисунка.

1.3.3. Уравнение равновесия моментов. Симметрия тензора напряжений

Рассмотрим, что нам может дать условие равновесия для моментов (1.3): главный момент относительно любой оси равен нулю. Рассмотрим момент относительно оси Ox_3 . Поместим начало координат в середине малого координатного параллелепипеда, рассмотренного выше при выводе уравнения равновесия (рис.1.8). Он имеет три пары граней: "передняя–задняя", "правая–левая", "верхняя–нижняя", различающихся направлением вектора единичной нормали $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$, компоненты которого соответственно равны 1 или -1 . Моменты сил, нормальных к граням – нулевые, и существенны только касательные компоненты сил. При этом вклады в полный момент составляющих сил, приложенных, например, к граням с направлением Ox_3 (верхняя–нижняя), вследствие малого изменения напряжений в малом объёме, имеют второй порядок малости, и ими можно пренебречь. Остаются моменты сил, приложенных к парам граней параллелепипеда направлений 1 и 2 в плоскостях, параллельных Ox_3 . Внешние силы, приложенные к граням направлений 1 и 2, выражаются по формуле (1.9), причём нас пока интересуют только компоненты сил в плоскости Ox_1x_2 :

$$n_1 \sigma_{12} = \pm \sigma_{12} \text{ (на гранях 1)} \text{ и } n_2 \sigma_{21} = \pm \sigma_{21} \text{ (на гранях 2)}. \quad (1.10)$$

На противоположных гранях векторы внешней нормали будут противоположны и соответственные компоненты внешних сил противоположны.

По определению вектор момента, создаваемого силой \mathbf{F} с плечом силы $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$, имеет компоненты:

$$M_1 = x_2 F_3 - x_3 F_2, \quad M_2 = x_3 F_1 - x_1 F_3, \quad M_3 = x_1 F_2 - x_2 F_1. \quad (1.11)$$

Для касательной силы, например, направления "1", приложенной к грани "2" положительного направления, имеем $F_1 = \sigma_{21} dx_1 dx_3$. В этом рассуждении величины dx_i полагаются положительными.

На правой грани направления +2 с площадью $dx_1 dx_3$ (положительное направление) –

$$dM_3^{(+2)} = 0,5 dx_1 F_2 - 0,5 dx_2 F_1 = -0,5 dx_2 \sigma_{21} dx_1 dx_3, \quad (1.12)$$

на передней грани направления +1 –

$$dM_3^{(+1)} = 0,5 dx_1 F_2 - 0,5 dx_2 F_1 = 0,5 dx_1 \sigma_{12} dx_2 dx_3. \quad (1.13)$$

Знак минус в (1.12) связан с тем, что только второе слагаемое в третьем выражении (1.11) ненулевое (компонента x_2 вектора \mathbf{r}), а знак плюс в (1.13) связан с тем, что отлично от нуля первое слагаемое (компонента x_1 вектора \mathbf{r}).

На противоположных гранях (левая и нижняя) меняют знаки оба плеча внешней силы, и сами силы, компоненты же напряжений σ_{ik} меняются на малую величину $-\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} dx_i$.

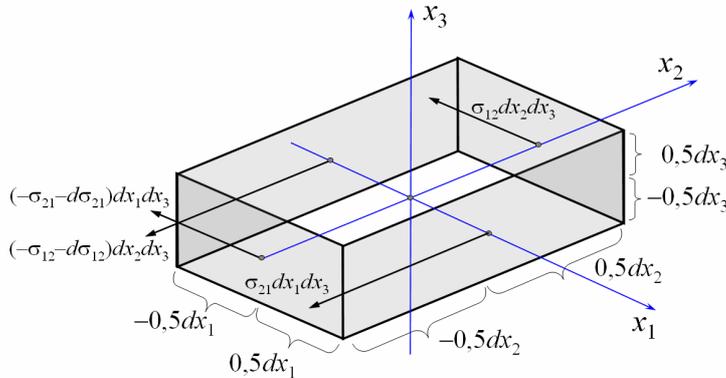


Рис.1.8. К условию равновесия для моментов

С учётом всего этого, подставив вместо компонент векторов напряжений соответствующие выражения с компонентами тензора напряжений, выпишем условие равновесия для компоненты момента M_3 как суммы четырёх слагаемых на 4 гранях: $M_3=0$, или –

$$0,5(-dx_2 \sigma_{21} + dx_2(-\sigma_{21} - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2)) dx_1 dx_3 + 0,5(dx_1 \sigma_{12} + -dx_1(-\sigma_{12} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1)) dx_2 dx_3 = 0.$$

Поделив на $0,5 dx_1 dx_2 dx_3$ и перенеся вправо слагаемые с σ_{21} , получим –

$$2\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 = 2\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2.$$

Устремим к нулю толщины dx_1 , dx_2 – получим условие симметрии компонент: $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Аналогичным образом можно выписать уравнения для остальных компонент, и мы получаем свойство *симметрии тензора напряжений*.

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \quad (1.14)$$

В технике это свойство формулируют как *закон парности касательных напряжений* – на двух малых взаимоперпендикулярных площадках с общей границей касательные напряжения равны по величине и имеют направления: либо в сторону общего ребра, либо противоположно. Для недиагональных компонент тензора напряжений используют также обозначение τ_{ik} . Отметим, что компонента (нулевая) главного момента M_3 , на рис. 1.8 складывается из равных и противоположных сумм моментов, приложенных к левой паре граней и правой паре.

Тензор 2-го ранга общего вида имеет в 3-мерном пространстве $3 \times 3 = 9$ независимых компонент, у симметричного тензора их 6. Уравнений для компонент тензора напряжений пока всего три. Учёт деформирования и связи между деформацией и напряжением позволит далее замкнуть задачу путём добавления соответствующих новых уравнений.

1.4. Инварианты тензора напряжений

Инварианты – это скаляры, вычисляемые по компонентам тензора и остающиеся неизменными при преобразовании координат. Из линейной алгебры известно, что тензор

2-го ранга в 3-мерном пространстве имеет 3 инварианта, которые служат коэффициентами инвариантного характеристического уравнения, рассмотренного ниже. Первый инвариант:

$$J_1(\sigma_{jk}) = \sigma_{kk} \equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} . \quad (1.15)$$

Пример. В газе/жидкости при любом статическом нагружении, в любой плоскости отсутствуют касательные напряжения, и тензор напряжений диагонален в любой системе. При этом $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -3p$, p – давление, нормальное напряжение, не зависящее от направления нормали. Этот закон Паскаля для статического давления в газе/жидкости следует из формулы Коши и существования первого инварианта.

Второй инвариант:

$$J_2(\sigma_{jk}) = \frac{1}{2}(\sigma_{jj} \sigma_{kk} - \sigma_{jk} \sigma_{kj}) = \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12} \sigma_{21} + \sigma_{11} \sigma_{33} - \sigma_{13} \sigma_{31} + \sigma_{22} \sigma_{33} - \sigma_{23} \sigma_{32} . \quad (1.16)$$

Для симметричного тензора напряжений –

$$J_2 = \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{11} \sigma_{33} + \sigma_{22} \sigma_{33} - (\sigma_{12})^2 - (\sigma_{31})^2 - (\sigma_{23})^2 . \quad (1.17)$$

Второй инвариант *девиатора* тензора напряжений применяется в теории пластичности.

Третий инвариант – определитель:

$$J_3(\sigma_{jk}) = \det \|\sigma_{ik}\| . \quad (1.18)$$

Третий инвариант тензора напряжений не имеет интерпретации в механике.

Отметим, что в механике второй инвариант часто определяется с другим знаком.

1.5. Главные оси и главные значения компонент тензора напряжений

Как известно, выбором системы координат всякий симметричный тензор 2-го ранга может быть приведён к главным осям, т.е. существует система координат, в которой тензор имеет диагональный вид. В линейной алгебре этот тензор может быть отождествлён с коэффициентами квадратичной формы или матрицей линейного преобразования, которые могут быть приведены к каноническому виду. Для тензора напряжений его диагональность имеет физический смысл: в данной точке можно выбрать такую декартову систему координат – *главные направления*, что на площадках, перпендикулярных к ним, действуют только нормальные напряжения – *главные напряжения*, касательных напряжений – нет. Главные напряжения суть собственные значения тензора напряжений, они удовлетворяют характеристическому уравнению, которое может быть получено из определения тензора по формуле Коши.

Пусть одно из неизвестных пока главных направлений задано единичным вектором \mathbf{n} . Нормальное напряжение (вектор) $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}}$ на ортогональной к этому вектору площадке по условию задачи ему коллинеарно \mathbf{n} : $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}} = \sigma \mathbf{n}$, где σ – модуль вектора. С другой стороны, вектор напряжений может быть выражен через тензор напряжений σ_{ki} и вектор \mathbf{n} по формуле Коши, и компоненты вектора напряжений $\sigma_i^{(n)}$ удовлетворяют трём равенствам:

$$\sigma n_i \equiv \sigma_i^{(n)} = n_k \sigma_{ki}, \quad \text{или:} \quad (\sigma_{ik} - \sigma \delta_{ik}) n_k = 0 . \quad (1.19)$$

Это система линейных однородных алгебраических уравнений относительно величин n_k . Условие наличия её ненулевого решения $\{n_k\}$, т.е. условие существования вектора главного направления – это равенство нулю определителя системы:

$$\det \|\sigma_{ik} - \sigma \delta_{ik}\| = 0 . \quad (1.20)$$

Это кубическое *характеристическое уравнение* относительно σ имеет три корня $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Левая часть уравнения (1.20) может быть разложена в произведение

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0 . \quad (1.21)$$

Из трёх корней кубического уравнения с вещественными коэффициентами хотя бы один – вещественный, откуда следует, что всегда имеется не менее одного главного направления. Обозначим его номером 1. У вещественного тензора все три корни характеристического уравнения (собственные значения) будут вещественны, что несложно показать непосредственным вычислением, переходя в систему координат с осью вдоль уже известного главного направления и рассматривая оставшиеся два главных направления. Определитель матрицы (1.20) размером 2×2 сведётся к квадратному с положительным детерминантом и потому – вещественными корнями:

$$(\sigma_{22} - \sigma)(\sigma_{33} - \sigma) - \sigma_{23}^2 = \sigma^2 - \sigma(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 = 0 .$$

Введённые выше с помощью определений (1.15)–(1.18) инварианты тензора напряжений в системе главных осей примут вид:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 , \quad (1.22)$$

$$J_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 , \quad (1.23)$$

$$J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 . \quad (1.24)$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что уравнение (1.21) может быть записано через общие выражения (1.15–1.18) для инвариантов тензора напряжений как:

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0 . \quad (1.25)$$

Коэффициенты уравнения инварианты, поскольку его корни, т.е. главные значения, независимы от системы координат.

Для данного напряжённого состояния в точке после нахождения корней характеристического уравнения можно найти главные направления как три решения трёх систем (1.19) с тремя собственными значениями, т.е. получить компоненты главных векторов. Они определены с точностью до множителя. Перечислим дальнейшие относящиеся к этому факты. Подразумевается, что векторы и тензоры рассматриваются в некоторой декартовой системе координат.

1.5.1. Свойства главных значений и главных направлений

Главные направления, отвечающие двум собственным значениям, ортогональны. Покажем это для случая некранных корней характеристического уравнения. Рассмотрим два собственных направления, характеризуемых единичными векторами \mathbf{n} , \mathbf{m} с компонентами $\{n_i\}$, $\{m_k\}$. Им отвечают собственные значения σ_n , σ_m . Имеем –

$$\sigma_{ik} n_k = \sigma_n n_i , \quad \sigma_{ki} m_i = \sigma_m m_k .$$

Для проверки ортогональности составим два скалярных произведения: умножим скалярно левое равенство на вектор \mathbf{m} , а правое – на \mathbf{n} . Имеем

$$\sigma_{ik} n_k m_i = \sigma_n n_i m_i , \quad \sigma_{ki} m_i n_k = \sigma_m m_k n_k .$$

В силу симметрии тензора, $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, левые части этих равенств совпадают, следовательно, равны и правые:

$$\sigma_n n_i m_i = \sigma_m m_k n_k .$$

В случае неодинаковых собственных значений $\sigma_n \neq \sigma_m$ отсюда следует, что скалярное произведение – нулевое, т.е. векторы $\{n_i\}$, $\{m_k\}$ ортогональны. Таким образом, в случае некранных корней уравнения (1.19) имеется 3 фиксированных попарно ортогональных главных направления.

Рассмотрим случаи кратных корней. Пусть $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$, т.е. два из трёх корней кратны. Одно из отвечающих им главных направлений $\mathbf{n}^{(1)}$ будет перпендикулярно главному направлению $\mathbf{n}^{(3)}$. Перейдём в систему координат с осями $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ и перпендикулярной им некоторой оси $\mathbf{n}^{(2)}$. На площадках $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(3)}$ касательные напряжения отсутствуют, их непосредственным представлением по формуле Коши показывается, что недиагональные компоненты тензора $\sigma_{21} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = \sigma_{32} = 0$. Следовательно, нормальное напряжение на площадке $\mathbf{n}^{(2)}$ равно: $\sigma_2 = \sigma_{22}$, и $\mathbf{n}^{(2)}$ – также главное направление.

Далее, рассмотрим линейную комбинацию векторов $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$:

$$\mathbf{n}' = a_1 \mathbf{n}^{(1)} + a_2 \mathbf{n}^{(2)} \quad \text{или} \quad n'_k = a_1 n_k^{(1)} + a_2 n_k^{(2)}, \quad a_1 a_2 \neq 0.$$

Очевидно, он также будет собственным вектором с собственным значением σ_2 – согласно определению (1.19):

$$\begin{aligned} \sigma_2 n'_k &= \sigma_2 (a_1 n_k^{(1)} + a_2 n_k^{(2)}) = a_1 \sigma_2 n_k^{(1)} + a_2 \sigma_2 n_k^{(2)} = \\ &= a_1 \sigma_{ki} n_i^{(1)} + a_2 \sigma_{ki} n_i^{(2)} = \sigma_{ki} (a_1 n_i^{(1)} + a_2 n_i^{(2)}) = \sigma_{ki} n'_i, \end{aligned}$$

т.е. при двух кратных собственных значениях возможные пары взаимоперпендикулярных главных направлений $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$ занимают всю плоскость, перпендикулярную третьему направлению (пример – осесимметричное НС – см. ниже). Аналогично, в случае 3–кратного корня возможные собственные направления занимают всё пространство, т.е. любая тройка ортов будет базисом собственных векторов.

Экстремальное свойство. Величина вектора напряжения, вычисляемого в данной точке тела на площадках всевозможной ориентации, принимает минимальное и максимальное значения вдоль направлений, находящихся среди главных.

Чтобы показать это, рассмотрим для данного НДС в данной точке всевозможные площадки \mathbf{n} и векторы напряжений $\{s_i\}$ на них. Перейдём в систему главных осей тензора напряжений в рассматриваемой точке. Тензор будет диагонален, и компоненты вектора напряжения s_i , вычисляемого на любой малой площадке, выражаются через только главные значения σ_i тензора напряжений:

$$s_i = \sigma_{ik} n_k = \sigma_{(i)} n_i,$$

откуда –

$$n_i = s_i / \sigma_{(i)}. \quad (1.26)$$

Индекс, заключённый в скобки, не участвует в суммировании. Величины n_i – это компоненты единичного вектора, следовательно, компоненты векторов напряжений на площадках всевозможных направлений удовлетворяют уравнению

$$1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{s_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{s_3^2}{\sigma_3^2}. \quad (1.27)$$

Это соотношение имеет вид уравнения эллипсоида, если ввести масштаб длины по осям координат в единицах измерения напряжения. В этой метрике геометрическое место концов всевозможных векторов напряжений, отложенных от начала координат, это поверхность *эллипсоида напряжений* (1.27), построенного для данного напряжённого состояния, в данной точке геометрического пространства. Он имеет полуоси σ_i .

Отсюда экстремальное свойство главных напряжений следует наглядно, поскольку длина радиус–вектора любой точки поверхности эллипсоида принимает экстремальные значения в направлениях его осей, т.е. главных осей напряжений. Это нетрудно увидеть, вписав координатные сечения эллипсоида – эллипсы, в соответствующие окружности или вписав в эти эллипсы окружности с центром в начале координат. Если корни характеристического уравнения совпадают, эллипсоид вырождается в эллипсоид

вращения, или в сферу. В линейной алгебре аналогичное построение называется просто "тензорный эллипсоид". Экстремальное свойство несложно также установить непосредственно, найдя условный экстремум нормального напряжения к площадке по направлениям нормали к ней (см., например, [6]).

Экстремальные свойства главных значений тензора напряжений используются при формулировке механических критериев прочности на растяжение–сжатие, т.е. там, где существенны нормальные напряжения. В частности, для хрупкого разрушения изотропного тела при растяжении простейший критерий прочности будет иметь вид:

$$\sigma_1 < \xi \sigma_{\max} ,$$

где σ_{\max} – известная из опыта критическая величина напряжения разрушения, σ_1 – максимальное главное напряжение (положительное при растяжении), а величина $\xi < 1$ или обратная величина – принимаемый запас прочности (в данном случае – на растяжение). Подобный критерий может применяться, например, при оценках прочности бетона.

Пример. Рассмотрим два однородных плоских напряжённых состояния (см. ниже гл.5):

- 1) сжатие по оси Oх нормальным давлением $\sigma_x^{(1)} > 0$, сжатие давлением $\sigma_y^{(1)} > 0$ по оси Oy.
- 2) сжатие по оси Oх нормальным давлением $\sigma_x^{(1)}$, растяжение, $\sigma_y^{(2)} = -\sigma_y^{(1)} < 0$, по Oy.

Экстремальные величины в обоих случаях находятся на эллипсоиде напряжений, в симметричных точках, но для оценки прочности на растяжение используется не эллипсоид, а непосредственно главные значения, которые при растяжении положительны.

Для того чтобы в расчётах задавать преобразование к главным осям, следует упорядочить эти оси и соответствующие главные значения. Их обозначают по их величинам (в алгебраическом смысле [18]):

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 .$$

Касательные напряжения также обладают экстремальным свойством: в каждой точке существует плоскость, в которой касательные напряжения принимают экстремальные значения. По аналогии с главными направлениями для нормальных напряжений эти плоскости называются *главными касательными плоскостями*. Каждая из них параллельна одной из главных осей и образует с другими главными осями угол 45°. Максимальная величина касательного напряжения $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Мы встретимся с этой величиной при обсуждении критериев пластичности (критерий Треска). Подробнее см. в [6], [10], [12].

1.5.2. Размерность задачи и характеристическое уравнение

Напряжённые состояния в механике могут быть охарактеризованы как "трёхосные", "двухосные", "одноосные" (см. также [8]). Под "осностью" напряжённого состояния понимают количество координатных осей, существенных для представления напряжённого состояния (НС) в данном теле. Подчеркнём, что в данном случае речь идёт о единообразном описании НС во *всей* рассматриваемой деформируемой области, не только в отдельных точках. Осность (термин не общепринятый и используется только здесь) отвечает фактической геометрической размерности задачи. Подобная классификация НС возможна в системе главных осей.

Нулевое собственное значение тензора напряжений означает отсутствие нормального напряжения в данном главном направлении – нулевой корень характеристического уравнения. Если это направление выбрано за координатную ось, то вычисляемые напряжения всегда будут находиться в плоскости, перпендикулярной этому направлению. Обратно, если в данной системе координат напряжения на площадках, параллельных этой оси, всегда находятся в перпендикулярной к ней плоскости, то эта ось – одно из главных направлений, возможно с нулевым собственным значением. Соответственно, в случае 1–осного НС возможны 2 нулевых корня, в случае 2–осного – 1 нулевой корень и при 3–осном напряжённом состоянии все корни ненулевые. В определённых случаях 3–осные

НС путём линейной суперпозиции могут быть представлены как наложение 1– и 2–осных (например, состояние *всестороннего сжатия* незакрепленного куба вдоль направлений его граней может быть представлено наложением трёх 1–осных сжатий по трём осям).

Если в задаче есть выделенное направление (причём оно одинаково выделено как по геометрии, так и по конфигурации нагрузки), то оно будет одной из главных осей. (например, ось симметрии системы или продольное направление сжатия стержня). По возможности, задача нахождения НС ставится в системе главных осей, если заранее известен общий вид напряжённого состояния и оси выделены.

Примеры. Размерность ("осность") НС в простых случаях.

Одноосное сжатие вдоль оси призматического тела при отсутствии нагружения и стеснения в поперечных направлениях: $p_1 = -\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид : $\sigma^2(\sigma_1 - \sigma) = 0$. Есть одна главная ось – ось сжатия, остальные – не определены, т.к. напряжения в перпендикулярных направлениях отсутствуют.

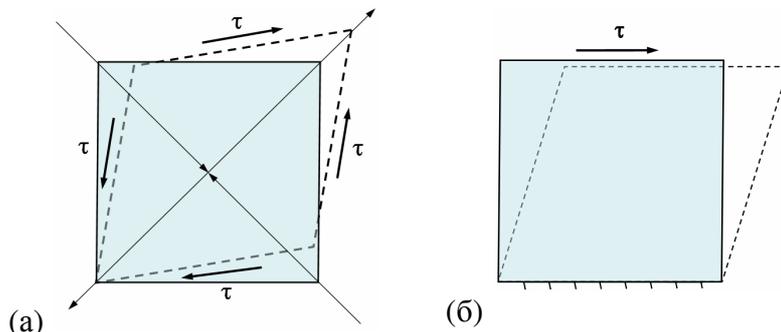


Рис.1.9. (а) Главные направления при чистом сдвиге.
(б) Сдвиг в одном направлении

Двухосное (плоское) НС. Рассмотрим чистый сдвиг в квадратной пластине (рис. 1.9а, плоскость Ox_1x_2), получаемый приложением в её плоскости одинаковых по величине касательных напряжений к смежным границам (парных) при отсутствии нагружения и закрепления в перпендикулярных им направлениях. В системе координат пластины компоненты тензора напряжений лежат в её плоскости. Напряжённое состояние – двухосное, нетрудно показать, что оно однородно. Главные оси в плоскости можно определить из соображений симметрии – это будут два направления диагоналей квадрата. Вдоль этих осей силы будут осуществлять сжатие вдоль одной диагонали и растяжение вдоль другой (см. также рис. 2.3 ниже). Характеристическое уравнение: $\sigma(\sigma^2 - \tau^2) = 0$, корни – разного знака.

Упражнение. Рассмотреть напряжённое состояние при однородном сдвиге вдоль оси 1 (рис.1.9б), осуществляемом приложением касательного напряжения только к верхней грани элемента и закреплением его нижней грани, оставив боковые границы свободными.

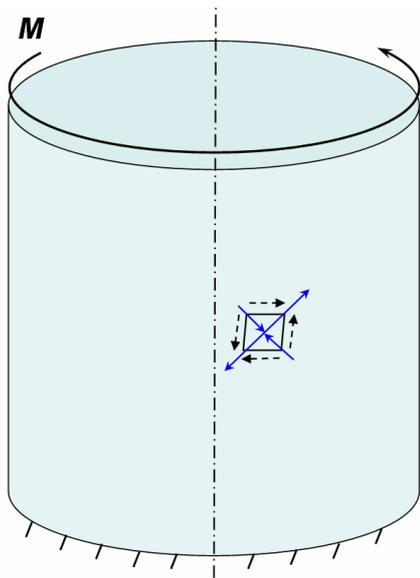


Рис.1.10. Главные направления при кручении тонкой трубы

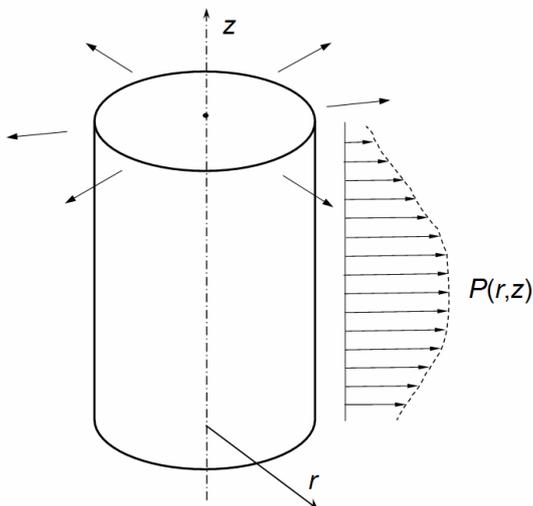


Рис.1.11. Осесимметричное НС

Чистое кручение тонкой трубы: задан вращающий момент относительно оси трубы, отсутствуют осевая и радиальная нагрузки (стандартное испытание на сдвиг). НС локально сводится к сдвигу в плоскости, касательной к образующей трубы, при этом главные направления будут расположены в касательной плоскости и меняться вдоль окружности в соответствии с направлением радиуса-вектора точки в перпендикулярном сечении трубы (рис. 1.10). Характеристическое уравнение в *местной* системе координат (касательная плоскость) будет иметь тот же вид, что в предыдущем примере: $\sigma(\sigma^2 - \tau^2) = 0$. Эта плоскость своя для каждого азимутального угла вдоль окружности трубы, т.е., НС – трёхосное, но локально оно 2–осное.

Осесимметричное НС (рис.1.11). Дано тело вращения. Оно сжимается или растягивается нормально к поверхности нагрузкой, изменяющейся только в направлении оси или по радиусу, независимо от азимутального угла. В декартовой системе координат с одной из осей вдоль оси вращения главные напряжения в каждой точке на площадках, перпендикулярных радиусу-вектору оси, направлены вдоль радиуса или перпендикулярно ему, их распределение обладает осевой симметрией. Ось симметрии НС совпадает с геометрической осью симметрии системы, которая является главной осью тензора напряжений в любой точке, любая пара ортогональных прямых в плоскости,

перпендикулярной оси, будет главными осями тензора в соответствующей осевой плоскости. Данное состояние 3–осное, но в каждой осевой плоскости оно может рассматриваться как 2–осное, не зависящее от азимутального угла.

При наличии кручения относительно оси симметрии появляются касательные напряжения в плоскости вращения, и, хотя определённая симметрия вращения остаётся, направления главных осей в точке будут зависеть также от её радиального положения, и при деформации в осевой плоскости задача не может считаться двухосной.

Трёхосное напряжённое состояние характеризуется ненулевым напряжением в каждом из трёх главных направлений в данной точке тела. Переходом в главные оси сложное НС можно свести локально к 3–стороннему сжатию–растяжению (как, например, рассмотренный выше чистый сдвиг), но в общем случае эти главные оси меняются от точки к точке. Если главные оси и главные напряжения одинаковы во всех точках тела, такое НС называется *гидростатическим*.

2. Деформирование и тензор деформаций

Обстоятельное изложение всех рассматриваемых в гл. 2 вопросов геометрии деформирования см. в [5], [24], частично в [4]. Краткое изложение на русском языке – в [6]. Основные определения кинематики больших деформаций можно найти на русском языке в [9] и в другой литературе по этому вопросу.

2.1. Движение, перемещение и деформация

Деформирование материала конструкции определяет её способность выполнять свои функции (например, изгиб при вращении вала). Необходимость деформаций для описания напряжённого состояния связана с тем, что оно, как мы видели, описывается только 3–мя уравнениями равновесия, с шестью неизвестными. В общем случае задачи равновесия деформируемого тела являются "статически неопределимыми", т.е. не определяемыми методами геометрической статики, оперирующей только приложенными силами (см. Работнов [3]). Введя деформации и связь напряжений с деформациями через дополнительные уравнения, можно однозначно определить и напряжения, и деформации.

Общее движение деформируемого тела, включающее изменение его размеров и формы, описывается как последовательные перемещения точек тела относительно их начальных положений, характеризуемых радиус-вектором $\{a_i\}$, в новые положения, характеризуемые вектором $\{x_i\}$. Вводится функция *перемещений* ("смещений"), задающая изменение положения в каждой точке тела – поле вектора $\{du_i\}$:

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) = x_i - a_i. \quad (2.1)$$

Вектор $\{x_i\} = \mathbf{x}$ задаёт текущее положение данной точки тела в фиксированной системе координат (по умолчанию – декартовой). Перемещение вычисляется, либо относительно исходного состояния $\{a_i\}$, либо относительно некоторого, более позднего.

При деформировании существенно изменение *относительного расположения* точек тела при движении. Если близкие точки P и Q, заданные радиус-векторами $\{a_i\}$ и $\{a_i + da_i\}$, испытали одно и то же перемещение $\{u_i\}$, то расстояние между ними не изменилось, и их относительное расположение также не изменилось. Поворот также не изменяет расстояний, и такие движения в изолированной системе не приводят к внутренним силам. Если в точке Q перемещение $\{u_i\}$ отлично от перемещения в соседней точке P: $\{u_i + du_i\}$ и движение тела отлично от вращения (с малой скоростью), то расстояние между P и Q меняется, возникают внутренние силы, описываемые некоторым физическим законом. Для его формулировки вводится величина, характеризующая деформирование как смещение точек друг относительно друга.

Рассмотрим сначала 1–мерный случай, который имеет самостоятельный интерес, для экспериментов на одноосное растяжение, основного вида механических испытаний. Пусть стержень длиной a удлинился на δ : $a \rightarrow a + \delta$. Вводится относительное удлинение: $\epsilon = \delta/a$ и локальная величина $\epsilon(x) = du/dx = \epsilon$, где $u = u(x)$ – перемещение в точке x . В отличие от перемещения, местная деформация не зависит от "базы измерения", например, от длины стержня при его равномерном удлинении, и служит характеристикой деформирования стержня в любой точке. Если деформация – не бесконечно малая, существенно, к какой длине относить δ – к первоначальной, или к новой. Пусть однородный стержень однородно растягивается от длины a до длины a' , поэтапно, с малыми удлинениями δ_k . Накопленное перемещение будет их суммой. Деформация за n этапов может быть вычислена двумя способами –

$$\varepsilon = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n}{a} \quad \text{и} \quad \varepsilon_L = \frac{\delta_1}{a_0} + \frac{\delta_2}{a_2} + \dots + \frac{\delta_n}{a_n}. \quad (2.2)$$

В общем случае приближённое равенство соблюдается только при малом полном относительном удлинении:

$$\varepsilon_L = \frac{\delta_1}{a_0} + \frac{\delta_2}{a_2} + \dots + \frac{\delta_n}{a_n} \approx \int_a^{a'} \frac{da}{a} = \ln \frac{a'}{a} = \varepsilon_{\log} = \ln\left(1 + \frac{a' - a}{a}\right) \approx \frac{a' - a}{a} = \varepsilon. \quad (2.3)$$

Величину ε_{\log} принято называть *логарифмической* или "истинной" деформацией (natural deformation). Это интегральная характеристика одноосного, одномерного деформирования. Смысл её введения понятен из вычисления: при поэтапном деформировании в каждый момент приращение длины отнесено к текущей длине, что корректно с точки зрения общих определений, рассмотренных ниже. Но попытки её обобщения на трёхмерный случай приводят к сложным и трудно интерпретируемым объектам (см., например, обсуждение в [6]). Поэтому для представления деформации в общем случае используются бесконечно малые величины.

2.2. Тензор деформаций

В общем случае деформирование неоднородно и неоднородно и может быть введено как чисто геометрическое понятие: преобразование исходной области пространства, занимаемой телом, в новую:

$$X: \{a_i\} \rightarrow \{x_i\}, \quad x_i = X_i(a_1, a_2, a_3), \quad \{a_i\} \in \Omega. \quad (2.4)$$

Предполагается, что функции $\{X_i\}$ – непрерывно дифференцируемые. Трещины и другие разрывы суть особые случаи. Существует обратное преобразование:

$$Y: \{x_i\} \rightarrow \{a_i\}, \quad a_i = Y_i(x_1, x_2, x_3), \quad \{x_i\} \in \Omega'.$$

Координаты исходных и преобразованных точек мы относим к неподвижной декартовой системе координат. Движение может быть выражено также в терминах компонент перемещений точек тела Ω относительно исходной конфигурации (2.1). В общем случае нет величины, аналогичной интегральной логарифмической деформации при одномерном удлинении, но гладкое отображение общего вида (2.4) правомерно рассматривать как последовательность малых. Введём матрицу линейной части преобразования области, называемую часто матрицей градиентов деформаций (deformation gradient matrix) [6]:

$$[J_{ik}] \equiv \{\partial X_i / \partial a_k\} = \|\mathbf{J}\|. \quad (2.5)$$

Подобно локальному малому одномерному удлинению, в трёхмерном случае преобразование дифференциалов координат точек линейно и описывается этой матрицей, составленной из частных производных по координатам точки:

$$dx_i = \frac{\partial X_i}{\partial a_k} da_k. \quad (2.6)$$

Матрица $[J_{ik}]$ имеет обратную, это линейная часть матрицы обратного преобразования:

$$[J_{ik}]^{-1} \equiv \{\partial Y_i / \partial x_k\} = \|\mathbf{J}\|^{-1}, \quad (2.7)$$

Коэффициенты матрицы преобразования области $[J_{ik}]$ образуют тензор второго ранга (градиент векторного поля $\{X_i\}$, задающего преобразование: деформационный градиент [5]). Отметим, что определитель матрицы $\|\mathbf{J}\|$ равен отношению объёмов параллелепипедов, деформированного и исходного, построенных, соответственно, на двух системах отрезков – образцов дифференциалов и самих дифференциалов координат:

$$\det\|\mathbf{J}\| = V_{\text{new}}/V_{\text{prev}}, \quad (2.8)$$

что следует из определений (2.6) и смешанного произведения трёх векторов. Поскольку функции $\{X_i\}$ – дифференцируемые, функция $\det\|\mathbf{J}\|$ также дифференцируема, причём $\det\|\mathbf{J}\| \neq 0$. В начальный момент $\det\|\mathbf{J}\|=1$ и остаётся положительным в соответствии с его геометрическим смыслом.

Определяющее свойство формоизменения – это изменение относительного расстояния между точками тела, что есть следствие теоремы о полярном разложении (см. ниже). Для выражения деформации через перемещения следует рассмотреть изменение расстояния между близкими точками $\{a_i\}$, $\{a_i + da_i\}$, задаваемого дифференциалами координат $\{da_i\}$.

Квадрат длины отрезка в недеформированном теле:

$$(dS_a)^2 = (da_1)^2 + (da_2)^2 + (da_3)^2 = da_i da_i.$$

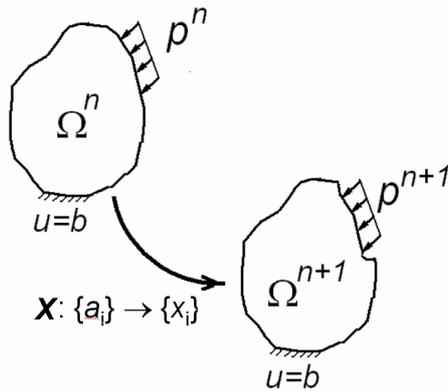


Рис.2.1. Деформация как преобразование

Рассмотрим разность квадратов $(ds_x)^2 - (dS_a)^2$ длин в исходном и преобразованном, т.е. деформированном, состояниях. Мы хотим соотнести её с размерами рассматриваемого линейного элемента и записать это в инвариантной форме. Как и в одномерном случае, здесь есть выбор – относительно каких значений координат производить вычисления – исходных или преобразованных. Дифференциалы исходного и преобразованного линейных элементов можно связать через матрицы линейной части преобразования, прямую (2.5), либо обратную (2.7), откуда следуют выражения для квадратов длин:

$$dx_i = \frac{\partial X_i}{\partial a_j} da_j, \quad ds_x^2 = \frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} da_j da_m, \quad da_i = \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} dx_j, \quad dS_a^2 = \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial Y_i}{\partial x_m} dx_j dx_m. \quad (2.9)$$

Далее, удлинение можно выразить через исходные значения координат точек и написать, следуя (2.9):

$$\begin{aligned} (ds_x)^2 - (dS_a)^2 &= dx_i dx_i - da_p da_p = \frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} da_j da_m - da_p da_p = \\ &= \left(\frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} - \delta_{pj} \delta_{pm} \right) da_j da_m = \left(\frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} - \delta_{jm} \right) da_j da_m \equiv 2E_{jm}^a da_j da_m. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Коэффициенты квадратичной формы E_{jm} образуют тензор, называемый тензором деформаций Лагранжа–Грина.

С другой стороны, мы можем выразить удлинение линейного элемента в новых координатах и не учитывать явно исходное состояние:

$$\begin{aligned} (ds)_x^2 - (ds)_a^2 &= dx_i dx_i - da_i da_i = dx_p dx_p - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial Y_i}{\partial x_m} dx_j dx_m = \\ &= \left(\delta_{pj} \delta_{pm} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial Y_i}{\partial x_m} \right) dx_j dx_m = \left(\delta_{jm} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial Y_i}{\partial x_m} \right) dx_j dx_m \equiv 2E_{jm}^x dx_j dx_m. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Набор E_{jm}^x называется тензором деформаций Эйлера–Альманзи.

Таким образом, тензор деформации введён геометрически как коэффициенты квадратичной формы от дифференциалов координат, исходных или преобразованных, вычисляющей инвариантную величину – изменение квадрата длины малого отрезка при геометрическом преобразовании рассматриваемой области, служащим математической моделью деформирования твёрдого тела. Определения тензоров деформаций (2.10), (2.11) для дальнейшего использования в механике удобно выразить не через исходные или преобразованные координаты, а через перемещения. Внося определение перемещения (2.1), например, в определение (2.10) тензора Лагранжа–Грина, получим:

$$E_{jm}^a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} - \delta_{jm} \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \delta_{ij} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_m} + \delta_{im} \right) - \delta_{jm} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} \delta_{im} + \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial a_m} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_i}{\partial a_m} + \delta_{jm} - \delta_{jm} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_m} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_i}{\partial a_m} \right). \quad (2.12)$$

Для вычисления компонент этого тензора на данном этапе деформирования надо знать перемещения, новые координаты точек и их исходные координаты, точнее, якобиан преобразования (2.6) в каждой точке, коль скоро текущее изменение конфигурации, задаваемое тензором деформации, отнесено не к текущему положению точек, а к исходному.

Аналогичное выражение через перемещения, взятые как функция координат x_i получается для тензора деформаций Эйлера–Альманзи (2.11):

$$E_{jm}^x = \frac{1}{2} \left(\delta_{jm} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial Y_i}{\partial x_m} \right) = \frac{1}{2} \left(\delta_{jm} - \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\delta_{im} - \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\delta_{jm} - \delta_{ji} \delta_{im} + \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} + \delta_{im} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.12a)$$

Тензор деформации полностью описывает деформирование как бесконечно малое преобразование. Предположение о линейности, т.е. рассмотрение только линейной части (2.5) преобразования (2.4) несущественно для определения тензора в точке, поскольку для гладких функций всегда можно обеспечить постоянство с заданной точностью матрицы J_{ik} в некоторой окрестности данной точки. Гладкость следует из свойств сплошной среды. Деформирование в целом описывается полем компонент тензора деформаций. В общем случае оно неоднородно, как, например, на рис. 2.2, где изображено деформирование упругого тела (резина) переменного сечения. Напомним, что тензор деформаций не описывает преобразование общего вида (2.4), поскольку, в частности, при только поворотах длины не изменяются.

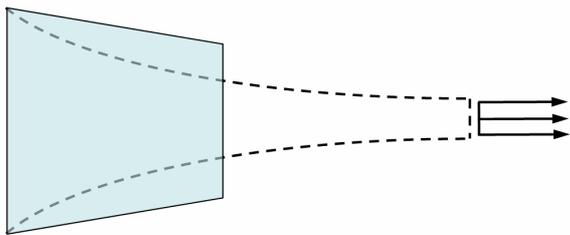


Рис. 2.2. Неоднородное деформирование

Напряжённое состояние меняется при деформировании. Т.к. компоненты тензора напряжений связаны с напряжениями на площадках (формула Коши), то при его определении следует уточнять, к какой площадке отнесены напряжения – к исходной или деформированной, что дало бы разные определения этого тензора. Введённый выше тензор напряжений Коши отвечает случаю, когда различие мало, т.е.

деформации (и повороты) в данной точке малы.

Из (2.12), как и из исходного выражения (2.10), видно, что описание деформирования в общем случае нелинейно по координатам и перемещениям – *геометрически нелинейно*: получаемые выражения для коэффициентов квадратичной формы (2.10), отвечающей компонентам тензора деформации, квадратично же зависят от коэффициентов матрицы преобразования, выраженных через перемещения. В дальнейшем деформации будут полагаться малыми, слагаемое второго порядка будет опускаться, и мы будем иметь дело только с *тензором малых деформаций Коши*:

$$\varepsilon_{jm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_m} \right). \quad (2.13)$$

Он линеен по перемещениям и симметричен по определению. Различие в определённых тензорах (2.12) и (2.12а) в случае малых деформаций имеет второй порядок малости и при типичных деформациях в пределах $\sim 10^{-3}$ пренебрежимо мало.

Нулевые перемещения дают нулевой тензор деформаций. Справедливо и обратное утверждение: если в результате преобразования (2.4) тензор деформаций везде оказался нулевым, то расстояния между точками не изменились, что отвечает отсутствию деформации. Таким образом, подобно тому, как напряжённое состояние полностью характеризуется тензором напряжений, "деформированность" имеет место тогда и только тогда, когда тензор деформаций отличен от нуля. Следовательно, напряжённо-деформированное состояние в приближении механики сплошной среды полностью характеризуется тензорами напряжений и деформаций.

Критерий геометрической линейности, т.е. малости квадратичного слагаемого в определении тензора деформации, следует непосредственно из выражений (2.12): градиенты компонент перемещений должны быть малыми порядка не выше второго относительно единицы. Для примера: *упругая* деформация металлов практически всегда находится в пределах $\sim 10^{-3}$. (Об этом говорит, в частности, наличие взятой за условный предел текучести для металлов величины σ_{02} , напряжения удлинения до 0,2%). Поэтому, для металлов упругие, линейные физически, деформации всегда линейны геометрически. Обратный пример дают резина и аналогичные материалы. Отметим, что малость локальных деформаций не предполагает малость *перемещений* точек тела друг относительно друга при его деформировании, если они разнесены далеко. Пример – упругий изгиб длинного тонкого стержня (линейки).

2.3. Физическая интерпретация компонент тензора малых деформаций.

В качестве иллюстрации применим приведённые определения к простейшим случаям. Пусть линейный элемент (отрезок) первоначально направлен вдоль оси Oa_1 лабораторной системы: $\{da_1, 0, 0\}$. Первоначальная его длина: $dS_a = da_1$. Определим относительное удлинение после деформирования, когда длина отрезка стала ds_x :

$$\begin{aligned} (ds_x - dS_a)/dS_a &= (ds_x - da_1)/da_1 = ds_x/da_1 - 1 \approx \frac{1}{da_1} \sqrt{\frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} da_j da_m} - 1 = \\ &= \frac{da_1}{da_1} \sqrt{\frac{\partial X_i}{\partial a_1} \frac{\partial X_i}{\partial a_1}} - 1 = \sqrt{1 + 2E_{11}^a} - 1 \approx E_{11}^a. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь использовано выражение (2.10) для лагранжева тензора деформаций. Видим, что деформация (сжатие/растяжение) малого отрезка, направленного вдоль Oa_1 , равна E_{11}^a . Условие малости, совпадающее с условием геометрической линейности деформации:

$E_{11}^a \ll 1$. Случаи отрезков $\{0, da_2, 0\}$ и $\{0, 0, da_3\}$ аналогичны. Следовательно, диагональные компоненты тензора деформаций связаны с укорочением (удлинением) в соответственном направлении (сжатие отрезка i -го направления в i -м направлении): с линейной деформацией.

Недиагональные компоненты связаны с изменением углов. Рассмотрим в недеформированном теле два ортогональных линейных элемента малой длины, направленных вдоль осей координат, $dS : \{0, da_2, 0\}$ и $dS^* : \{0, 0, da_3\}$. Между ними – прямой угол. При деформировании $X: \{a_i\} \rightarrow \{x_i\}$ они преобразуются в новые: $dS \rightarrow ds$, $dS^* \rightarrow ds^*$, расположенные под другим углом ϕ . Выразим этот угол через компоненты тензора деформаций, используя формулы для скалярного произведения векторов. Из определений (2.9) следует для наших отрезков –

$$ds \cdot ds^* = ds \, ds^* \cos \phi = dx_i \, dx_i^* = \frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i^*}{\partial a_m} da_j da_m = \frac{\partial X_i}{\partial a_2} \frac{\partial X_i^*}{\partial a_3} da_2 da_3 .$$

Поскольку ортогональные малые линейные элементы взяты "в одной точке", деформирование их обоих может быть описано одним и тем же тензором деформаций. Можно видеть, что справа в произведении стоит множителем недиагональная компонента тензора деформаций (2.10) в данной точке, причём частные производные по соответственным координатам равны, если тензор деформаций один и тот же: $\partial X_i^* / \partial a_3 \approx \partial X_i / \partial a_3$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial X_i}{\partial a_2} \frac{\partial X_i^*}{\partial a_3} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial X_i}{\partial a_2} \frac{\partial X_i}{\partial a_3} = E_{23}^a . \quad (2.15)$$

Длины преобразованных сегментов были da_2 , da_3 и, как мы видели выше, в предположении малости деформаций и поворотов изменились в $ds/da_2 = 1 + E_{22}^a$ и в $ds^*/da_3 = 1 + E_{33}^a$ раз, откуда получаем для косинуса угла:

$$\cos \phi = \frac{2E_{23}^a}{(1 + E_{22}^a)(1 + E_{33}^a)} .$$

Если величины E_{22}^a и E_{33}^a малы относительно 1, то угол между сегментами изменился на малую величину $\gamma = \pi/2 - \phi$, и тогда –

$$\sin \gamma \approx \gamma \approx 2E_{23}^a , \quad (2.16)$$

т.е. в случае малых деформаций удвоенная недиагональная компонента тензора отвечает изменению угла – *угловая деформация*. В технической литературе углы поворотов, отвечающие недиагональным компонентам тензора деформаций, обозначаются $\gamma_{ik} = 2\epsilon_{ik}$.

2.4. Инварианты тензора деформаций, главные оси. Объёмы и площади

Тензор деформаций симметричен, имеет главные значения, главные оси со свойствами, аналогичными свойствам тензора напряжений. В соответствии с определением главных направлений, недиагональные компоненты тензора деформации будут вдоль них нулевые. В частности, если в рассмотренных только что примерах деформирования оси лабораторной системы, и с ними рассмотренные ортогональные элементы dS , dS^* направлены вдоль главных осей тензора деформации, то косинус угла между ними останется равным нулю, т.е., угол между элементами при деформировании вдоль главных

осей не изменится, что понятно. Максимальное же изменение угла будет в случае, если оси координат расположены под углом в 45° к главным осям (см., например, [6]).

Уместно спросить, как соотносятся главные оси тензоров напряжений и деформаций для заданного НДС? Это следует из свойств материала, описываемых соотношением между тензорами напряжений и деформаций. Для изотропного упругого тела главные оси этих тензоров совпадают – тензоры *соосны* (см. ниже гл. 3).

Рассмотрим инварианты тензора деформаций и связанных с ним тензоров (ср. (1.15)–(1.18)):

$$J_1(\epsilon_{ik}) = \epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}, \quad J_2(\epsilon_{ik}) = \frac{1}{2}(\epsilon_{ij} \epsilon_{kk} - \epsilon_{jk} \epsilon_{kj}), \quad J_3(\epsilon_{ik}) = \det \|\epsilon_{ik}\|. \quad (2.17)$$

Первый и третий имеют метрическую интерпретацию. Из определения (2.13) тензора малых деформаций следует, что его первый инвариант можно записать через дивергенцию вектора перемещений (свёртка тензора градиентов перемещений, рассмотренного в следующем параграфе):

$$J_1(\epsilon_{ik}) = \frac{\partial u_i}{\partial a_i} = \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (2.18)$$

Первый инвариант тензора малых деформаций имеет смысл относительного приращения малого объёма $(\Delta V / \Delta V_0 - 1)$ в окрестности данной точки, или *дилатации*, что нетрудно показать, рассмотрев в главных осях малую деформацию растяжения прямоугольного параллелепипеда, построенного на этих осях, и используя выражение (2.14). В одномерном случае это отвечает интерпретации (2.14). При сдвиговых же деформациях малой величины, определяемых недиагональными компонентами и не меняющих первый инвариант тензора деформаций, объём в первом порядке неизменен.

Из (2.14) нетрудно убедиться также в том, что при малых деформациях *степень сжатия* dV/dV_0 , даётся в главных осях величиной $((1 + 2E_{11})(1 + 2E_{22})(1 + 2E_{33}))^{1/2}$. Если, в соответствии с определением (2.10), ввести тензор

$$\delta_{jm} + 2E_{jm} = \frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m},$$

то его третий инвариант (детерминант матрицы) будет равен квадрату степени сжатия. Т.к. детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, мы приходим к общему соотношению (2.8):

$$\det \|\delta_{jm} + 2E_{jm}\| = \det \left\| \frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} \right\| = \det^2 \left\| \frac{\partial X_i}{\partial a_m} \right\| = \left(\frac{dV}{dV_0} \right)^2.$$

Далее, вспоминая алгебраическое определение детерминанта матрицы, выражаем –

$$\frac{dV}{dV_0} = \det \left\| \frac{\partial X_i}{\partial a_m} \right\| = e_{ijk} \frac{\partial X_i}{\partial a_1} \frac{\partial X_j}{\partial a_2} \frac{\partial X_k}{\partial a_3},$$

где e_{ijk} – символ Леви–Чивита (антисимметричный по всем парам индексов). Для произвольной перестановки (p, q, r) индексов (1, 2, 3) справедливо тождество –

$$e_{pqr} \frac{dV}{dV_0} = e_{ijk} \frac{\partial X_i}{\partial a_p} \frac{\partial X_j}{\partial a_q} \frac{\partial X_k}{\partial a_r}. \quad (2.19)$$

Аналогичным образом можно получить –

$$e_{pqr} \frac{dV_0}{dV} \equiv e_{pqr} J_{III}^{-1} = e_{ijk} \frac{\partial Y_i}{\partial x_p} \frac{\partial Y_j}{\partial x_q} \frac{\partial Y_k}{\partial x_r}. \quad (2.20)$$

При записи уравнений МСС в лагранжевых координатах эти соотношения служат интегральным эквивалентом закона сохранения массы (уравнения непрерывности).

Рассмотрим теперь, как изменяется площадь малого сегмента поверхности при деформировании. Это ниже используется при определении тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа, применяемого для учёта деформируемости конфигурации.

Рассмотрим в недеформированном теле два малых линейных элемента общего положения, dS и dS^* . Площадь параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$dA \equiv N dS = dS \times dS^* = \{ N_i dA \} = \{ e_{kji} da_j da_i^* \}. \quad (2.21)$$

При деформировании $X: \{a_i\} \rightarrow \{x_i\}$ параллелограмм преобразуется: $dS \rightarrow ds$, $dS^* \rightarrow ds^*$, его площадь изменяется:

$$nds = ds \times ds^* \equiv \{ n_p dA' \} = \{ e_{pqr} dx_q dx_r^* \}. \quad (2.22)$$

Здесь \mathbf{N} и \mathbf{n} – векторы нормали к исходному и преобразованному сегментам площади. Выражая векторное произведение в координатах и используя определения (2.9), получим для исходного параллелограмма–

$$N_i dA = e_{ikj} da_k da_j^* = e_{ikj} \frac{\partial Y_k}{\partial x_p} \frac{\partial Y_j^*}{\partial x_q} dx_p dx_q^*. \quad (2.23)$$

Сворачивая обе стороны равенства с тензором $\partial Y_i / \partial x_r$ и используя тождество (2.20), получим –

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_r} N_i dA = e_{ikj} \frac{\partial Y_i}{\partial x_r} \frac{\partial Y_k}{\partial x_p} \frac{\partial Y_j^*}{\partial x_q} dx_p dx_q^* = J_{III}^{-1} e_{rpq} dx_p^* dx_q^* = J_{III}^{-1} n_r dA',$$

откуда, вводя по (2.20) степень сжатия, используя её выражение через плотности (обратный объём или, в общем случае, некоторая масса, приписанная каждому объёму) –

$$n_p dA' = \frac{dV}{dV_0} \frac{\partial Y_i}{\partial x_p} N_i dA = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial Y_i}{\partial x_p} N_i dA.$$

Здесь слева стоит вектор ориентированной площади преобразованного сегмента, справа – свёртка вектора площади исходного сегмента с обратной матрицей преобразования, умноженные на степень объёмного сжатия при прямом преобразовании, которая по (2.19) может быть интерпретирована как произведение трёх коэффициентов сжатия при прямом преобразовании. Интерпретация этого соотношения в простом случае сжатия-растяжения вдоль координатных осей очевидна – площадь сегмента, расположенного в координатной плоскости, пропорциональна произведению коэффициентов сжатия-растяжения в этой плоскости. Учёт изменения площади сегмента при воздействии напряжения позволяет уточнить определение тензора напряжений при больших деформациях.

2.5. Малое движение, тензоры малых вращений и деформаций

Отметим некоторые полезные следствия из описания общего малого движения деформируемого тела, трактуемого как геометрическое преобразование. В случае абсолютно жёсткого тела его движение складывается из поступательного и вращательного. При наличии деформирования сюда входит также движение деформации, и при малых изменениях положения составляющие перемещения могут суммироваться

независимо, т.е. движение малого объёма можно разложить на составляющую перемещения центра масс объёма, составляющую вращения и составляющую деформирования:

$$\mathbf{u}^F = \mathbf{u}^T + \mathbf{u}^R + \mathbf{u}^D .$$

Покажем это для случая малых (инфинитезимальных) преобразований. Поле вектора перемещений точек тела задаётся вектор–функцией u_i координат точек (2.1): $u_i = u_i(a_1, a_2, a_3)$. При рассмотрении движения всего тела нас интересует только случай, когда оно отлично от чистой трансляции \mathbf{u}^T . Дифференциал перемещений связан с дифференциалами координат как

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial a_k} da_k \equiv B_{ik} da_k , \quad (2.24)$$

где $\|\mathbf{B}\| = \{B_{ik}\}$ – тензор механической дисторсии. Она показывает распределение относительного смещения (дисторсии) точек тела. Матрица $\|\mathbf{B}\|$ связана с матрицей преобразования $\|\mathbf{J}\|$ (2.5) очевидным соотношением (поскольку $x_i = a_i + u_i$)

$$\|\mathbf{J}\| = \|\mathbf{E}\| + \|\mathbf{B}\| , \quad (2.25)$$

где $\|\mathbf{E}\|$ – единичная матрица. $\{B_{ik}\}$ – тензор, потому что это – градиент вектора. Применяя тензорные операции симметризации и альтернирования представим $\{B_{ik}\}$ суммой :

$$B_{ik} = 1/2(u_{i,k} + u_{k,i}) + 1/2(u_{i,k} - u_{k,i}) \equiv \varepsilon_{ik} + \omega_{ik}, \quad (2.26)$$

где по определению симметричная и антисимметричная части – это:

$$\varepsilon_{ik} \equiv 1/2(u_{i,k} + u_{k,i}) \quad - \text{тензор малых деформаций}, \quad (2.27)$$

$$\omega_{ik} \equiv 1/2(u_{i,k} - u_{k,i}) \quad - \text{тензор малых поворотов}. \quad (2.28)$$

Эти определения иллюстрируются ниже на рис. 2.3.

Из линейности (2.26) следует допустимость принципа суперпозиции в случае малых движений – малые повороты и деформации можно складывать по компонентам соответствующих тензоров, результат не зависит от порядка операций при описании движения и исчерпывает это описание. Подробнее, справедливы следующие утверждения.

В общем случае преобразование вида (2.4) локально может быть сведено к композиции преобразований вращения и растяжения. Это составляет содержание т.н. *теоремы о полярном разложении* (см. [5], [24]). Она гласит, что симметричная матрица градиентов деформаций \mathbf{J} (2.5) может быть разложена в произведение диагональной матрицы \mathbf{T} и ортогональной матрицы \mathbf{R} , которые отождествляются с преобразованиями поворота $[R_{ij}]$ и растяжения по главным осям $[T_{pq}]$ (тензор растяжения – stretch tensor). Отсюда, в частности, следует, что деформирование (преобразование, отличное от поворота) имеет место тогда и только тогда, когда имеет место изменение расстояния между точками тела, что и берётся за основу определения тензора деформаций.

В общем случае разложение на композицию вращения и растяжения зависит от порядка преобразований, соответственно, для данного поворота вводятся левый и правый тензоры растяжения. В случае конечных деформаций указанная выше простая геометрическая интерпретация инвариантов тензора деформаций неправомерна. Эти общие определения далее не будут использоваться, но с их помощью можно интерпретировать линейность композиции малых вращения и деформации как частный случай.

Малое движение как преобразование положения точек, описывается матрицей линейной части преобразования $[J_{ik}]$, и в индексных обозначениях сумма матриц (2.25) имеет вид:

$$J_{ik} = E_{ik} + B_{ik} . \quad (2.25a)$$

Линейная часть преобразования поворота, записанная в виде тензора, аналогична:

$$R_{ik} = \delta_{ik} + \omega_{ik}, \quad (2.29)$$

как и преобразование малой деформации –

$$T_{ik} = \delta_{ik} + \varepsilon_{ik}. \quad (2.30)$$

Составляя их произведение, описывающее общее движение как композицию поворота и деформации, отбрасывая слагаемые второго порядка для случая малых движений, получим:

$$J_{ik} = R_{ip} T_{pk} = (\delta_{ip} + \omega_{ip})(\delta_{pk} + \varepsilon_{pk}) = \delta_{ik} + \omega_{ik} + \varepsilon_{ik} + \omega_{ip} \varepsilon_{pk} \approx \delta_{ik} + \omega_{ik} + \varepsilon_{ik}, \quad (2.31)$$

т.е. разложение (2.26) общего тензора малой дисторсии B_{ik} , что и означает возможность разложения произвольного малого движения малого объёма (без учёта трансляции) на поворот и деформирование, взятые в любом порядке. Мы позже используем полученные выражения для выделения вращения при общем малом движении в формулировке численного описания конечных деформаций.

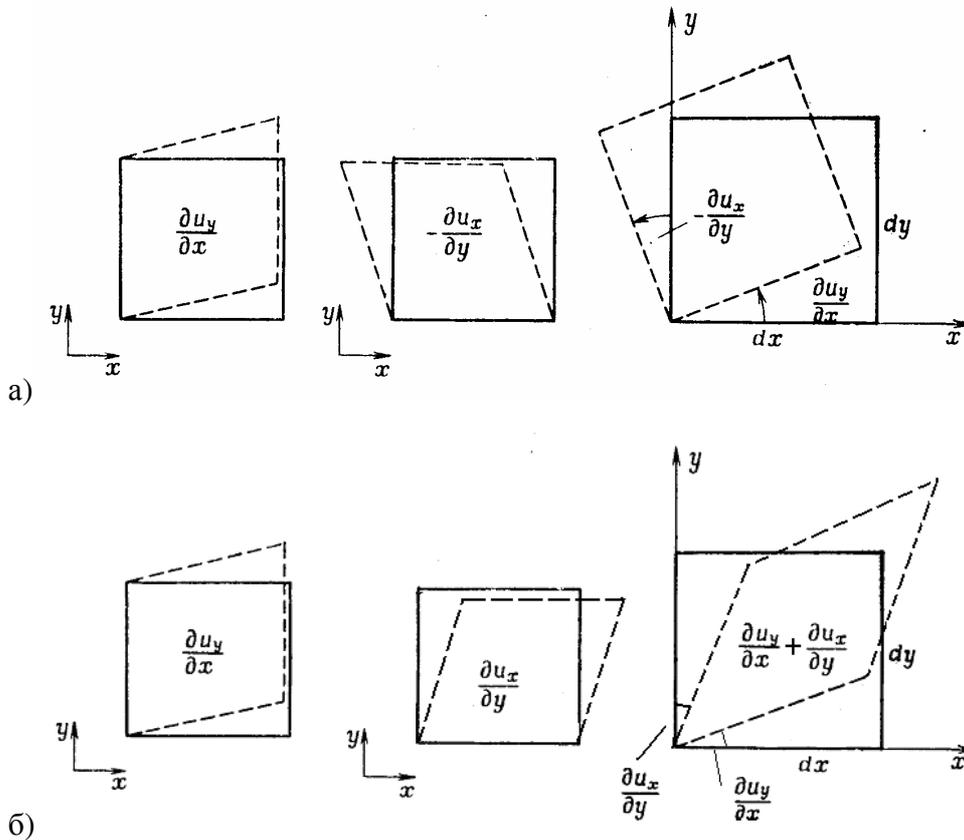


Рис.2.3. Преобразования вращения и чистого сдвига.

Рис.2.3. иллюстрирует комбинации движений, связанные с разложением (2.26). Малое движение $u(x,y)$ в плоскости Oxy представлено как композиция двух малых сдвигов вдоль осевых направлений, взятых с различными знаками.

Рассмотрим преобразования малого куба с ребром a , расположенного в 1-м октанте. Проекция куба на плоскость Oxy – это квадрат со стороной a . При повороте точек квадрата с координатами $\{x, y, z\}$, $0 \leq x, y, z \leq a$, в плоскости Oxy вокруг оси Oz на угол $2\omega_z$ x -компонента малого перемещения согласно (2.24), (2.26), (2.28) даётся выражением

$$du_x = (\partial u_x / \partial y - \partial u_y / \partial x) dy,$$

y -компонента –

$$du_y = (\partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y) dx,$$

z -компонента – нулевая.

Рис.2.3а иллюстрирует преобразование поворота на малый угол как композицию двух сдвигов в перпендикулярных направлениях Oy и $O(-x)$:

$$y \rightarrow y' = y + u_y = y + k_x y \quad \text{и} \quad x \rightarrow x' = x + u_x = x - k_y x.$$

Главная часть компоненты перемещения в направлении $-x$ равна $du_x = -k_y dx = -(\partial u_x / \partial y) dy$, т.е. связана преимущественно со сдвигом вдоль оси $O(-x)$. Перемещение в y -направлении при вращении связано преимущественно с параллельным сдвигом по Oy , при повороте приближённо равном $du_y = k_x dx = (\partial u_y / \partial x) dx$. Перемещения вдоль оси Ox при y -сдвиге имеют второй порядок малости и наоборот – при x -сдвиге. При повороте производные перемещений по несоответственным координатам по абсолютной величине одинаковы и с точностью до второго порядка равны углу $2\omega_z$. В первом порядке малости квадрат при комбинации двух сдвигов, образующих поворот на угол $2\omega_z$ остаётся недеформированным, что может быть проверено непосредственно, вычислением его диагоналей после преобразования.

Малый поворот вокруг оси общего положения может быть разложен на композицию малых поворотов вокруг трёх координатных осей.

Интерпретация деформации *чистого сдвига*, описываемой удвоенным тензором (2.27), представлена на рис.2.3б. Он иллюстрирует также расположение главных осей тензора деформации (направлений с нулевой деформацией углов) и сделанное выше утверждение о максимальной деформации углов в случае расположения осей координат под углом 45° относительно главных осей тензора деформации. Непосредственной проверкой показывается, что при малом чистом сдвиге площадь в первом порядке неизменна, что иллюстрирует сделанное выше общее утверждение относительно изменения объёма. Отметим, также, что преобразование малого сдвига в координатной плоскости Oxy с перемещением только вдоль одного направления, например, оси Oy : $du_y = (\partial u_y / \partial x) dx$ (левая позиция рис.2.3б) имеет матрицу преобразования, составленную, согласно (2.26), из суммы матриц удвоенного тензора деформации (2.27) и тензора поворота на угол $-2\omega_z$, т.е. в таком преобразовании участвует также вращение.

3. Упруго деформируемое тело и линейная упругость

Напряжённое состояние тела неотделимо от деформированного. Рассмотрим медленное нагружение (с малыми ускорениями) до состояния равновесия. При приложении нагрузки тело деформируется, возникают внутренние силы, которые при отсутствии разрушения растут с ростом деформаций, пока внешнее воздействие не будет скомпенсировано. В состоянии равновесия деформации в каждой точке тела отвечает определённое напряжение. Деформированное состояние в точке определено тензором деформации, напряжённое состояние – тензором напряжений. Эти величины описывают разные стороны одного явления, и между ними с необходимостью должна быть связь, которая записывается в виде физического закона – *определяющего соотношения материала*:

$$\sigma_{jl} = \sigma_{jl}(\epsilon_{ik}) . \quad (3.1)$$

В общем случае форма этого соотношения может быть сложной, в него могут входить другие величины, но для упругого материала оно может быть линейным, и его вид можно определить, исходя из достаточно общих посылок.

3.1. Энергия упругой деформации

Свойство упругости твёрдого деформируемого тела можно определить как его полный возврат к исходной конфигурации после снятия нагрузки. Эта конфигурационная обратимость упругой деформации имеет атомарную природу: взаимодействие между отдельными атомами потенциально, и каждому их взаиморасположению должно отвечать вполне определённое значение потенциальной энергии взаимодействия, которая минимальна в состоянии равновесия. При квазистатическом (с малыми ускорениями) деформировании упругого тела только очень малая часть работы необратимо превращается в тепло (через затухающие колебания). Упругое деформирование будет также и термодинамически обратимо, т.е., например, при упругом адиабатическом сжатии, влекущим небольшой нагрев, и последующей полной разгрузке температура останется прежней. Рассматриваемые в практике твёрдые тела, как правило, слабо сжимаемы, и тепловыми эффектами при упругом деформировании можно пренебречь (о термодинамике деформирования см., например, [5], [6], [10], [11]). В упругом теле можно ввести механическую потенциальную энергию деформирования, которая, с точностью до тепловых эффектов, будет внутренней энергией тела, функцией состояния.

В сплошной среде изменение взаиморасположения точек тела описывается тензором деформаций $\epsilon_{ij}(x)$, внутренние силы – тензором напряжений $\sigma_{ij}(x)$. Работа при деформировании, т.е. работа внешней нагрузки W против внутренних сил при деформировании от исходного до конечного состояния равна и противоположна работе внутренних сил (без учёта нагрева). В единице объёма –

$$-W(=U) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \equiv \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij}(\epsilon_{kl}) d\epsilon_{ij} . \quad (3.2)$$

Здесь выписана сумма из шести интегралов по компонентам деформации вдоль пути деформирования, в которых предполагается наличие зависимости (3.1). Каждая из компонент тензора деформаций изменяется от нуля до своего конечного значения. При подсчёте энергии всего деформированного тела следует проинтегрировать по его объёму.

Соотношение (3.2) для *работы внешних сил* весьма общее. Но, если упругость не предполагается, то работа не будет функцией состояния, т.к. интеграл может зависеть от пути интегрирования. В противном случае такая функция может быть введена: $U = U(\epsilon_{kl})$.

НДС описывается тензорами напряжения и деформации. При наличии однозначной связи между ними остаётся один аргумент.

Происхождение (3.2) для работы нормальных сил можно пояснить на примере 1–осного деформирования. В этом случае работа, совершаемая в единице объёма – это "произведение силы на расстояние". Например, пусть грань A_1 малого параллелепипеда толщиной Δx_1 переместилась вдоль своей нормали, параллельной внутренней силе F , на расстояние δx_1 , тогда работа силы: $\Delta W = F \delta x_1$. Полагая напряжение постоянным на малом шаге деформирования, приращение энергии на единицу объёма можно записать как –

$$\Delta U = \Delta W / (A \Delta x_1) = F \delta x_1 / (A \Delta x_1) = F/A \delta x_1 / \Delta x_1 = \sigma \epsilon_{11} .$$

При деформировании от исходного нулевого до конечного состояния работа внутренних сил суммируется на малых отрезках истории деформирования:

$$\Delta U^{(n+1)} = \int_{\epsilon_{11}^{(n)}}^{\epsilon_{11}^{(n+1)}} \sigma_{11} d\epsilon_{11} .$$

Аналогичную интерпретацию можно привести для работы при деформации сдвига. Например, при чистом сдвиге в малом кубе с ребром a (рис.2.3б), описываемом удвоенным тензором деформаций, работу в направлении Ox выполняет сила, приложенная к грани с нормалью вдоль Oy , в направлении Oy работу выполняет сила, приложенная к грани с нормалью вдоль Ox , и выражение для элементарной работы сдвига в малом объёме величиной a^3 соответствует (3.2):

$$\Delta W = a^2 (\tau_{yx} dx + \tau_{xy} dy) = a^2 (\tau_{yx} \frac{da_x}{a} a + \tau_{xy} \frac{da_y}{a} a) = a^3 \tau_{yx} (\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) = a^3 \tau_{xy} 2\epsilon_{xy} .$$

Для более точных формулировок введём арифметическое пространство с декартовыми координатами – компонентами тензора деформаций ϵ_{ij} . Интеграл работы (3.2) – это интеграл вдоль контура, пути в этом пространстве деформаций. Упругость среды означает обратимость деформирования, т.е., возврат к исходному напряжённому и деформированному состоянию при снятии нагрузки. Интеграл (3.2) по любому замкнутому контуру в пространстве деформаций будет равен нулю: работа, совершённая над телом, не привела к изменению его состояния и, следовательно, не изменила внутреннюю энергию – функцию состояния. Поэтому интеграл не должен также зависеть от пути интегрирования. Выражение $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ в упругом случае, следовательно, представляет собой полный дифференциал, и оно интегрируемо, т.е. существует скалярная потенциальная функция $U(\epsilon_{ij})$ – *потенциальная энергия деформирования*, для которой –

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} . \quad (3.3)$$

При неупругом деформировании предположение о независимости от пути не выполнено, вследствие необратимости деформирования, при этом текущее напряжённое состояние может зависеть, например, от скорости деформаций или иных параметров.

Отметим, что для изотропного линейно упругого материала (см. далее) соотношение (3.2) можно проинтегрировать явно для всей истории деформирования, в которой напряжённое состояние изменяется от нулевого до конечного. Плотность упругой энергии в любой точке упругого тела при данном НДС даётся *формулой Клапейрона*.

$$U = 1/2 \sigma_{ij} \epsilon_{ij} . \quad (3.4)$$

Покажем это для нагружения, однородного в пространстве. Рассмотрим НДС в системе главных осей тензора напряжений. Пусть нагружение пропорционально, т.е. отношение главных значений неизменно, тогда главные оси не меняются при нагружении от

исходного до конечного состояния. Используя свойства соосности тензоров напряжений и деформаций изотропного тела, линейную связь $\sigma_{(kk)}=E\varepsilon_{(kk)}$ и принцип суперпозиции, получим потенциальную энергию 3-осного гидростатического сжатия, интегрируя от начального до конечного состояния при сжатии в каждом направлении и складывая соответствующие выражения:

$$U_1 = \int_0^{\varepsilon_{11}} \sigma_{11}(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_{11}} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E\varepsilon_{11}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{11}\varepsilon_{11}$$

и

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33}).$$

Используя инвариантность свёртки тензоров, в данном случае σ_{ij} и ε_{ij} , это соотношение распространяется и на любую другую декартову систему координат, что означает справедливость общего выражения (3.4). Рассматривая малые объёмы, формула Клапейрона распространяется и на случай неоднородного нагружения, когда положение главных осей изменяется от точки к точке (см., например, [12]).

3.2. Определяющее соотношение упругого материала.

Изотропные упругие постоянные

Пусть в некоторой точке x упругого тела напряжённо-деформированное состояние задано тензорами напряжений и деформаций $\sigma_{ik}(x)$, $\varepsilon_{lm}(x)$, и при нулевой нагрузке тело свободно от напряжений. Выпишем для данной точки разложение введённой функции упругой энергии $U(\varepsilon_{ik})$ в ряд Тейлора до второго порядка по компонентам деформации в окрестности исходного состояния, при котором деформация нулевая, $\varepsilon_{ik}(x)=0$:

$$U = U_0 + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ik}} \varepsilon_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \dots \approx U_0 + \sigma_{ik}^{(0)} \varepsilon_{ik} + \frac{1}{2} E_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm}. \quad (3.5)$$

Здесь индексом "0" обозначена энергия при нулевой деформации, $\varepsilon_{lm} = 0$ и учтено (3.3). Дифференцируя это равенство по компонентам деформации ε_{pq} , получим тензор напряжений в окрестности исходного состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_{pq} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{pq}} = \sigma_{ik}^{(0)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{pq}} \varepsilon_{ik} + \frac{E_{iklm}}{2} \left(\varepsilon_{ik} \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial \varepsilon_{pq}} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial \varepsilon_{pq}} \varepsilon_{lm} \right) = \sigma_{ik}^{(0)} \delta_{ip} \delta_{kq} + \frac{E_{iklm}}{2} (\varepsilon_{ik} \delta_{ip} \delta_{mq} + \varepsilon_{lm} \delta_{ip} \delta_{kq}) = \\ &= \sigma_{pq}^{(0)} + \frac{1}{2} (E_{ikpq} \varepsilon_{ik} + E_{pqim} \varepsilon_{im}) = \sigma_{pq}^{(0)} + \frac{1}{2} (E_{ikpq} + E_{pqik}) \varepsilon_{ik}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь введены обозначения производных в выражении (3.5). Т.к. по условию исходное состояние – нулевая деформация, то в недеформированном состоянии можно положить напряжённое состояние, вызываемое приложенным механическим воздействием, также нулевым $\sigma_{pq}^{(0)} = 0$ (деформация отсчитывается от некоторой заданной конфигурации; напряжение $\sigma_{pq}^{(0)} \neq 0$ в этой исходной конфигурации может быть введено как наложенное НДС – *преднапряжение* и "пред-деформация"). Вследствие полагаемой двукратной дифференцируемости потенциальной энергии и независимости коэффициентов в (3.5) от порядка дифференцирования, матрица (тензор) симметрична по этим двум парам индексов: $E_{iklm} = E_{lmik}$. Потенциальная энергия (3.5) может быть записана как билинейная форма (отсчёт энергии от нуля):

$$U = \frac{1}{2} E_{iklm} \epsilon_{ik} \epsilon_{lm}, \quad (3.7)$$

и упругое соотношение (3.6) принимает вид:

$$\sigma_{ik} = E_{iklm} \epsilon_{lm}, \quad (3.8)$$

где E_{iklm} – тензор модулей упругости.

Таким образом, при достаточно малых отклонениях от исходного состояния связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций линейна, и это линейное определяющее соотношение следует для упругого тела из термодинамических соображений, т.е. из существования потенциальной энергии деформирования, связанного с обратимостью процесса - выражения (3.2) для работы деформирования и разложения в ряд (3.5) до квадратичного слагаемого. В общем случае конечных деформаций упругое квадратичного слагаемого недостаточно, и определяющее соотношение не обязано быть линейным. Подстановкой (3.8) в (3.7) мы немедленно получаем формулу Клапейрона (3.4). Т.к. при деформировании запасённая упругая энергия положительна (внешняя работа тратится на запасание упругой энергии), то, беря начало отсчёта потенциальной энергии деформирования нулевым, мы получаем *положительную определённую* квадратичной формы потенциальной энергии (3.7), что очень важно для численных приложений. (3.7) используется при дискретизации методом конечных элементов.

Опыты при малых деформациях и разных способах нагружения хорошо подтверждают наличие линейной связи между получаемой упругой деформацией и приложенной нагрузкой. Например, в важном частном случае одноосного нагружения к концам стержня прикладывают продольную силу и, изменяя силу, следят за деформацией вдоль направления нагружения. При этом до определенного предела деформирования выполняется закон Гука ("какова сила, такова деформация"), т.е., для осевых компонент –

$$\sigma_{11} = E \epsilon_{11}, \quad (3.9)$$

где E – модуль упругости (модуль Юнга). Общее линейное соотношение (3.8) также называют законом Гука.

В силу симметрии тензоров σ_{ik} и ϵ_{lm} тензор E_{ijklm} имеет не более 36 независимых компонент. Требование существования дифференцируемой потенциальной энергии деформации (независимость от порядка дифференцирования в (3.5)) позволяет снизить число компонент до 21 – самый общий случай упругой анизотропии (*показать – перебором возможных комбинаций*). Симметрия в анизотропных кристаллических телах приводит к дальнейшему уменьшению возможного числа независимых компонент тензора модулей упругости.

Анизотропия деформирования проявляется как зависимость коэффициентов линейного закона (3.8) от направления приложения нагрузки. Анизотропия свойственна монокристаллам и композитным материалам. Анизотропна древесина. В случае гексагональных или кубических кристаллов в системе главных осей тензор модулей упругости имеет 5 или 3 существенных упругих постоянных. В изотропном же теле по его определению тензор модулей упругости обладает одинаковыми компонентами в любой системе координат, что позволяет уменьшить число независимых упругих постоянных до двух. Перед тем, как показать это (см. также [Седов] т.1), уточним понятие изотропного материала.

Предположим, у нас имеется большой монолит (однородный слиток и т.п.) исходного материала, из которого вырезаются малые образцы стандартной формы для стандартных испытаний относительно некоторого физического закона, например, одноосного закона Гука (3.9) – растяжения вдоль оси образца и испытаний на кручение. С монолитом жёстко связана некоторая лабораторная система координат. Пусть в разных направлениях

относительно этой системы вырезаются образцы на растяжение. Направление приложения нагрузки отсчитывается относительно образца, и для образцов, вырезанных по-разному относительно осей системы координат монолита, приложенная сила будет образовывать разные углы с осями этой системы. Материал изотропен, если результаты испытаний, т.е., соотношения между компонентами тензоров деформации и напряжений в этих стандартных экспериментах не зависят от этих углов "выкраивания образцов".

Условие независимости результатов от системы координат накладывает очень жёсткие ограничения на компоненты компонент тензора E_{jlik} . Изменение "углов выкраивания" означает преобразование системы отсчёта (системы координат) проведения испытаний относительно системы монолита, и в изотропном теле приложении нагрузки, одинаковой относительно вырезанного образца, но разной относительно системы монолита, даёт одно и то же линейное соотношение между компонентами тензоров напряжений и деформаций. Т.е. компоненты тензора E_{jlik} одинаковы в любой системе координат, они образуют т.н. *изотропный тензор*. В тензорном исчислении показывается, что общий вид изотропного тензора 4-го ранга –

$$E_{jlik} = a \delta_{ij} \delta_{kl} + b \delta_{ik} \delta_{jl} + c \delta_{il} \delta_{jk} \quad (3.10)$$

где a, b, c – произвольные постоянные.

Анизотропный материал не обладает свойством независимости E_{jlik} от "угла выкраивания", и для него тензор модулей упругости не имеет подобного вида – упругих постоянных для записи закона Гука здесь необходимо больше. Далее без специальной оговорки мы всегда будем считать материал изотропным. Это выполнено для практически всех металлов, поскольку по строению они, как правило, поликристаллические, т.е., состоят из хаотически ориентированных кристаллов размером меньше или существенно меньше 1 мм: для изготовления металлического монокристалла требуются специальные усилия. В результате механической обработки ориентация зёрен поликристалла может частично принять преимущественное направление (при прокатке, волочении), и механические свойства могут быть не быть изотропными в указанном выше смысле. Но анизотропия невелика, может исчезнуть при термообработке, и часто ею пренебрегают.

Подставляя (3.10) в (3.8) и используя симметрию тензора деформаций, $\epsilon_{lk} = \epsilon_{kl}$, можно убедиться в том, что *независимых* коэффициентов в (3.10) будет только два:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl} &= (a \delta_{ij} \delta_{kl} + b \delta_{ik} \delta_{jl} + c \delta_{il} \delta_{jk}) \epsilon_{kl} = a \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon_{kl} + b \delta_{ik} \delta_{jl} \epsilon_{kl} + c \delta_{il} \delta_{jk} \epsilon_{kl} = a \delta_{ij} \epsilon_{kk} + (b + c) \epsilon_{ij} \equiv \\ &\equiv \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} . \end{aligned}$$

Общее линейное соотношение закона Гука для изотропного материала имеет вид (множитель 2 вводится для удобства дальнейшего использования):

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (3.11)$$

Таким образом, упругие свойства изотропного материала определены двумя постоянными, λ и μ , называемыми *постоянными Ляме*. Чаще в механике используются другие величины, связанные с ними. Перед тем, как их вводить, заметим, что из выражения (3.11) следует **параллельность главных осей тензоров напряжений и деформаций**. В самом, деле, если мы находимся в системе главных осей тензора деформаций, то ненулевыми в левой части будут только диагональные компоненты тензора напряжений. Это означает, что данные оси являются главными также и для σ_{ij} . Обратно, в любой координатной системе главных осей σ_{ij} , как нетрудно видеть, недиагональные компоненты тензора ϵ_{ij} будут нулевыми. Таким образом, тензоры напряжений и деформаций упругого изотропного материала *соосны*. Из (3.11) видно также, что соосность не подразумевает пропорциональность – например, при одноосном растяжении стержня тензор напряжений имеет только одно ненулевое главное значение, а тензор деформаций – три, как будет видно из дальнейшего.

Из равенства (3.11) можно сразу получить соотношение между объёмной деформацией и гидростатической составляющей напряжения. Свернув (3.11) по j , получим соотношение между первыми инвариантами тензоров:

$$\sigma_{jj} \equiv \sigma = 3\lambda \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{jj} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{jj} \equiv 3K\varepsilon, \quad (3.12)$$

где обозначено $\varepsilon_{jj} \equiv \varepsilon$, а величина K – *объёмный модуль*. В случае жидкости сдвиговая жёсткость отсутствует, $\mu=0$, и тогда $\lambda=K$.

При гидростатическом сжатии $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, p – давление, а при малых деформациях 1–й инвариант (2.18) тензора деформации – это объёмная деформация $(V - V_0)/V_0$, поэтому (3.12) – это простейшая форма *уравнения состояния*, т.е. соотношения, связывающего давление с относительным изменением объёма (в общем случае, объёма и внутренней энергии):

$$I_1 = \varepsilon_{kk} = \Delta V/V, \quad p \equiv \sigma/3 = -K \varepsilon_{kk} = -K \Delta V/V.$$

Чаще используют и указывают в таблицах механических свойств материалов другие постоянные, одна из которых – упомянутый выше модуль упругости E , измеряемый при одноосном нагружении стержня (сжатии-растяжении), когда отлична от нуля только одна компонента напряжений (но не деформаций). Выразим E через коэффициенты Ляме. Рассмотрим 1–осное сжатие в системе главных осей, и пусть ось Ox_1 совпадает с направлением сжатия. Получим, согласно определениям:

$$\sigma_{11} \equiv E\varepsilon_{11} = \lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{11}. \quad (3.13)$$

Выразим (3.13) только через одну диагональную компоненту ε_{11} , для чего внесём в него выражение для $\varepsilon \equiv \varepsilon_{ii}$ из (3.12) для объёмного сжатия:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}\lambda/(3\lambda+2\mu) + 2\mu \varepsilon_{11} \rightarrow (1-\lambda/(3\lambda+2\mu))\sigma_{11} = (2\lambda+2\mu)/(3\lambda+2\mu) \sigma_{11} = 2\mu \varepsilon_{11} \quad (3.14)$$

$$\text{откуда} \quad - \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}. \quad (3.15)$$

Далее, запишем одно из соотношений (3.11) в компонентах:

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \varepsilon_{11}. \quad (3.16)$$

Выражая левую часть с помощью (3.11) и (3.15) имеем:

$$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \varepsilon_{11} = \sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + (\lambda+2\mu) \varepsilon_{11}, \quad (3.17)$$

откуда получаем соотношение между главными компонентами деформации:

$$\left(\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} - \lambda - 2\mu \right) \varepsilon_{11} = \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad (3.18)$$

При одноосном сжатии вдоль главной оси 1 в силу симметрии главные значения деформации в перпендикулярных направлениях одинаковы: $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$, откуда –

$$v\varepsilon_{11} \equiv \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22}, \quad (3.19)$$

(Это соотношение можно получить также из (3.11), положив $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$.) Величина

$$v = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \quad (3.20)$$

есть упругая постоянная, называемая *коэффициентом Пуассона*. Как следует из (3.19), этот коэффициент даёт отношение *относительного* поперечного расширения ε_r к

относительному осевому укорочению ε_z при одноосном сжатии. Для металлов $\nu=0,25\div 0,35$, для стали $\nu=0,3$. Для несжимаемого тела, у которого объём при деформировании не изменяется, $\nu=0,5$, что несложно показать, рассмотрев малые деформации при продольном деформировании кругового цилиндра:

$$1 \equiv V/V_0 = (1+\varepsilon_z)(1+\varepsilon_r)^2 \approx (1+\varepsilon_z)(1+2\varepsilon_r) \approx 1+\varepsilon_z+2\varepsilon_r, \text{ откуда } \varepsilon_r = -0,5\varepsilon_z.$$

(Этот вывод аналогичен геометрической интерпретации первого инварианта тензора деформаций (2.18) – малое относительное изменение объёма в случае несжимаемости будет нулевое.) Т.к. при сжатии объём не увеличивается, а при растяжении – не уменьшается, отсюда следует, что $\nu \leq 0,5$. Случай $\nu=0,5$ – особый, и при упругой деформации всегда $\nu < 0,5$.

Величина $\mu=G$ называется также *модулем сдвига*. Происхождение названия ясно из закона Гука для девиаторных компонент, выписанного ниже. В таблицах упругих свойств материалов обычно указывают коэффициент Пуассона и модуль упругости – это стандартные, или *технические упругие постоянные*.

Объёмный модуль выражается через стандартные постоянные:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (3.21)$$

Выразим через них постоянные Ляме:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.22)$$

Закон Гука (3.8) примет вид:

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right). \quad (3.23)$$

Если с использованием (3.12) равенство (3.11) записать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma \lambda \delta_{ij} / (3\lambda + 2\mu) + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

то закон Гука (3.23) несложно обратить и, подставив выражения для коэффициентов Ляме, выразить деформации через напряжения в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left((1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk} \right). \quad (3.25)$$

3.3. Единицы измерения и порядки величин

В системе единиц СИ давление и упругие постоянные измеряются в $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$. Другие единицы: техническая атмосфера (она же – бар, bar: стержень) $1 \text{ атм} = 10^5 \text{ Па}$, используемая преимущественно для характеристики давления, как и мм.рт.ст. (Тор). В технической литературе, особенно XX в., применяется единица, скомпонованная из "килограмм–силы": $1 \text{ кг/мм}^2 = 10^7 \text{ Па} = 10 \text{ МПа}$. В англоязычной литературе встречаются также: psi (pound per square inch) и ksi (kilopsi).

Порядок упругих величин: у алюминия (чистого) $E=70 \text{ ГПа}$, у стали (сплав железа с углеродом) $E=210 \text{ ГПа}$, у вольфрама: $E=410 \text{ ГПа}$ – самый жёсткий металл, у алмаза $E=(900-1050) \text{ ГПа}$ – самый жёсткий материал. Жёсткость конструкционных материалов означает малую деформируемость под номинальной нагрузкой (в чём, собственно, наряду с прочностью, состоит их основное преимущество): деформация стального стержня длиной 1 м при продольном напряжении в 1000 атм (что эквивалентно 100 МН/мм^2)

составляет $\varepsilon_{11} \cong 0,1 \text{ ГПа}/200\text{ГПа} = 5 \cdot 10^{-4}$, т.е. удлинение (упругое) метровой стальной проволоки сечением 1мм^2 при подвеске на ней гири массой 10 кг составляет 0,5мм. Все величины даны при нормальной температуре.

3.4. Шаровая и девиаторная составляющие тензоров напряжений и деформаций

Наряду с тензорами напряжений и деформаций используются также соответствующие *тензоры-девиаторы* (deviate – отклоняться, в данном случае – от "гидростатического" состояния) –

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + 1/3\delta_{ik}\sigma, \quad \text{где } \sigma = J_1(\sigma_{ik}) = \sigma_{kk} = -3p \quad (3.26)$$

$$\varepsilon_{ik} = e_{ik} + 1/3\delta_{ik}e, \quad \text{где } e = J_1(\varepsilon_{ik}) = \varepsilon_{kk} \quad (3.27)$$

Величины s_{ik} и e_{ik} – тензоры-девиаторы напряжений и деформаций, соответственно. Они отличаются от исходных тензоров диагональными компонентами. Свёртки девиаторов (первые инварианты) – нулевые:

$$\delta_{ik} s_{ik} = s_{kk} = 0, \quad \delta_{ik} e_{ik} = e_{kk} = 0 .$$

В жидкостях и газах касательные напряжения при отсутствии движения равны нулю, и тензор напряжений в этом случае сводится к шаровому, т.е. задаётся только величиной давления.

3.4.1. 3-н Гука для девиаторных составляющих

Подставим выражения для девиаторных составляющих тензоров напряжений и деформаций в закон Гука в форме (3.11):

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + \delta_{ik}\sigma/3 = \lambda\delta_{ik}\varepsilon + 2\mu(e_{ik} + \delta_{ik}\varepsilon/3) = (\lambda + 2\mu/3)\delta_{ik}\varepsilon + 2\mu e_{ik} .$$

Выделяя выражение

$$\sigma/3 = (\lambda + 2\mu/3)\varepsilon \quad \text{или} \quad p = -K\varepsilon , \quad (3.28)$$

т.е. соотношение для давления, получаем для девиаторов:

$$s_{ik} = 2\mu e_{ik} , \quad \text{или} \quad s_{ik} = 2Ge_{ik} . \quad (3.29)$$

Соотношение (3.29) вместе с уравнением для давления (3.28) эквивалентны закону Гука, т.е. они вместе задают определяющее соотношение линейно-упругого материала. Аналогичным образом, и при неупругом деформировании в большинстве случаев можно сдвиговые деформации и напряжения рассматривать независимо от деформаций и напряжений сжатия. Соответственно этому определяющее соотношение обычно строится по-отдельности для указанных гидростатической и сдвиговой составляющих. Физически проведение этого различия основано на том, что неупругое поведение типа пластичности часто связано только со сдвиговыми микродеформациями – необратимым скольжением вдоль атомных плоскостей микрокристаллов, из которых состоит материал, не сопровождающимся заметным изменением среднего расстояния между атомами, т.е. объёма. Часто, поэтому, определяющим соотношением называют только соотношение между девиаторами тензоров напряжений и деформаций. В численных расчётах с помощью уравнения состояния $p=p(V)$ подходящего вида и определяющего соотношения одновременно и единообразно моделируется механическое деформирование как твёрдого тела, так и, например, воздействующего на него через линию контакта сжатого газа.

3.4.2. Энергия упругого сжатия и энергия формоизменения.

Покажем, что наряду с разложением тензоров на шаровой и девиаторный, аналогичное разделение существует и для работы (энергии) деформирования. Подставим в формулу

Клапейрона (3.4) для потенциальной упругой энергии тензоры в виде сумм девиаторной и шаровой составляющих и выделим слагаемые с девиаторами:

$$U = 1/2(s_{ij} + 1/3\delta_{ij} \sigma)(e_{ij} + 1/3\delta_{ij} \epsilon) = 1/2(s_{ij} e_{ij} + \sigma/3\delta_{ij} e_{ij} + \epsilon/3\delta_{ij} s_{ij} + 1/9\delta_{ij} \sigma\delta_{ij} \epsilon) = 1/2(s_{ij} e_{ij} + 0 + 0 + \sigma\epsilon/3) = 1/2 s_{ij} e_{ij} + \sigma\epsilon/6 \equiv U_S + U_P \quad (3.30)$$

Здесь учтено, что для девиаторов свёртка $\delta_{ij}s_{ij}=s_{ii}=0$, $\delta_{ij}e_{ij}=e_{ii}=0$. По определению

$$U_S = 1/2 s_{ij} e_{ij} = G e_{ij} e_{ij} \quad (3.31)$$

– объёмная энергия формоизменения,

$$U_P = \sigma\epsilon/6 = K\epsilon^2/2 \quad (3.32)$$

– объёмная энергия сжатия. При отсутствии объёмного сжатия (объём неизменен, $\epsilon=0$) $U_E = U_S$, и, наоборот, при чистом сжатии (касательные компоненты $=0$) $U_E = U_P$. Здесь использованы выражения (3.28) и (3.29) закона Гука для шаровой и девиаторной составляющих.

4. Система уравнений МДТТ

4.1. Уравнения статической теории упругости

Соберём выписанные ранее уравнения и определения (1.8), (1.14), (2.13), (3.23) вместе. Получим, вместе с граничными условиями (1.9), систему уравнений статической задачи теории упругости:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0, \quad (4.1a)$$

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \quad (4.1б)$$

$$\sigma_{ij} = 2G(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \epsilon_{kk}), \quad (4.1в)$$

$$\epsilon_{ik} = 1/2(u_{i,k} + u_{k,i}), \quad (4.1г)$$

$$p_i = \sigma_{ik} n_k. \quad (4.1д)$$

В численном расчёте обычно обязательны *граничные условия по перемещениям* (кинематические гран. условия) – условия частичного (для отдельных компонент) или полного закрепления на некоторой подобласти, обычно принадлежащей внешней границе:

$$u_i(t) = 0, \quad x_i \in \partial\Omega_s. \quad (4.1e)$$

Из линейности уравнений (4.1) по напряжениям, деформациям и перемещениям следует принцип суперпозиции – возможность наложения (суммирования) различных решений системы уравнений при условии их удовлетворения одинаковым кинематическим гран. условиям и определяющим соотношениям (4.1). Сумма решений служит новым решением данной задачи.

Система (4.1а–д) содержит 18 уравнений, не являющихся тождествами, для $9+6+3=18$ неизвестных, следовательно, она полна. Справедлива теорема единственности решения (см., например, [6] и другие руководства по теории упругости). Важные частные случаи постановки задачи:

- задача в напряжениях – *первая краевая задача*: определить равновесные напряжения при заданной нагрузке;
- задача в перемещениях – *вторая краевая задача*: определить равновесные напряжения и перемещения при заданных перемещениях границ.

На практике чаще рассматривается смешанная постановка, когда заданы оба типа граничных условий.

Для исследования и получения аналитических решений можно исключить из системы уравнений компоненты напряжения и деформации с помощью з–на Гука и кинематических соотношений, тогда получаются *уравнения в перемещениях*. Деформации и напряжения определяются по ним. Для целей формулировки численных методов решения будут использованы уравнения в общей форме (4.1а–д).

Замечание об условиях совместности. Компоненты вектора перемещений – три непрерывно дифференцируемые функции $u_i(x)$, заданные на расчётной области, полностью описывают изменение конфигурации деформируемого тела. Если же, наоборот, заданы шесть известных функций координат в качестве возможных компонент *тензора деформаций*, то система из шести уравнений (4.1г), рассматриваемая как уравнения для трёх *неизвестных* функций $u_i(x)$, будет переопределена на три уравнения. Следовательно, шесть уравнений должны быть зависимы, шесть компонент тензора деформаций должны

удовлетворять добавочным трём условиям, исключаяющим три лишних уравнения. Эти дополнительные соотношения между компонентами тензора деформаций, получаемые в разной форме, называются *уравнениями (условиями) совместности*. Вывод их см. в учебниках по теории упругости. Они иллюстрируют тот факт, что не всякий набор из 6-ти компонент тензора (деформаций), подставленный в левые части кинематических соотношений (4.1г), отвечает какому-либо распределению перемещений, т.е., деформированному состоянию. Если взять неизвестными компоненты тензоров деформации и напряжений, оставить три условия совместности, 3-н Гука и уравнения равновесия, то получится система *уравнений в напряжениях* (см. [6]).

Таким образом, условия совместности важны как уравнения задачи упругости в напряжениях. При построении большинства конечно-элементных процедур численного интегрирования уравнений равновесия условия совместности не используются, т.к. перемещения обычно служат основными переменными задачи. Подробнее о постановках задачи в теории упругости см., например, [6], [12] и другие курсы теории упругости.

4.2. Нелинейность механического поведения

Охарактеризуем кратко условия, при которых теряется линейность выписанных выше уравнений упругости. *Физической нелинейностью* механического поведения материала называют отклонение поведения материала от линейно-упругого, подчиняющегося 3-ну Гука (3.8), т.е., физическая нелинейность заключена в определяющем соотношении материала. Для металлов нелинейность может быть заметна уже при очень малых деформациях ($\sim 10^{-4}$), причём поведение при разгрузке может быть близким к полностью упругому. При больших деформациях появляется заметная необратимость и связанная с этим диссипация. Для расчёта физически нелинейных задач строятся специфические определяющие соотношения, основанные на экспериментальных данных.

Геометрическая нелинейность проявляется в определении тензора деформаций и возникает, когда перемещения становятся большими настолько, что в формулах (2.12) становятся существенными квадратичные члены. В этом случае выражение (2.13) для тензора малых деформаций, вычисленное для перемещений относительно исходного состояния, будет неточным. Такое возможно для материалов типа резины. Для приближённого расчёта конечного состояния полная деформация разбивается на несколько последовательных малых (ср. соотношения (2.2) и (2.3)). Часто деформация сопровождается поворотом относительно фиксированной системы координат на угол, который может быть как малым, так и большим. Поворот локально не изменяет напряжённого состояния, но для описания состояния всего деформируемого тела его необходимо учитывать. Это делается при последовательном численном интегрировании уравнений квазистатики. Процедура охарактеризована в разделе по численным методам.

Отметим, что формальное использование нелинейных выражений типа (2.12) вместо уравнения (4.1г) приводит к уравнению равновесия, в котором присутствует общий тензор механической дисторсии. Такая постановка задачи оказывается бесперспективной, даже для численной процедуры (см. обсуждение, например, в [10]). Численно такие задачи решаются поэтапно. Для более точного описания геометрически нелинейного поведения, вместе с детализацией описания кинематики следует использовать и более общие определения тензора напряжений (см. обсуждение ниже). Часто геометрическая нелинейность сопровождается физической нелинейностью (пластичность etc.).

4.3. Ускорение деформируемого тела. Динамика сплошной среды

4.3.1. Уравнение движения сплошной среды

В случае, когда общее равновесие отсутствует, неуравновешенные силы, действующие на малый объём, приводят к его ускорению: $a_i = d^2u_i / dt^2$. Динамика может быть формально, на основе принципа д'Аламбера рассмотрена как "обобщённая статика", её систематическое изложение вместе с процедурой численной дискретизации отнесено в конец настоящего курса. Ниже некоторые понятия динамики рассмотрены в качестве непосредственного обобщения введённых в статике понятий на нестационарные задачи и их первичной классификации.

Кинематические и материальные уравнения (определяющие соотношения), полученные в статике, в динамике также формально пригодны, а уравнение равновесия малой материальной частицы (произвольного малого элемента объёма деформируемого тела) превращается в уравнение движения частицы. Её ускорение определяется законом сохранения импульса: сумма приложенных сил, внутренних и внешних, равна изменению импульса, определяемого через скорость частицы и текущую плотность –

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{du_i}{dt} \right) = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + f_i \quad (4.2)$$

Закон движения: $x(t) = a(t) + u(t)$ получается двукратным интегрированием по времени уравнений движения (4.2) – *динамического* уравнения. Внутренняя сила здесь представлена тензором напряжений Коши, относимым к текущей конфигурации и определяемым в условиях малых деформаций, координаты также соответствуют текущей конфигурации. Способ применения этой записи динамического закона обсуждается ниже.

Если пространственные производные относятся к фиксированной декартовой системе координат (эйлерово описание), запись (4.2) корректна, но требует расшифровки полной производной в левой "кинематической" части. Переходя к скоростям деформации (их корректное определение в общем случае также требует отдельного рассмотрения, см. [4], [5]), полную скорость изменения импульса в ед. объёма можно выразить как *субстанциональную* производную:

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{du_i}{dt} \right) = \dot{u}_k \frac{\partial \rho \dot{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \rho \dot{u}_i}{\partial t} \quad (4.3)$$

В терминах сеточных методов это можно интерпретировать так: полное изменение импульса малого объёма при эйлеровом описании движения относительно неподвижной сетки складывается из его приращения (первое слагаемое), связанного с притоком в ячейку сетки по трём направлениям, и приращением за счёт ускорения (второе).

Для проведения параллели с задачами динамики жидкости рассмотрим подробнее также "динамическую" правую часть уравнения (4.2), относящуюся к силам, действующим на частицу. Тензор напряжений раскладывается на сумму шаровой и девиаторной составляющих –

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + s_{ik}, \quad \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} = -\delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial s_{ki}}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ki}}{\partial x_k},$$

которые описывают силы сжатия, связанные с градиентом давления, и сдвиговые силы –

$$\rho \frac{d^2u_i}{dt^2} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + f_i \quad (4.4)$$

Если напряжения зависят только от деформаций, уравнение движения (4.4) вкупе с определяющими соотношениями (4.1в) и кинематическими уравнениями (4.1г) описывает (с учётом сделанных замечаний) динамику движения упругого деформируемого тела. При движении напряжения могут зависеть не только от деформации, но и от *скоростей*

деформации (вязкое трение), что в жидкостях играет определяющую роль и может иметь место также и в твёрдых телах (т.н., *реологическое* поведение, например, *ползучесть*). Зависимость от скорости деформации выражается отдельно для шаровых и девиаторных составляющих тензора скоростей деформаций, через два разных коэффициента вязкости. Формальное различие между жидкостью и твёрдым телом заключено только в определяющем соотношении, причём в определённых случаях сплошная среда проявляет свойства и твёрдого тела, и жидкости. В случае ньютоновской жидкости влияние девиаторов деформаций на напряжения отсутствует, определяющее соотношение через *скорости* деформаций представляется в виде (где введена вторая вязкость β и сдвиговая вязкость обозначена обычным образом через μ , по аналогии с девиаторным соотношением (3.29)):

$$\sigma_{ik} = s_{ik} - p\delta_{ik}, \quad p = p_c + p', \quad p_c = -3K\varepsilon, \quad p' = -\beta\dot{\varepsilon}, \quad s_{ik} = 2\mu\dot{e}_{ik}. \quad (4.5)$$

Здесь введён тензор скоростей деформаций \dot{e}_{ik} и, в полной аналогии, также и тензор–девиатор скоростей деформаций \dot{e}_{ik} , равный разности тензора \dot{e}_{ik} и изотропного тензора $\frac{1}{3}\dot{\varepsilon}\delta_{ik}$, скорости объёмной деформации. Отметим, что приближённое равенство производной по времени от тензора деформаций тензору скоростей деформаций соблюдается только при малых деформациях (см. [6]), но в качественных рассуждениях этим пренебрегаем.

Вместе с соотношениями (4.5) и кинематическими уравнениями (2.13) уравнение (4.4) описывает гидродинамику сжимаемой вязкой жидкости (обычно используется несколько другая форма записи, чем). Подставив (4.4) в (4.3), получим соотношения, соответствующие правой части уравнения движения для сжимаемой вязкой жидкости (взято $p=p_c$, объёмная сила отсутствует), левая часть которого приведена в (4.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial(\beta\dot{\varepsilon})}{\partial x_i} - \frac{\partial(2\mu\dot{e}_{ik})}{\partial x_k} = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} 2\mu \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \beta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \beta \frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Единый подход к изложению механики сплошной среды, включающий динамику твёрдого тела и жидкости, принят, например, в упоминаемых работах [4], [5]. Уравнение (4.2), т.е. закон сохранения импульса, служит основой для общего описания динамики сплошной среды. В гидродинамике, где существенна только объёмная деформация, применяют эйлеров подход, в котором движение связано не с частицами среды, а с фиксированным разбиением на малые подобъёмы, "сквозь" которые движется среда. В уравнениях законов сохранения появляются дополнительные "конвективные" слагаемые, описывающие перетоки через границы ячеек импульса, массы, энергии (ср. (4.3)).

4.3.2. Замечания о подходах к описанию движения сплошной среды

Способ описания движения – "эйлеров" или "лагранжев", играет в численном моделировании динамики сплошной среды определяющую роль. С формально-математической стороны они эквивалентны, но физически различны. Приводимые ниже замечания иллюстрируют следующий тезис: способ кинематического описания определяется механическими свойствами среды. Для МДТГ естественным служит лагранжево описание, для МЖГ – эйлерово. Немногие исключения (задачи взрыва и т.п.) не противоречат этому правилу.

В лагранжевом описании основными неизвестными служат исходные координаты точек (материальные координаты) и компоненты напряжения (в жидкости – давление). Лагранжевы уравнения движения жидкости приведены, например, в [13], уравнения МДТТ для конечных деформаций в общей лагранжевой формулировке приведены в [24] и [Коробейников]. С точки зрения кинематики лагранжево описание движения сводится к определению во времени закона преобразования (2.4) относительно исходного расположения точек. Термин "лагранжев" используется в вычислительной гидродинамике также для описания движения дискретных частиц, не деформируемых, но движущихся и взаимодействующих с окружающей средой и, возможно, друг с другом.

Лагранжево описание с точки зрения геометрии и механики – естественное и наиболее последовательное: отслеживая траектории движения точек (малых частиц), мы следим за подобластями, физически одними и теми же. Такой подход в расчёте облегчает описание эволюции материальных тел, физические свойства которых могут меняться в зависимости от их механического состояния. При численном решении мы следим за движением дискретных точек (узлов) сетки, "частицей" служат ячейки (конечные элементы) сетки, которые при изменении расстояния между узлами сетки соответственно преобразуются. В численной реализации в МДТТ вычисления на новом шаге идут относительно новой отсчётной конфигурации ("updated Lagrangian" или "related Lagrangian" метод), преобразованной в соответствии с движением на данном шаге. Закон преобразования координат (2.4) используется в линейаризованной форме (2.5). В соответствии с этим законом преобразуется тензор напряжений в уравнении движения (4.2), и это уравнение формально почти не меняется.

Основной недостаток лагранжева подхода в численном моделировании движения непрерывной среды – труднопреодолимые вычислительные трудности при расчётах больших деформаций. Они связаны с тем, что метрика в лагранжевой системе при деформировании становится неевклидовой, и для дифференцирования по пространственным координатам с формальной точки зрения следует привлекать общий аппарат тензорного анализа, что катастрофически усложняет формулировку уравнений и вычислительной процедуры. В частности, даже в updated Lagrangian формулировке для увеличения точности приходится вводить более сложные определения тензора напряжений etc. Эволюция системы во времени усложняет геометрию лагранжевой системы (расчётной сетки) и, начиная с деформаций порядка сотен процентов, расчётная процедура обычно становится неточной и труднореализуемой из-за взаимодействия деформированных подобластей. Деформирование расчётной сетки при описании кинематики деформаций в десятки процентов хорошо работает в МДТТ. Но в *механике жидкости*, с вихрями и тангенциальными разрывами лагранжев подход абсолютно непригоден. Компромиссные варианты, в которых решение на каждом шаге переинтерполируется на фиксированную сетку (типа методов "крупных частиц"), фактически являются разновидностью эйлера подхода.

Структура потока жидкости является следствием механических свойств среды: в ньютоновской жидкости отсутствуют касательные напряжения в состоянии покоя, и, с точки зрения гипотезы сплошной среды, за исключением случая гидростатического сжатия, не имеет смысла говорить о деформациях вязкой ньютоновской жидкости – в воде, например, касательные деформации практически ненаблюдаемы, если исключить поверхностные эффекты.

Статика ньютоновской жидкости тривиальна, здесь понятие о напряжённо-деформированном состоянии избыточно, интерес представляет только давление, вариации которого связаны только с внешними объёмными силами. Касательные напряжения возникают только в динамике, и в технике обычно интерпретируются опосредованно (через коэффициент трения, сопротивление etc.). Соответственно, в динамике жидкости основное кинематическое понятие – это не перемещение и не деформация, а *скорость* течения и скорость деформации, которая в квазистационарном потоке не зависит от

начального состояния и в ньютоновской жидкости простым образом связана с девиаторными напряжениями. Поэтому в МЖГ естественно применение *эйлерового* описания динамики сплошной среды. В нём с помощью уравнений сохранения массы, импульса и энергии отслеживается движение (компоненты скорости) среды "сквозь" пространство, что численно соответствует движению сквозь ячейки *фиксированной* сетки.

В эйлеровом описании уравнения баланса массы, импульса и энергии записываются *через скорости в данной точке пространства*, а не через координаты материальных частиц. В этом состоит преимущество эйлеровой формулировки для вязкой жидкости – в исключении закона преобразования (2.4) из рассмотрения, что существенно упрощает описание динамики жидкости, в которой напряжённое состояние определяется не конфигурацией, а только скоростью и давлением.

Недостатки суть продолжение достоинств: вследствие отсутствия понятия материальной частицы, в эйлеровом численном расчёте напрямую не отслеживаются траектории, свободные границы, подвижные поверхности контакта (фаз жидкости). Для этого вводятся дополнительные средства ("маркеры", "индикаторы фазы"). Закон сохранения массы имеет нетривиальный вид, в нём, как и в уравнениях баланса импульса и др., присутствуют конвективные слагаемые. В случае импульса конвективные слагаемые, описывающие перенос "сквозь" фиксированные малые подобъёмы расчётной области, нелинейны. Эти конвективные слагаемые представляют основную трудность для численной аппроксимации, именно они определяют степень точности эйлеровой численной схемы дискретизации уравнений МСС.

Что касается МДТТ (динамики, не говоря уже о статике), где деформации и перемещения существенны для описания состояния конструкции, то эйлеров подход, с единой фиксированной системой координат и скоростями, при больших деформациях практически неосуществим в чистом виде, вследствие проблем с формой уравнений, аппроксимацией границ и аналогичных. При малых же перемещениях и деформациях различие подходов исчезает, поскольку изменение формы не учитывается в уравнениях.

Таким образом, использование лагранжева подхода в численных методах МДТТ обусловлено физической (механической) природой моделируемой среды (ДТТ), равно как использование эйлерова подхода естественно для динамики жидкости (жидкость-газ). При этом полная лагранжева формулировка уравнений МСС (относительно исходных координат) практически не используется в эволюционных задачах, численное решение уравнений МДТТ при больших деформациях основано на геометрических приёмах её упрощённой реализации: преобразование сетки при пошаговом вычислении, поворот тензора напряжений при преобразовании сетки, использование тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа, вычисленного на сетке предыдущего шага (см. ниже). Всё это – атрибуты численной реализации лагранжева подхода.

Подводя итог, соответствие подходов в описании динамики ДТТ и жидкости можно интерпретировать так. Жидкость не имеет формы, понятие "*де-формация*" ей чуждо. Твёрдое тело имеет форму. Форма может быть определена как совокупное расстояние между всевозможными точками тела (что отражено в способе определения тензора деформаций), она связана с координатами. Следовательно, описание, оперирующее координатами точек (лагранжево), естественно для ДТТ. Для (однородной) жидкости, не имеющей формы, координаты её малых "частиц" – избыточная информация. Движение жидкости описывается подходом (эйлеровым), в котором основную роль играют скорости. Определение закона движения "частиц" лежит вне решения эйлеровых уравнений.

4.3.3. Лагранжев подход к описанию движения ДТТ

Вернёмся к механике твёрдого тела, в которой деформации относительно невелики (в пределах десятков–сотен процентов, как правило – много меньше), и лагранжев подход естественен. В частности, в случае упругого деформирования исходное состояние, к которому тело возвращается при снятии нагрузки, служит естественной отсчётной

конфигурацией, а в общем случае лагранжев подход привлекателен также тем, что автоматически отслеживает границы подобластей. Эти границы при конечно-элементной дискретизации являются границами деформируемых конечных элементов. Соответственно, для лагранжевых частиц сохранение массы при изменении объёма от V_0 до V соблюдается автоматически и выражается уравнением (см. также (2.19)):

$$\rho V = \rho_0 V_0. \quad (4.7)$$

Это уравнение используется для вычисления текущего значения плотности как физической характеристики деформируемого элемента.

Аналогичным образом, в лагранжевом подходе изменение импульса также следует рассматривать относительно некоторой отсчётной конфигурации, которая известна. Но для этого необходимо иметь возможность относить к этой отсчётной конфигурации также текущие силы, действующие на частицу. Закон движения, взятый для данной материальной частицы как интеграл по её границам (это – внутренняя сила, которая по отношению к малому объёму суть внешняя поверхностная сила) и по объёму (это – внешняя объёмная сила), имеет вид [5]:

$$\int_{A_0} n_i T_{ik}^0 dA + \int_{V_0} \rho_0 g_k(\mathbf{a}) dV = \int_{V_0} \rho_0 \frac{d^2 u_k}{dt^2} dV. \quad (4.8)$$

Здесь введён тензор T_{ik}^0 , относящий силы, действующие в текущей конфигурации на частицу со стороны остального материала, к исходной конфигурации. Он называется *первым тензором напряжений Пиолы-Кирхгофа* (П-К: иногда называется также *тензором псевдонапряжений*). В дифференциальной форме (сводя поверхностный интеграл к объёмному, и используя произвольность малого объёма) получим уравнение, сходное с уравнением (4.2) или его статической формой (4.1а):

$$\frac{\partial T_{ik}^0}{\partial x_i} + \rho_0 g_k = \rho_0 \frac{d^2 u_k}{dt^2}. \quad (4.9)$$

Введённый первый тензор Пиолы-Кирхгофа T_{pq}^0 связан с тензором напряжений Коши σ_{ik} соотношением

$$T_{ik}^0 = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial Y_i}{\partial x_q} \sigma_{qk} \equiv \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial a_i}{\partial x_q} \sigma_{qk}, \quad (4.10)$$

которое получается с использование формулы (2.23) для преобразования сегмента площади при деформировании. Тензор T_{ik}^0 оказывается в общем случае несимметричным, что приводит к большим трудностям, в частности, при конструировании определяющих соотношений с симметричным тензором деформаций. Чтобы их обойти, используют симметризованный *второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа*, \tilde{T}_{pq}^0 , связанный с тензором T_{ik}^0 и тензором напряжений Коши σ_{ik} соотношениями

$$\tilde{T}_{ik}^0 = T_{iq}^0 \frac{\partial a_k}{\partial x_q}, \quad \sigma_{ik} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \tilde{T}_{pq}^0 \frac{\partial a_q}{\partial x_k}. \quad (4.11)$$

Уравнение движения приобретает более сложный вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_p} \tilde{T}_{pq}^0 \frac{\partial x_k}{\partial a_q} \right) + \rho_0 g_k = \rho_0 \frac{d^2 u_k}{dt^2}. \quad (4.12)$$

но симметрия тензора и, вместе с ней, ряд полезных свойств восстанавливаются.

Второй тензор напряжений П-К применяется при численном решении задач с большими деформациями и поворотами, например, в известном коммерческом пакете ANSYS LS DYNA. Как отмечалось, численное решение таких задач на практике осуществляется путём преобразования на расчётном шаге текущей отсчётной геометрической конфигурации к новой и соответствующего переопределения механических величин. Если сравнить уравнения (4.2) и (4.9), то их различие только в определении тензора напряжений – оба могут быть интерпретированы следующим образом: "В начальный момент в исходной конфигурации к малому объёму (в данной точке) приложены силы, задаваемые тензором напряжений, определённым по данной конфигурации. Эти силы вызывают ускорение данного объёма и прирост импульса к некоторому моменту времени $t_0 + \Delta t$." Т.к. речь идёт об ускорении лагранжевой частицы, плотность в уравнении берётся относительно недеформированного объёма, если интегрирование идёт по V_0 . Различие в тензорах появляется при пересчёте сил на новую конфигурацию в новый момент времени $t_0 + \Delta t$ – в обоих подходах может быть учтён поворот рассматриваемого малого объёма, но в тензоре П-К учитывается также изменение границ малого объёма (в тензоре напряжений Коши оно учтено в его приращении за счёт физики, но не геометрии). На следующем шаге по нагружению напряжённое состояние, служащее исходным для последующего шага, будет определено с тензором П-К точнее. Численная процедура обновления напряжённого состояния при расчёте последовательного деформирования рассмотрена при изложении МКЭ.

4.4. Динамика и статика

В зависимости от ускорения при деформировании, подход к решению эволюционной задачи МДТТ может быть различным. Если приложенная нагрузка постоянна во времени и нас не интересует история её установления, то задача – *статическая* – задавшись исходным состоянием системы при отсутствии нагрузки, определить конечное состояние равновесия при её приложении. (В случае сложного поведения среды постановка и статической задачи может быть непростой, например, в механике грунтов.) Если возникающие при приложении нагрузки ускорения в точках тела малы, но история нагружения существенна, то ускорениями пренебрегают, но задача – *квазистатическая* – следует рассмотреть поэтапное деформирование с последовательно меняющейся нагрузкой. Квазистатическая задача, в которой нагружение изменяется за n шагов, эквивалентна n статическим задачам. Статическая задача с большими деформациями также может решаться как квазистатическая, с поэтапным изменением нагрузки до заданной – *метод установления*. Если ускорение существенно, задача *динамическая*. Классификация динамических задач приведена в разделе по динамике.

В качестве граничных условий по перемещениям, могущих в нестационарной задаче зависеть от времени, задаётся закон движения точек соответствующего подмножества $\partial\Omega_s$ границы области Ω , $\partial\Omega_s \subseteq \partial\Omega$ (пример – задача о внедрении с постоянной скоростью абсолютно жёсткого штампа в пластичную среду) –

$$u_i(t) = x_i(t) - x_i(0) \quad , \quad x_i \in \partial\Omega_s \quad (4.13)$$

Возможность эффективного прямого решения общей системы уравнений статики (4.1а–е) и тем более, динамики (4.2)–(4.1б–е) появилась с развитием численных методов и ЭВМ. Классическое применение динамики – это колебательные явления: колебания механических систем и распространение волн в простых конфигурациях. Масштаб скорости в динамике определяется скоростью звука, порядок которой в твёрдых телах $\sim 10^3 \div 10^4$ м/с. Отсюда понятно, что значительная часть задач МДТТ носит (квази)статический характер. Масштаб времени деформирования и ускорения часто может быть оценен.

Например, при расчёте НДС в элементах конструкции двигателя внутреннего сгорания масштаб времени нагружения при вспышке смеси в цилиндре двигателя составляет $\sim 10^{-4}$ с (0,5 периода вращения вала), перемещение стенок $\sim 10^{-5}$ м, ускорение – очень мало. Масштаб времени распространения возмущения в деталях конструкции $\sim 0,2 \div 0,5 \cdot 10^{-4}$ с. Но, вследствие того, что плотность газа пренебрежимо мала относительно массы двигателя, малости деформаций, быстрого затухания возмущений во всей конструкции, мер, принимаемых против резонанса периодического движения поршня с колебаниями стенок цилиндров, нагружение стенок (но не газа) даже в таком быстром процессе может с определённой точностью рассматриваться квазистатически, без учёта инерции.

Далее мы будем рассматривать (квази)статические режимы, полагая ускорения нулевыми, и основная система уравнений будет системой уравнений равновесия (4.1а–е). Большая часть введённых понятий сохранится и при рассмотрении динамики деформируемого твёрдого тела.

Отметим, что в число фундаментальных законов движения сплошной среды входит также баланс её энергии. В упругом теле, нагружаемом потенциальными силами, при отсутствии тепловых эффектов сохранение механической энергии следует из уравнений механики (см. ниже рассмотрение для статики). Тепловые эффекты упругого деформирования (например, повышение температуры при адиабатическом сжатии) в металлах малы, вследствие малости коэффициента теплового расширения. Механические эффекты внешнего нагрева сводятся к тепловому расширению и зависимости механических свойств от температуры. Поле температуры при решении квазистатической термомеханической задачи можно полагать заданным извне. Уравнение энергии при квазистатическом нагружении может понадобиться, например, для вычисления тепловых эффектов при неупругом деформировании, когда часть механической работы идёт в тепло. Если существенно взаимопревращение механической энергии и тепловой, например, в динамике при больших давлениях и скоростях деформации, уравнение энергии вместе с уравнением состояния обязательно входит в полную систему уравнений механики рассматриваемой среды. Эти вопросы рассмотрены в разделе по динамическим задачам.

4.5. Принцип возможных работ

Из уравнений равновесия и кинематических уравнений можно получить важное следствие, в достаточно общих предположениях эквивалентное самим этим уравнениям –

Принцип возможных (виртуальных) работ:

В состоянии равновесия механической системы работа всех приложенных к ней сил на любом бесконечно малом изменении конфигурации системы, совместимом со связями (кинематическими условиями), равна 0.

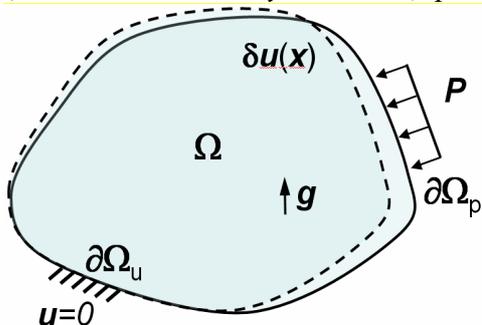


Рис. 4.1. К принципу возможных работ

на подsegmente $\partial\Omega_u$; б) отсутствие граничных условий – на segmente $\partial\Omega_0$. Вся граничная поверхность:

$$\partial\Omega = \partial\Omega_p \cup \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_0.$$

Перемещения, совместимые со связями (граничными условиями по перемещениям), называют также *кинематически допустимыми*, или *возможными*, или *виртуальными*. Требование совместимости со связями существенно. Обозначим возможные перемещения как δu_i . На любом сегменте границы $\partial\Omega$ области Ω (рис. 4.1) может быть: а) задано г.у. одного из двух типов – силовые на подsegmente $\partial\Omega_p$ и кинематические – на

В состоянии покоя на границе $\partial\Omega_u$ кинематические г.у. сводятся к условиям закрепления:

$$u_i(\mathbf{r})=0, \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega_u. \quad (4.14)$$

Выражение для работы всех сил имеет вид:

$$\delta W = \delta P + \delta F + \delta U = \int_{\partial\Omega_p} p_i \delta u_i dA + \int_{\Omega} f_i \delta u_i dV - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = 0. \quad (4.15)$$

где δP – полная работа внешних сил, приложенных к границе, δF – полная работа внешних объёмных сил, δU – полная работа внутренних сил (для внешних сил вид (4.15) очевиден, для внутренних сил обсуждался ранее). Взятый сам по себе, сформулированный принцип устанавливает свойство стационарности функционала (4.15) механической работы на малых перемещениях, т.е., является вариационным принципом, где виртуальное перемещение – это вариация функции перемещений. Далее показывается, что принцип (4.15) следует из уравнений равновесия. Он используется при формулировке вычислительной схемы метода конечных элементов, поскольку из него могут быть получены уравнения равновесия. При решении задач статики твёрдого тела из выражения для виртуальной работы при определённых предположениях о напряжённом состоянии можно определить внутренние силы (см. примеры ниже). В отсутствие диссипации этот принцип выражает закон изменения механической потенциальной энергии при работе внешних сил.

Пусть в каждой точке $\mathbf{r} \in \Omega$ задано виртуальное перемещение $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})$. Его компоненты – функции $\delta u_i(\mathbf{r})$, которые равны нулю за пределами области Ω , непрерывно дифференцируемы, удовлетворяют определённому условию малости в заданных пределах δ_i и совместимы с кинематическими г.у.:

$$|\delta u_i(\mathbf{r})| < \delta_i, \quad \delta u_i(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega_u.$$

В остальном функции $\delta u_i(\mathbf{r})$ произвольны. Интегрированием по объёму тела составляем вариацию левой части уравнения равновесия (4.1a), которая тождественно равна нулю:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i d\Omega = \delta W \equiv 0. \quad (4.16)$$

После преобразований величина $(\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i$ окажется возможной (виртуальной) работой всех рассматриваемых сил в единице объёма на распределённом виртуальном перемещении. Проинтегрируем первое слагаемое в (4.16) по частям с использованием тождества (производная произведения функций):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} \delta u_i &= (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij} (\delta u_i)_{,j}, \\ \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i d\Omega &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} (\delta u_i)_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Первое выражение в правой части (4.17) суть интеграл от дивергенции, который выражается через интеграл от потока на границе по теореме Гаусса–Остроградского. Преобразуем этот граничный интеграл, используя заданные граничные условия:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_{\partial\Omega_u + \partial\Omega_p + \partial\Omega_o} (\sigma_{ij} \delta u_i) n_j ds = \int_{\partial\Omega_p} (\sigma_{ij} n_i) \delta u_j ds = \int_{\partial\Omega_p} p_j \delta u_j ds.$$

Здесь интегралы по границам $\partial\Omega_u$ и $\partial\Omega_o$ тождественно обращаются в нуль, поскольку на первой из них вариация перемещений – нулевая, а на второй – нагрузка нулевая и, соответственно, напряжения – нулевые. В интеграле по границе по напряжениям $\partial\Omega_p$ перегруппируем множители и воспользуемся силовым граничным условием:

$$(\sigma_{ij}\delta u_i)n_j = (\sigma_{ij}n_j)\delta u_i = p_j\delta u_i ,$$

откуда видно, что интеграл равен работе внешних сил на виртуальном перемещении точек этой границы. Во втором слагаемом правой части (4.17) введём тензор малой деформации, связанной с малым виртуальным перемещением:

$$\delta\epsilon_{ij} = 1/2 ((\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}) ,$$

и выразим через него градиент –

$$(\delta u_i)_{,j} = 2\delta\epsilon_{ij} - (\delta u_j)_{,i} .$$

Пользуясь симметрией тензора напряжений, переставляя индексы, отсюда получаем:

$$\sigma_{ij}(\delta u_i)_{,j} = 2\sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij} - \sigma_{ij}(\delta u_j)_{,i} = 2\sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij} - \sigma_{ji}(\delta u_j)_{,i} = 2\sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij} - \sigma_{ij}(\delta u_i)_{,j} = \sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij} ,$$

т.е., работу внутренних сил в ед. объёма. По-другому можно сказать, что величина $(\delta u_i)_{,j}$ – это тензор градиентов перемещений (2.18), связанный с вектором виртуальных перемещений, и он раскладывается на сумму тензоров малых деформаций и малых вращений (2.26). Из предыдущего равенства следует, что:

$$\sigma_{ij}(\delta u_i)_{,j} = \sigma_{ij}(\delta\epsilon_{ij} + \delta\omega_{ij}) = \sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij} , \text{ т.е. } \sigma_{ij}\delta\omega_{ij} = 0 ,$$

т.е., на виртуальном перемещении поворота совершаемая внутренними силами работа равна нулю, и это следует также из того, что полная свёртка (по обоим индексам) симметричного и антисимметричного тензоров равна нулю. Поэтому последнее равенство также можно использовать для преобразования второго слагаемого в правой части (4.17).

В результате исходное тождество (4.16) преобразуется в требуемое равенство (4.15):

$$\delta W = \int_{\partial\Omega_p} p_i\delta u_i dA + \int_{\Omega} f_i\delta u_i d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij} d\Omega = \delta P + \delta F + \delta U = 0 .$$

5. Частные постановки статической задачи МДТТ

Последующие несколько глав посвящены различного рода редукции основной системы уравнений (4.1), важной в приложениях и при формулировке численных методов. Приведены также базовые сведения из механики упруго-пластического деформирования, являющейся основой для построения численных моделей пластического деформирования. Ниже по тексту рассмотрены упрощения, важные для постановки задачи МДТТ в различных случаях.

5.1. Способы упрощения уравнений и г.у. задачи упругости.

Принцип Сен-Венана

Сложность системы уравнений упругости в основном связана с количеством неизвестных функций – компонент тензоров и векторов. Упрощение постановки задачи в направлении уменьшения количества неизвестных достигается различными способами, в частности, следующими:

- **Упрощение конфигурации и граничных условий** как общий способ уменьшения числа неизвестных: убирание несущественных деталей, сведение нагрузок или способов закрепления к более простым, что может уменьшить несимметрию. Например, неоднородное на границах нагружение можно свести к более простому с помощью рассматриваемого ниже принципа Сен–Венана. Точечное закрепление в отдельных местах (болтовые, клёпочные соединения) можно свести к равномерно распределённому, а задача о локальной концентрации напряжений в месте крепления может быть рассмотрена отдельно;
- **Понижение размерности**, используя симметрию. Упрощение конфигурации может позволить достичь симметрии: трансляционной, вращательной и др. Например, может быть известно, что по одной из координат рассматриваемая конструкция и нагрузка приблизительно однородны (трансляционная симметрия), тогда искомое решение вдоль этой координаты не должно изменяться, следовательно, размерность или "осность" задачи может быть понижена;
- **Угадывание решения: использование правдоподобных гипотез** об искомом НС, например, гипотезы плоских сечений при изгибе;
- **Угадывание решения: использование линейности уравнений и принципа суперпозиции** – как отмечалось выше, из более простых решений можно скомбинировать более сложные путём линейной суперпозиции, а сложное НС иногда можно разложить на несколько более простых.

Ниже описаны постановки задач теории упругости для некоторых случаев однородных тел простой формы. При сведении к этим простым конфигурациям и получении решения задач часто используются указанные упрощающие предположения.

Начнём с важного вопроса о необходимой степени точности учёта неоднородной нагрузки или закрепления (упрощение граничных условий). Распределение силы, действующей на границе тела, не всегда однородно, к тому же, оно локально может зависеть от напряжённого состояния. Возникает вопрос – приложимы ли идеализированные постановки задачи с однородными нагрузками к реальным случаям, когда нагрузка локальна и напряжение в окрестности её приложения может быть распределено сложным образом? Ответ даёт интуитивно понятный, хотя в общем случае строго не обоснованный, принцип сведения сложной системы нагрузок к более простой:

***Принцип Сен-Венана:** Пусть два одинаковых тела находятся под действием различных, но статически эквивалентных систем нагрузок, каждое под действием своей,*

приложенных в малой области. Действия, оказываемые в каждом теле внутренними силами в точках, достаточно удалённых от места приложения сил, одинаковы.

Здесь "статическая эквивалентность" двух систем нагрузок означает, что они имеют одинаковую главную силу (равнодействующая) и главный момент (сумма моментов). "Достаточная удалённость" в конкретных случаях определяется размером области приложения сил, габаритами системы, допуском на точность решения задачи. Например, для стержня (рис.5.1) однородность растяжения практически достигается на расстояниях величиной нескольких его толщин, даже в случае (с). Это используется при моделировании стержневых конструкций – стержни, большие определённой длины, рассматриваются как бесконечно тонкие, т.е. без учёта поперечной неоднородности распределения сил (при наличии соответствующей геометрической симметрии).

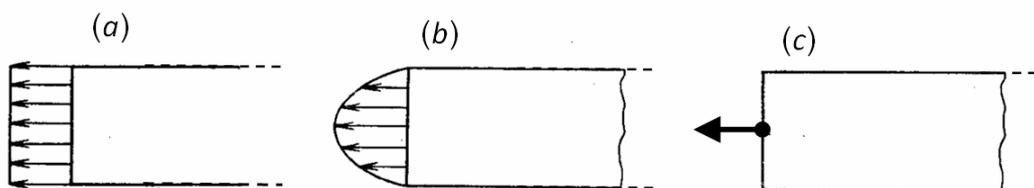


Рис. 5.1. К принципу Сен-Венана (показана также зона неоднородности)

Отметим, что степень неоднородности НС в общем случае определить сложно, причём, в частности, при испытаниях на растяжение и разрыв отклонения растягивающих напряжений от однородных могут быть положительными, т.е. стержень будет разрушаться не там, где ему положено. Для минимизации этого эффекта при испытаниях на растяжение цилиндрического стержня рабочий участок образца находится на определённом расстоянии от мест закрепления, на концах образец утолщается и обеспечен плавный переход (рис. 5.2 – [пояснить причину утолщения](#)). Выбор конфигурации здесь очень важен, поскольку испытание на растяжение – это единственный простой способ достижения однородного по образцу напряжённого состояния, необходимого для экспериментального определения механических характеристик материала [3]. Ниже этот случай рассмотрен подробнее.

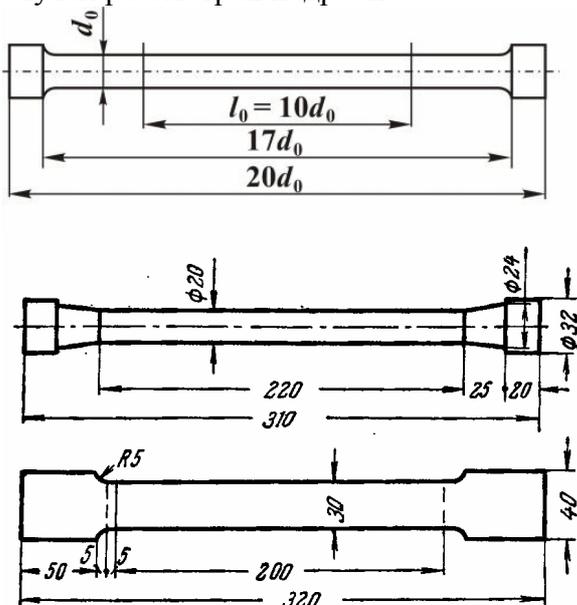


Рис. 5.2. Стандартный образец на растяжение – сверху, длинный, внизу укороченные образцы [3]

5.2. Плоские одно- и двумерные задачи

Пример упрощения путём понижения размерности дают плоские задачи (рассмотрение в декартовой системе координат). В плоской задаче НДС оказывается двухосным, либо может быть сведено к таковому. Ниже рассмотрены постановки плоских задач, в которых по одному, либо двум направлениям неизменны следующие факторы:

- форма области и механические свойства материала – т.е. контур сечения и распределение мех. свойств в плоскости, перпендикулярной этому направлению;
- нагрузка – т.е. условия по напряжениям и объёмные силы;
- связи – т.е. граничные условия по перемещениям.

Подчеркнём, что эти условия должны выполняться вместе. Направления однородности формы и нагрузок отвечают направлениям одной из главных осей тензоров напряжений и деформаций во всём теле. Напомним, что среда полагается изотропной. Частным случаем плоской задачи служит рассматриваемая ниже одномерная задача о растяжении стержня.

5.2.1. Стержень: 1–мерная конфигурация, неоднородное нагружение

Стержень – это тело, сечение которого неизменно в одном направлении, вдоль образующей цилиндра или призмы, причём поперечные размеры много меньше длины. Это – простейший элемент строительных конструкций. Для него рассматриваются задачи, в которых один или оба его конца закреплены разными способами, а параметры нагружения изменяются только вдоль длины. Часто полагается, что стержень работает только на сжатие, а для других случаев используют другие его наименования. Стержень, работающий на изгиб, называется балкой. Другие случаи нагружения, которые могут быть сведены к одномерным, приведены на рис.5.3.

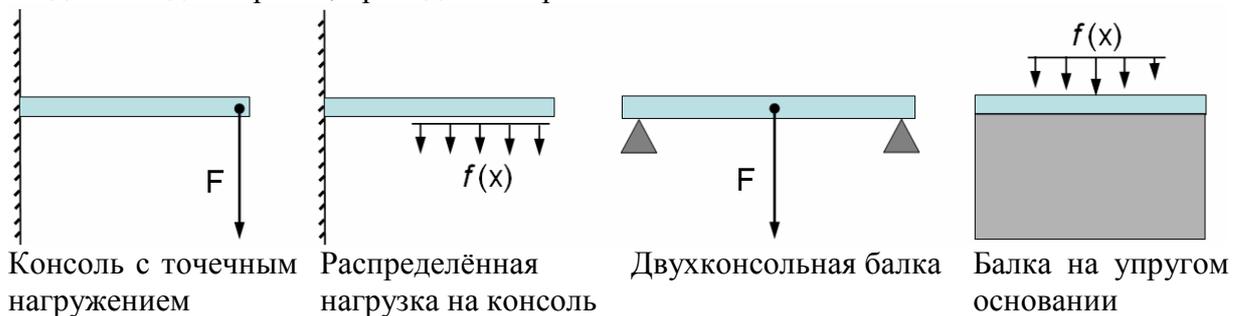


Рис. 5.3. Примеры стержней с поперечным нагружением разного типа.

Если один конец стержня закреплён, а нагрузка приложена на другом конце, постановка задачи известна как *общая задача Сен-Венана*.

Пусть ось Oz направлена вдоль образующей призматического стержня (цилиндра). К концам стержня, находящегося в равновесии, могут быть приложены силы и моменты, вызывающие деформирование следующих типов (рис.5.4):

- F_z – сжатие-растяжение;
- Q_x, Q_y – поперечный изгиб;
- M_x, M_y – чистый изгиб;
- M_z – кручение.

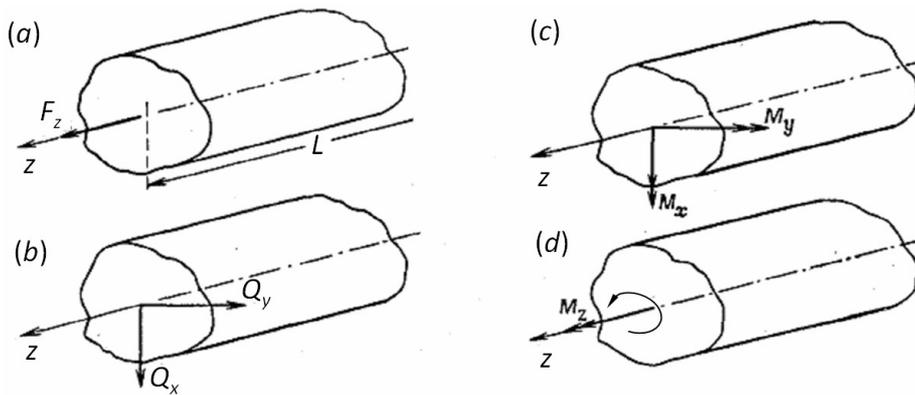


Рис. 5.4. К общей задаче Сен–Венана

Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок. В случае, когда стержень достаточно длинный, согласно принципу Сен–Венана существует протяжённая область, в которой распределение напряжений по сечению однородно.

Рассмотрим простейший случай (рис.5.4а) – осевое растяжение (сжатие). Позже будут рассмотрены случаи (с) – чистый изгиб и (б) – поперечный изгиб. Случай d) можно найти в литературе ([6], [10], [12] и др.). Пусть к одному из торцов однородного стержня постоянного сечения, находящегося в равновесии, приложена нагрузка, растягивающая, либо сжимающая, действующая вдоль оси стержня Oz. Нагрузка однородно распределена по плоской границе стержня. Второй конец стержня ($z=0$) закреплён относительно *продольных* перемещений: $u_z=0|_{z=0}$.

На боковые перемещения не накладываем ограничений (при численном решении на втором конце стержня должно быть введено закрепление по поперечным перемещениям в одной точке, чтобы зафиксировать позицию). Силовые граничные условия запишем в предположении нагрузки внешним давлением p (см. п.1.3.2):

$$\text{торец : } \sigma_{zz} = -p, \quad \text{боковая граница : } \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0.$$

Определим напряжённое состояние и перемещения. В силу однородности приложенной нагрузки в поперечной плоскости и отсутствия стеснения и нагружения в боковых направлениях, напряжённое состояние может полагаться однородным вдоль оси (введение дополнительной гипотезы – допущения Фойгта–Митчелла: трансляционная симметрия продольного нагружения). Отсюда следует, с учётом формулы Коши, что тензор напряжений имеет во всей области только одну ненулевую компоненту σ_{zz} . В уравнениях равновесия остаётся только одна ненулевая компонента напряжений,

$$\partial \sigma_{zz} / \partial z = 0, \quad \text{откуда, учитывая г.у.} \quad \sigma_{zz} = \text{const} = -p.$$

Из закона Гука (3.9), записанного для одноосного случая, получаем –

$$\sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon_{zz} = \sigma_{zz} / E, \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{zz} = -\nu \sigma_{zz} / E.$$

Подставляем в уравнения для перемещений:

$$\varepsilon_{zz} = \partial u_z / \partial z = -p / E, \quad \varepsilon_{yy} = \partial u_y / \partial y = \nu p / E, \quad \varepsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x = \nu p / E.$$

Кинематические соотношения можно проинтегрировать, используя равенство нулю касательных деформаций: для перемещений по Oz – от нулевых значений координат в месте закрепления, для поперечных направлений – от оси Oz :

$$u_z = -z p / E, \quad u_x = x \nu p / E, \quad u_y = y \nu p / E.$$

В данном случае решение получено без интегрирования общей системы уравнений равновесия, с помощью допущения, позволившего определить вид тензора деформаций, не решая всю задачу. Это допущение состояло в предположении одномерности НДС в случае одномерности приложенной нагрузки и одномерности области.

5.2.2. Двумерная плоская задача теории упругости

Рассмотрим постановку двумерной плоской задачи теории упругости. Обозначения координат и компонент возьмём буквенные, x, y, z . В плоском случае рассматриваемое тело однородно по толщине, точнее, заключено между двумя параллельными плоскостями, а нагружение, связанное с приложением внешних сил или закреплением, лежит в этой плоскости. Возникающее НДС предполагается однородным по одному из направлений (Oz), называемых далее "осевым", и может быть неоднородным по остальным двум. Эта однородность по осевому направлению может проявляться по отношению к одной из двух характеристик НДС, связанных друг с другом определяющим законом:

(а) однородность напряжений (или отсутствие) : $\sigma_{zz}(x,y)=\text{const} (=0)$,

(б) однородность деформаций (или отсутствие) : $\varepsilon_{zz}(x,y) = \text{const} (=0)$.

Такие условия постулируются при рассмотрении плоской задачи теории упругости, которая, соответственно, может быть сформулирована в двух видах: случай *плоских напряжений* и случай *плоских деформаций*. Какой именно случай реализуется в плоской конфигурации, определяется постановкой задачи, позволяющей установить соответствующую симметрию, обычно, приближённую, напряжённого или деформированного состояния. Рассмотрим примеры.

Плоско-напряжённое состояние (ПН) – пример: плоское упругое тело малой толщины – пластина: $t \ll R$, нагружаемая только силами в своей плоскости, не зависящими от z . Толщина пластины однородна. Состояние ПН реализуется, когда приложенные силы лежат в плоскости пластины, и закрепление не препятствует деформированию по Oz . В этом случае компоненты *напряжения* по оси Oz отсутствуют почти во всём объёме пластины (рис.5.5 слева). Предполагается отсутствие коробления (изгиба) при приложении сжимающей нагрузки в плоскости пластины.

Вопросы. Зачем нужно условие малости толщины? Могут ли напряжения быть плоскими в толстой пластине? Привести примеры.

Плоско-деформированное состояние (ПД) возникает в призматическом теле, нагружаемом поверхностными силами, не зависящими от z , и не имеющими составляющей вдоль Oz в условиях, когда *деформация* вдоль направления Oz отсутствует. Стандартный пример состояния ПД приведён на рис.5.5 справа: боковое нагружение длинного $t \gg R$ призматического тела, либо тела, закрепленного на торцах (плоскость, перпендикулярная оси Oz) относительно осевых перемещений. Наличествуют перемещения в поперечных направлениях.

Вопросы. Нужно ли здесь условие "бесконечной длины"? Обязано ли призматическое тело (стержень) быть длинным для получения плоского НДС? При каком условии напряжения будут плоскими в коротком стержне? Привести примеры.

Возможно ли, чтобы при плоском нагружении, как напряжение, так и деформация в осевом направлении были нулевыми? Почему?

Выпишем уравнения равновесия, опуская те компоненты тензора напряжений, которые должны быть нулевыми по условию симметрии, определяемому состоянием. Касательные компоненты тензоров напряжений и деформаций имеются только в направлениях основной плоскости Oxy , в противном случае в плоскости Oxy имелись бы напряжения и перемещения направления Oz (поскольку $\tau_{zx}=2G\varepsilon_{zx}$, $\tau_{zy}=2G\varepsilon_{zy}$, и не реализуется, ни случай ПН, ни случай ПД). Следовательно, в 2–мерном случае имеются следующие ненулевые компоненты напряжений:

$$\sigma_{xx}=\sigma_{xx}(x,y), \quad \sigma_{yy}=\sigma_{yy}(x,y), \quad \sigma_{xy}=\tau_{xy}=\tau_{xy}(x,y), \quad \sigma_{zz}=f(\sigma_{xx},\sigma_{yy}).$$

Из уравнений равновесия (4.1а) останутся следующие:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (5.1)$$

Здесь для упрощения записи мы не учитываем объёмные силы. Если их вводить, они не должны зависеть от z .

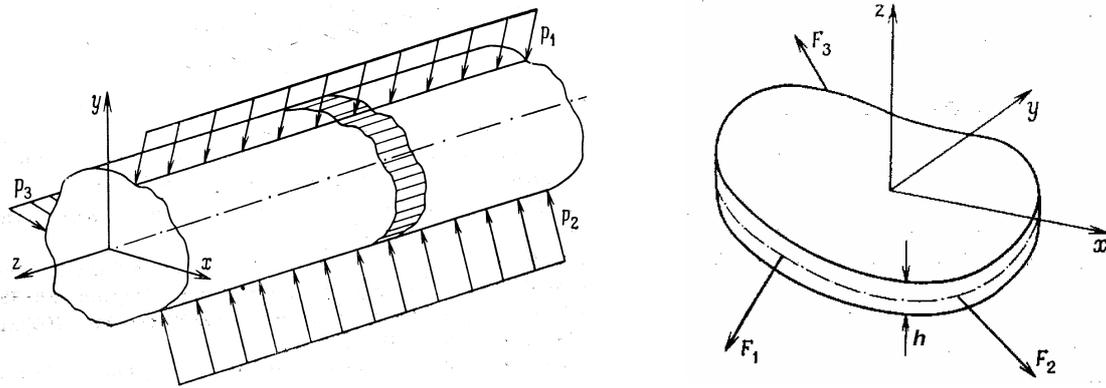


Рис.5.5. Плоско-деформированное (слева) и плоско-напряжённое (справа) состояния

Перемещения вычисляются относительно координат начального положения:

$$u=u(x,y)=x-a_x, \quad v=v(x,y)=y-a_y, \quad w(x,y)\equiv const. \quad (5.2)$$

Кинематические уравнения (4.1г) сводятся в данном случае к следующим:

$$\epsilon_{xx}=\partial u/\partial x, \quad \epsilon_{yy}=\partial v/\partial y, \quad \epsilon_{xy}=1/2(\partial u/\partial y+\partial v/\partial x), \quad \epsilon_{yz}=\epsilon_{xz}=0, \quad \epsilon_{zz}=\partial w/\partial z. \quad (5.3)$$

При рассмотрении определяющего соотношения возьмём сначала случай плоских деформаций: везде $\epsilon_{zz}=0$. Постановка граничных условий по напряжениям и перемещениям подчинена условию плоской симметрии, других ограничений нет.

Закон Гука (4.1в) -

$$\sigma_{ij} = 2G(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk}),$$

для компонент в плоскости деформирования примет вид:

$$\sigma_{xx} = 2G(\epsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon), \quad \sigma_{yy} = 2G(\epsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon), \quad \sigma_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad (5.4)$$

а в перпендикулярном направлении имеем:

$$\sigma_{zz} = 2G(\epsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon), \quad \text{или (см. (3.25))} - \quad \epsilon_{zz} = \frac{1}{E}((1+\nu)\sigma_{zz} - \nu\sigma), \quad (5.5)$$

где $\epsilon=\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}+\epsilon_{zz}$ и $\sigma=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}$ - первые инварианты деформаций и напряжений.

В случае плоских деформаций $\epsilon=\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}$ и $\sigma=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}$. В случае плоских напряжений $\sigma=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}$ и $\epsilon=\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}+\epsilon_{zz}$. Таким образом, различие случаев плоских напряжений и плоских деформаций формально проявляется через запись закона Гука. Он выражает предположение о типе двумерного НДС - какие из осевых компонент напряжений и деформаций имеют ненулевое значение: в случае плоских деформаций нет z -деформаций (закрепление по направлению вдоль оси Oz), но возникает ненулевое z -напряжение, постоянное вдоль оси. В случае плоских напряжений нет z -напряжения (свободные торцевые границы пластины), но возникает ненулевая z -деформация, причём, из (5.5) следует, что она однородна в плоскости задачи: $\epsilon_{zz}=\partial w/\partial z=const$.

Заданное условие плоского деформирования, $\epsilon_{zz}=0$ или напряжения, $\sigma_{zz}=0$, позволяет выразить неизвестную осевую (zz) компоненту тензора напряжения или деформации через существенные компоненты в плоскости деформирования.

В случае *плоских напряжений* в левом соотношении (5.5) левая часть σ_{zz} нулевая, и осевая деформация

$$0 = (1 - 2\nu)\epsilon_{zz} + \nu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}), \text{ или } \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}). \quad (5.6)$$

Таким образом, роль коэффициента Пуассона при изменении толщины в случае плоских напряжений играет величина $\nu/2(1 - \nu)$ [12]. Сам коэффициент Пуассона как упругая постоянная остаётся. Аналогичное (5.6) соотношение для осевой компоненты *напряжений* в случае *плоских деформаций*, когда $\epsilon_{zz} = 0$, можно получить, складывая уравнения (5.4) и вспоминая определение модуля объёмного сжатия вместе с его выражением (3.19):

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (5.7)$$

Внося (5.6) в уравнения (5.4), получим для только существенных компонент:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\nu\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}), \quad \sigma_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma_{xy}, \quad (5.4a)$$

что будет использовано при построении матрицы деформации в двумерном МКЭ.

Аналитические решения плоской задачи представляют собой классическую проблему теории упругости и разобраны во всех руководствах (см. [4], [6], [10], [12] и др.).

5.3. Цилиндрическая система координат. Осевая симметрия

Конфигурация нагружаемого тела, условия закрепления и распределение нагрузки часто обладают осевой симметрией или могут быть сведены к таковым. В этом случае координаты удобно исчислять в зависимости от расположения точки z вдоль оси симметрии, расстояния R до этой оси и полярного угла θ . Эти величины связаны с декартовыми координатами законом преобразования:

$$x_1 = x = R \cos \theta, \quad x_2 = y = R \sin \theta, \quad x_3 = z. \quad (5.8)$$

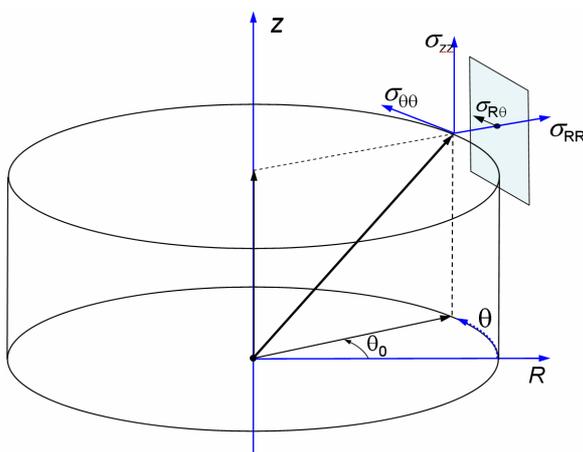


Рис. 5.6. К названиям компонент тензоров в цилиндрических координатах

компонент тензоров в этой системе отвечают касательным направлениям – *радиальное, окружное и осевое* (рис. 5.6). Плоскость, перпендикулярную оси Oz , будем называть плоскостью вращения, а плоскости, содержащие ось ЦСК – осевыми плоскостями.

Введём обозначения компонент тензоров напряжений и деформаций в местной декартовой системе, определяемой глобальной ЦСК (у диагональных компонент иногда будет опускаться один индекс):

Осевые:

Касательные направления к координатным линиям цилиндрической системы координат (ЦСК), задаваемым уравнениями (5.8) – радиальное, окружное и осевое, в каждой точке ортогональны, и в каждой точке с координатами z_0, R_0, θ_0 можно ввести местную декартову систему с осями, направленными вдоль этих касательных, с координатами $R - R_0, R \sin(\theta - \theta_0) \approx R(\theta - \theta_0), z - z_0$. В этой местной системе могут быть вычислены локальные напряжения, перемещения и деформации. Названия направлений и компонент векторов и диагональных

$$\sigma_{11} \equiv \sigma_{zz} \equiv \sigma_z, \quad \varepsilon_{zz} \equiv \varepsilon_z, \quad (5.9)$$

Радиальные:

$$\sigma_{22} \equiv \sigma_{RR} \equiv \sigma_R, \quad \varepsilon_{RR} \equiv \varepsilon_R, \quad (5.10)$$

Окружные (кольцевые):

$$\sigma_{33} \equiv \sigma_{\theta\theta} \equiv \sigma_\theta, \quad \varepsilon_{\theta\theta} \equiv \varepsilon_\theta, \quad (5.11)$$

Касательные:

$$\sigma_{12} \equiv \tau_{R\theta}, \quad \sigma_{13} \equiv \tau_{Rz}, \quad \sigma_{23} \equiv \tau_{\theta z}, \quad \varepsilon_{12} \equiv \varepsilon_{R\theta}, \quad \varepsilon_{13} \equiv \varepsilon_{Rz}, \quad \varepsilon_{23} \equiv \varepsilon_{\theta z}. \quad (5.12)$$

Если в общих уравнениях равновесия и кинематических уравнениях рассматривать указанные компоненты тензоров и векторов перемещений как функции криволинейных цилиндрических координат, уравнения примут вид (см., например, [6]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R\sigma_{RR}) + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{Rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{R} + f_R &= 0, \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\sigma_{R\theta}}{R}) + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + f_\theta &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R\sigma_{Rz}) + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Тензор деформаций в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{RR} &= \frac{\partial u_R}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_R}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{R\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \varepsilon_{zR} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_R}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Закон Гука, т.е., алгебраическое соотношение между компонентами тензоров напряжений и деформаций, рассматриваемыми в местной декартовой системе координат, очевидно, останется неизменным:

$$\sigma_{pq} = 2G \left(\varepsilon_{pq} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \delta_{pq} \varepsilon \right) = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-2\nu) \varepsilon_{pq} + \nu \delta_{pq} \varepsilon \right), \quad (5.15)$$

где каждый из индексов p, q принимает значения R, θ, z .

Уравнения (5.13)–(5.14) сложнее их аналога в декартовых координатах, их основное достоинство в том, что они позволяют упростить постановки задачи в случаях круговой симметрии или зависимостей только от полярного угла и радиуса. Рассмотрим примеры.

5.3.1. Осевая симметрия. Задача о толстостенной трубе

Если область осесимметрична, и нагружение вместе с гран. условиями не зависит от полярного угла θ , в выписанных уравнениях эта зависимость также должна отсутствовать, т.е., производные по этому углу нулевые. Но две касательные компоненты $\sigma_{R\theta}$ и $\sigma_{z\theta}$, остаются (при кручении), и система (5.13)–(5.14) будет довольно громоздкой.

Если, далее, касательные напряжения на площадках окружного направления нулевые, уравнения равновесия примут вид:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R\sigma_{RR}) + \frac{\partial \sigma_{Rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{R} + f_R = \frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{\partial \sigma_{Rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{RR} - \sigma_{\theta\theta}}{R} + f_R = 0,$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R\sigma_{Rz}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \frac{\partial \sigma_{Rz}}{\partial R} + \frac{\sigma_{Rz}}{R} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 . \quad (5.16)$$

С точки зрения кинематики деформирования этот случай аналогичен случаю плоских деформаций, в котором появилась осесимметричная окружная деформация (ср. кинематические соотношения (5.3) и (5.14)) и связанное с ней окружное напряжение. Соответственно, решение, т.е. распределение компонент тензоров напряжений и деформаций, будет одинаковым в любой плоскости осевого сечения, и в цилиндрической системе задача 2–мерная: две существенные координаты в местной системе координат и круговая симметрия, приводящая к однородности НС вдоль координатных окружностей. В лабораторной декартовой системе такое напряжённое состояние будет трёхосным: присутствуют компоненты напряжений, отвечающие трём направлениям: осевому и радиальному с окружным. Два последних меняются вместе с азимутальным углом (Примеры: наддув изнутри симметричной трубы с заглушенными концами. При анализе тяжёлых аварий: корпус реактора с расплавом.)

Отметим, что при дискретизации методом конечных элементов двумерных задач нет нужды в использовании записи уравнений равновесия в цилиндрических, сферических или иных координатах, отличных от декартовых. Там применяются эквивалентные интегральные формулировки, аналогичные рассмотренному выше принципу виртуальных перемещений. В общем 3D случае нет необходимости применять криволинейные системы координат. В случае осевой симметрии достаточно рассмотреть систему уравнений при нулевом угле. Напряжённое состояние при этом рассматривается в локальной декартовой системе координат, и отличие постановок задач в случаях плоской и осесимметричной геометрии численно проявляется только в наличии окружных компонент тензоров и в записи деформаций через перемещения – например, в цилиндрических координатах следует использовать (5.14).

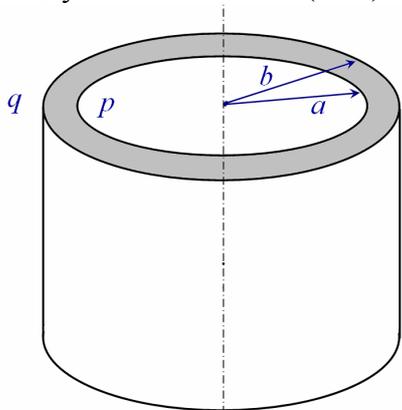


Рис. 5.7. К задаче о толстостенной трубе

При дальнейшем упрощении можно исключить зависимости (формы области, профиля нагрузок и граничных условий закрепления), либо от координаты R – это будет рассмотренное выше осевое нагружение, либо от z – получится толстостенная труба (рис. 5.7). Последний случай интересен тем, что простое решение существует в замкнутой форме, а сама задача встречается достаточно часто как идеализация элементов толстостенных трубчатых конструкций и отверстий в сплошном материале. Упругие решения при совместном осевом растяжении и радиальном нагружении толстостенной трубы могут быть получены путём линейной комбинации. Для простоты положим объёмную силу нулевой (она может зависеть от радиуса, например, при вращении). Уравнения для

компонент напряжений примут вид:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} (R\sigma_{RR}) \right) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{R} = \frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{\sigma_{RR} - \sigma_{\theta\theta}}{R} = 0 , \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 . \quad (5.17)$$

Решение можно получить, сведя уравнения в частных производных к обыкновенным. Пусть внутренний радиус трубы конечной длины L равен a , внешний – b . Введём давление внутри и вне трубы, запишем гран. условия на внутренней и внешней границах:

$$\sigma_{RR} = -p, \quad R = a, \quad \sigma_{RR} = -q, \quad R = b . \quad (5.18a)$$

При положительном давлении p только изнутри труба будет распираться, при положительном давлении q только снаружи – сжиматься.

Условия на торцах трубы, т.е. по координате z , можно задавать, либо по напряжениям:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \quad (5.18б)$$

либо по перемещениям при $z = 0, z = L$:

$$u_z = u_0. \quad (5.18в)$$

В случае условия (5.18б) получим аналог плоско-напряжённого состояния в плоскости вращения. В случае условия (5.18в) при $u_0=0$ имеем плоско-деформированное НС.

Распишем деформации согласно (5.14), заменив частную производную на полную:

$$\varepsilon_{RR} = \frac{du_R}{dR}, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_R}{R}, \varepsilon_{zz} = \frac{du_z}{dz}, \varepsilon_{R\theta} = \varepsilon_{Rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0, \varepsilon = \varepsilon_{RR} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} + \frac{du_z}{dz}. \quad (5.19)$$

Решение ищем в перемещениях. Вносим выражения для деформаций в 3-н Гука (5.15):

$$\sigma_{RR} = 2G\left(\varepsilon_{RR} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\right) = \frac{2G}{1-2\nu}\left((1-\nu)\frac{du_R}{dR} + \nu\frac{u_R}{R} + \nu\frac{du_z}{dz}\right), \quad (5.20а)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G\left(\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\right) = \frac{2G}{1-2\nu}\left(\nu\frac{du_R}{dR} + (1-\nu)\frac{u_R}{R} + \nu\frac{du_z}{dz}\right), \quad (5.20б)$$

$$\sigma_{zz} = 2G\left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\right) = \frac{2G}{1-2\nu}\left(\nu\frac{du_R}{dR} + \nu\frac{u_R}{R} + (1-\nu)\frac{du_z}{dz}\right), \quad (5.20в)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{Rz} = 0. \quad (5.20г)$$

Подставляя из уравнения (5.20в) σ_{zz} в уравнения равновесия, получим для производной осевого перемещения

$$\frac{d^2u_z}{dz^2} = 0, \quad \frac{du_z}{dz} = \varepsilon_{zz} = const.$$

Внося σ_{RR} и $\sigma_{\theta\theta}$ из (5.20) в (5.17), для радиального перемещения получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2u_R}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{du_R}{dR} - \frac{u_R}{R^2} = 0.$$

Это линейное однородное уравнение типа уравнения Эйлера (при наличии объёмной силы оно будет неоднородным). Его частные решения имеют вид CR^n , $n = \pm 1$, и общее решение:

$$u_R(R) = C_1R + \frac{C_2}{R}. \quad (5.21)$$

Используя это в выражении для компонент напряжений (5.20а-в), можем получить:

$$\sigma_{RR} = \frac{2G(C_1 + \nu\varepsilon_{zz})}{1-2\nu} - \frac{2GC_2}{R^2} \equiv A - \frac{B}{R^2}, \quad (5.22)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2G(C_1 + \nu\varepsilon_{zz})}{1-2\nu} + \frac{2GC_2}{R^2} \equiv A + \frac{B}{R^2}, \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \frac{2G(1-\nu)\varepsilon_{zz}}{1-2\nu} + \frac{4G\nu C_1}{1-2\nu} = \frac{G(4\nu C_1 + 4\nu^2\varepsilon_{zz} - 4\nu^2\varepsilon_{zz})}{1-2\nu} + \frac{2G(1-\nu)\varepsilon_{zz}}{1-2\nu} \\ &= 2\nu\frac{2G(C_1 + \nu\varepsilon_{zz})}{1-2\nu} + \frac{2G((1-\nu) - 2\nu^2)\varepsilon_{zz}}{1-2\nu} = 2\nu A + 2G(1+\nu)\varepsilon_{zz} = 2\nu A + E\varepsilon_{zz}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Здесь введены новые константы интегрирования A и B , связанные с константами C_1 и C_2 соотношениями:

$$C_1 = \frac{(1-2\nu)A}{2G} - \nu \varepsilon_{zz}, \quad C_2 = B/2G \quad (5.25)$$

Заметим, что $\sigma_{RR} + \sigma_{\theta\theta} = \text{const}$ по сечению трубы, а вместе с этим постоянен и первый инвариант напряжений.

Постоянные A и B определяются из граничных условий (5.18а) для σ_{RR} на внутренней и внешней границах трубы, они не зависят от величины осевой деформации ε_{zz} , которая определится из соотношения (5.24):

$$A = \frac{pa^2 - qb^2}{b^2 - a^2}, \quad B = \frac{a^2b^2(p-q)}{b^2 - a^2}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{2\nu A}{E} = -\frac{2\nu}{E} \frac{pa^2 - qb^2}{b^2 - a^2}. \quad (5.26)$$

Отметим, что при положительном внутреннем давлении p и нулевом внешнем давлении q деформация отрицательна: при распираии изнутри окружность трубы удлиняется, соответственно, длина трубы укорачивается.

В случае трубы со свободными концами $\sigma_0 = 0$, осевые напряжения отсутствуют. Соотношения для остальных компонент напряжений (5.22), (5.23) после подстановки коэффициентов из (5.26) примут вид:

$$\sigma_{RR}(R) = -\frac{p-q}{b^2 - a^2} \frac{a^2b^2}{R^2} + \frac{pa^2 - qb^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{p-q}{b^2 - a^2} \frac{a^2b^2}{R^2} + \frac{pa^2 - qb^2}{b^2 - a^2}. \quad (5.27)$$

Для нахождения радиального перемещения в (5.21) подставляются осевая деформация (5.26) и константы C_1 и C_2 , выражаемые из (5.25) через найденные коэффициенты A и B :

$$C_1 = \frac{pa^2 - qb^2}{b^2 - a^2} \frac{1-\nu}{E}, \quad C_2 = \frac{a^2b^2(p-q)}{b^2 - a^2} \frac{1+\nu}{E},$$

и перемещение в случае незакреплённых торцов трубы, т.е., ненулевой осевой деформации:

$$u_R(R) = \frac{1}{E(1-a^2/b^2)} \left(\left(p \frac{a^2}{b^2} - q \right) (1-\nu) R + (p-q) \frac{(1+\nu)a^2}{R} \right). \quad (5.28)$$

Видно, что радиальное перемещение будет ненулевым, даже в случае равенства внутреннего и внешнего давлений, когда оно ненулевое. Перемещение будет отрицательным (сжатие), что связано с большей полной силой, полученной как проинтегрированное по окружности и на единицу длины трубы давление, действующее на наружной границе и внутренней границах. Это – эффект радиальной геометрии, проявляющийся при большом различии внутреннего и внешнего радиусов.

При постановке на торцах трубы нулевых граничных условий по осевым перемещениям (закреплении торцов) осевая деформация в (5.24) будет нулевая, в результате чего множитель $(1-\nu)$ в первом слагаемом (5.21а) превратится в $(1-\nu-2\nu^2)$. В этом случае из уравнений (5.24) и (5.26) можно получить возникающее z -напряжение:

$$\sigma_{zz} = 2\nu \frac{p a^2 - qb^2}{b^2 - a^2}. \quad (5.29)$$

Данное граничное условие отвечает случаю плоской деформации, и этот результат можно получить также из соотношений (5.7) и (5.27). Отметим также, что деформация (5.26) трубы с незакреплёнными концами связана с напряжением (5.29) трубы с фиксированной длиной соотношением

$$\sigma_{zz} = -E\varepsilon_{zz},$$

что иллюстрирует принцип суперпозиции: НДС в случае плоской деформации (в радиальном направлении) может быть получено из НДС трубы с незакреплёнными концами путём растяжения с продольной деформацией величиной $-\varepsilon_{zz}$.

5.3.2. Предельные случаи в задаче о трубе

Рассмотрим с помощью формул (5.27) распределения напряжений для некоторых предельных случаев геометрии трубы.

1) **Бесконечно толстая труба: концентрация напряжений.** Устремив внешний радиус b к бесконечности получим :

$$\sigma_{RR} = -(p-q)\frac{a^2}{R^2} - q, \quad \sigma_{\theta\theta} = (p-q)\frac{a^2}{R^2} - q.$$

Пусть давление на бесконечности нулевое, внутри – положительное, $p>0$, $q=0$, тогда радиальное напряжение всегда – сжимающее (отрицательное), а окружное – растягивающее (положительное, равное по абсолютной величине), причём обе компоненты монотонно убывают. Внутри напряжение максимально: $\sigma_{\theta\theta} = p$. При высоком давлении (например, в толстом орудийном стволе), равном пределу текучести материала (порядка нескольких тысяч атмосфер у стали, что для пушки не так много), возможны необратимые пластические деформации ствола. Для противодействия давлению в таких случаях создают разными способами преднапряжение: остаточные деформации, порождающие сжимающие окружные напряжения (например, путём автофретирования, т.е. предварительного пластического деформирования орудийных стволов [14]).

В случае, когда $p=0$, $q<0$: отверстие в сплошной среде в поле растягивающих напряжений, максимум окружного напряжения величиной $-2q$ опять же находится на контуре отверстия. На качественном уровне это иллюстрирует общий факт: возмущение внешнего однородного поля напряжений отверстием приводит к *концентрации напряжений* в окрестности отверстия, в данном случае – с коэффициентом относительно приложенной нагрузки $\sigma_{\max}/q = 2$. Таким образом, отверстие в стене не только ослабляет стену в целом, но и увеличивает напряжение в своей окрестности, и при критических растягивающих нагрузках разрушение более вероятно здесь. Поэтому отверстия, люки, проходки в стенах укрепляют путём утолщения краёв.

2) **Бесконечно тонкая труба.** Пусть $a \approx b$: $b = a + h$, $h \ll a$, $R = a + \delta$, $0 \leq \delta \leq h$, $a^2 / R^2 \approx 1$, $p - q \sim q$. С точностью до малых второго порядка по h :

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(\delta) &= \frac{p-q}{b^2-a^2} \frac{a^2 b^2}{R^2} + \frac{p}{b^2-a^2} \frac{a^2 - qb^2}{R^2} \approx \frac{a(p-q)}{h(2+h/a)} \left(\frac{(1+h/a)^2}{(1+\delta/a)^2} + 1 \right) \approx \\ &\approx \frac{a(p-q)}{h(2+h/a)} (1+1) \approx \frac{a(p-q)}{h} \end{aligned}$$

т.е. окружное напряжение почти однородно по толщине. Радиальное напряжение монотонно изменяется от величины $-p$ на внутренней поверхности до $-q$ на наружной. Таким образом, в незакреплённой трубе (т.е., со связями, не препятствующими деформированию) возникающее окружное напряжение максимально по абсолютной величине и превосходит приложенное давление с коэффициентом $a/h \gg 1$.

Выражение для осевого напряжения при плоских деформациях получается из (5.28):

$$\sigma_{zz} = 2\nu \frac{p a^2 - qb^2}{b^2 - a^2} \approx 2\nu a \frac{p - q(1 + 2h/a)}{2 + h/a} \approx \nu a \frac{p - q}{h} = \nu \sigma_{\theta\theta}, \quad (5.30)$$

т.е., отношение осевых и окружных напряжений равно $\nu < 0,5$.

Для упрощения формул положим далее $q=0$. Осевая деформация (5.26) незакреплённой тонкой трубы:

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu p a}{E h} \approx -\frac{\nu \sigma_{\theta\theta}}{E} \approx -\nu \epsilon_{\theta\theta}. \quad (5.31)$$

Радиальное перемещение (5.28) в этом случае:

$$u_R \approx \frac{p a^2}{E h} = a \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} = a \epsilon_{\theta\theta}.$$

Здесь окружная деформация введена как относительное удлинение по окружности $\epsilon_{\theta\theta} = 2\pi u_R / 2\pi a$, и полученное равенство согласуется с крайней правой частью (5.31).

Точность приближённой оценки напряжения в $\sim 10\%$ достигается при относительной толщине $h/a \approx 1/5$. При меньших толщинах труба приближённо может полагаться тонкостенной.

Примеры конструкций с внутренним наддувом, приводящим к высоким тангенциальным напряжениям, весьма многочисленны. Из области энергетики можно упомянуть паровые котлы, корпус водо-водяного ядерного энергетического реактора (тоже водогрейный котёл), а также защитную оболочку АЭС, которая строится из железобетона, но должна выдерживать без трещин внутренние давления до 5 атмосфер. Для противодействия образованию сквозных трещин в стенах оболочки при росте внутреннего давления в них проходят натянутые стальные канаты, создающие сжимающие напряжения (преднапряжения). Для тонкой трубы исходная постановка задачи может быть упрощена, и приведённые оценки могут быть получены гораздо быстрее. Рассмотрим простые подходы получения приближённых оценок напряжений для тонкостенной трубы и аналогичных конфигураций.

Задача – Определить окружные и осевые напряжения под действием внутреннего давления в длинной тонкостенной трубе с доньями, т.е., в замкнутом цилиндрическом сосуде с незакреплёнными торцами. (Пример – внутреннее давление в твэле в процессе наработки газообразных продуктов деления возрастает на 20 атм и более. Но рабочее давление в первом контуре ВВЭР, т.е. внешнее давление для твэла, составляет 160 атм.)

Решим задачу методом виртуальных перемещений. Сделаем следующие предположения о возникающем НДС:

- оцениваются средние по толщине стенки значения напряжений – они вычисляются как однородные;
- осевая симметрия НДС;
- труба достаточно длинная – относительное влияние краевых эффектов мало – принцип Сен–Венана;
- малость деформаций (растяжение и увеличение объёма мало, нагрузка не зависит от деформации).

Предполагаемый вид тензоров напряжения и деформаций: при осевой симметрии НДС одна из главных осей – это ось трубы, две другие перпендикулярные оси можно выбрать произвольно в плоскости вращения, как показано в гл.1, и касательные напряжения отсутствуют. Используем свойство линейности уравнений равновесия (4.1): решение для случая малых деформаций ищем по-отдельности для нагружения боковой поверхности и растяжения вдоль оси за счёт давления на торцы. Составляем выражения для виртуальной

работы. Пусть точки системы испытали малое перемещение, осесимметрично распределенное в пространстве. Рассмотрим растяжение по окружности, вызванное нормальным давлением. Работа окружных напряжений на ед. длины трубы по абсолютной величине равна работе сил давления:

$$pA\Delta R = \sigma_{\theta\theta} h\Delta l, \quad A = 2\pi R, \quad \text{следовательно, } \Delta l = 2\pi\Delta R,$$

откуда

$$pR = h\sigma, \quad \sigma_{\theta\theta} = pR/h.$$

Отсюда следует, что радиальным напряжением, которое по модулю не превышает величины внутреннего давления, можно пренебречь. Рассмотрим осевое нагружение. Работа осевых напряжений (труба удлинилась на Δl распределённой однородной силой давления, действующей на торцы):

$$p\Delta V = \sigma_{zz} 2\pi R h \Delta l, \quad \Delta V = \pi R^2 \Delta l,$$

откуда получаем, что осевое напряжение вдвое меньше:

$$pR = 2h\sigma_{zz}, \quad \sigma_{zz} = pR/2h. \quad (5.32)$$

Отметим ещё одно существенное предположение, которое делается при оценках – оболочка не сопротивляется изгибу при деформировании (т.н. *безмоментная оболочка* [10]). Это может быть существенным при локальных отклонениях от круговой симметрии.

Вопрос. Сравнить соотношения осевых и окружных напряжений в (5.30) ($=v$) и (5.32) ($=0,5$). В чём причина различий? Найти изменение длины трубы с доньями под действием внутреннего давления.

Вопрос. Зависит ли осевое напряжение от формы (осесимметричного) днища?

Задача о лопнувшей сосиске: Почему сосиски лопаются при варке преимущественно вдоль?

Задача может быть сведена к предыдущей, для чего вводятся дополнительные допущения:

- идеализация формы: длинный цилиндр с доньями;
- внешние условия: однородная температура;
- модель оболочки: форма – труба с полусферическими доньями; тонкая;
- модель среды (фарш) – слабоупругая (относительно свойств оболочки) сжимаемая жидкость: вода и пар, поэтому нагрузка на оболочку близка к равномерному давлению в трубе.

Получение количественных оценок; напряжения в безмоментной оболочке

– Минимальная толщина корпуса реактора ВВЭР-1000 составляет около 0,2 м, радиус – около 2 м, рабочее давление – около 160 атм. Оценить толщину стенки главного циркуляционного трубопровода внутренним диаметром 0,85 м, исходя из концепции равнопрочности (принимаемый одинаковый предел прочности для элементов конструкций, работающих в одинаковых условиях).

– Определить полную площадь сечения канатов натяжения, создающих преднапряжение в цилиндрической части защитной оболочки АЭС с ВВЭР-1000. Считать, что напряжение в канатах равно пределу текучести стали с заданным коэффициентом запаса. Взять диаметр оболочки равным 50 м, эффективную толщину стенок 1, предельное давление 5 атм. Задаться другими необходимыми параметрами.

Приведённый выше упрощённый способ рассуждений по определению напряжений в тонкостенной оболочке очень прост, но формально пригоден только в случае её симметрии. В учебниках эта задача обычно решается путём рассмотрения локального равновесия сил натяжения в элементе оболочки при нормальном давлении. Такой подход может быть распространён и на более общий случай, предлагаемый здесь как упражнение:

Получить соотношение между величинами тангенциальных компонент напряжений в тонкой безмоментной оболочке, нагружаемой нормальным давлением, локально характеризуемой толщиной и радиусами кривизны R_1 , R_2 , относящимися к двум взаимоперпендикулярным касательным направлениям (уравнение Лапласа):

$$\sigma_1 \frac{h}{R_1} + \sigma_2 \frac{h}{R_2} = p. \quad (5.33)$$

Рассмотреть частные случаи цилиндра и сферы.

5. 4. Термоупругие деформации и напряжения

Рассмотрим, как влияет на НДС тела изменение его температуры. При нагревании подавляющее большинство материалов расширяется, а при охлаждении – сжимается. (Контрпримеры – вода от 0°C до 4°C, мартенситный переход в аустенитной стали при закалке, проводимой быстрым охлаждением, лёд (вода), оксид кремния (SiO₂) и плутоний при плавлении.)

В случае однородного нагрева относительно исходной температуры $T_0(x,y,z)$:

$$\Delta T_0(x,y,z) = T_0(x,y,z), \quad T(x,y,z) - T_0(x,y,z) = const$$

Здесь и ниже "нагрев" и "расширение" будут означать также "остывание" и "сжатие". Экспериментальный факт состоит в том, что механически изотропные тела на малых температурных интервалах расширяются при нагреве пропорционально приращению температуры. Вводится тензор тепловых деформаций, который в *изотропном* теле – шаровой:

$$\epsilon^T_{ij} = (\alpha \Delta T) \delta_{ij}. \quad (5.34)$$

Анизотропия этого тензора связывается с анизотропией коэффициента теплового расширения α – он тоже становится тензором. Этот множитель – свойство материала: коэффициент *линейного* теплового расширения (линейный КТР), т.е., расширения вдоль одного направления. Здесь и далее предполагается как механическая, так и термическая изотропия, поскольку одно, как правило, влечёт за собой другое, т.к. оба свойства обусловлены внутренним строением материала. Изотропный коэффициент линейного теплового расширения является скаляром. (Пример: сталь: $\alpha = (1-2) \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ в интервале температуры 300–1400 К.) Сворачивая равенство (5.34) получим для объёмной деформации

$$\epsilon = 3\alpha \Delta T, \quad (5.35)$$

где 3α будет коэффициентом *объёмного* теплового расширения.

Отметим, что в справочниках для твёрдых тел, как правило, приводятся *линейные* КТР, а для газов и жидкостей – *объёмные*, что отвечает поведению среды.

При однородном нагреве тепловая деформация однородна, и, если при этом тело однородно и внешние нагрузки отсутствуют, то напряжения при свободном (нестеснённом) тепловом расширении отсутствуют. Это можно взять за постулат, основанный на опыте и здравом смысле – возникновение напряжений при нагреве ненагруженного тела может быть вызвано только:

- стеснением (защемлением) деформирования – неоднородностью граничных кинематических условий;
- неоднородностью нагрева (взаимовлиянием подобластей, нагретых по-разному);
- неоднородностью α (взаимовлиянием подобластей с разными свойствами).

Вследствие малости тепловых деформаций и полагаемого отсутствия какого-либо иного проявления нагрева, кроме увеличения объёма, его влияние на общее НДС, рассматриваемое как упругое, может быть учтено на основе принципа суперпозиции. (Отметим, что при пластическом деформировании изменение объёма обычно также упруго, поэтому и здесь тепловая деформация не зависит от механической, если пренебречь теплом работы пластической деформации.) Далее рассматривается упругий случай, когда применим принцип суперпозиции. Полная деформация в любой точке представляется суммой

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) = \varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}^* , \quad (5.36)$$

где ε_{ij}^* отвечает за деформацию, не связанную с нагревом. Эти деформации, вызванные сторонним нагружением, отвечают некоторым напряжениям. По закону Гука (см. (3.22)) :

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) .$$

Подставляя это в (5.36) и учтя (5.34), получим полную деформацию, выраженную через напряжения и приращение температуры в данной точке, что можно охарактеризовать как закон Гука для термоупругих напряжений:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \sigma \right) + \alpha \Delta T \delta_{ij} . \quad (5.37)$$

Обратно, если в закон Гука (3.23) для напряжений подставить величину деформации от только механического нагружения ε_{ij}^* :

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T \quad (5.38)$$

то в результате получим напряжения, выраженные через *полную* деформацию (т.е. ту, что реально измеряется) и приращение температуры:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij}^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^* \right) = \frac{E}{1+\nu} \left(\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon \right) - \left(\varepsilon_{ij}^T + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon^T \right) \right) = \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left(\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{ij} \right) - \delta_{ij} \alpha \Delta T \left(1 + \frac{3\nu}{1-2\nu} \right) \right) = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{ij} \right) - \frac{E}{1-2\nu} \delta_{ij} \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (5.39)$$

Здесь отделено слагаемое, заключающее в себе зависимость напряжённого состояния от температуры (коэффициенты полагаем постоянными).

При измерении деформации в частично закреплённом нагретом теле невозможно разделить её тепловую и механическую составляющие, но формально принцип суперпозиции позволяет записать такого рода соотношения (5.34)–(5.36). В полной аналогии с интерпретацией полной деформации как суммы "силовой" и "тепловой", выражение (5.39) для полного *напряжения* также можно истолковать как сумму механического и теплового воздействий:

- Напряжённое состояние (внутренние силы), отвечающее данному тепловому и деформированному состоянию при данных наложенных связях, обусловлено суперпозицией воздействий внешних сил и термического, вызванного изменением температуры относительно начального состояния.

Если при однородном нагреве внешняя граница однородного изотропного тела жёстко закреплена, полная деформация нулевая. Возникающие *термонапряжения* от термического воздействия даются вторым слагаемым правой части (5.39):

$$\sigma_{ij} = -\frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T \delta_{ij} \equiv -3K \alpha \Delta T \delta_{ij} \equiv -K \alpha_{\nu} \Delta T \delta_{ij} . \quad (5.40)$$

Здесь K – модуль объёмного сжатия (3.12), α_v – коэффициент *объёмного* теплового расширения.

Несколько иными словами сказанное можно переформулировать так. В уравнениях (5.33)–(5.34) термонапряжения формально играют роль некоего ограниченного "теплового давления", изотропной объёмной силы, возникающей при нагреве с жёстким закреплением. Понятие о тепловом давлении, введённое Н.Нейманом и др. в XIX в., достаточно широко использовалось в XIX–XX вв. при рассмотрении задач термоупругости. (Оно не лишено и физического смысла, если провести аналогию между газокинетическим давлением и тепловым давлением, в кристалле возникающим, с позиций физики твёрдого тела, вследствие тепловых колебаний атомов в решётке (поли)кристалла и смещения нулевого положения колебаний атомов при нагреве.)

Такая интерпретация облегчает понимание и решение задач термоупругости. Например, при определении НДС нагреваемого тела с наложенными связями можно рассуждать так: "Расширение первоначально незакреплённого тела под действием теплового давления, возникшего от нагрева, было, при наложении связей и возвращении части границ тела к их исходному положению, частично скомпенсировано воздействием со стороны связей. Реакция связей компенсирует тепловое давление". Тем самым задача ставится как чисто механическая. С этой точки зрения вполне прозрачен термин "тепловая нагрузка", иногда употребляемый в смысле "теплового давления", вызванного нагревом.

Тепловое давление поясняет и процесс, комплиментарный тепловому расширению: при адиабатическом сжатии образца внешней силой его температура возрастает. Это проявляется также как увеличение его "эффективной жёсткости" – при сжатии требуется противодействовать также тепловому давлению, возникающему при росте температуры. В опытах на упругое сжатие металла в адиабатических и изотермических условиях адиабатический модуль упругости будет несколько выше, чем изотермический. Отличие, однако, не превышает 1–2% (оценки см. в [10]), поэтому тепловые эффекты упругого деформирования в механике обычно не принимаются в расчёт.

Как правило, поле температуры можно полагать заданным извне, и в линейных задачах оно практически не зависит от НДС – решается *несвязанная задача термоупругости*. В численном расчёте с небольшими деформациями задача теплопроводности может решаться отдельно от задачи расчёта теплового НДС: рассчитанное на шагах по времени поле температуры в недеформированной конфигурации используется как параметр соотношения вида (5.37) для тепловых деформаций (но надо следить за тем, не изменяет ли деформация условия приложения тепловых нагрузок).

Примеры–задачи

Стыки между рельсами ж/д. Оценить для местных метеоусловий минимальный размер зазора в месте стыка рельсов железнодорожного полотна.

Бесстыковый рельс. Высокоскоростные ж/д магистрали не имеют больших зазоров в месте стыков. Как здесь решается вопрос о тепловом расширении? Оценить термонапряжения. Определить поперечную деформацию "бесстыкового" рельса.

Биметаллическая пластина. Определить прогиб биметаллической пластины терморегулятора в утюге; известны КТР и перегрев относительно нейтральной температуры (когда пластина прямая). Пластины биметалла считать параллельными, с небольшим зазором, закреплёнными на концах. Задаться КТР пластин, длиной, толщиной.

Задача о лопнувшем стакане.

Почему толстостенный стакан лопается при быстром наливании кипятка, причём, чаще чем тонкостенный?

Почему часто отлетает дно (особенно у тонких стаканов)?

Почему предварительное споласкивание стакана кипятком существенно снижает вероятность разрушения?

Оценить времена прогрева и напряжения в цилиндрической части. Нарисовать качественный вид деформирования дна стакана и НДС в нижней части.

Определить давление, оказываемое водой при замерзании в сосуде сферической формы. Рассмотреть случаи: а) бесконечной жёсткости стенок сосуда; б) конечной жёсткости и: (1) малой толщины, (2) конечной толщины стенок сосуда.

Закалённое стекло – это листовое стекло в преднапряжённом состоянии. Задавшись необходимыми предположениями о свойствах и форме листа стекла:

- (а) определить качественный вид распределения напряжений по толщине;
- (б) оценить внутренние напряжения, задавшись разницей в плотности в средней и наружной части сечения листа стекла;
- (в) описать качественно поведение закалённого стекла при изгибе, ударе, пробивании отверстия.

(Закалённое стекло получается путём резкого охлаждения с границ, начиная с 600°C . Неоднородности температуры способствует малая теплопроводность стекла. Плотность быстро и медленно отоженных стекол различается на $20\text{...}30 \text{ кг/м}^3$, что в терминах объёмной деформации даёт $\sim 1\%$ – очень много. При охлаждении листа стекла с внешних границ в средней части его толщины температура убывает медленнее, приграничные области охлаждаются быстрее и оказываются более рыхлыми, т.е., в итоге – сжатыми. При отжиге, медленном охлаждении при почти однородной температуре, структура стекла уплотняется равномерно, остаточные напряжения малы).

6. Элементарная теория изгиба: силовые характеристики

Решения практически важных задач теории упругости, полученные при достаточно общих предположениях, обычно трудны не только в получении, но и в использовании. С другой стороны, допуски, существующие в технике на размеры деталей, т.е. допустимые отклонения от проектных размеров, часто позволяют при решении этих задач применить упрощения, дающие возможность получить приближённое решение без обращения к общей теории. Одним из примеров может служить элементарная теория изгиба ("техническая теория изгиба"). Мы рассмотрим основные её посыпки и результаты, поскольку, во-1, это нам понадобится в методе конечных элементов, во-2, эти результаты интересны и поучительны сами по себе, поскольку изгиб – один из наиболее часто встречающихся видов нагружения. Здесь обсуждаются силовые характеристики изгиба. Перемещения при изгибе будут рассмотрены при построении изгибного конечного элемента.

6. 1. Действие поперечной концевой силы, приложенной к стержню

Нижеследующее рассмотрение проведено по мотивам книги [10]. Рассмотрим стержень (призматическое тело), находящийся под действием приложенных к нему поперечных, т.е. перпендикулярных его оси, сил. Приближенно, действие системы сил можно рассматривать как сумму действий каждой из сил, взятых по отдельности. Поэтому мы предположим, что на конце стержня приложена одна единственная сосредоточенная сила P , а другой конец закреплён неподвижно (рис.6.1). Качественные выводы будут справедливы и для пластически деформируемых стержней при произвольной поперечной нагрузке. Предположим, что все поперечные размеры стержня имеют один и тот же порядок, характеризуемый величиной h , длина стержня есть l , его прогиб имеет порядок величины h , не более. Оценим величины компонент напряжений, возникающих в материале под действием приложенной нагрузки, чтобы сравнить степени опасности разрушения, связанной с её приложением.

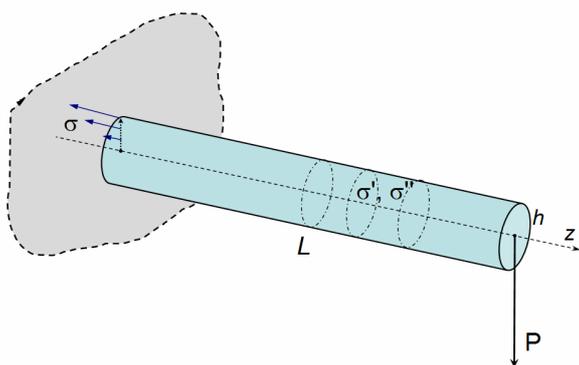


Рис. 6.1. Балка (консоль) под действием поперечных сил

Прежде всего, сила стремится "срезать" стержень по сечению, т.е. для уравновешения действия силы P в любом сечении необходимо приложить касательные напряжения σ' , которые распределены по сечению таким образом, что их равнодействующая уравновешивает "срезающую" силу P . Эти напряжения называются *касательными напряжениями изгиба*; они показаны на рис.6.1, распределение их одинаково в сечениях по всей длине.

Далее, сила P , вообще говоря, вызывает кручение стержня вокруг продольной оси. Если стержень имеет продольную плоскость симметрии, то, очевидно, напряжения кручения не возникнут только, если вектор силы лежит в этой плоскости. Если сила параллельна этой плоскости и перпендикулярна оси, то произведение силы на расстояние от линии ее действия до плоскости симметрии называется *крутящим моментом*. Если нет плоскости симметрии, то в несимметричном сечении всегда можно найти точку, называемую *центром изгиба*. Когда поперечная сила действует в плоскости, содержащей в себе центры изгиба всех

поперечных сечений, кручения не происходит, равнодействующая соответствующих внутренних сил равна нулю. Если это не так, и напряжения кручения существуют, мы обозначим их σ' . Геометрическое место точек, центров изгиба, называется *центральной линией* изгиба.

Наконец, в поперечном сечении должны возникнуть нормальные напряжения σ , создающие момент, уравнивающий момент силы P относительно любой оси, лежащей в плоскости поперечного сечения. Эти напряжения называются *нормальными напряжениями изгиба*.

Оценим величины составляющих напряжения в поперечном сечении: "срезающей", "крутящей" и "изгибающей", σ' , σ'' и σ . Для этого заметим, что площадь сечения стержня имеет порядок величины h^2 . Понимая под касательным напряжением σ' среднее напряжение по сечению, мы получим для него оценку

$$\sigma' \sim P/h^2 .$$

Далее, очевидно, что порядок величины крутящего момента, создаваемого внешней силой, есть Ph . Возникающие касательные напряжения *кручения* приблизительно одинаковы в каждом сечении и, аналогично касательным напряжениям при изгибе, могут зависеть только от размера h , но не от длины l . Очевидно, что "напряжения кручения" – это те же касательные напряжения, определяемые в плоскости, параллельной вектору внешней силы, и в максимуме имеющие тот же порядок величины. Порядок величины крутящего момента, обусловленного внутренними силами, с плечом силы $\sim h$ будет $\sigma''h^3$, и условие равенства моментов внутренних и внешних сил для напряжений кручения σ'' даёт аналогичную же оценку –

$$\sigma''h^2 \cdot h \sim P \cdot h, \text{ откуда } - \sigma'' \sim P/h^2 .$$

Оценим нормальные напряжения. Рассмотрим момент приложенной силы относительно оси, ортогональной к направлению силы и лежащей в месте крепления стержня, как наиболее напряжённом (здесь наибольший момент) и потому опасном. Его величина есть Pl . Момент внутренних сил, т. е. *нормальных* к поперечному сечению напряжений σ , уравнивающий в этом сечении момент внешней *продольной* силы, согласно принципу Сен-Венана может зависеть только от σ и h и также имеет порядок σh^3 . Поэтому условие равновесия будет –

$$Pl \sim \sigma h^3, \quad \sigma \sim P/h^2 l/h, \quad (6.1)$$

и полученная оценка напряжения σ отличается от σ' и σ'' множителем l/h . Если длина стержня l велика по сравнению с поперечным размером h , то касательные напряжения σ' и σ'' малы по сравнению с нормальным напряжением σ , т.е. отношение l/h может быть таким, что наибольшие касательные напряжения, которые уравнивают перерезывающие силы и крутящий момент, составляют сколь угодно малую долю от наибольших нормальных, связанных с изгибающим моментом. В теории изгиба, как правило, основное внимание обращается именно на нормальные напряжения, касательные же во внимание не принимаются. Исключения могут быть в следующих случаях.

а) *Полые тонкостенные стержни*. Если габарит поперечного сечения h много больше его минимального размера δ , то его площадь будет отличаться от величины $\sim h^2$ множителем порядка h/δ , и в правой части левого уравнения (6.1) появится этот числовой множитель. Если $h/\delta \sim l/h$, то касательные напряжения будут того же порядка, что и нормальные.

б) *Волокнистые материалы, такие как древесина*, имеют малое сопротивление межслойному сдвигу и отрыву, и для достаточно коротких балок существенно меньшие по величине касательные напряжения могут оказаться более опасными, чем нормальные (отслоение волокон). Именно в этой связи в середине XIX столетия была развита теория

касательных напряжений при изгибе. Во второй половине XX в. учет касательных напряжений оказался необходимым при расчете пластиков, армированных высокопрочным волокном.

6.2. Силы, моменты и условия равновесия стержня

Поместим начало координат в место закрепления стержня – это неподвижная лабораторная система отсчёта. Вместе с неподвижной вводятся также местные системы, расположенные на разных расстояниях от неподвижной системы, получаемые в недеформированном состоянии параллельным переносом вдоль оси стержня. Вдоль оси стержня направим ось Oz , оси Ox и Oy – в перпендикулярной плоскости сечения. Координата z характеризует положение текущего сечения и местной системы координат. Сечение в точке z делит стержень на две части, левую и правую. Силowymi характеристиками изгиба в каждом сечении служат *перерезывающие силы* P_x, P_y , лежащие в плоскости данного сечения, и *изгибающие моменты* M_x, M_y относительно пары осей Ox и Oy . Полные момент и сила, приложенные в сечении с центром в точке z , связаны с распределёнными напряжениями в этом сечении, которые мы хотим найти. Возможные случаи приложения нагрузки на конце стержня приведены выше на рис. 5.4. Рассмотрим подробнее те из них, которые приводят к изгибу.

Случай *чистого изгиба* связан с приложением только изгибающего момента относительно оси, параллельной сечению, *оси изгиба*. Пусть это будет ось Oy . Рассматривается момент, взятый относительно оси, параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, от всех сил, приложенных справа от сечения, или сил, приложенных слева с обратным знаком (моменты взаимоуравновешены). Например, момент $M=M_y$ сил, приложенных в сечении, отмеченном на рис.6.2, будет отрицательным (стержень закреплён слева) и направлен в вниз от плоскости чертежа. Момент, создаваемый внутренними силами в сечении закрепления стержня противоположен по знаку.

Случай *поперечного изгиба* связан с приложением *силы* поперёк оси Oz , в направлении, например, вдоль оси Ox . В этом случае *перерезывающей силой* P_x называется сумма проекций на ось Ox всех сил, приложенных слева от рассматриваемого сечения, или сумма сил, приложенных справа, взятая с обратным знаком.

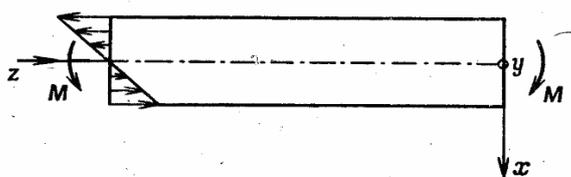


Рис. 6.2. Чистый изгиб

Как упоминалось выше, случай произвольного нагружения стержня на конце, включающий растяжение, изгиб и кручение, называется общей задачей Сен-Венана. Допущение (Сен-Венана), принимаемое для решения этой задачи, состоит в том, что "волокна" стержня в направлении продольной оси стержня (или: тонкие продольные призмочки) не оказывают друг

на друга никакого поперечного давления (поперечного сжатия или растяжения) и не передают в поперечном направлении никаких сил сдвига. Принимая это допущение можно положить в общих уравнениях равновесия

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0.$$

При равновесии вычисленные в каждом сечении стержня главный момент и главная сила равны нулю, что даёт в случае концевой нагрузки шесть уравнений, связывающих компоненты векторов момента и внешней силы, обусловленных внешней нагрузкой, с компенсирующими её внутренними силами, задаваемыми тензором напряжений. Как следует из вышеприведённого анализа, нас интересуют здесь только нормальные напряжения при изгибе, задаваемые компонентой σ_{zz} . Пусть внешняя

нагрузка приведена к главной силе и главному моменту. Они равны и противоположны соответствующим интегральным величинам, вычисленным в поперечном сечении с площадью A :

$$P_x = \int_A \sigma_{zx} dA, \quad P_y = \int_A \sigma_{zy} dA \quad - \text{перерезывающие силы}, \quad (6.2)$$

$$F_z = \int_A \sigma_{zz} dA \quad - \text{продольная сила}, \quad (6.3)$$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA, \quad M_y = - \int_A \sigma_{zz} x dA \quad - \text{изгибающие моменты}, \quad (6.4)$$

$$M_z = \int_A (\sigma_{zy} x - \sigma_{zx} y) dA \quad - \text{крутящий момент}. \quad (6.5)$$

Знаки в определении моментов M_x и M_y отвечают определению (1.1), определению изгибающего момента как распределённой силы на рис. 6.2 и заданию силовых граничных условий (1.9).

В общем случае необходимо найти распределения компонент напряжения для всех сечений при внешней нагрузке, заданной векторами $-\mathbf{P}$ и $-\mathbf{M}$ (из контекста ясно, какие векторы имеются в виду, поэтому знак при векторах далее будет опускаться). В приводимом ниже элементарном решении задачи о чистом изгибе (нагрузка только изгибающим моментом, $P_x=0, P_y=0, M_z=0, F_z=0$) с помощью упомянутого допущения Сен-Венана устанавливается, что напряжённое состояние устроено в определённом смысле однородно по всему объёму. Это позволяет не решать дифференциальные уравнения равновесия, а получить из интегральных соотношений (6.4) алгебраические соотношения для искомого распределения нормальных напряжений при изгибе.

При чистом изгибе стержня (рис.6.2) момент постоянен в каждом его поперечном сечении. Подобное состояние можно осуществить, например, согнув тонкий гибкий стержень в кольцо и срастив концы. В случае упругого изгиба небольшой величины относительно двух осей при изгибающих моментах M_x и M_y решение даётся линейной суперпозицией состояний, связанных с M_x и M_y . Отметим, что случай изгиба консоли – стержня, закреплённого на одном конце (рис. 5.3), силой, приложенной к другому концу, более сложен, поскольку, кроме изгибных напряжений, имеется перерезывающая сила, при этом момент и напряжения в сечении будут функциями местоположения сечения, т.е., координаты z . Чтобы увидеть это, рассмотрим условие равновесия моментов в некотором сечении $A(z)$ стержня длиной L , закреплённого в точке $z_0=0$, нагруженного справа поперечной силой $\mathbf{P} = \{0, P, 0\}$. В сечении с координатой z момент, создаваемый внутренними силами относительно центра изгиба, уравновешен моментом силы \mathbf{P} относительно этой точки и направлен вдоль оси x :

$$M_x(z) = M(z) = (L - z) P.$$

Как отмечалось выше, момент и нормальные напряжения будут максимальны в месте закрепления $z=0$, т.е., в упомянутом опасном сечении.

6.3. Напряжения при чистом изгибе

6.3.1. Общие допущения в задаче об изгибе

Для вычисления нормальных напряжений, возникающих при чистом изгибе сделаем следующие допущения о стержне и его деформировании, принимаемые также и в более общем случае изгиба произвольной нагрузкой, сводящейся к упомянутым главному моменту и главной силе:

- стержень имеет призматическую форму;
- малые деформации (линейная теория) и малое перемещение перпендикулярно оси (порядка толщины стержня) – пренебрежение изменением относительного направления стержня и приложенных сил при изгибе;
- материал стержня – упругий, однородный, изотропный.

Как отмечалось, в каждом плоском сечении существует точка, называемая его центром изгиба, которая будет центром тяжести (геометрическим центром при однородном материале). Линия, являющаяся геометрическим местом таких точек, называется центральной линией. Линия, вдоль которой нормальные напряжения при чистом изгибе – нулевые, называется *нейтральной линией*. Для однородного стержня центр изгиба находится в геометрическом центре тяжести сечения, и нейтральная линия совпадает с центральной линией. Для симметричных относительно оси Oz сечений эта линия лежит в плоскости симметрии. Форма этой линии при изгибе и подлежит определению. Она задаётся двумя перемещениями $u(z)$ и $v(z)$, т.е., x - и y - координатами отклонения положения линии от её исходного состояния $v_0(z)=0$.

Малый участок гладкой кривой можно приблизить окружностью некоторого радиуса с центром в точке, называемой центром кривизны, т.е., изгиб центральной линии локально может быть приближен дугой окружности. Связь изгиба центральной линии с перемещениями во всём сечении даётся основной гипотезой о деформированном состоянии при изгибе, принимаемой в элементарной теории.

Гипотеза плоских сечений. При чистом изгибе поперечные сечения стержня остаются плоскими, но поворачиваются на некоторый угол относительно оси изгиба. Принимается, что это с достаточной точностью выполняется при общем изгибе.

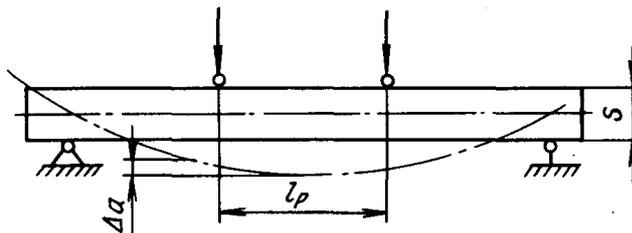


Рис. П2.5. Схема нагружения призматического образца чистым изгибом

Рис. 6.3. Схема испытаний на чистый изгиб [15]

Упражнение. Указать (качественно), при каких условиях на размерные характеристики образца схема испытаний на чистый изгиб, показанная на рис. 6.3, удовлетворяет условиям чистого изгиба.

6.3.2. Определение нормальных напряжений

Из гипотезы плоских сечений непосредственно следует геометрическое описание чистого изгиба. Введём два сечения, отстоящие друг от друга на расстояние dz . Найдём деформацию элемента длины, параллельного оси Oz и заключенного между этими сечениями. Считаем, что первое сечение (левое на рис.6.2) неподвижно, тогда как правое может перемещаться, оставаясь плоским. Равноотстоящие друг от друга поперечные сечения призматического стержня, равномерно нагруженного поперечным моментом, в силу продольной симметрии повернутся друг относительно друга на одинаковые углы. В рамках сделанных предположений общее малое движение сечения состоит из двух элементарных:

- поворот относительно оси Ox на малый угол $\Delta\theta_x = \kappa_x \Delta z$

– поворот относительно оси Oy на малый угол $\Delta\theta_y = \kappa_y \Delta z$.

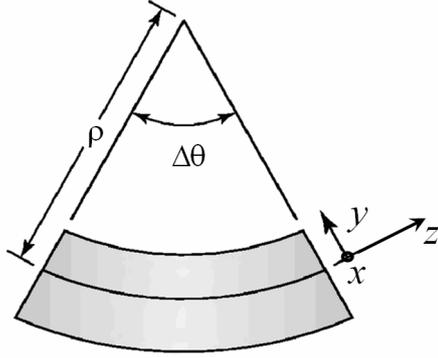


Рис. 6.4. Геометрия изгиба

Величины $\kappa_x = 1/\rho_x$ и $\kappa_y = 1/\rho_y$ представляют собою кривизны проекций изогнутой оси стержня с радиусами кривизны ρ_x и ρ_y , соответственно, на плоскости yOz и xOz .

Как отмечалось, положение нейтральной линии при изгибе, кривая изгиба, задаётся x - и y -координатами отклонения положения линии $u(z)$ от её исходного состояния $u(z)=0$. Рассмотрим изгиб относительно оси Ox . Из геометрических соображений нетрудно получить выражение для распределения вдоль направления Oy величины осевой деформации ϵ_{zz} , а с ней и продольного

напряжения. Рассмотрим малый участок стержня длиной ΔL_0 , который при изгибе относительно оси Ox принял форму дуги окружности углового размера $\Delta\theta$ (рис. 6.4), который полагаем малым. При изгибе верхняя часть стержня сжалась при повороте сечения, нижняя часть растянулась, а лежащая на нейтральной линии сохранила свою длину. Продольная деформация ϵ_{zz} на расстоянии y от нейтральной линии определяется из метрических соотношений на окружности:

$$\Delta L = (\rho + y) \Delta\theta, \quad \Delta L_0 = \rho \Delta\theta,$$

$$\epsilon_{zz} = \epsilon = (\Delta L_0 - \Delta L) / \Delta L_0 = y / \rho_x \approx y / (\rho_x + y) \approx y / \rho = -\kappa_x y. \quad (6.6)$$

Здесь ρ – радиус кривизны линии, параллельной нейтральной. Деформация линейно распределена по толщине стержня. Вертикальное перемещение v нейтральной линии (перпендикулярно оси, в плоскости изгиба) будет функцией длины z : $v=v(z)$. Вспоминая выражение для кривизны кривой, задаваемой зависимостью $v=v(z)$, напишем –

$$\rho_x = 1 / \kappa_x = (1 + v'_z)^{3/2} / v''_z \approx 1 / v''_z. \quad (6.7)$$

Приближённое равенство выполнено вследствие полагавшейся относительной малости изгиба, $v'_z{}^3 \ll 1$. Здесь, в отличие от часто принимаемого определения, вторая производная взята не по абсолютной величине, поэтому кривизна может быть отрицательной: различаются вогнутая ("загиб вверх") и выпуклая ("загиб вниз") линии $v=v(z)$, имеющие, соответственно, положительную или отрицательную кривизну. В соответствии с этим выбран знак в соотношении (6.6) и ниже, в формуле (6.8) для относительных удлинений, связанных с изгибом относительно осей Ox и Oy .

Общее относительное удлинение, т.е. деформация элемента данной длины, имеющего координаты x и y относительно центра изгиба, связано с поворотом сечения при изгибе относительно двух взаимоперпендикулярных направлений:

$$\epsilon = -\kappa_x y - \kappa_y x. \quad (6.8)$$

В формуле (6.8) мы исключили возможность поворота сечения около оси z (кручение). Кроме того, в соответствии с гипотезой плоских сечений, мы исключили возможность поступательного перемещения при изгибе в направлении осей Ox и Oy . Предположение об относительной малости перемещений позволяет линейно суммировать деформации, связанные с углами поворота вокруг разных осей.

Исключая из рассмотрения особые случаи, связанные с приложением сосредоточенных нагрузок, далее будем считать, что напряжение и деформация связаны между собою обычным законом Гука, причём, в силу относительной малости поперечных компонент напряжений, мы учитываем только нормальные к сечению –

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon . \quad (6.9)$$

Из (6.8)-(6.9) следует закон распределения нормальных напряжений по сечению:

$$\sigma_{zz} = - E(\kappa_x y + \kappa_y x) . \quad (6.10)$$

Вблизи тех сечений, где приложены сосредоточенные силы, формула (6.6) теряет силу. Однако принцип Сен-Венана позволяет утверждать, что область нарушения линейного закона распределения напряжений изгиба простирается на длину порядка поперечного размера сечения h . Таким образом, можно считать, что при чистом изгибе (с моментом, постоянным вдоль оси) длинного стержня распределение нормальных напряжений на большей части его длины не зависит от продольной координаты z .

Упомянем ещё несколько ситуаций, где полученный результат может быть неточным или неправильным:

- композитные материалы неоднородны, и для перехода от (6.8.) к (6.9) нужно вводить усреднённые характеристики;
- неупругий материал может оставаться частично упругим в окрестности линии изгиба, где напряжение меньше, а в остальном сечении формула (6.9) некорректна;
- непрямые балки, или имеющие непостоянное сечение вдоль длины.

Эти и некоторые другие случаи требуют специального рассмотрения.

Для того, чтобы связать распределение напряжений с внешней нагрузкой (граничными условиями задачи об изгибе), рассмотрим стержень, нагруженный системой сил, не вызывающей кручения, т.е. положим, что линия действия каждой из них проходит через центр изгиба соответствующего сечения (но пока не обязательно перпендикулярна оси стержня). Рассматривая нормальные напряжения в поперечном сечении, поместим в этом сечении оси местной системы координат xOy . Внесём в интегральные уравнения равновесия (6.4) выражение (6.10) для нормального напряжения и проинтегрируем:

$$M_x = \int E(\varepsilon_0 - \kappa_x y - \kappa_y x) y dA = E \left(\int \varepsilon_0 y dA - \int \kappa_x y^2 dA - \int \kappa_y x y dA \right) = E(\varepsilon_0 y_c A - \kappa_x J_{xx} + \kappa_y J_{xy}) ,$$

$$M_y = - \int E(\varepsilon_0 - \kappa_x y - \kappa_y x) x dA = E \left(- \int \varepsilon_0 x dA + \int \kappa_x x y dA + \int \kappa_y x^2 dA \right) = E(-\varepsilon_0 x_c A - \kappa_x J_{xy} + \kappa_y J_{yy})$$

Здесь x_c , y_c – координаты центра тяжести фигуры – плоскости сечения, J_{yy} , J_{xy} , J_{xx} – моменты инерции относительно осей Ox , Oy – осевые и центробежный (см. [3]):

$$J_{xx} = \int y^2 dA , J_{yy} = \int x^2 dA , J_{xy} = - \int x y dA .$$

Известно, что направления осей Ox , Oy можно выбрать так, чтобы центробежный момент J_{xy} равнялся нулю – это две главные оси тензора моментов инерции, лежащие в поперечном сечении, а начало координат – расположить в центре тяжести, вследствие чего $x_c = y_c = 0$. Выбор несложно сделать в случае симметрии сечения. Тогда выписанные уравнения примут вид

$$M_x = -E \kappa_x J_{xx} ,$$

$$M_y = E \kappa_y J_{yy} ,$$

откуда получаются выражения для кривизн проекций линии изгиба κ_x , κ_y :

$$\kappa_y = 1/\rho_y = M_y / E J_{yy} , \kappa_x = 1/\rho_x = - M_x / E J_{xx} . \quad (6.12)$$

Моменты M_y и M_x представляют заданную внешнюю изгибную нагрузку, и нормальное напряжение выражается через неё:

$$\sigma_{zz} = E(-\kappa_x y - \kappa_y x) = (M_x / J_{xx}) y - (M_y / J_{yy}) x . \quad (6.13)$$

Пусть, например, момент относительно оси Ox и растягивающая сила отсутствуют, тогда это соотношение принимает вид ("основная формула теории изгиба"):

$$\sigma_{zz} = - (M_y / J_{yy}) x. \quad (6.14)$$

Из соотношений (6.6)–(6.7), (6.9) можно также получить уравнение для распределения перемещений средней линии вдоль оси при изгибе:

$$M_y / E J_{yy} = v''_z / (1 + v''_z)^{3/2} \approx v''_z \quad (6.15)$$

Его решение – парабола второго порядка. Вследствие пренебрежения слагаемым $\sim v''_z$ уравнение (6.13) пригодно только для случая малых относительных оперечных перемещений линии изгиба. В случае чистого изгиба большого тонкого стержня следует учитывать это слагаемое.

Стержень, работающий на изгиб, часто называется балкой. Балки, подобно тонким стержням, работающим на растяжение, с однородным распределением напряжения по сечению, можно рассчитывать на прочность при изгибе по допускаемым напряжениям. Для этого нужно потребовать, чтобы наибольшее (по абсолютной величине) растягивающее или сжимающее напряжение не превышало допускаемого значения. Максимальное напряжение при изгибе возникает в точке y_m , наиболее удалённой от нейтральной линии. Величина

$$W_{\max} = J_{xx} / y_m \quad (6.16)$$

называется в технике *моментом сопротивления сечения при изгибе*. Она является геометрической характеристикой, её величины вычислены для всех распространённых профилей сечения балок и приводятся в таблицах. Максимальное напряжение при изгибе, которое обычно требуется оценить, равно:

$$\sigma_{\max} = M / W_{\max}$$

Для трубы, например, $W_{\max} = \pi R^3 / 4 (1 - r^4 / R^4)$, где r , R – её внутренний и наружный радиусы. Для прямоугольного сечения $b \times h$ $x_{\max} = h/2$, $J_x = bh^3 / 12$, $W_x = bh^2 / 6$. Следовательно, сопротивление бруса прямоугольного сечения зависит от квадрата толщины и лишь линейно – от его ширины, причем основная нагрузка приходится на наиболее удалённые от середины участки. Отсюда понятно широкое применение двутавровых балок и трубчатых конструкций.

Если выполнено условие $R = r + \delta$, $\delta \ll R$, то формулу можно приближённо записать как

$$\sigma_{\max} = M / (\pi R^3 / 4 (1 - r^4 / R^4)) \approx M / (\pi R^3 / 4 (1 - (1 - 4\delta/R))) \approx M / (\pi R^2 \delta),$$

т.е. для тонкостенной трубы максимальное напряжение обратно пропорционально толщине трубы и квадрату радиуса. Расход металла при той же длине пропорционален $R\delta$. Поэтому, если труба, как силовой элемент, работает только на изгиб, то при фиксированной массе на ед. длины в пределах определённого соотношения размеров труба с большим радиусом держит пропорционально большие распределённые нагрузки (ср. – полые стебли травы).

7. Неупругость: пластичность и ползучесть

В настоящей главе рассмотрены основные особенности НДС, связанные с пластическим поведением. Пластичность – это один из видов неупругости. Упругость кристаллических и поликристаллических тел связана с наличием дальнего порядка в кристалле. В аморфных твёрдых телах нет регулярной структуры, но места (соседство) атомов в обоих случаях фиксированы, так что при приложении достаточно малой нагрузки увеличение расстояния между атомами приводит к возвращающей силе. Возникающая реакция на нагружение – деформация и внутренние силы, исчезают при снятии упругой нагрузки и возвращении в исходное состояние.

Неупругость означает необратимость деформации. Она возникает, если соседство атомов в процессе нагружения необратимо изменяется, что после снятия нагрузки макроскопически проявляется как остаточная деформация. В предельном случае неупругость проявляется как разрушение – разделение на части нагружаемого тела. Неупругость можно наблюдать не менее или более часто, чем упругость.

Внутреннее строение материалов, применяемых в технике, весьма разнообразно, соответственно, различно и поведение материалов под нагрузкой. Примеры последовательно усложняющейся структуры твёрдого деформируемого тела:

- монокристалл;
- конструкционная сталь (поликристалл);
- стекло (аморфный материал);
- пластик (полимер);
- углепластик (полимерный композит);
- железобетон (композит сложного строения с металлической арматурой);
- грунт (скальный, глинистый, песчаный ...).

Несмотря на сильные различия, есть общие черты неупругого поведения разных материалов при относительно небольших деформациях, и их удаётся описать в рамках общих моделей. Естественно, упрощённое описание будет справедливо только с некоторой погрешностью, поэтому результаты соответствующих "теорий неупругости" на практике применяются только в области, где доступны экспериментальные данные по свойствам материала в заданных условиях работы. Основные модели неупругости, применяемые в технике, это – теория пластичности, теория ползучести и механика разрушения (механика трещин).

7.1. Где в технике изучают неупругость

В зависимости от характера работы изделия потеря упругости может быть как нежелательным, так и необходимым явлением. Примеры, где применяется анализ напряжённого состояния на предмет его неупругости:

- оценка изменения формы и размера детали при наличии жёстких допусков на размеры (в двигателях, турбинах и др.) – неупругость (пластичность) недопустима;
- оценки предельного состояния конструкций под нагрузкой (часть материала может пластически деформироваться, но это не означает потери работоспособности всей конструкции, например, подземного газопровода при подвижках грунта) – неупруго (пластически) деформированное состояние, удовлетворяющее определённым критериям, может быть допустимым как временное, например, до ремонта или как установившееся;

- оценка остаточных напряжений: а) вредных (например, при сварке); б) полезных – преднапряжение деталей, работающих на разрыв (автофретирование оружейных стволов, закалка стекла)
- процессы формовки, штамповки и т.п. (пластичность – условие работы);
- развитие процессов разрушения – эволюция упруго-пластического НДС в окрестности концентраторов напряжения (отверстия, трещины, ...);
- НДС при катастрофических и аналогичных процессах (деформирование и разрушение при разрыве, взрыве, ударе и т.п.).

Ниже нас будут интересовать те квазистатические процессы, в которых неупругость проявляется как пластичность.

7.2. Пластичность

Термин "пластичность" в механике используется в более узком смысле, чем в житейском понимании пластичности как некоторой "податливости". Пластичность в механическом понимании имеет вполне конкретные проявления и физическую природу. Отличительные свойства пластического деформирования суть относительная высокая скорость деформации – "мгновенность" в масштабе времени 0,001-0,01с и "пороговость" – интенсивное пластическое деформирование происходит, когда возрастающая нагрузка достигает некоторого уровня порога пластичности (предела текучести). Для большинства металлов пластическое поведение в широком диапазоне условий проявляется единообразным и относительно простым образом, что позволило построить его достаточно общее описание. Созданная в 10-40-х гг. XXв. *теория пластичности* (ТП) представляет собой математическое описание механики пластически деформируемых тел. Она создавалась после теории упругости и является в значительной степени распространением по аналогии её законов в область нелинейного деформирования. Хорошее введение в теорию пластичности имеется в книге [3].

Основной объект экспериментальных исследований, это – металлы, и они наиболее исследованы. Тому есть несколько причин, основные из которых следующие:

- а) в силу своей поликристаллической структуры большинство металлов ведёт себя при неупругом деформировании сходным образом, в широком интервале температуры;
- б) это один из наиболее широко используемых типов конструкционных материалов;
- в) полученные для металлов закономерности пластического поведения достаточно просты для истолкования, проверки, использования и обобщения.

При описании ТП мы будем иметь в виду металлы, как объект исследования, но терминология и методы ТП могут быть использованы и для других (структурно) материалов, хотя и с необходимыми оговорками и проверками, например, для грунтов.

Зависимость пластических и упругих свойств металла от кристаллической структуры и сил сцепления атомов изучается физикой металлов. Задачи ТП как механического учения для наших целей могут быть сформулированы следующими:

Во-1, выделить существенные факторы, определяющие пластическое НС – аксиоматизация формального аппарата;

Во-2, построить определяющие соотношения пластического деформирования – соотношения между напряжениями и деформациями, согласующиеся с опытными данными с необходимым уровнем точности;

В-3, развить технику расчёта НДС в рамках построенных соотношений.

С развитием численных методов часть теоретических разработок по задаче 3 потеряла своё значение – некоторые методы перестали быть единственным и простым способом получения количественных результатов. С другой стороны, в теории пластичности открылись новые возможности математического моделирования пластического НДС,

например, при циклическом нагружении, или в окрестности трещины, недоступного ранее для детального теоретического анализа. Вытекающая отсюда задача ТП –

В–4, разработать эффективные математические модели, пригодные для расчётов упруго–пластического НДС численными методами.

Под эффективностью понимается точность и экономичность расчёта. К настоящему времени все сформулированные задачи решены с определённой точностью, хотя уточнения, детализация моделей и разработка альтернативных подходов идут непрерывно.

Близкий к пластичности по своим проявлениям класс явлений необратимого "пластичного" (без разрывов) деформирования, идущих, в отличие от пластичности, на конечном интервале времени и при меньших нагрузках, без выраженного порога текучести, относят к классу т.н. "реологических". Этот класс требует для своего описания более сложных моделей, которые строятся по аналогии с моделями теории пластичности, хотя физические механизмы этих явлений различны. В применении к металлам реологические свойства объединены термином "ползучесть", который, однако, иногда используется и для других материалов, например, бетона.

Дальнейшее изложение характерных особенностей описываемых явлений (пластичность и ползучесть), имеет целью пояснение мотивации математических моделей, на основе которых строятся численные алгоритмы. Изложение самих основ сведено к минимуму. Чтобы сделать мотивацию проще, а математический каркас модели более убедительным, далее кратко изложены основные физические факты, из которых непосредственно следуют предположения, принимаемые в качестве основ математической модели пластичности.

7.2.1. Физические представления

Главное экспериментально проверенное допущение об атомной структуре, которое помогает наглядно истолковать экспериментальные факты, положенные в основу теории пластичности металлов – это представление о *поликристаллическом* строении металла. Это, с одной стороны ("*поли*–"), позволяет в большинстве случаев считать металл макроскопически однородным и изотропным, с другой стороны ("*–кристаллической*") – объясняет ряд явлений пластичности как проявления дефектов кристаллического строения. В качестве физического введения при изложении основ феноменологии рассмотрим истолкование двух экспериментальных фактов из разряда фундаментальных для теории пластичности [3].

1. Идеальная и фактическая прочность кристаллических тел. Идеальный кристалл допускает упругие сдвиговые деформации большой величины, при которых порядок расположения в идеальном кристалле не нарушается. Предельную деформацию можно оценить из опытов на растяжение. Максимальная величина предельной упругой деформации, при превышении которой идеальный кристалл разрушается, достигает величины $\epsilon_{\text{perf}} \sim 0,1$. Такие величины были получены, например, при деформировании совершенных нитевидных кристаллов железа (металлические "усы"). Эту величину можно интерпретировать как предельную степень отклонения атомов от равновесия в идеальном кристалле, при которой сохраняется обратимость, т.е. упругость деформирования. Прочность на разрыв идеального кристалла σ_{perf} определяется, в основном, энергией межатомного взаимодействия, и во вторую очередь – типом кристаллической решётки. Упругий предел деформации кристалла оценивается как:

$$\sigma_{\text{perf}} = E \epsilon_{\text{perf}} .$$

Реально у металлов неупругость (необратимость) можно наблюдать, начиная с $\epsilon \sim 10^{-4}$, а пластическое деформирование – при деформациях $\epsilon \sim 10^{-3}$. Отличие теоретического предела упругости от фактического по напряжениям составляет 2÷3 порядка.

Причина повышенной податливости кристаллической решётки, приводящей к снижению порога текучести, связана с дефектами атомного строения, дислокациями. Расположение атомов в окрестности дислокации таково, что небольшие напряжения в её окрестности вызывают необратимые относительные смещения атомов в её окрестности и перемещение дислокации как целого. Это перемещение приводит к необратимому скольжению – смещению атомных плоскостей друг относительно друга (рис. 7.1), т.е. к смещению целой части кристаллического зерна относительно другой части, что макроскопически проявляется как сдвиговая деформация материала, складывающаяся из деформаций отдельных зёрен.

При перемещении дислокации, как и при упругом растяжении всего кристалла, среднее расстояние между атомами и упругую энергию в каждый момент практически можно считать отвечающими упругому НДС, поскольку количество (плотность) дислокаций очень мало, и необратимые затраты энергии на перемещение дефектов в целом на порядки меньше запаса упругой энергии при нагружении. Поэтому необратимое деформирование неидеального кристалла требует меньшей внешней нагрузки и меньшей механической работы, т.е., не требует большой "энергии активации", как это могло бы быть при "единовременной" сдвиговой деформации идеального кристалла как целого, вдоль некоторой плоскости скольжения.

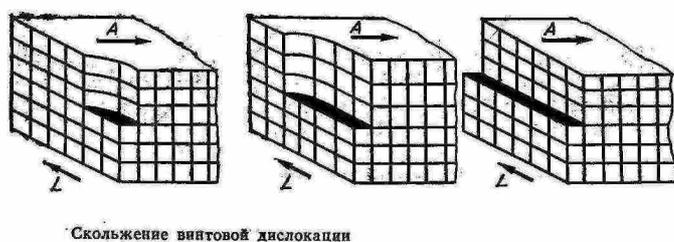


Рис. 7.1. Перемещение дислокации при сдвиговой нагрузке ([8])

2. Полосы скольжения (линии Чернова, линии Людерса) при одноосном растяжении.

В экспериментах по 1-осному растяжению поликристаллических образцов при травлении боковой поверхности деформированного металла выявляются структуры в виде тонких линий, направленных под углом 45° к направлению растяжения (рис. 7.2). Это соответствует плоскостям *максимальных касательных напряжений*. При заданном НДС касательные напряжения на площадке зависят от её ориентации, и, как отмечалось в п.1.5.1, в системе главных осей тензора напряжений экстремальные значения касательных напряжений достигаются в плоскостях, каждая из которых параллельна одной из главных осей напряжений и образует угол 45° с другими осями. При одноосном растяжении одна из главных осей параллельна направлению растяжения, остальные – перпендикулярны ей.

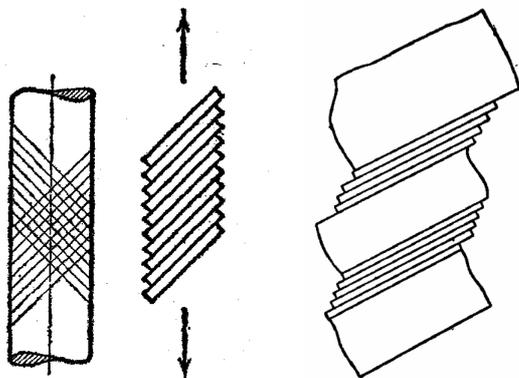


Рис. 7.2. Полосы скольжения при одноосном растяжении и схема

скольжения атомных слоёв

Таким образом, утверждается, во–1, что пластическое деформирование кристалла связано с наличием дефектов структуры кристалла и с перемещением дефектов при приложении нагрузки, а во–2, основное влияние на страгивание и перемещение таких дефектов оказывают *сдвиговые напряжения* (рис. 7.2). Смещение групп атомов (тонких слоёв) друг относительно друга начинается там, где максимальна соответствующая нагрузка (внутренняя сила), в данном случае – касательное напряжение. Эти утверждения позволяют дать простое качественное объяснение большинству экспериментальных фактов. Они используются при построении количественных теорий прочности.

Вспомним, далее, что поликристалл состоит из монокристаллических зёрен, ориентация которых часто, хотя и не всегда, имеет вполне случайное направление. Податливость относительно сдвигового напряжения, вызывающего движение дефекта, в определённых направлениях сильнее. Эти направления отвечают т.н. *плоскостям скольжения*. Известно, что в масштабе отдельного зерна неупругая деформация в значительной степени ограничена узкими полосами (скольжения), имеющими толщину порядка 100 межатомных расстояний. Плоскости, которым они параллельны, часто являются кристаллографическими плоскостями, в которых атомы упакованы плотнее, чем в перпендикулярном и близких к нему направлениях. Средний интервал между полосами скольжения имеет порядок ~1000 атомных расстояний, и решётка между полосами остаётся "нетронутой", т.е., деформирована после приложения нагрузки только упруго (рис.7.2 справа). Количество таких направлений – плоскостей скольжения для разных типов решётки фиксировано и невелико, обычно менее 10. Для любого направления плоскости скольжения относительно направления внешней силы найдётся приблизительно одно и то же количество зёрен, ориентированных по отношению к локальному направлению приложения силы наиболее "оптимально", т.е., податливо. Эти зёрна деформируются первыми. В опыте с одноосным растяжением локальный сдвиг в микрокристалле может происходить под углом, отличным от угла 45° относительно направления растяжения. Но в среднем эти сдвиги сосредоточены в окрестности этого угла, т.е. в направлении максимального касательного (макро)напряжения в образце. Подобная точка зрения на отдельный кристалл, вкупе с пониманием того, что мы имеем дело с поликристаллом, позволяет физически объяснить основные экспериментальные факты.

Отметим, что начало "теории неупругости" можно отсчитывать от 1864г., когда француз Треска опубликовал своё условие начала пластичности по максимальному касательному напряжению. Тем самым он ухватил суть явления: *пластическое течение металла связано с наличием сдвиговых напряжений достаточно большой величины*, приводящих к сдвиговым деформациям на микроскопическом и макроскопическом уровне.

То обстоятельство, что пластическая деформация необратима, т.е., что при обращении знака нагрузки исходная структура не восстанавливается, связывается с наличием взаимодействия дефектов кристаллического строения. Общее движение дислокаций зависит от деталей предыстории атомарного окружения каждой из них, которые невозможны при изменении знака нагрузки, и перемещение атомов при движении дислокаций и их взаимодействии становится в целом необратимым.

Эксперименты по пластическому деформированию и их истолкование

Рассмотрим другие важные явления при пластическом деформировании, многократно наблюдаемые на практике, и их "микроскопическое" истолкование:

- Упругость деформации кристалла и поликристалла на макроскопическом уровне имеет место до определенного уровня нагрузки, что проявляется как наличие *порога текучести* – при нарастании нагрузки, по достижении ею определённой величины упругое деформирование сменяется пластическим. На микроскопическом уровне это

объясняется тем, что для страгивания дислокации в её окрестности должно существовать поле напряжений определённого уровня; этот уровень, однако, существенно меньше напряжения на разрыв в идеальном кристалле;

- Величина этого порога текучести – предел текучести поликристаллического тела, *близка к максимальному касательному напряжению* при заданном НДС; интерпретация этого обсуждалась выше;
- При превышении порога текучести пластический материал не разрушается, а необратимо "течёт" (до тех пор, пока не начинают появляться и расти микротрещины). Это связано с тем, что движение дефектов внутри кристаллов макроскопически незаметно, хотя и выявляется методами металлографии, при выходе же дефектов на межзёрненную границу возникают и растут микропустоты;
- При деформировании материала возрастающей нагрузкой изменение объёма наблюдается только при упругом деформировании до порога текучести, а при дальнейшем пластическом деформировании объёмные деформации практически отсутствуют, что позволяет *полагать сжатие материала, если оно есть, упругим*. Это является следствием того, что среднее расстояние между атомами при скольжении атомных слоёв не меняется;
- Поскольку страгивание и перемещение дислокаций требует, хотя и малого, но конечного времени, *предел текучести зависит от скорости деформации*;
- Модуль упругости материала после пластического деформирования не изменяется, поскольку кристаллическое строение при пластическом деформировании в целом нарушается очень слабо;
- Как и в других аналогичных случаях, порог активации движения дислокаций зависит от температуры, и практически всегда *предел текучести убывает с увеличением температуры*.

7.2.2. Характерные особенности диаграммы деформирования при пластичности

Рассмотрим далее, как соотносится напряжение с деформацией при пластическом деформировании. Интегрально это демонстрируется диаграммой деформирования: зависимостью измеряемого напряжения или его эффективной величины, от деформации. Она обычно снимается в экспериментах на одноосное растяжение (рис. 5.2) или, при изучении сдвиговых нагрузок, на тонких трубах (рис. 1.10). Испытание может идти при заданной последовательности шагов по нагрузке (т.е., приложенной силе или моменту), или по деформации (удлинению), что проще. Диаграмма одноосного деформирования снимается при монотонном растяжении (сжатии) и фиксируется сила, действующая на стержень. Пластическое деформирование происходит только в процессе изменения нагрузки, а при фиксированной нагрузке (растяжении) деформация и продольная сила не растут. Это справедливо с достаточной точностью в достаточно широком диапазоне скорости деформации. Исключения изучаются отдельно.

При вычислении продольного напряжения в образце сила обычно отнесена к начальному сечению образца, которое по мере растяжения локально уменьшается, поэтому график вычисленного указанным выше образом максимального напряжения как приложенная сила к площади сечения называется *условная диаграмма деформирования*. Диаграмма формируется не только напряжением и деформацией, но и текущими условиями испытания. Поскольку наблюдать изменение сечения на практике часто трудно, а сила – известна, большинство диаграмм строится и применяется таким образом. Если необходимо знать, какое фактическое максимальное напряжение выдерживает данный материал, то для этого строится *действительная диаграмма деформирования*, на

которой напряжение определяется с учётом фактического минимального сечения образца, измеряемого при нагружении.

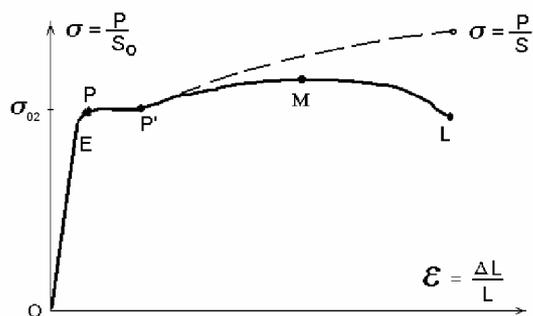


Рис. 7.3. Диаграмма 1-осного растяжения (условная и действительная)

в качестве предела текучести приводится эта величина. Можно спросить, почему фиксируется деформация и определяется напряжение текучести? Почему не применяется соответствующая "условная деформация текучести" ϵ_y при данном напряжении? Ответ понятен из диаграммы деформирования рис. 7.4: после начала пластичности наклон заметно снижается, причём при $\epsilon=0,002$ напряжённое состояние большинства металлов пластическое. При этом:

- если заметная пластичность начинается, например, при $\epsilon_y=0,1\%$, то при дальнейшем пластическом течении по достижении деформацией значения $\epsilon_{02}=0,2\%$ приложенное в этот момент напряжение σ_{01} не сильно будет отличаться от условного предела текучести σ_{02} (рис.7.3);
- пластичность как отклонение от упругого поведения у разных материалов начинается при разной деформации. Но, если известен условный предел текучести, т.е. напряжение, при котором деформация заведомо неупруга, то в приближении идеальной пластичности, эту эффективную пороговую деформацию текучести несложно оценить из з-на Гука, подставив в него табличные значения: $\epsilon_y=\sigma_y/E$.

Таким образом, σ_{02} может служить характеристикой начала пластического течения, и эта величина может быть с достаточной точностью измерена на практике, например, в условиях заводской лаборатории.

Рассмотрим остальные области диаграммы –

"Площадка текучести" PP' – наблюдается не всегда. Она связана с постепенным распространением области пластической деформации на весь образец;

Возрастающий участок неупругого деформирования PM (*участок упрочнения*) связан с *упрочнением* – увеличение предела текучести при пластическом деформировании; после разгрузки и при повторном нагружении измеряемый предел текучести, т.е. начало интенсивного пластического деформирования, будет отвечать достигнутой перед этим максимальной величине нагрузки;

Предел прочности или временное сопротивление на разрыв – напряжение в точке M ("временное" – т.к. при такой нагрузке образец уже долго не выдерживает и разрушается);

Спадающий участок ML (*зона местной текучести*) – связан с уменьшением сечения образца – образованием *шейки*. Деформирование становится неустойчивым – часть образца с малым сечением сильно растягивается при убывающем сечении, в то время как остальная часть образца упруго восстанавливается, при этом приложенная к сечению *полная* сила убывает с ростом продольной деформации, что и приводит к отрицательному

Рассмотрим характерные точки и участки диаграммы.

Предел упругости: напряжение σ_E в точке E , до которого материал не получает сколько-нибудь заметных остаточных деформаций. Чисто упругая деформация в металлах обычно очень мала: 0,001-0,005%. Величина предела упругости определяется фактическим допуском на неупругую деформацию в данном узле, и в справочники её обычно не включают.

Условный предел текучести σ_{02} : напряжение в точке P , $\sigma_y=\sigma(0,002)$, при котором *остаточная* деформация при 1-осном растяжении $\epsilon_p=0,2\%$. В справочниках

наклону при использовании величины площади исходного сечения для вычисления условного напряжения.

Разгрузка и циклическое нагружение

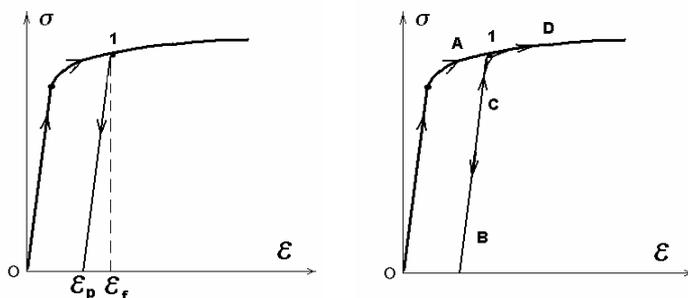


Рис. 7.4. Упрочнение, остаточная деформация, немонотонное нагружение

Если мы в точке 1 диаграммы деформирования (рис.7.4) после пластического растяжения станем уменьшать нагрузку, растянутый образец начнёт укорачиваться, но до известного предела – при нулевой нагрузке наблюдается *остаточная деформация*: ϵ_p , причём уменьшение удлинения после снятия нагрузки происходит упруго, деформация: ϵ_e . Полная деформация в точке 1 на пути OA1 складывается из суммы:

$$\epsilon_f = \epsilon_p + \epsilon_e ,$$

Если мы возобновим деформирование по той же программе, то на участке BC деформирование будет близким к упругому. Это означает увеличение предела текучести в результате неупругого деформирования, которое называют *упрочнением*. Участок монотонного роста после начала пластичности на диаграмме также иногда называется областью упрочнения. Почему рост предела текучести при пластическом деформировании называют "упрочнением"? Можно предложить следующее объяснение. Под прочностью вообще понимается способность противостоять нагрузкам. Поскольку в технике пластичность часто нежелательна, то "упрочниться" в данном случае означает увеличить свою способность *упруго* противостоять нагрузкам. При этом способность пластически деформироваться (т.е. максимальная достижимая деформация до разрушения после начала пластичности) в целом уменьшается.

Таким образом, в то время как модуль упругости, определяемый сортом атомов и кристаллическим строением, слабо зависит от предыстории деформирования и термообработки, предел текучести – это величина, зависящая от ряда факторов, в том числе от предыстории, и имеющая точность определения порядка 10%.

"Поликристаллическое" истолкование эффектов упрочнения

Природа явления упрочнения в металлах связана с их поликристаллическим строением. Выше говорилось, что перемещение атомов при необратимом пластическом деформировании происходит вдоль немногих выделенных направлений – плоскостей скольжения. При нарастании нагрузки в поликристаллическом образце в первую очередь начинают пластически течь те зёрна, в которых плоскости скольжения ориентированы в направлении наибольших касательных напряжений. По мере роста деформации данного зерна начинают сказываться его границы с соседними – дефекты строения начинают упираться в границы зерна (объяснение полос скольжения). После этого данное кристаллическое зерно деформируется упруго, т.е. его жёсткость возрастает и при увеличении нагрузки настанёт черёд пластической деформации других зёрен, где отклонение от плоскости "45° к оси нагружения" первоначально было большим. Для их

деформирования нужна ещё большая нагрузка. Когда их пластическое деформирование завершается, настает очередь следующих зёрен или других плоскостей пониженного сопротивления сдвигу. Это проявляется на диаграмме как медленный рост нагрузки, требуемой для деформирования – участок упрочнения.

После разгрузки возникают локальные остаточные напряжения в окрестности "сдвинутых" кристаллов (неупруго деформированных зёрен). При новом деформировании в прежней конфигурации сначала снимаются эти остаточные напряжения, затем должен быть достигнут предел упругости в ранее достигнутом состоянии, и только после этого начинается пластическое деформирование – эффективный предел текучести повышается. При разгрузке и перемене знака нагрузки (рис.7.5) напряжения вокруг "застопорившихся" дефектов складываются с вновь возникающим напряжением сопротивления внешней нагрузки обратного знака, и к данному кристаллику фактически оказывается приложенной большая внутренняя сила, заставляющая его при возрастании нагрузки пластически течь при меньшей внешней нагрузке. В результате предел эффективный текучести "в обратную сторону", т.е. при замене растяжения сжатием, может уменьшиться – т.н. *эффект Бушингера* (или *Баушингера*).

Таким образом, часть материала после пластического деформирования повышает свою способность сопротивляться пластическому сдвигу, что отвечает возрастанию предела текучести – "упрочнению" относительно начала пластического деформирования. При этом, однако, возникшие скопления дефектов на межзёренных границах ослабляют связь атомов на этих границах, способствуя появлению микропустот, микро-, а затем и макротрещин – образец теряет способность непрерывно деформироваться – охрупчивается, и фактически становится менее прочным.

При отжиге образца дефекты и скопления дефектов за счёт диффузии частично исчезают, эффект упрочнения пропадает: металл становится мягким – "отожжённым".

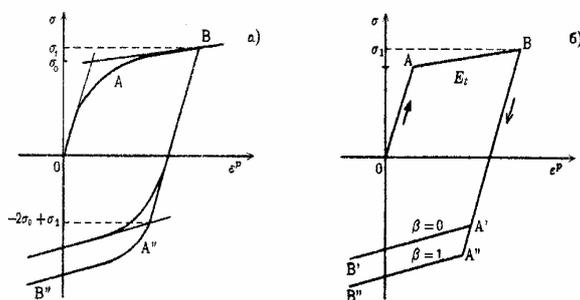


Рис. 7.5. Циклическое нагружение и эффект Бушингера

Схематизация диаграмм растяжения

Расчёты НДС разного уровня сложности всегда имеют дело с более или менее упрощённой диаграммой деформирования по отношению к реальной. Используемые в различных подходах идеализированные модели следующие (рис.7.6):

Жёстко-пластичность: (А): упругий участок деформирования не принимается в расчёт. Используется, когда упругая деформация пренебрежимо мала, например, в задачах о воздействии взрыва. Реально, например, в отожжённой меди предел текучести может быть очень малым, но участок упрочнения – большим (пунктирная кривая).

Идеальная пластичность (упруго-пластичность) (Б): упрочнение не принимается в расчёт, эффективное напряжение равно пределу текучести. Пример: чистое железо.

Упруго-пластичность с упрочнением.

а) Линейное упрочнение (В) – аппроксимация прямыми линиями участков диаграммы деформирования (упругого участка ОР и пластического РР'). При этом вводится т.н.

отсутствует [16]. Таким образом, в квазистатических задачах можно с хорошей точностью полагать, что пластическое деформирование начинается и оканчивается мгновенно в масштабе времени задачи, и предел текучести не зависит от скорости деформирования, что и предполагается в дальнейшем.

Отметим, что в численных расчётах зависимость предела текучести от скорости деформации может быть учтена непосредственной подстановкой: $\sigma_y = \sigma_y(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T)$. Выбирая различные зависимости на этом пути можно получить численные модели высокотемпературного и реологического поведения материала, в частности, ползучести.

7.3. Основные представления теории пластичности.

7.3.1. Задачи и способы описания пластического деформирования

Сформулированные выше задачи теории пластичности подразумевают следующие функции вычислительной процедуры, основанной на теории –

(1) Идентифицировать напряжённое состояние, возникающее под действием данной нагрузки, как упругое, либо пластическое;

(2) Определить напряжения и деформации в (упруго–)пластическом состоянии.

Далее введены величины, удобные при количественном описании основных фактов и представлений о пластическом деформировании.

При нагружении материал сначала деформируется упруго, а при дальнейшем росте нагрузки – пластически. Разгрузка, т.е. деформирование при снятии нагрузки – всегда упруга. Пластическая деформация малого элемента, однородно пластически деформированного, может быть определена как остаточная деформация после снятия нагружения. В пластическом состоянии, поэтому, на шаге нагружения приращение деформации представимо в виде суммы упругой и пластической составляющих:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p .$$

При квазистатическом нагружении деформирование интерпретируется как поэтапное, т.е., переходы образца от состояния к состоянию. Введение скорости деформации $\dot{\varepsilon}_{ik}$ позволяет относить этапы нагружения к реальному времени. При её определении учитывается изменение компонент тензора деформации в местной системе координат данного малого объёма, т.е. не учитывается вращение этого малого объёма в процессе деформирования (возможность этого следует из обсуждения гл.2):

$$d\varepsilon_{ik} = \dot{\varepsilon}_{ik} dt .$$

Ввиду отмеченной выше упругости объёмной деформации при пластическом деформировании в теории пластичности основное значение имеют девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3\varepsilon\delta_{ij}, \quad (7.1)$$

где $p = -1/3\sigma_{ij}\delta_{ij}$ – "давление", $e = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$ – объёмная деформация.

Составим вторые инварианты тензоров–девиаторов напряжений и деформаций:

$$I_2(s_{ij}) = 1/2(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ji}), \quad I_2(e_{ij}) = 1/2(e_{ii}e_{jj} - e_{ij}e_{ji}) . \quad (7.2)$$

Величина, пропорциональная корню квадратному из второго инварианта, взятого со знаком минус, называется, соответственно, *интенсивность напряжений* σ_i , и *интенсивность деформаций* ε_i . Ниже, для краткости, инварианты девиаторов в (7.2) будут подразумеваться взятыми со знаком минус. Соответственно, коль скоро для девиаторов $s_{ii}=0$, эффективное напряжение выражается через "квадрат" тензора:

$$\sigma_i = (3I_2(s_{ij}))^{1/2} = (3s_{ij}s_{ji}/2)^{1/2}, \quad \varepsilon_i = (4I_2(e_{ij})/3)^{1/2} = (2e_{ij}e_{ji}/3)^{1/2} \quad (7.3)$$

Величина σ_i фигурирует в критерии текучести Мизеса. В зарубежной литературе по теории пластичности также приняты названия *эффективное напряжение* и *эффективная деформация* (effective stress, effective strain). Определения интенсивности, даваемые различными авторами, могут отличаться множителем, в зависимости от принимаемой формулировки критерия текучести. В частности, различают просто интенсивность напряжений и интенсивность касательных напряжений [18], отличающуюся отсутствием множителя 3 при втором инварианте в (7.3).

Характеристики материала могут меняться во времени и от образца к образцу, поэтому любая теория пластичности будет справедлива лишь "с точностью, достаточной для практических целей". При построении теории делается ряд неявных и явных предположений, основанных на опытных данных, которые, в общем, выполняются только приближённо. Детали предположений могут быть разными, но существующие теории, из тех, что применяются в численных расчётах НДС, могут быть поделены на две основных группы, различающиеся записью определяющего закона – по скорости деформации (как в механике жидкости) или по деформации (как в теории упругости):

а) **Теория пластического течения.** Пластическое деформирование металла уподобляется течению вязкой жидкости. Считается, что физический закон пластичности связывает пластические напряжения и приращения напряжений с *приращениями* деформаций или *скоростями* деформации – *инкрементальная* теория пластичности.

б) **Деформационная теория пластичности.** Согласно деформационной теории напряжения и деформации связаны между собою *конечными* соотношениями, подобно тому, как в упругой области конечные напряжения и деформации связаны законом Гука.

Ряд основных представлений одинаков у обеих теорий, но есть существенные различия. В частности, деформационная теория недостаточно последовательно описывает явления разгрузки и плохо пригодна для расчётов немонотонного нагружения. В численном анализе более эффективна инкрементальная теория, и далее речь пойдёт о ней, но значительная часть сказанного может быть отнесена к обоим теориям.

При одноосном растяжении стержня его упруго–пластическое поведение описывается диаграммой деформирования. Теория пластичности позволяет распространить это описание на случай 3–осного нагружения достаточно общего вида. Приведём используемые для этого основные предположения – постулаты теории пластичности. Полагается, что рассмотрение ведётся в главных осях упругого НДС, если не оговорено противное, и в каждой точке напряжённое состояние задано тремя главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

7.3.2. Основные постулаты теории пластичности

Упомянутые выше результаты экспериментов, на которых основана теория пластичности, можно суммировать в виде нескольких постулатов (см. [17]), из которых могут быть выведены искомые *определяющие соотношения* между компонентами тензоров деформаций и напряжений.

1. Наличие *порога пластичности (текучести)* – при росте нагрузки деформирование идёт упруго только до некоторого предела нагрузки, характеризуемого величиной σ_y (yield stress), после чего наблюдается значительное отклонение от упругости – пластичность. Характер деформирования зависит от напряжённого состояния, описываемого в каждой точке главными напряжениями или 3-мя инвариантами тензора напряжений. Экспериментально измеряемый порог пластичности может быть соотнесён с некоторой скалярной функцией этих инвариантов:

$$\zeta \sigma_y = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \tilde{f}(J_1, J_2, J_3) . \quad (7.4)$$

Множитель ζ введён для нормировки величины σ_y в зависимости от принимаемого стандарта условий испытаний. Наиболее часто используется одноосное растяжение-сжатие.

Для введения зависимости σ_y от 3-го инварианта J_3 не найдено экспериментальных оснований. Независимость предельного состояния от первого инварианта следует из отмеченной выше упругости *объёмного* сжатия материала и формулируется в виде следующего постулата.

2. Всестороннее (гидростатическое) сжатие не приводит к пластической деформации. Обратное, если при пластическом деформировании наблюдается объёмное деформирование, оно может быть описано как упругое, законом Гука для первых инвариантов тензоров напряжений и деформаций. Первый инвариант пластической деформации –

$$J_1(\dot{\epsilon}^{(p)}) = \dot{\epsilon}_1^{(p)} + \dot{\epsilon}_2^{(p)} + \dot{\epsilon}_3^{(p)} = J_1(\dot{\sigma}^{(p)})/K = 0 = const, \quad (7.5)$$

и, каково бы ни было объёмное сжатие, оно не влияет на переход в пластическое состояние. Отклонения от этого наблюдались только при больших давлениях и скоростях объёмной деформации. Вычлняя практически постоянный первый инвариант, эквивалент давления, из тензора напряжений получим его девиатор. Сказанное означает, что в критерии текучести нет зависимости от 1-го инварианта, и остаётся зависимость только от 2-го инварианта тензора *девиатора* напряжений в данной точке:

$$\zeta\sigma_y = f^*(I_2)$$

3. По аналогии с упругим нагружением изотропного материала предполагается, что главные оси тензора *скорости* деформации при пластическом течении совпадают с осями тензора напряжений. Это выглядит естественным в свете упомянутой выше изотропии поликристаллических тел.

Основное различие между упругим и пластическим деформированием состоит в том, что упругая деформация от начального до конечного состояния в любой момент полностью определяется действующим напряжением, что, как мы видели в гл. 3, приводит к линейно-упругому определяющему соотношению. При пластическом течении накапливаемая деформация необратима и не является функцией состояния, поскольку при снятии нагрузки пластически деформированное тело не возвращается к исходному состоянию. Но можно получить определяющее соотношение при пластичности для *приращений* с помощью следующего постулата:

4. При заданном пластическом течении материала напряжения распределяются таким образом, что *мощность пластического формоизменения принимает стационарное значение*. Здесь "стационарное" означает минимальное по затрачиваемой мощности на данный момент времени из возможных напряжённых состояний. Это аналог общего принципа виртуальных перемещений: стационарность пластической работы сил, приложенных к телу.

Мощность — это работа за единицу времени. При 1-мерном растяжении работа, отнесенная к единице объема, и соответствующая изменению деформации ϵ на величину $d\epsilon$, равна $\sigma d\epsilon$, следовательно, мощность равна $\sigma\dot{\epsilon}$. При трехосном напряженном состоянии эта мощность в главных осях тензора напряжений (которые по 3-му постулату совпадают с главными осями тензора деформаций) равна (ср. (3.2)):

$$W = \sigma_1\dot{\epsilon}_1 + \sigma_2\dot{\epsilon}_2 + \sigma_3\dot{\epsilon}_3. \quad (7.6)$$

Потребуем для данного малого элемента, чтобы величина W , рассматриваемая как функция напряжений при заданных скоростях деформации, определяющих течение, принимала экстремальное значение. При этом должно выполняться условие текучести

(7.5). Следуя методу Лагранжа поиска условного экстремума, вводим неопределенный множитель λ и составляем выражение

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3 - \lambda f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

Приравнивая нулю частные производные от функции Φ по аргументам σ_k , $k=1, 2, 3$, получаем для главных значений:

$$\dot{\epsilon}_k = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_k}. \quad (7.7)$$

Соотношение (7.7) называется *ассоциированным законом течения* для условия текучести (7.5). Оно говорит о том, что скорость деформации при пластическом течении определяется некоторой функцией напряжённого состояния, ассоциированной с функцией текучести, и играет роль, аналогичную закону Гука при упругости. Вид множителя λ уточняется далее.

В широко используемом критерии текучести Мизеса (см. ниже) функция текучести равна 2-му инварианту девиаторов напряжений, который может быть записан в виде квадратичной формы от главных напряжений:

$$f(I_2) = I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Отсюда видно, что производные (7.6) линейно выражаются через девиаторы напряжений

$$\dot{\epsilon}_k = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} = \lambda \left(\sigma_k - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right) = \lambda s_k.$$

Рассуждения можно распространить на произвольную декартову систему координат:

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \lambda s_{ik}. \quad (7.8)$$

Как следует из 2-го предположения, при пластическом деформировании материала объёмная деформация нулевая, поэтому $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p$, т.е. пластическая составляющая тензора деформации совпадает со своим девиатором, и пластическая деформация будет зависеть только от девиаторной части тензора напряжений:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}. \quad (7.9)$$

Деформация сжатия может быть описана через модуль объёмного сжатия: $p = -Ke$. Нагружение, при котором выполняется соотношение (7.9), называется *пропорциональным нагружением*. Заметим, что это соотношение аналогично соотношению для девиатора напряжений в ньютоновской вязкой жидкости. Предел текучести σ_y для данного материала полагается универсальной величиной, независимой от (пропорционального) нагружения. Величина σ_y находится из опытов, независимость σ_y от нагружения отчасти проверена экспериментально.

Таким образом, при пропорциональном нагружении должна существовать единая диаграмма деформирования для всех путей нагружения с параметром t , имеющих одинаковые зависимости интенсивности деформаций и интенсивности напряжений: $I_{2e}(t)$, $I_{2s}(t)$. Параметрическая зависимость ($I_{2e}(t)$, $I_{2s}(t)$) для данного пути нагружения и может служить этой диаграммой. Далее рассмотрены следствия, вытекающие из первых двух постулатов теории пластичности при конкретных выражениях для функции текучести.

7.3.3. Функция текучести, геометрическая интерпретация

Вид условия текучести задаётся экспериментально проверенными условиями текучести, основные из которых следующие два: критерий Мизеса, налагающий условие на 2-й инвариант девиаторов напряжений:

$$I_2 = (s_{ij}s_{ij} - s_{jj}s_{ii})/2 = \sigma_y^2/3, \quad (7.10)$$

и силовой критерий (Треска) – по максимальному касательному напряжению. Он выражается через главные значения напряжений:

$$\tau_{\max} = 1/2(\sigma_1 - \sigma_3) < \sigma_t, \quad (7.11)$$

где σ_t – константа материала. Обратим внимание на то, что (7.11) записано относительно компонент тензора напряжений, а (7.10) – относительно девиатора напряжений.

Соображения Мизеса при формулировке условия (7.10) носили чисто формальный характер: интенсивность напряжений представляет собою простейшую симметрическую функцию главных касательных напряжений (см. [6]). Позднейшая интерпретация В.В.Новожилова (см. [17], [18]) делает условие (7.10) более физически наглядным: интенсивность напряжений с точностью до множителя равна средне-квадратичному значению касательного напряжения на поверхности малой сферы. Таким образом, если в каждом кристаллическом зерне наступление текучести определяется величиной касательного напряжения в определенной плоскости и определенном направлении, то для поликристаллического агрегата, в котором всевозможные ориентации плоскостей скольжения зерен равновероятны, естественно связать наступление текучести во всем материале с величиной, представляющей собою среднее значение касательного напряжения на площадках всех возможных ориентаций, которые равномерно представлены поверхностью сферы. Это проясняет универсальность закона текучести Мизеса для металлов.

Запишем функцию текучести, отвечающую условию Мизеса при данном пределе текучести σ_y , в виде:

$$F(I_2, \sigma_y) \equiv I_2 - \sigma_y^2/3 = s_{ij}s_{ij}/2 - \sigma_y^2/3. \quad (7.12)$$

Условие текучести (7.10) примет вид $F(I_2, \sigma_y) = 0$. Его часто записывают через условное напряжение начала текучести σ_m , измеряемое при 1-осном нагружении, указываемое в справочниках как σ_{02} :

$$F(I_2, \sigma_y) \equiv I_2 - \sigma_m^2 = s_{ij}s_{ij}/2 - \sigma_m^2.$$

Здесь $\sigma_y^2/3 = \sigma_m^2$. Пластическое течение отвечает нулевому значению функции текучести: $F(I_2, \sigma_y) = 0$. При наличии упрочнения предел текучести возрастает, и с его новым значением $\sigma_y^{(+1)}$ условие пластичности записывается в том же виде: $F(I_2, \sigma_y^{(+1)}) = 0$.

В теории пластичности активно используется геометрическое представление условия текучести через т.н. *поверхность текучести*. Компоненты девиаторов напряжений откладываются как точки в некотором арифметическом пространстве девиаторов. Вследствие условий $s_{ik} = s_{ki}$, $s_{kk} = 0$ это пространство 5-мерно для 3-мерной геометрии тела. Условие текучести суть уравнение поверхности текучести в пространстве девиаторов.

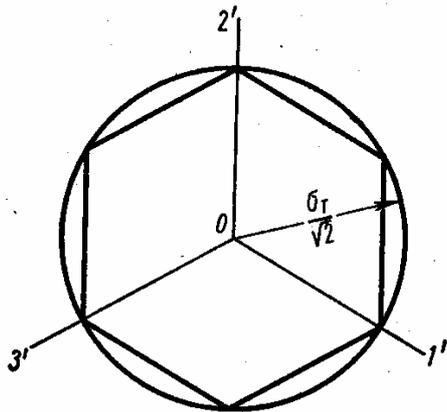
В главных значениях девиаторов (s_1, s_2, s_3) условие текучести Мизеса (7.10) имеет вид

$$I_2 = 1/2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \sigma_y^2/3 \quad (7.13)$$

Поверхность текучести в координатах (s_1, s_2, s_3) (проекция пятимерного пространства на трёхмерное подпространство диагональных компонент s_{ij}) представляет собой сферу радиуса $\sigma_y/\sqrt{3}$, а поскольку для девиаторов

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0,$$

то пересечение плоскости, задаваемой этим уравнение со сферой (7.13) даёт нам *окружность текучести* (рис. 7.7).



Следы пересечения поверхности текучести в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ с девиаторной плоскостью. Шестиугольник по условию пластичности наибольших касательных напряжений, окружность по энергетическому условию пластичности

Рис.7.7. Поверхность текучести и круг текучести радиуса $\sigma_r = \sigma_m$ (из [18]).

Поверхность текучести общего вида, задаваемая иным условием текучести, чем критерий Мизеса или Треска, очевидно, замкнута и, как показывается в теории пластичности, всегда выпукла, точнее, невогнута. В упругом напряжённом состоянии точка в пространстве компонент девиаторов, отвечающая напряжённому состоянию в данной материальной точке, всегда находится внутри поверхности текучести. Переход от упругого состояния к пластическому связан с однократным пересечением исходной поверхности текучести. Геометрическая интерпретация состояния *идеальной пластичности* в данной материальной точке заключается в том, что девиаторы напряжений в данной точке тела, связанные условием текучести, попадают на поверхность текучести и не покидают её при любом нагружении, пока не наступит разгрузка, в процессе которой значение функции текучести $F(I_2)$ становится отрицательным. В случае упрочняющегося упругопластического тела поверхность текучести изменяется в процессе пластического деформирования: выход компонент девиаторов напряжений за пределы первоначальной поверхности текучести влечёт изменение предела текучести и поверхности текучести (упрочнение).

7.3.2. Механическая интерпретация: силовой и энергетический критерии текучести

В критерии текучести Треска фигурирует максимальное сдвиговое напряжение, поэтому его называют *силовым* критерием текучести. Покажем, что критерий текучести Мизеса, в котором фигурирует квадрат эффективного напряжения, оказывается условием на энергию формоизменения. Выразим энергию формоизменения U_S (3.31) через напряжения и учтём, что $s_{ii}=0$:

$$U_S = 1/2 s_{ij} e_{ij} = s_{ij} s_{ij} / 4G = (s_{ij} s_{ij} - s_{ii} s_{ii}) / 4G \equiv I_2(s_{ij}) / 2G,$$

т.е., второй инвариант девиатора напряжений $I_2(s_{ij})$ пропорционален энергии формоизменения. Условие Мизеса для второго инварианта девиатора напряжений, таким образом, эквивалентно условию для некоторого критического значения упругой энергии формоизменения в данной точке:

$$U_S^* = \frac{1}{6G} \sigma_y^2 = \frac{1}{2G} \sigma_m^2, \quad (7.14)$$

в чём состоит *энергетическая* интерпретация критерия Мизеса.

7.3.3. Критерии текучести при одноосном растяжении и сдвиговом нагружении

Критериальные параметры, входящие в условия текучести по Треска и по Мизесу, могут совпадать, а могут и различаться. Выразим 2-й инвариант девиаторов I_2 через главные напряжения. Обозначим $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, учтём, что для девиаторов $s_1 + s_2 + s_3 = 0$:

$$\begin{aligned}
I_2 &= 1/2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = 1/18((3\sigma_1 - \sigma)^2 + (3\sigma_2 - \sigma)^2 + (3\sigma_3 - \sigma)^2) = \\
&= 1/18(9(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 6\sigma(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 3\sigma^2) = \\
&= 1/6(3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2) = 1/6((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2) \quad (7.15)
\end{aligned}$$

При *одноосном растяжении* вдоль оси 1 при приложенной силе, отвечающей напряжению σ_1 , первое главное напряжение равно σ_1 , а остальные нулевые, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Критерий текучести Треска будет иметь вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_t,$$

т.е. по достижении напряжением величины σ_t начинается пластичность. Измеряемая величина σ_1 начала пластичности служит основой для определения критерия текучести, который хотелось бы определять независимо от вида испытания.

Критерий Мизеса (7.10) с учётом соотношения (7.15) даёт:

$$\sigma_y^2 = 3I_2 = \frac{3}{6}(\sigma_1^2 + \sigma_1^2) = \sigma_1^2,$$

т.е. и здесь критерий $\sigma_y = \sigma_1$. В качестве технического предела текучести σ_y используют величину

$$\sigma_{02} = \sigma(0,002). \quad (7.16)$$

Это приводимое в справочниках напряжение, при котором деформация в экспериментах по 1-осному растяжению достигает 0,2 %. Технический предел текучести не совпадает с пределом упругости, поэтому при задании параметров упруго-пластического закона для проведения расчётов следует изучить результаты испытаний на растяжение и др.

Рассмотрим далее *чистый сдвиг*, который реализуется, например, при кручении тонкой трубы (рис. 1.10): в отсутствии радиальных нагрузок радиальное напряжение нулевое (это будет отвечать у нас направлению 2), и локально имеем плоские напряжения (касательные направления к поверхности тонкой трубы, направления 1 и 3). Чисто сдвиговое нагружение отвечает нулевой гидростатической составляющей:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0,$$

при этом $\sigma_2 = 0$, откуда $\sigma_1 = -\sigma_3$. Критерий текучести Треска σ_t будет иметь вид:

$$\sigma_t = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sigma_1.$$

Критерий Мизеса, вычисленный по (7.15), в этом случае равен:

$$\sigma_y^2 = 3I_2 = 3(\sigma_1^2 + \sigma_1^2 + 4\sigma_1^2)/6 = 3\sigma_1^2.$$

При сдвиговом нагружении критерии отличаются: $\sigma_y/\sigma_t = 2/\sqrt{3} \approx 1,15$, или на 15%, что можно измерить экспериментально.

Экспериментальная проверка показала, что, в целом, более точные результаты даёт критерий Мизеса. В реальности на предел текучести образца из металла влияет термообработка, прокатка, состав, размер и прочие факторы. Поэтому наблюденное в чистых экспериментах различие в 15% для технических расчётов может быть достаточно условным. В приближённых вычислениях критерий Треска более прост, поэтому его достаточно часто используют.

В общем случае 3-осного нагружения экспериментальная проверка выполнимости критериев текучести сложна вследствие трудностей определения компонент тензора напряжений. Большей частью проводились эксперименты при совместном действии кручения и растяжения–сжатия, где применимость критериев текучести в инвариантной форме была с определённой точностью установлена.

7.3.4. Уравнения теории пластического течения

Рассмотрим дальнейшие следствия 3–го и 4–го постулатов теории пластичности. В литературе соотношение (7.9) при формулировке уравнений пластического течения записывают часто не через скорость деформации, а через дифференциалы компонент тензора $e_{ij}^{(p)}$. Следуя этим обозначениям, множитель пропорциональности λ представим в дифференциальной форме $d\lambda$:

$$de_{ij}^{(p)} = s_{ij}d\lambda \quad (7.17)$$

Получим для величины $d\lambda$ несколько соотношений, нужных для дальнейшего. Сворачивая выражение (7.17) с s_{ij} , получаем слева работу пластических деформаций на шаге нагружения $dQ^{(p)}$, а справа будет 2–й инвариант девиатора напряжений, который выражается из условия текучести Мизеса:

$$dO^{(p)} = s_{ij}de_{ij}^{(p)} = d\lambda s_{ij}s_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_y^2 d\lambda, \quad (7.18)$$

$$d\lambda = \frac{3}{2\sigma_y^2} dQ^{(p)}. \quad (7.19)$$

Отсюда можно выразить компоненты деформации –

$$de_{ij}^{(p)} = \frac{3s_{ij}}{2\sigma_y^2} dQ^{(p)}. \quad (7.20)$$

Свернём обе части полученного равенства с $de_{ij}^{(p)}$ и умножим на $2/3$. Слева получим, в соответствии с определением (7.3), квадрат интенсивности для пластической деформации $d\varepsilon_i^{(p)}$, справа присутствует квадрат работы внутренних сил:

$$\frac{2}{3} de_{ij}^{(p)} de_{ij}^{(p)} = \frac{4}{3} I_2 (de_{ij}^{(p)}) = dQ_{(p)} s_{ij} de_{ij}^{(p)} / \sigma_y^2 = (dQ^{(p)})^2 / \sigma_y^2. \quad (7.21)$$

После извлечения квадратного корня работа пластических деформаций (на единицу объёма) на шаге по нагружению выражается как

$$dQ^{(p)} = \sigma_y de^{(p)}, \quad (7.22)$$

где введено по определению приращение *эффективной пластической деформации*, т.е. интенсивности деформации в пластическом состоянии, коль скоро в этом состоянии приращение девиатора деформации обусловлено только пластической деформацией:

$$de^{(p)} = \left(\frac{2}{3} de_{ij}^{(p)} de_{ij}^{(p)} \right)^{1/2}.$$

Подставив выражение (7.22) для $dQ^{(p)}$ в (7.20), получим соотношение между приращениями компонент тензоров пластической деформации и девиатора напряжений, имеющее место при пластическом течении:

$$de_{ij}^{(p)} = \frac{3de^{(p)}}{2\sigma_y} s_{ij}. \quad (7.23)$$

Соотношение (7.19) примет вид:

$$d\lambda = \frac{3de^{(p)}}{2\sigma_y}. \quad (7.19a)$$

При упрочнении предел текучести изменяется с деформацией, и приращение $de^{(p)}$ может быть связано с приращением эффективного напряжения, вызывающего изменение предела текучести. В линеаризованной зависимости вводится пластический модуль E_t , представляющий собой экспериментально определяемую константу материала (рис. 7.6):

$$d\sigma_y = E_t de^{(p)}. \quad (7.24)$$

Соотношение (7.23) примет вид

$$de_{ij}^{(p)} = \frac{3d\sigma_y}{2E_t \sigma_y} s_{ij}. \quad (7.25)$$

Внося (7.22) в (7.19), с учётом (7.25) получим выражение для множителя $d\lambda$ в виде

$$d\lambda = \frac{3}{2E_t} \frac{d\sigma_y}{\sigma_y}, \quad (7.26)$$

что можно также получить непосредственно из (7.19а) и (7.24).

Вместе с приращением пластической деформации введём интегральный параметр её накопления в некоторой точке как интеграл по $de_{ij}^{(p)}$, взятый через параметр нагружения:

$$\epsilon^{(p)} = \int_0^t \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}(t) \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}(t) \right)^{1/2} dt. \quad (7.27)$$

В теории линейного упрочнения $\epsilon^{(p)}$ используется как параметр для оценки текущего предела текучести и, при больших деформациях – как одна из простейших характеристик накопленной поврежденности в элементе. Напомним, что все формулы приведены для единицы объёма.

Уравнения Прандтля–Рейсса с упрочнением

Собирая вместе выражения, описывающие упругое и пластическое деформирование, (7.1), (3.22), (3.25), (7.26), мы получим т.н. *уравнения теории пластического течения Прандтля-Рейсса*, описывающей пластическое деформирование, в которые введено линейное упрочнение (см. [14]). Эта теория оперирует с величинами приращений деформации на шаге нагружения. Способ вычисления приращения деформации зависит от того, отвечает ли нагружение в данной точке тела упругому или пластическому поведению:

$$de_{ij} = \frac{1}{2G} ds_{ij} + s_{ij} d\lambda, \quad (7.28)$$

$$d\epsilon_{ii} = \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_{ii}, \quad d\lambda = \frac{3dS}{2\sigma_y E_t}, \quad (7.29)$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, σ_y – предел текучести, $S = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ – эффективное напряжение, E_t – модуль упрочнения. Коэффициент пропорциональности $d\lambda$ ненулевой при пластическом течении, когда положительна работа внутренних сил:

$$d\lambda = 0 \quad \text{при} \quad S < \sigma_y, \quad \text{или при} \quad s_{ij} de_{ij} < 0, \quad (7.30)$$

т.е. пластическая деформация, описываемая слагаемым с множителем $d\lambda$, отсутствует в уравнениях, если при нагружении не достигнут предел текучести или материал в процессе формоизменения разгружается (упруго), производя работу, так что приращение энергии (мощность) формоизменения отрицательна. Для идентификации пластического состояния в расчётах используются предел текучести и критерий (7.12).

В случае идеальной пластичности (отсутствие упрочнения, $E_t=0$, $dS=0$, множитель $d\lambda$ определяется по-другому) приращения девиаторов напряжений нулевые, и скорость пластической деформации, т.е., её приращение за ед. времени, пропорциональна только девиатору напряжений, который постоянен. Если при постоянной нагрузке *всё* работающее сечение идеально–пластического тела охвачено пластическим течением, статического равновесия нет – тело превращается в "механизм с одной степенью свободы" (Работнов [10]): процесс деформирования некоторое время ограничивается только силами вязкости и инерции при ускорении. Идеально–пластическое деформирование может быть остановлено только возросшим упругим сопротивлением остальной части сечения (например, при упруго-пластическом изгибе стержня), а, если такового нет (например, продольное деформирование стержня на разрыв), то деформирование идёт до разрушения. При наличии упрочнения сопротивление пластическому деформированию нарастает с ростом деформации и достижение равновесия возможно.

Теория течения, в принципе, содержит всё, что нужно для описания основных особенностей пластического поведения. В частности, она пригодна для описания немонотонного нагружения, когда нагрузка сопровождается разгрузкой. Некоторое неудобство для аналитических решений связано с тем, что определяющие соотношения при пластическом течении сформулированы не в конечной форме, а через приращения, и система уравнений имеет разный вид при нагружении и разгрузке. Но для численного решения это не представляет принципиальной трудности, хотя и усложняет алгоритм расчёта. Как правило, для расчёта упруго-пластических задач используются модели, базирующиеся на теории течения. Соотношения (7.29) будут использованы при построении численной схемы расчёта пластического деформирования.

7.4. Пример: задача о пластической мембране

(См. [8]) Для определения давления во взрывной волне используются тонкие круглые свинцовые пластины, закреплённые по краю. По прогибу судят об амплитуде волны (**вопрос – почему – свинцовые?**). Требуется связать прогиб мембраны с амплитудой (максимумом) импульса давления. Пластина жёстко закреплена по краям (рис. 7.8).

Принимаем допущения:

- импульс давления – прямоугольный и достаточно длинный (условие стационарности);
- ускорением и инерцией пластины при растяжении пренебрегаем;
- изменение толщины пластины при деформации для оценок считаем малым;
- известна диаграмма деформирования свинца $\sigma=\sigma(\epsilon)$, она монотонно возрастающая;
- считаем пластину участком тонкой сферы с переменным во времени радиусом кривизны, краевыми эффектами пренебрегаем;
- при вычислении деформации принимается приближение жёстко-пластичности, т.е. упругой деформацией пренебрегаем.

При начале деформирования плоской пластины напряжения в ней "бесконечно велики". (нулевая стрела прогиба), она легко прогибается и деформируется пластически. По мере роста прогиба и уменьшения радиуса кривизны поверхности напряжение в пластине, вызываемое внешней нагрузкой, уменьшается, и в определённый момент наступает равновесие сил, форма пластины перестаёт изменяться.

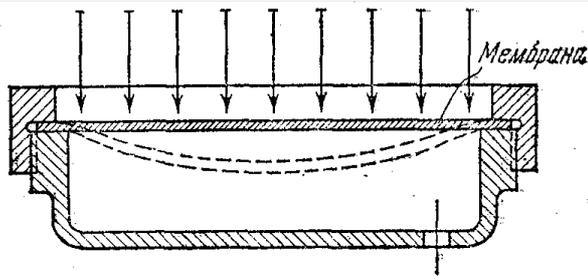


Рис. 7.8. К задаче о пластическом прогибе пластины [8]

напряжений в тонкой безмоментной оболочке (5.33) –

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} = p R(t)/2h, \quad (7.31)$$

где h – толщина пластины, $R(t)$ – радиус кривизны, t – параметр нагружения.

Пусть φ – половина центрального угла сферического сегмента, a – радиус мембраны, тогда $a = R \sin \varphi$, и радиус кривизны –

$$R = a / \sin \varphi \approx a / \varphi.$$

Прогиб мембраны –

$$f = a \operatorname{tg}(\varphi/2) \approx a \varphi/2.$$

Подставляя отсюда значение угла через прогиб в выражение для радиуса кривизны и далее в формулу для напряжений, получим связь напряжения, приложенного давления и прогиба:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} = p R/2h = p/2h a^2/2f = p a^2/4hf.$$

Теперь надо независимо связать напряжения в пластине σ_{θ} и её деформацию. Это делается с помощью диаграммы деформирования. Интенсивность деформации ϵ_0 можно получить, уподобив деформацию пластины деформации плоского листа при сжатии. Коэффициент Пуассона несжимаемого материала = 0,5, и для деформаций имеем –

$$\epsilon = \epsilon_{\theta} = \epsilon_{\varphi} = 0,5 \epsilon_R, \quad \epsilon_{\theta} + \epsilon_{\varphi} + \epsilon_R = 0, \quad \epsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_{\varphi} - \epsilon_{\theta})^2 + (\epsilon_R - \epsilon_{\theta})^2 + (\epsilon_R - \epsilon_{\varphi})^2} = 2\epsilon$$

Деформация вдоль поверхности оценивается через разность длин дуги и хорды, имеем

$$\epsilon = R (\varphi - \sin \varphi) / R \sin \varphi = \varphi / \sin \varphi \approx \varphi^2/6 \approx 2 f^2/3a^2$$

По величине ϵ из диаграммы растяжения свинца находим σ_{θ} , отвечающее пределу текучести, и по формуле (7.31) – давление, действовавшее на мембрану.

Вопрос – почему при вычислении напряжений можно пренебрегать утончением пластины, а при вычислении интенсивности деформаций – нельзя?

7.5. Температурные зависимости основных механических величин

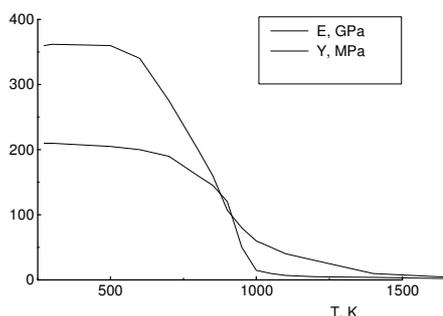


Рис. 7.9. Модуль упругости E и предел текучести Y стали SA533B1

включающем аустенитное превращение (в окрестности $T=1000$ К). Величина коэффициента Пуассона при росте температуры растёт к значению $1/2$, характерному для состояния текучести материала.

Понижение предела текучести при нагревании позволяет проводить обработку материалов. Например, углеродистую сталь куют, когда она высокопластична – при температуре выше ~ 1000 К.

Модуль упругости, предел текучести и модуль упрочнения характеризуют жёсткость материала, при росте температуры величины E , σ_y , E_t убывают по величине на порядок и более при гомологической температуре $T/T_{\text{плавления}} \approx 0,5$ [16]. Темп убывания с ростом температуры возрастает, если в данном интервале имеется структурное превращение, увеличивающее подвижность атомов. В качестве примера на рис.7.9 приведены данные для зарубежной аустенитной стали SA533B1 [19] в диапазоне температуры,

7.6. Ползучесть

Если металл держать при *постоянной* нагрузке, очень близкой к пределу текучести или при высокой температуре, то он медленно, но деформируется. Причина – не относительное скольжение (быстрое) участков зёрен поликристаллов вдоль атомных плоскостей, а диффузионное перемещение атомов, приводящее также к необратимой деформации, но физически несколько другим путём. *Ползучесть (creep)* – проявляется как зависимость деформации от времени: $\epsilon = \epsilon(t)$ при постоянной нагрузке.

Табл. 7.1. Сравнение свойств пластичности и ползучести

	Пластичность	Ползучесть
Скорость деформации s^{-1}	$\sim 10^{-3} - 0,1$	$\sim 10^{-12} - 10^{-5}$
Порог текучести	есть	нет
при объёмном сжатии	упруго	упруго
Характеристика	Независимая от времени диаграмма деформирования	Кривая ползучести – зависимость деформации от времени

Теория ползучести развивалась как обобщение большого числа результатов испытаний, полученных в разных странах, начиная с 20-х гг ХХв. Её основные представления во многом те же, что у развивавшейся параллельно теории пластичности.

7.6.1. Ползучесть при нормальной температуре

Для характеристики температурного режима ползучести различных металлов удобно использовать упомянутую выше гомологическую температуру металла, измеряемую в долях от абсолютной температуры плавления: $\theta = T/T_{\text{плав}}$. При достаточно низких температурах ($\theta < 0,5$) многие металлы ведут себя сходным образом. Зависимость

деформации от времени при 1–осном растяжении даётся *кривой ползучести* (Рис. 7.10). В соответствии с поведением деформации на этой кривой выделяют три стадии ползучести.

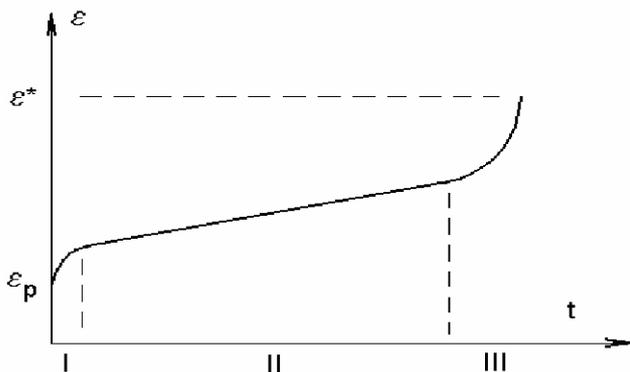


Рис. 7.10. Кривая ползучести: деформация от времени

1-я стадия – "упрочнение": идут структурные изменения, повышающие сопротивление деформированию: скорость деформирования убывает. После исчерпания способности к упрочнению наступает –

2-я стадия – *установившаяся ползучесть*, деформация с приблизительно постоянной скоростью. Обычно (но не всегда) она самая продолжительная, что позволяет пренебречь 1-й стадией и упростить количественное описание деформирования. Как отмечалось, физический механизм, способствующий деформированию ползучести, это диффузия (самодиффузия), вследствие чего ползучесть при нормальных и умеренно высоких температурах идёт медленно. Между приложенной нагрузкой и установившейся на 2-й стадии *скоростью* деформации эмпирически установлены связи, наиболее распространённая из которых – это степенной **закон Нортона** для скорости эффективной пластической деформации:

$$\dot{\epsilon}_p = d\epsilon_p / dt = A(T)\sigma_e^n, \quad (7.32)$$

где σ_e – интенсивность деформации, $A(T)$ – температурно-зависимый множитель. Величина показателя степени высока: $n=4\div 10$.

Применяется также экспоненциальный закон:

$$\dot{\epsilon}_p \sim (\exp(-\zeta\sigma) + \exp(\zeta\sigma)) = B \operatorname{sh}(\zeta\sigma). \quad (7.33)$$

3-я стадия – неустойчивая, относительно короткая: образование шейки, уменьшение сечения (площадь $=A$) и относительно быстрый рост напряжения в этом сечении $\sigma=P/A$. Если с вязким металлом проводить опыт при постоянном напряжении, снижая нагрузку пропорционально уменьшению сечения, то стадия неустойчивого роста может отсутствовать на кривой ползучести (опыты Эндрейда). Возможен случай, когда шейки не образуется, но при этом растут внутренние дефекты, образуются трещины, что эквивалентно уменьшению эффективного сечения.

В большинстве случаев допуск на деформации в технике не превышает ~1-2%, часто гораздо ниже, и в этих пределах сечение можно считать постоянным. Большинство металлов и сплавов разрушается при деформации в пределах 10%. При определённых условиях, однако, деформация в стали на 3-й стадии может быть гораздо выше и получаемые кривые могут заметно отличаться от "стандартной" кривой (ср. рис. 7.11)

Ползучесть металлов представляет собой один из основных деформационных процессов, способствующих постепенному разрушению под постоянной нагрузкой. Изучение этих процессов обычно преследует следующие цели:

(а) определение уравнения деформирования при ползучести;

(b) определение времени разрушения под нагрузкой $t=t^*$ в разных случаях.

Наличие закона деформирования в инженерной практике позволяет оценивать деформацию и прогнозировать время t_0 достижения предельной (по допуску на режим работы конструкции) деформации ϵ_0 при данной нагрузке и температуре. Для степенного закона в случае полагаемой постоянной скорости деформации $\dot{\epsilon}^*$ имеем:

$$\text{если } \dot{\epsilon}^* = d\epsilon/dt = A\sigma^n \approx const, \text{ то } \epsilon_0 = t_0\dot{\epsilon}^* = t_0A\sigma^n, \text{ и } t_0 = \epsilon_0/A\sigma^n \quad (7.34)$$

По известному времени разрушения под данной нагрузкой оценивают для других аналогичных случаев *запас прочности по времени* $n = t^*/t$. Время до разрушения при фиксированной нагрузке и температуре, измеряемое обычно при 1-осном испытании, зависит от нагрузки, и эта зависимость близка к степенной, что следует также и из (7.34).

7.6.2. Высокотемпературная ползучесть

Диффузия атомов в кристалле требует энергии активации, вероятность смещения атома в ячейке зависит от температуры: $\sim(\exp(-U/RT))$. Поэтому повышение температуры заметно ускоряет деформирование при данной нагрузке. Отметим, что при высокой температуре стадии ползучести часто не выражены (рис.7.11). Вид кривой ползучести зависит от материала и температуры.

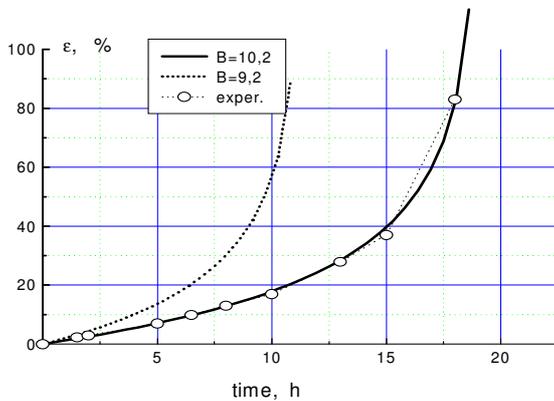


Рис.7.11 Кривая ползучести стали SA533B1 при одноосном растяжении. $T=1000\text{K}$, $p=56\text{MPa}$. “exp”- эксперимент, “B=10,2” и “B=9,2”- расчеты с разными параметрами модели [20]

Различие между пластичностью и ползучестью при повышении температуры уменьшается и фактически исчезает при достаточно высоких температурах. В этом случае деформация растёт со временем уже при достаточно малой постоянной нагрузке. Температура, при которой начинаются эти явления, приблизительно соответствует величине гомологической температуры металла, равной $\theta = T/T_{\text{плав}} \sim 0,6-0,7$ [16].

Примеры построения численных моделей пластичности и высокотемпературной ползучести будут рассмотрены при изложении численных методов.

8. Неупругость: разрушение

В число практических общих задач, решаемых МДТТ, входят оптимизация конструкций и расчёты на жёсткость и прочность. Первые две задачи часто могут быть поставлены и решены в рамках упругой постановки, что не требует моделей сплошной, иных, чем упругая, возможно, анизотропная. Расчёты же на прочность затрагивают вопрос целостности конструкции, т.е. её способности противостоять разрушению.

Понятие разрушения, даже в механике, весьма общее, и этому вопросу посвящена обширная литература. В применении к конструкционным материалам ниже под механическим разрушением понимается разделение материала конструкции на части в результате деформирования, появление трещин или иных дефектов, препятствующих её работе и приводящих со временем к разрушению. В этой главе обсуждается вопрос о том, что может дать механика при изучении процессов разрушения. Точно предсказать, на какие части распадётся конструкция, она не может, и обычно это не представляет интереса. Предмет МР состоит в изучении факторов, приводящих к разрушению, в предсказании его скрытого развития и разработке его критериев. В этом смысле, МР – это один из необходимых практических результатов развития механики твёрдого тела. Соответственно целям курса, ниже упомянуты некоторые основные процессы разрушения и приведена их минимальная классификация с целью последующего краткого пояснения роли механики в их изучении и разработке критериев разрушения разного рода. В большинстве случаев имеется в виду разрушение при квазистатическом воздействии.

8.1. Механическое разрушение и условия его развития

Первичная классификация возможна, в первую очередь, по характеру деформирования, при механическом разрушении. Выделяют два предельных случая:

Хрупкое разрушение – быстрое ("мгновенное") разрушение без заметной предварительной деформации. Связано с возникновением и неустойчивым ростом трещин.

Вязкое разрушение – разрушение после заметной деформации; например, в образце на растяжение образуется местное утончение – шейка.

Механизм разрушения определяется материалом конструкции и условиями её работы. Приблизительная классификация физических условий, активизирующих тот или иной механизм разрушения может быть такой (см. также [3]):

- По условиям работы, характеризуемым разными физическими факторами:
 - (а) запредельная механическая нагрузка пластичного материала в нейтральных условиях, например, при ударе или потере устойчивости (пластическое деформирование – хрупкое/вязкое разрушение);
 - (б) концентрация напряжений, невязкий материал (рост трещин, хрупкое разрушение);
 - (в) высокие температуры (высокотемпературная ползучесть, вязкое разрушение, возможны "горячие трещины");
 - (г) высокие давления (изменение характера разрушения);
 - (д) низкие температуры (хладноломкость – хрупкое разрушение);
 - (е) длительная высокая нагрузка (низкотемпературная ползучесть);
 - (ж) периодическая (знакопеременная) нагрузка (усталость – хрупкое разрушение);
 - (з) агрессивная среда (*стресс коррозия*, ..., каверны, трещины, хрупкое разрушение);
 - (и) облучение (накопление повреждённости – хрупкое разрушение);
- другие факторы ...

– По времени развития разрушения:

Говорят о *кратковременной* и *длительной* прочности. Параметр длительности весьма условен, требования к прочности меняются, в зависимости от назначения конструкции. В

ракетном двигателе, например, необходимо обеспечить длительность работы на время порядка десятков минут, в мостостроении – на срок порядка ста лет. Время может измеряться также в циклах изменения нагрузки или условий работы. Масштаб времени в конкретных проблемах обычно известен.

Основные цели изучения процессов разрушения проистекают из общей задачи анализа прочности:

- определение внешних причин, вызывающих разрушение, и их следствий (нагрузки и концентрация напряжений, механическая неустойчивость; физические условия);
- изучение состояния материала, приводящего к разрушению (пластическое состояние, зависимость от температуры и др.);
- формулировка *критериев разрушения* для интенсивных кратковременных воздействий; для длительного нагружения – определение вероятного времени разрушения $t=t^*$, задающего запас прочности по времени на текущий момент.

Ряд перечисленных выше физических факторов, способствующих разрушению, имеет немеханическое происхождение и не может быть непосредственно учтён в механических моделях. Например, результатом воздействия агрессивной среды может быть полная деградация материала (растворение, окисление, распад) – такие процессы здесь не рассматриваются. Но часто эти факторы приводят к последствиям, допускающим механическую интерпретацию и феноменологию, например к снижению предела текучести, развитию трещин. Действие ионизирующего излучения в ядерных реакторах создаёт дефекты кристаллического строения, увеличивающие склонность к хрупкому разрушению. Результат такого рода физического воздействия часто может быть количественно смоделирован как изменение критериев предельных состояний, сами же состояния по-прежнему могут быть описаны в терминах МДТТ. К разрушению могут также вести разного рода неустойчивости состояния, допускающие механическое описание. Ниже кратко обрисованы некоторые из существующих стандартных методов анализа механического разрушения.

8.2. Механика с учётом разрушения

8.2.1. Расчёты на прочность и предмет механики разрушения

С точки зрения оценки прочности элементов конструкций, линейная теория упругости и теория пластичности суть приближение к основной проблеме – анализ причин и формулировка критериев разрушения конструкций под нагрузкой. Пусть мы определили НДС в конструкции, т.е. поля вектора перемещений и тензора напряжений. Возникает вопрос – хороши ли они или плохи, т.е.: (а) выполняет ли конструкция свои функции и (б) разрушится ли она за период эксплуатации или нет? МДТТ как механика "сплошной" среды не может из своих постулатов сформулировать причины и критерии нарушения "сплошности" – разделения на части или иного разрушения. Необходимые критерии берутся из эксперимента. Они имеют вид предельного значения какой либо механической величины:

$$P < P_{max}, \quad (8.1)$$

где P_{max} может иметь различный смысл в различных обстоятельствах. Простейшие критерии – по (максимальному) *допускаемому напряжению* и *допускаемой деформации*:

$$\sigma < \sigma_{max}/n_{\sigma}, \quad \varepsilon < \varepsilon_{max}/n_{\varepsilon}, \quad (8.2)$$

где n – коэффициент запаса, зависящий от многих факторов. Эти допускаемые напряжения и деформации могут быть различными при разных условиях эксплуатации. В

частности, ранее мы формулировали критерии текучести – начала заметной пластической деформации:

$$\sigma < \sigma_{02}.$$

Предел текучести σ_{02} с определённым запасом может служить критерием, если нам надо минимизировать остаточные деформации, безотносительно разрушения. При этом пластическое деформирование в малой области далеко не всегда ведёт к разрушению, максимальная деформация при разрыве для большинства металлов гораздо больше 0,2%, хотя и не для всех. Но, например, чугун, керамика, стёкла, бетон разрушаются хрупко, без заметной пластической деформации, и для них σ_{max} , ϵ_{max} отвечают предельным величинам (хрупкого) разрушения. Таким образом, в ряде случаев расчёты на прочность в теории упругости (по допускаемым напряжениям или деформациям) и расчёты по теории пластичности вплотную подводят к формулировке критериев разрушения или им аналогичных. Хотя и далеко не во всех случаях. Перед тем как обсуждать образ действий при оценке прочности укажем разделы механики, в которых теория упругости отвечает на вопрос о возможности разрушения прямым и непосредственным образом [10].

Потеря устойчивости. Критерий разрушения совпадает с критерием устойчивости конструкции под данным воздействием P :

$$P < P_{max},$$

Теория колебаний: определение резонансных частот упругих конструкций. Как правило, если при вынужденных колебаниях под действием внешней нагрузки (например, сейсмической) частота внешней нагрузки близка к первым 1-4 собственным частотам системы, разрушение неминуемо.

Критерий прочности в простейшей форме здесь можно записать как ограничения на частоту воздействия для любых n из спектра вынуждающего колебания:

$$\omega_n > \omega_{max}, \quad \omega_n < \omega_{min}.$$

Линейная механика трещины, кратко охарактеризованная ниже. Для суждения о том, будет ли трещина распространяться, необходимо знать единственную константу материала – т.н. *вязкость разрушения* или эффективную поверхностную энергию J_C . Критерий разрушения, например, для трещины растяжения имеет вид

$$J < K_C = K_{IC},$$

Несмотря на то, что во всех этих случаях мы имеем дело только с моделью (сплошной) среды, специфика задачи позволяет сформулировать критерий прочности материала в рамках этой модели.

Уровень развития вычислительных средств и накопленный экспериментальный материал позволяет применять довольно изощрённые модели сплошной среды непосредственно при расчётах НДС конструкций сложной формы. Действия при оценке способности элемента конструкции противостоять механическому разрушению приблизительно таковы.

- Анализируются: *нагрузка* (статическая, циклическая, динамическая, колебательная, импульсная), свойства *материала* (жёсткий, пластичный, "ползучий", хрупкий, ...), *условия работы* (температура, среда (облучение, химия), длительность, ...);
- Выбирается модель материала и вычисляется НДС при заданных условиях (наличие пластичности, ползучести, термозависимости и других изменений свойств, ...);
- Определяются с учётом специфики условий наиболее вероятные физические механизмы разрушения, получаемое расчётное НДС уточняется, и вычисляются соответствующие механические критерии разрушения.

Указанная последовательность действий подходит под категорию "расчётов на прочность", название же "механика разрушения" (МР) употребляется в отечественной литературе в более узком смысле как механика трещин. Это название воплощено в соответствующем англоязычном термине – "fracture mechanics". При дальнейшем её развитии существенно использовались методы теории пластичности, и появилось обобщение – УПМР – упруго-пластическая МР [21].

В Приложении введены некоторые понятия УПМР, применяемые в оценках трещиностойкости, приведены численные примеры. Зарождение и развитие трещин, начиная с определённого уровня деформации, наблюдается, за небольшими исключениями, у большинства материалов. Основной теоретический и практический вопрос, на который отвечает УПМР, состоит в предсказании дальнейшей эволюции возникшей трещины при заданных условиях.

До определённого момента трещины могут быть небольшими и множественными, что не позволяет напрямую применять развитый аппарат УПМР. Уже сравнительно давно разработана простая феноменология долговременного разрушения материала под нагрузкой. Построенное качественное и количественное единообразное описание поведения материала при разных условиях суммируемое термином *длительная прочность*, может быть формализовано в критериальных оценках предельного механического состояния и внедрена в методику расчёта НДС. Соответствующая процедура кратко охарактеризована ниже.

8.2.2. Длительная прочность

Основные понятия

Изложение рассмотренных ниже вопросов можно найти, например, в книге [18] и, более подробное, в [17]. Как отмечалось, разрушение под действием продолжительной нагрузки обычно есть следствие нескольких физических факторов. Основная информация о длительной прочности материала получается из совокупности испытаний на длительную прочность при растяжении. Образец нагружается растягивающей силой P , определяется время его разрушения t^* . Вводится т.н. *предел длительной прочности*

$$\sigma_{\text{дл}} = P/A^*, \quad (8.3)$$

где A^* - площадь сечения разрыва. Испытания проводятся при разных нагрузках, затем строится график зависимости оцененного среднего напряжения $\sigma_{\text{дл}}(t^*)$ от времени разрушения в осях $(\log \sigma_{\text{дл}})$ - $(\log t^*)$.

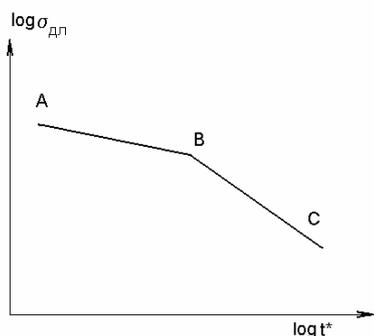


Рис.8.1. Диаграмма длительной прочности

Часто, хотя не всегда, эта зависимость имеет вид ломаной линии, состоящей из 2-х отрезков (рис.8.1). Участок АВ отвечает *вязкому* разрушению (ползучесть и заметное деформирование, если нагрузка выше), а ВС – *хрупкому* (разрушение без заметной предварительной деформации при меньшей нагрузке). Прямая линия означает наличие степенного закона $\sigma_{\text{дл}}(t^*)$. Его происхождение отчасти объясняется оценкой (7.34), сделанной для степенного закона для скорости деформации на второй стадии ползучести. Хрупкое разрушение подготавливается постепенным развитием и слиянием микродефектов: возникают микротрещины, которые растут, уменьшая эффективную площадь несущего сечения. Феноменологический закон $\sigma_{\text{дл}}(t^*)$ здесь также степенной, но с другим показателем. Графики, подобные приведенному на рис. 8.1, строятся для усталостной прочности (кривая Вёлера), для высокотемпературной прочности.

Запас прочности по времени $n = t^*/t$ выше был определён (7.34) при постоянной нагрузке. Обратная величина $\xi(t) = t/t^*$ называется *повреждённостью материала при данной нагрузке за время t*. Пусть величина t^* известна для данного диапазона условий. Если нагрузка нестационарна, то вычисляется *функция повреждённости* (т.н. закон линейного суммирования повреждённости):

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta t_i}{t^*(\sigma_i)} \quad \text{или} \quad \xi(t) = \int_0^{t_0} \frac{dt}{t^*(\sigma(t))} , \quad (8.4)$$

где Δt_i – интервал пребывания при напряжении σ_i . В момент, когда $\xi(t)=1$, запас прочности считается исчерпанным.

Температурно-временные зависимости длительной прочности

Степень повреждения, причиняемая механической нагрузкой, и, соответственно, время до разрушения, зависят от температуры. Если при работе конструкции увеличивается или уменьшается температура, то это можно считать эквивалентным в определённом смысле некоторому увеличению или уменьшению длительности нагружения. Поэтому температура должна быть введённой в аргументы функции времени разрушения: $t^* = t^*(\sigma_{дл}(t), T)$. Эти данные должны быть получены экспериментально.

Для того, чтобы получить сколько-нибудь представительные данные по длительной прочности в достаточно широком диапазоне нагрузок и температур, необходимо, например, для получения таблицы размером 10×10 провести порядка 100 испытаний только для одного материала. Требуемые значения срока службы изделия при повышенной температуре могут лежать в пределах от минут (материалы ракетных двигателей) до 10 лет (паровые турбины) и более (корпуса ядерных реакторов). Естественно желание иметь некую универсальную кривую, на которую бы ложились результаты этих испытаний, хотя бы приближённо, что позволило бы сократить их количество в конкретных случаях.

Для получения подобных аппроксимаций данных по длительной прочности, исходя из относительно небольшого набора испытаний, применяют гипотезы подобия "время-температура", проверяемые для металлов в различных комбинациях условий.

Зависимость скорости деформации ползучести от температуры и от нагрузки из общезначимых соображений и опытных фактов может быть взята экспоненциальной:

$$\dot{\epsilon}_p = d\epsilon_p / dt = B \exp(-U(\sigma)/RT) . \quad (8.5)$$

Здесь $U(\sigma)$ – "энергия активации", соответствующая напряжению σ . Из опыта известно, что для многих металлов произведение скорости ползучести (скорости деформации) на время до разрушения приблизительно постоянно:

$$t^* \dot{\epsilon}_p = e^*, \quad \text{или} \quad \dot{\epsilon}_p = e^*/t^* . \quad (8.6)$$

Это можно интерпретировать, как независимость предельной деформации от скорости деформирования, определяемой приложенной нагрузкой $\sigma = \sigma_{дл}$. Если не учитывать изменение сечения при деформации до разрыва, то, внося выражение для $\dot{\epsilon}_p$ в (8.5) и логарифмируя, для момента $t=t^*$ получим соотношение, связывающее напряжение $\sigma_{дл}$ – предел длительной прочности, с временем разрушения и температурой испытания:

$$\log(e^*) - \log(t^*) = -U(\sigma_{дл})/RT + \log B ,$$

что можно записать в виде

$$T \left(\log \frac{B}{e^*} + \log t^* \right) = \frac{U(\sigma_{дл})}{R}$$

или

$$T(C + \log(t^*)) = \Pi = f(\sigma_{\text{дл}}), \quad (8.7)$$

где Π называется *параметром Ларсона-Миллера*. Время и температура входят в этот параметр в определённой комбинации. Предел длительной прочности $\sigma_{\text{дл}} = \sigma_{\text{дл}}(t^*)$ соответствует этому параметру:

$$\sigma_{\text{дл}} = U^{-1}(R \Pi(t^*, T)).$$

Формула (8.7) – есть аппроксимационное соотношение (весьма приближённое), позволяющее объединить результаты испытаний на длительную прочность для условий различной температуры. Величина C – константа материала. В зависимости от единиц измерения и принятого стандарта у разных авторов логарифм может браться натуральным или десятичным. Существуют также другие соотношения (Мэнсона-Хаферда, Орра-Шерби-Дорна), которые имеют на одну константу больше, что позволяет осуществить подгонку точнее. Все они носят эмпирический характер.

Соотношения вида (8.4), (8.7) при недостатке экспериментальных данных применяют при экстраполяционных оценках запаса прочности в условиях изменяющейся температуры и нагрузки. Схема применения может быть следующей. Пусть в численном расчёте мы хотим оценивать запас прочности в конечном элементе – определять интеграл в функции $\xi(t)$ (8.4) в каждый момент времени при, например, переменном эффективном напряжении σ в элементе и температуре T . Предположим, что нам известны зависимость (8.7) и кривая длительной прочности (диаграмма рис. 8.1) при некоторой температуре T_0 . Последнее позволяет нам выразить для данного напряжения σ отвечающее ему время до разрушения t_0^* из (приблизительно логарифмической) зависимости $\sigma = \sigma_{\text{дл}}(t_0^*, T_0)$ и в соответствии с (8.7) записать аппроксимацию для неизвестного времени до разрушения t_1^* , соответствующего данным нагрузке σ и температуре T_1 :

$$T_0(C + \log(t_0^*)) = T_1(C + \log(t_1^*)) = f(\sigma_{\text{дл}}).$$

Отсюда выражается неизвестный параметр времени:

$$t_1^* = \exp(T_0/T_1(C + \log(t_0^*(\sigma)) - C)).$$

Константа материала C в уравнении (8.7) приблизительно одинакова для ряда металлов. Описанная процедура реализована в коде HEFEST-M в комплексной процедуре моделирования последовательного разрушения под нагрузкой (но для более сложной модели повреждённости): вычисляется критерий разрушения конечного элемента, который по разрушению удаляется из расчёта, и, при необходимости, место приложения нагрузки переносится на неразрушенный элемент [22]-[23].

Часть вторая. Численные методы и модели среды

9. Введение в МКЭ: дискретная основа решения задач МДТТ

Полученные выше уравнения статики деформируемого твёрдого тела представляют собой систему уравнений в частных производных для семейства функций, описывающих его напряжённо-деформированное состояние. Это частный случай общих уравнений механики сплошной среды (МСС). Существующие численные методы решения уравнений МСС и им аналогичных, обладают рядом общих черт. Вместе с тем, особенности моделируемой среды (жидкость, твёрдое тело) и постановки задачи определяют выбор наиболее подходящего метода. Ниже этот выбор кратко обосновывается для задач МДТТ.

Запишем решаемую систему уравнений квазистатики в общем операторном виде:

$$Au=F \quad (9.1)$$

Оператор A линейный и содержит дифференцирование, умножение на число etc. Он действует на неизвестную функцию u (набор функций $\{u_i\}$) от координат. В общем случае функции могут зависеть от времени и самих неизвестных. "Операторная" часть уравнения записывается обычно слева, в левой половине уравнения (9.1), правая же половина F содержит известные величины, задаваемые по условиям задачи. Неизвестные функции (для МДТТ это компоненты вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций) заданы на некоторой пространственной области Ω , возможно, на некотором отрезке времени: $u_i=u_i(x,t)$, $x \in \Omega$, $t_0 \leq t \leq t_n$. Они удовлетворяют краевым условиям на границе $\partial\Omega_u$: $u_i=u_i^0(x)$, $x \in \partial\Omega$, а при нестационарной постановке – начальным условиям. Требуется построить ориентированную на вычислительную машину эффективную процедуру (алгоритм) численного решения задачи. Под "эффективностью", в соответствии со сложившимися понятиями, здесь и далее понимается возможность численного метода работать в достаточно широком классе задач, давая решение с приемлемой точностью за приемлемое время.

Требование эффективности метода, таким образом, подразумевает его относительную "всеядность" по постановке задачи, что достигается только в рамках т.н. проекционно-сеточных методов (по терминологии [Марчук]), называемых также "методами сеток", в которых приближённое численное решение дифференциальной задачи вычисляется в конечном множестве точек области ("проецируется на сетку"), в остальных же точках решение находится интерполяцией. Процедуру сведения постановки непрерывной задачи (9.1) к задаче вычисления табличной (дискретной) функции $u(x_i, y_i, z_i)$, заданной в отдельных точках (x_i, y_i, z_i) , называют *дискретизацией* исходного уравнения, (9.1). Дифференциальное уравнение при этом сводится к системе (квази)линейных алгебраических уравнений, алгоритмы решения которых хорошо разработаны. В качестве исходных для проведения дискретизации уравнений МСС чаще рассматриваются их интегральные формулировки (например, принцип виртуальной работы).

Большинство применяемых в настоящее время методов дискретизации уравнений МСС могут быть отнесены к одной из двух основных разновидностей. Это (а) метод конечных разностей (МКР), в котором пространственные производные в исходном уравнении, или в его интегральной форме (метод контрольных объёмов, МКО), аппроксимируются разностными соотношениями, и (б) метод конечных элементов (МКЭ), в котором вводится пространственная аппроксимация решения и его производных более общего вида. Каждое из этих названий объединяет группу методов, близких по идеологии. Различие между методами двух групп в основном связано со способом пространственной аппроксимации решения в ячейках, и оно частично коррелирует с областью применения. МКО преимущественно используется для задач механики жидкости, хотя, например, CFD-пакет ANSYS CFX использует также МКЭ-подход. Дискретизация по времени

практически всегда строится через конечные разности, но известны и реализации пространственно-временных КЭ [Оден].

Степень точности схем аппроксимации решения уравнений МСС характеризуют порядком аппроксимации по пространству, а также по времени, если задача нестационарна. В линейных задачах, чем выше порядок, тем, в общем, выше точность решения. Если (9.1) представляет собой нелинейное уравнение (например, баланса импульса жидкости с конвективным слагаемым), эффект уточнённой пространственной аппроксимации может быть в численном методе невелик. Постановки задач МДТТ в этом отношении весьма комфортны по причине ограниченных и относительно малых деформаций. Это позволяет формулировать эволюционную задачу в лагранжевых переменных, не вводя перетоков (моделирующих конвективный перенос) массы и других величин через границы элементов, требуемых эйлеровым подходом. На малых перемещениях даже нелинейная задача будет близка к линейной, и для её решения метод конечных элементов очень удобен. Его основу составляет техника полиномиальной интерполяции решения в конечных элементах с последующим "сшиванием" кусочных "по-элементных" аппроксимаций в "глобальное" решение. Вид аппроксимирующей функции привязан к элементу, увеличение порядка и точности аппроксимации не требует выхода за его пределы, процедура "сшивания" аппроксимаций в соседних элементах регламентирована интегральным соотношением, используемым в процедуре дискретизации. При этом существует определённая свобода в выборе формы элемента. В лагранжевом подходе конечный элемент может изменяться (деформироваться) в процессе решения, и благодаря этому удаётся достигнуть необходимой точности пространственной аппроксимации на областях со сложными переменными границами, при конечных (не малых) деформациях.

В настоящее время МКЭ является основным методом решения задач МДТТ, и последующее будет посвящено изложению его основ. Известно несметное количество реализаций МКЭ, даже для задач МДТТ, использующих различные основные переменные, способы аппроксимации, формулировки интегральных принципов (есть уже, например, в книге 1970-х гг. [Стренг Фикс]). Только учебная и монографическая литература по МКЭ насчитывает сотни или даже тысячи единиц. Здесь изложена одна из наиболее простых и употребительных схем дискретизации. Приводимые перед этим некоторые факты из истории развития метода (см. также [Оден], [Стренг Фикс]) имеют целью иллюстрацию естественности его широкого распространения для решения инженерных задач.

9.1. Развитие МКЭ

Взглянем на задачу МДТТ глазами инженера докомпьютерной поры. Аналитические решения уравнений упругости построены только для простых случаев, а то, что проектируется, как правило, имеет сложную форму и нагружение. Естественный способ упрощения основан на том, что проектируемые конструкции приближённо представляются в виде набора простых элементов: пластин, стержней и др. Конструкция описывается как совокупность таких элементов. НДС в них, следовательно, будет некоторой суперпозицией решения в отдельных элементах. Простые элементы не обязательно тождественны элементам конструкции. Один из первых авторов, Хренников, в 1941г. (США), используя т.н. "ферменную аналогию", ввёл "метод каркасов" – предшественник общих дискретных методов решения задач строительной механики и применял его, представляя сплошное упругое тело в виде системы стержней.

Аналогичные подходы разрабатывались другими авторами. Разбиение области на простые части и составление уравнений равновесия и совместности для этих частей, элементов общей структуры, выполнялись на основе физических соображений. Построение более сложных структурных элементов проводилось так же; было замечено, что при возрастании степени полиномов (φ_i), аппроксимирующих решение в элементе,

значительно повышается точность, однако неизвестные коэффициенты q_i при полиномах, вычисляемые при такой дискретной аппроксимации, всегда подразумевали некий физический смысл, и процедура их вычисления не была формализована. По этой причине результат было интерпретировать легче, чем обосновать задаваемые весовые коэффициенты при аппроксимирующих полиномах.

Эта процедура приобрела математическое обоснование, когда неизвестные коэффициенты q_i в приближённом решении $u = \sum q_i \phi_i$ были отождествлены с коэффициентами в аппроксимации приближённого метода Рунге получения решения эллиптических дифференциальных уравнений путём его разложения по базисным функциям (см. [МитчелУэйт] и др.). Получаемые при этом дискретные уравнения есть следствие условия минимума упругой потенциальной энергии. В 1954г. Аргирис и его сотрудники начали публикацию серии работ, в которых они развили некоторые обобщения линейной теории конструкций и представили методы исследования дискретных конструкций сложных конфигураций в форме, удобной для ЭВМ. Первое формальное изложение метода конечных элементов принадлежит Тэрнеру, Клафу, Мартину и Топпу (1956), которые при исследовании задач о плоском напряженном состоянии использовали для описания свойств треугольного элемента уравнения классической теории упругости. Клаф ввел термин «конечные элементы» в своей более поздней работе (1960), посвященной плоским задачам теории упругости. Поскольку при решении задач МДТТ за основные неизвестные величины обычно берутся перемещения в узлах, или эквивалентные им степени свободы узлов, этот вариант дискретизации МКЭ получил название "метода перемещений".

Связь МКЭ с задачей минимизации позволила использовать его при решении других задач, сводящихся к решению уравнения Лапласа или Пуассона (стационарная теплопроводность, электромагнитные поля, идеальная жидкость). Решение этих уравнений также может быть получено путём минимизацией некоторого функционала.

Дальнейшее расширение области применения МКЭ связано с использованием концепции обобщённого решения и применением для получения аппроксимирующих уравнений метода Бубнова–Галёркина. Это позволило применять метод для решения тех дифференциальных уравнений, которые не имеют вариационной формулировки. В итоге МКЭ из численной процедуры решения задач строительной механики превратился в достаточно общий метод численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Этот процесс шёл в 1950-е гг. параллельно развитию вычислительной техники и благодаря этому занял менее 15 лет.

Таким образом, конечные элементы были введены инженерами, метод их применения был замечен и развит математиками до уровня вычислительной мощности, которого трудно было ожидать. Снабжённый "пользовательским интерфейсом", МКЭ вернулся к инженеру в новом облике. Прежние ферменные аналогии как метод решения многомерных задач забыты. Тем не менее, системы, состоящие из простых элементов типа стержня (в механике) или канала/объёма (в теплогидравлике и теплофизике) успешно рассчитываются в рамках технологий расчёта стержневых конструкций или (тепло)гидравлических сетей, которые "собираются" в (квази)линейную алгебраическую систему вполне единообразно – как в случае нульмерных, так и для многомерных элементов. В настоящей работе термин "метод конечных элементов" будет применяться именно в таком, достаточно широком смысле.

Стандартным и доступным средством решения сложных задач МДТТ в настоящее время служат пакеты программ, основанные на МКЭ, о которых здесь стоит сказать пару слов.

9.2. Инженерные МКЭ–пакеты

Количество используемых в мире инженерных пакетов решения задач МДТТ, включая только те, что могут быть найдены по ссылкам в Internet, давно уже насчитывает многие десятки наименований. Часть из них – коммерческие, т.е. предоставляется в пользование за плату и без доступа к исходным текстам. Приведём некоторые, наиболее известные. Одними из первых, начиная с 60–70–х гг., были следующие (в скобках – первоначальная область применения):

NONSAP (строительная механика) ;

NASTRAN (авиация, космос);

ANSYS (строительная механика);

MARC.

Их позднейшие версии, существенно расширенные, эксплуатируются и ныне, вместе с другими, введёнными в употребление позже. Это, в частности –

ABAQUS, ADINA, ANSYS, MARC, MSC/NASTRAN, COSMOS, SAP-7, LS-DYNA, CodeASTER (открытый код программы, Франция). Элементы механики твёрдого тела присутствуют также в открытом коде OpenFOAM. Открытым, хотя и весьма сложным является конечно-элементная платформа PHYENIX, первоначально разработанная в КТН (Швеция), предназначенная для широкого круга задач.

Особое место занимает комплекс ANSYS (Analysis of Systems), который имеет мощную поддержку и к настоящему времени превратился из просто расчётного пакета задач механики и физики сплошной среды в программную среду для проведения цикла конструкторских работ, включающего проектирование, расчёты, оптимизацию, выпуск документации и сопровождение эксплуатации изделий широкого профиля. Его функции включают расчёты МДТТ, теплопередачи, гидродинамики, электрофизики, проведение расчётов комплексных явлений, оптимизацию конструкции и др. возможности. Круг задач МСС, решаемый с помощью системы ANSYS, расширяется путём внедрения других МКЭ–пакетов, например, LS-DYNA (динамика деформируемого твёрдого тела), CFX (гидродинамика), а также контрольно–объёмный гидродинамический код FLUENT. Они используются как самостоятельные программные единицы в рамках интегральной среды.

Замечание относительно наименования алгоритмических расчётных средств

Для дальнейшего определимся относительно наименования расчётных средств компьютерного решения задач механики сплошной среды и аналогичных. Отечественная терминология в этой области пока устанавливается, и, несмотря на наличие нормативных документов, даже основное понятие исполняемого алгоритма расчёта в разных областях и в разные времена называлось по–разному.

На ЭВМ все исполняемые алгоритмы можно разделить на системные, относящиеся к операционной системе, и прикладные (application), предназначенные для внешних "прикладных" нужд, которые, единственно, и интересуют потребителя. С точки зрения разработчика физических моделей или пользователя расчётного средства, данное "приложение" – это нечто, дающее нужный результат и часто упоминаемое по названию: ANSYS, NASTRAN, MS Word etc. С точки зрения разработчика алгоритма – это инструкция по проведению последовательности вычислений – "программа", закодированная в виде системы обозначений, переводимых в машинные команды. Пользователю расчётного средства, не работающему с исходным алгоритмом, достаточно знать его название.

Для употребления общих именованных исполняемых алгоритмов стоит их уточнить, соотнеся термин с конкретной реализацией алгоритма. Ниже сделана попытка собрать основные применяемые термины и разобраться с их применением. Выбор и толкование

термина сделаны на основе образцов, встреченных в литературе по техническим приложениям МСС. Это словоупотребление различается у разных авторов. Русско-язычные термины и их английские эквиваленты приведены в табл. 9.1.

Исходной для ныне используемой русскоязычной терминологии послужила англоязычная. Исторически первыми, видимо, были термины "код" (code) и "программа" (program), используемые для обозначения адреса операции (число) и инструкции (алгоритма) исполнения этих операций, загружаемой в оперативную память ЭВМ. Изначально операции кодировались вручную в двоичной системе цифрами "0" и "1". Позднее появились языки высокого уровня, с помощью которых алгоритм записывался в виде текстовых символов, кодирующих типовые наборы операций. Такой текст и сейчас иногда называется "код программы", но чаще – "текст программы", или – "исходный текст", "исходник" (source code). Название "программа для ЭВМ" принято в отечественном стандарте ЕСПД – Единая система программной документации, а название "код" применялось для откомпилированной программы – "исполняемого программного модуля", который и передаётся обычно пользователю.

Табл. 9.1. Термины для обозначения расчётных средств (задачи МСС)

	Русско-язычный термин	Похожий англо-язычный
1	Программа для ЭВМ (алгоритм и исполняемый модуль); программное средство	computer program
2	Программа (текст алгоритма)	program
3	Модуль (исполняемый, расчётный, программный), библиотека	computer code, module, library
4	Пакет программ	code package
5	Код (команда), машинный код	code, computer code
6	Код (программа для ЭВМ), компьютерный код	code, computer code
7	Программное, расчётное средство	code, software

Комментарии к терминам табл. 9.1

1. Название, принятое в 1980 гг. в ЕСПД для алгоритма, написанного на одном из стандартных языков программирования. Сейчас употребляется также термин "компьютерная программа".

2. Сокращение для п.1; текст работающей программы для ЭВМ.

3. Исполняемое приложение (инструкция для ЭВМ на языке низкого уровня), могущее быть использованным автономно или в комплексе.

4. Набор исполняемых приложений, объединённых некоторой общей тематикой.

5. Управляющие инструкции при работе ЭВМ.

6. Употребляется в смыслах пп. 1, 3, а также в смысле 4.

7. Собираемое название для упомянутого в пп. 3-5.

Комментарии к употреблению терминов

Примеры из англоязычной терминологии: программное средство для расчёта МДТТ обычно называется "*structure code*" или "*mechanical code*". В 1980–е гг. для обозначения программных средств расчёта динамики сжимаемой среды (твёрдые тела, жидкости, газы) был введён термин "*hydrocode*", используемый обычно для расчётов ударно-волновых задач, в приближении невязкой жидкости. Средства вычислительной гидродинамики

часто называются просто "code". Программное средство MELCOR для моделирования тяжёлых аварий на легководных реакторах, состоящее из большого числа отдельных модулей, компилируемых вместе, и запускаемое как консольное приложение, в его описании называется просто "computer code". Изначально MELCOR входил составной частью в STCP – *Source Term Code Package* для анализа безопасности АЭС, где термин Source Term сейчас (и в 1980-е гг.) относится к продуктам радиоактивного распада реакторного топлива. Расчётный код МААР для анализа аварий на АЭС – это *Modular Accident Analysis Program software*. В анализе безопасности такие пакеты программ также называются "системный код" (system code), т.е., описывающий систему (теплогидравлическую etc.). В русско-язычной терминологии программные средства расчёта задач механики сплошной среды также называют "код", ранее – "инженерный пакет", иногда – "тяжёлый пакет", поскольку они обычно весьма громоздки.

Термин "модуль" употребляется в технике для названия отдельного устройства, могущего работать самостоятельно и встраиваемого также в некую общую систему. По аналогии "программный модуль" является блоком "пакета программ" (как, например, программные модули системного тяжёлоаварийного кода СОКРАТ, модули его аналога, кода МААР). Модуль может быть независимой откомпилированной единицей, возможно, допускающей самостоятельное выполнение, но может быть и блоком общего алгоритма, включённым в код, с функций вызова и обмена данными. Термин "библиотека" применяется вместо или вместе с термином "модуль", чаще системными программистами.

Существующий разнобой в употреблении терминологии ниже использован для дополнительной характеристики упоминаемых расчётных средств. Ниже, говоря об алгоритмизации, будет употребляться название "программа", если программа для ЭВМ имеет небольшой размер (в пределах 10 тыс. операторов) и не очень много рабочих функций. Для программ большего размера, составленных из нескольких программных единиц, будет применяться термин "пакет" или "код". Последний термин в настоящее время устоялся в разговорной речи и вытесняет другие названия. Для уточнения назначения кода для задач МДТТ будет также употребляться название "структурный код", представляющее собой транслитерацию англоязычного термина, или "инженерный пакет", также применяемое. С "модулями" как конкретными реализациями откомпилированных алгоритмов, мы здесь не будем иметь дела. Термин "программное (расчётное) средство" будет применяться как самое общее обозначение вычислительного алгоритма, реализованного в виде работающего "приложения".

О выборе и работе с программными средствами

Каждый инженерный пакет имеет сильные и слабые стороны. Выбор программного средства решения задач зависит от подготовленности пользователя в своей области, характера задач, доступных ресурсов ЭВМ и др. Основные критерии, помогающие сделать выбор, таковы:

- расчётный код (пакет программ ...) достаточно широко используется и развивается, что является признаком его эффективности в вышеупомянутом смысле;
- коммерчески доступен или распространяется по открытой лицензии;
- имеются достаточно новые модели существенных физических явлений, представительный набор вычислительных методов;
- имеется достаточно подробная документация;
- возможно обучение и поддержка пользователя.

Ознакомление с документацией, с описанием физических моделей кода, включая модели материалов, библиотеки элементов, численных методов дискретизации и решения алгебраических систем позволяют сделать окончательный выбор.

Благодаря коммерческой доступности инженерные пакеты в последние пару десятилетий существенно потеснили аналогичные частные разработки, служащие

исследовательским и другим целям, но не вытеснили совсем. Причина сохранения таких "лабораторных кодов" ("home-made", "in-home, in-house codes") состоит в несколько разных целях лабораторных и коммерческих кодов. Основная цель последних – получение устойчивого численного решения практической, часто – рутинной, задачи МСС пользователем среднего уровня подготовки. Средства получения более точных решений в них, как правило, также имеются, но способы достижения устойчивости численного решения (точнее – "робастности", т.е., надёжности и "всеядности" расчётного средства) от пользователя скрыты, т.к. код программы недоступен. В связи с этим, например, в сложных случаях исследования нового класса задач, новой среды etc., особенно, при отсутствии экспериментальных данных, желательны альтернативные подходы и расчётные коды, позволяющие отделить численные эффекты от физических. Этому может помочь работа непосредственно с исходными текстами, которые недоступны в коммерческих кодах. По этой и по другим причинам (например, высокая стоимость или недоступность даже учебной лицензии, её ограниченность или ограниченность её коммерческой применимости в рамках конкретного университетского проекта, при разработке новых численных схем etc.), разработка и доработка новых программ идёт и поныне, причём, значительная часть из них – с открытым кодом программы. Естественно, для участия в этом необходимо обладать знаниями численных методов, программирования etc.

Но даже, не работая с исходным текстом, а только для того, чтобы понимать документацию, эффективно использовать инженерные пакеты программ по МДТТ, очень полезно, и даже необходимо, знать, что из себя представляет МКЭ, хотя бы в общих чертах. Ниже метод изложен в нескольких формулировках, следуя от частного к общему, с акцентом на проявление в конкретных реализациях общих понятий и конструкций метода. Изложение в целом следует линии исторического развития. Некоторые повторения и параллели должны способствовать лучшему усвоению материала.

Следуя часто используемой схеме изложения, первичные понятия МКЭ даны для двух простейших примеров конечных элементов – упругая пружина и стержень. Затем будут рассмотрены многомерные задачи. Введение начнём с некоторых базовых понятий пространственной дискретизации МКЭ.

9.3. Дискретизация пространственной области. Узлы и элементы

9.3.1. Процедура дискретизации МКЭ

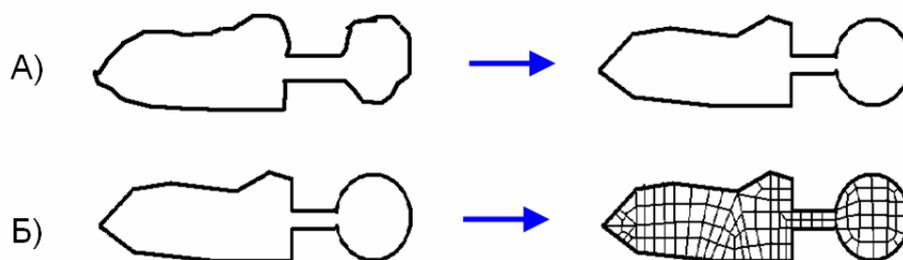


Рис. 9.1. Редукция (А) и разбиение (Б) расчётной области на КЭ

Процедура получения численного решения задачи МДТТ методом конечных элементов строится по следующей схеме, которая, после надлежащих модификаций и обобщений, может быть распространена на все задачи, решаемые МКЭ:

- Пространственная область, занимаемая исследуемой конструкцией, после необходимых упрощений и редукции (рис. 9.1) к области задания искомой функции, разбивается на малые подобласти, *конечные элементы* (КЭ); в них фиксированы узловые точки – *узлы*, в которых ищется решение. Тем самым, непрерывной модели сплошной среды сопоставляется дискретная модель, состоящая из элементов и узлов (рис. 9.2).
- Строится аппроксимация искомой функции (которая обычно – распределение компонент перемещений в узлах) на конечном элементе с помощью заданного набора *функций формы*; эта пространственная аппроксимация должна быть непрерывной на границах элементов, возможно также и с производными. Коэффициенты аппроксимации – это искомые узловые значения неизвестной функции. Дифференцируя выражения для перемещений, находят аппроксимации для деформаций и, затем, напряжений, представляющих внутренние силы, распределённые в элементах. Вследствие своей непрерывности на границах КЭ, аппроксимация неизвестной функции на всех КЭ вместе служит аппроксимацией решения на всей расчётной области.
- Строится нужный эквивалент физического условия равновесия (сформулированного в виде вариационного принципа или локальных условий равновесия для КЭ);
- Исходя из полученного формального выражения и аппроксимации через дискретные значения, строится система алгебраических уравнений: внутренние силы в отдельных элементах сопрягаются в одну связанную "глобальную" систему, для чего используется условие равновесия сил в каждом узле дискретной модели или иное эквивалентное. Вместе с внутренними силами учитываются силовые граничные условия и объёмные силы.
- После учёта граничных условий по перемещениям полученная алгебраическая система должна иметь единственное решение.
- Из решения алгебраической системы по полученным значениям основных неизвестных через функции формы могут быть определены значения в любой точке.

Перед тем, как приступить к разбору основных понятий МКЭ, остановимся подробнее на основных понятиях дискретного представления самой расчётной области, поскольку без полного усвоения этих простых вещей возможны трудности с пониманием остального.

9.3.2. Геометрическая модель в дискретном представлении

Механика сплошной среды в реальном мире имеет дело с трёхмерными телами. Её задача – найти пространственные распределения (возможно, переменные во времени) неизвестных функций, описывающих механическое (в широком смысле) состояние объекта. Эти функции могут быть скалярами (температура), векторами (скорость), тензорами (напряжение). Как отмечалось в гл. 5, трёхмерные распределения могут, в пределах некоторой допустимой погрешности, полагаться неизменными в одном или двух направлениях декартовой системы или линий (например, окружностей). Это позволяет вести рассмотрение только в некоторой плоскости, локально перпендикулярной направлению линии, и тогда неизвестная функция будет фактически зависеть не от трёх координат, а от двух или, даже, одной. Примеры хорошо известны.

В случаях такого рода симметрии мы говорим о двумерных или одномерных задачах, подразумевая при этом не сам объект, который обычно трёхмерный, а неизвестные функции решения. Далее это не будет специально оговариваться, но необходимо помнить, что, например, плоские конечные элементы многоугольники, рассматриваемые ниже, это призмы конечной длины, единичной или задаваемой пользователем в его расчёте. Эта длина фигурирует в интегральных соотношениях (она может явно не указываться, если единичная, но она есть). В случае осевой симметрии двумерный конечный элемент – это кольцо соответствующего сечения в осевой плоскости. Наличие координатной плоскости в двумерной декартовой или осесимметричной геометрии позволяет, в пределах

определённой погрешности, пренебрегать различием метрических соотношений в конечных элементах для этих двух рассматриваемых в лекциях случаев (при вычислении деформаций осесимметричность учитывается) и относить геометрические различия только в процедуру интегрирования, как это подробнее пояснено ниже, в гл. 10. Таким образом, "плоский конечный элемент" применяется без изменений и в случае осесимметричной геометрии, отличия, повторим, только в наборе компонентов напряжений и деформаций, что учитывается стандартным образом, и в процедуре интегрирования по пространству.

Основные геометрические объекты дискретного представления – это **конечные элементы (КЭ, *finite elements*)**, представляющие собой ограниченные подобласти пространства, как правило – многогранники (3D) или многоугольники (2D), заданные своими вершинами или **узлами (*nodes*)**, соединёнными рёбрами или сторонами (рис. 9.2, 9.3). Вместе они далее называются **сеткой** или **конечноэлементным (КЭ) разбиением**. В узлах сетки ищется искомое дискретное решение задачи, которое экстраполируется на всю расчётную область.

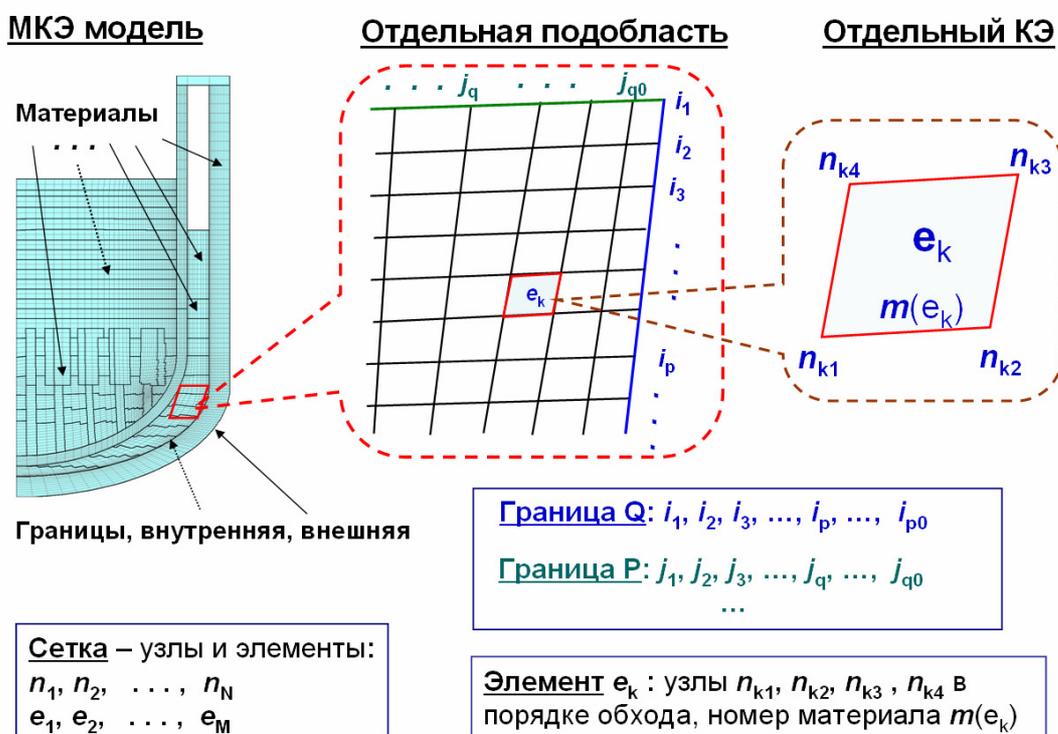
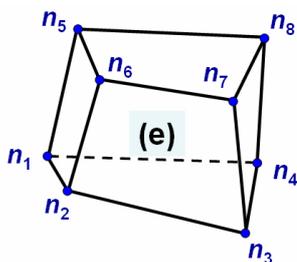


Рис. 9.2. Сеточные объекты в 2D конечноэлементной модели конструкции

Типичный КЭ в плоском случае – это 3– или 4–угольник. Узлы – это их вершины (в схемах аппроксимации МКЭ высоких порядков точности нужны дополнительные узловые точки). Комбинации этих элементов составляют основу 2–мерных КЭ–разбиений моделируемых областей в большинстве структурных кодов. Рассмотрим некоторые базовые понятия представления разбиения расчётной области на дискретные элементы. Вообще, цифровое представление пространственных фигур называют иногда также геометрическим моделированием. При геометрическом моделировании информация о точках тела, количество которых формально бесконечно, преобразуется в конечный объём цифровой информации. При представлении реальных тел совокупностью конечных элементов информация о форме тел частично теряется, но с необходимой точностью восстанавливается интерполяцией. Способы цифрового представления геометрии в САД–системах могут быть разными и не иметь прямого отношения к МКЭ, поскольку

разбиение тела на КЭ нужно не для аппроксимации формы, а для аппроксимации неизвестного решения. Но для расчёта необходима сетка КЭ, которая должна отображать существенные особенности формы тела. Эта сетка также задана в цифровом виде.



$(e): n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8 \quad m(e)$

Рис. 9.3. 3D гексаэдральный КЭ первого порядка

вхождение в расчётную область можно задать единым набором чисел, в унифицированном формате, включающем параметры:

- V – тип элемента (треугольник, четырёхугольник, тетраэдр, призма, гексаэдр),
- $\{e\}$ – связность (рис. 9.2): узлы, составляющие k -й элемент объёма с n вершинами (узлами), взятые в заданном порядке обхода: k, i_1, \dots, i_n
- $\{X\}$ – координаты узлов данного элемента (в общем списке) $i: x_i$,
- m – номер подобласти (материала, если есть), которой принадлежит элемент.

Здесь переменная V – тип элемента, определяет для вырожденного КЭ, какие узлы пропущены в полном наборе $\{X\}$ координат, соответствующем гексаэдру, имеющему 8 узлов. Эта информация может также содержаться в наборе $\{e\}$ (повторяющиеся узлы, отрицательные номера узлов и т.п.). Набор $\{e\}$ фактически задаёт и границы взятого объёма – рёбра и построенные по ним грани – пересечения рёбер. Кроме того, порядок обхода задаёт ориентацию в пространстве (в плоском случае – направление нормали к плоскости). Порядок обхода при внутренней нумерации узлов элемента фиксирован.

После того как рассматриваемый объём разбит на конечные элементы, для задания его дискретного представления необходимо и достаточно задать координаты узлов и связность элементов. Эти данные могут называться по-разному: "КЭ-разбиение", "сетка КЭ", "расчётная сетка", "finite element model" и др. Связность (element connectivity) задаёт соединение узлов элемента и порядок обхода. При этом элемент и сетка как целое могут в известных пределах деформироваться с сохранением связей узлов.

Как правило, значения координат узлов в сетке КЭ должны удовлетворять ряду условий, чтобы при вычислении решения не встречались неразрешимые ситуации, а погрешности находились в пределах допустимого. Основные из этих требований к качеству сетки следующие:

- **выпуклость КЭ;**
- часто – единая **геометрическая ориентация** (например, в 2D – это направление обхода границы КЭ, которое определяет знак вычисляемой площади);
- **допустимые соотношения размеров КЭ** (нет сильно вытянутых и скошенных);
- нет очень больших различий в **размерах соседних элементов.**

При постановке задачи и её решении в узлах задаются или ищутся "сеточные функции", т.е. значения известных и неизвестных пока функций координат в узловых точках. Распространение полученного решения на другие точки элемента осуществляется

интерполяцией. Интерполяция едина для элементов данного *типа*: тип задаёт интерполяционные формулы вычисления значений во внутренних точках, т.е. вид *функций форм*.

Для задания физических свойств используется упомянутый выше признак "материала", определяющий принадлежность элемента к определённой подобласти рассматриваемого объёма. В соответствии с этим признаком (часто – целое число: "номер материала") данной подобласти приписываются определённые физические свойства, отвечающие материалу этой подобласти.

Рассмотрим пример, изображённый на рис. 9.2 – задание МКЭ-данных по геометрии области, задаваемой МКЭ-моделью. Область содержит *numnp* узлов, *numel* элементов, *nummat* материалов, *nbc_1*, ..., *nbc_p* наборов граничных площадок для задания краевых условий. Часть текста входного файла, отвечающая за сетку, может быть такой:

Контрольная информация : *numnp*, *numel*, *nummat*, *nbc_1*, ..., *nbc_p* – количество узлов, элементов, материалов, количества площадок с гран. условиями разных типов

Геометрическая информация –

узлы : *numnp*=*N* строк – наборов координат узлов (в скобках: для 3D случая):

$x_{11}, x_{12}, (x_{13})$ (1-я строка)

...

$x_{N1}, x_{N2}, (x_{N3})$ (*numnp*-я строка)

элементы : *numel*=*M* строк: узлы 1,...,*q* в строках с данными элементов, с 1-го по *M*-й, и их номера материалов:

$k_{11}, \dots, k_{1q}, m_1$ (1-я строка)

...

$k_{M1}, \dots, k_{Mq}, m_M$ (*numel*-я строка)

площадки гран. условий :

{*nbc_1* строк} – площадки гран. условия типа 1 (узлы, задающие грани КЭ)

...

{*nbc_p* строк} – площадки гран. условия типа *p*

Вспомогательная информация

Конец ввода

Отметим, что случаи 2-мерной и 3-мерной геометрии различаются только наличием 3-й координаты и формальным заданием конечных элементов и граничных площадок. Напомним также, что в механике граничные условия могут быть двух типов, по напряжениям (давление, узловые силы) и по перемещениям (рис.9.4), причём, эти условия не обязательно ставятся на внешней границе. Границы задания двух типов г.у. не пересекаются и схематически изображены на рис. 9.4А. Но в случае, например, решения уравнения теплопроводности пересечение границ задания краевых условий более, чем одного физического типа, вполне вероятно. Эти случаи схематически представлены на рис. 9.4Б граничными условиями (г.у.) типов 1, 2 (внешние) и 3 (внутренние).

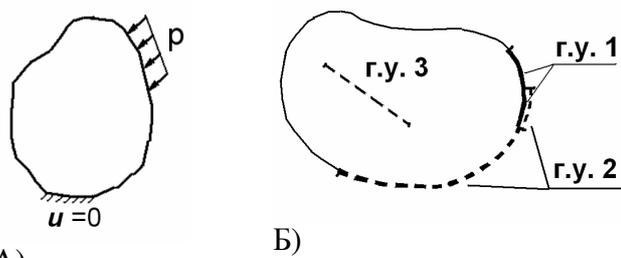


Рис. 9.4. (А) Граничные условия в задаче МДТТ;
(Б) Комбинации гран. условий

Цифровой информации, приведённой в рассмотренной выше "сеточной модели", достаточно для того, чтобы построить на данном КЭ разбиении любую вычислительную процедуру механики сплошной среды:

- есть координаты точек, образующих сетку;
- есть связность – известны элементы (контрольные объёмы);
- есть границы области – определены наборами "площадок";
- площадки – граничные элементы задаются наборами целых чисел – номеров узлов; тип граничного условия задаётся отдельными параметрами;
- все метрические соотношения заданы значениями координат узлов;
- физические свойства – связаны с номером материала или типом гран. условий.

Позже будет проведена дальнейшая классификация конечных элементов.

9.3.3. Матричные обозначения

Матричные обозначения широко применяются в формализме МКЭ. Вводимые матрицы не связаны напрямую с векторным и тензорным характером механических величин, а представляют собой лишь удобное обозначение массивов данных при координатных вычислениях. Мы будем иметь дело с прямоугольными (квадратными) матрицами, с линейными, т.е. столбцами и строками, называемые также векторами, а также, матрицами общего вида. Матрицы, содержащие более одной строки и столбца будем заключать в квадратные скобки: $[A]$, а квадратные матрицы будем также обозначать прописным прямым жирным шрифтом: A . Матрицы–векторы (строка или столбец) будем заключать в фигурные скобки или обозначать жирным наклонным (латинский алфавит) шрифтом: $\{a\}$, a , $\{U\}$, U . Используется знак транспонирования T , отличающий, например, матрицы строки: $\{a_1, \dots, a_n\}$ и матрицы столбцы: $\{a_1, \dots, a_n\}^T$. Предполагаются известными элементы алгебры матриц.

9.4. Линейная упругая пружина

Здесь рассмотрены одномерные конечные элементы, пружина и стержень. Они являются идеализацией реальных элементов конструкции и применяются в расчётах. На этих простых примерах вводятся и иллюстрируются в вычислениях некоторые общие понятия и процедуры МКЭ, изложение которых в более сложных случаях требует гораздо больше выкладок и далеко не так прозрачно. Проведённое рассмотрение в более полном варианте можно найти, например, в книгах [Hutton], [ANSYS в руках] и других.

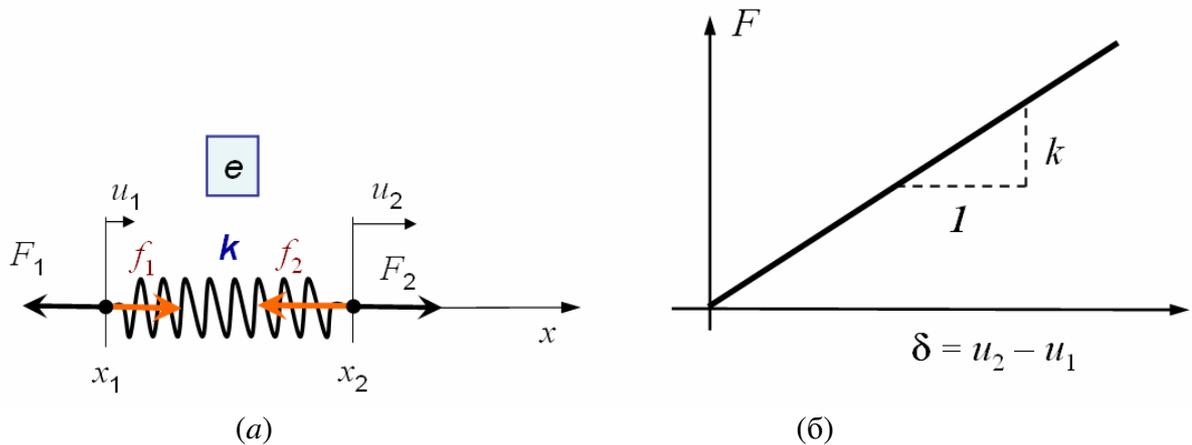


Рис.9.5. Линейная пружина: параметры элемента (а) и жесткостная характеристика (б)

Начнём с, вероятно, простейшего примера построения дискретной вычислительной модели простейшей идеализации деформируемого тела – линейной упругой пружины. "Линейная" в данном случае означает, что пружина растягивается вдоль *прямой линии*, к тому же, нас не интересует её строение (витки стальной пружины или толщина резины и т.п.) – состояние идеализированной пружины с данными свойствами (параметр жёсткости пружины) полностью характеризуется относительным положением двух её концов – *узлов*, или их перемещениями от начального положения вдоль линии, определяемой концами пружины:

$$\delta = x'_2 - x'_1 - (x_2 - x_1) = x'_2 - x_2 - (x'_1 - x_1) = u_2 - u_1.$$

Перемещение каждого узла вдоль линии соединения задаётся координатой – одним числом, т.е., как говорится в МКЭ, узел характеризуется одной *степеню свободы*.

Характеристика пружины "упругая" относится к определяющему закону, связывающему показатели нагрузки и деформирования. Как сказано выше, силовые нагрузки в МКЭ задаются в узлах. При получении дискретных аналогов нагрузок и условий равновесия важно разделение сил на *внутренние и внешние*. Приложенные к границам 1 и 2 внешние силы F_1, F_2 известны или связаны с известной кинематикой деформирования (силы реакции в закреплённых узлах). В каждом из двух концов пружины имеет место равновесие внутренней и внешней силы. Равновесное состояние самой пружины полностью характеризуется внутренними силами в её точках, которые уравнивают друг друга и уравновешены внешними силами. В данном случае одного двухточечного элемента внутренние силы сведены к двум точечным силам, равным и противоположным. В общем случае внутренние узловыи силы неизвестны.

При использовании пружины интересны только перемещения и усилия на её концах, и *пружина может быть задана двумя узловыми точками*. Полное условие равновесия (сумма внутренних сил поточечно равна нулю, действие внешних сил уравновешено внутренними) отображается в виде условий равновесия в узлах. Жесткостные характеристики упругой пружины характеризуются коэффициентом пропорциональности k между приложенной силой и изменением длины пружины δ , это даёт соотношение между силами и перемещениями. В каждом из двух узлов заданы внутренние силы f_1 и f_2 , вычисляемые каждая относительно другого узла (здесь они равны и противоположны):

$$f_1 = -k \delta = -k (u_1 - u_2), \quad (9.2a)$$

$$f_2 = -k (-\delta) = k (u_1 - u_2). \quad (9.2b)$$

Отметим, что линейная зависимость (рис.9.1б), вообще говоря, не обязательное свойство материала, даже упругого. Подчеркнём, далее, что эта зависимость относится к

деформированию пружины, взятой как целое, её размеры и механические свойства материала учитываются одним коэффициентом жёсткости k .

Учёт равновесии внешних и внутренних сил даёт два уравнения для двух узлов – граничные условия:

$$f_j + F_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (9.3)$$

Внося сюда выражения (9.2) для внутренних сил, получим –

$$k(u_1 - u_2) = F_1, \quad (9.4)$$

$$k(u_2 - u_1) = F_2. \quad (9.5)$$

Эти уравнения формально можно написать в виде матричного соотношения :

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \equiv [K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \equiv [K] \{U\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \equiv \{F\} \quad (9.6)$$

Здесь введена матрица, называемая *матрицей упругости* $[K]$, которая в данном случае совпадает с *матрицей жёсткости* (stiffness matrix) элемента. Коэффициенты матрицы жёсткости связывают перемещения узлов с узловыми внутренними силами и содержат характеристики материала, а также, в более сложных элементах, размеры. Перемещения объединены в матрицы размером 1×2 , называемые *векторами* узловых перемещений $\{U\}$, а силы в узлах объединены в *вектор* узловых сил $\{F\}$. Это не должно вызывать путаницы с физическими векторами перемещений и сил в точках. Внешние силы на границах (силовые граничные условия) полагаются известными.

Если граничные условия по перемещениям не заданы, а заданы только узловые силы на концах, то из условия равенства нулю главной силы в состоянии равновесия следует $F_1 + F_2 = 0$. Построенная матрица жёсткости $[K]$ симметрична и сингулярна, и второе уравнение получается из первого умножением на -1 . Формально это означает бесконечное множество решений, что с механической точки зрения абсолютно ясно, поскольку в общем случае равновесие сил без фиксации положения не исключает перемещений узлов на любую величину, одинаковую для всех узлов. Следовательно, для этой задачи, поставленной в *перемещениях*, граничное условие по перемещениям необходимо. Зададим, например, в первом узле $u_1 = 0$, система примет вид:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 - ku_2 \\ 0 + ku_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \quad (9.7)$$

Из второго уравнения определено перемещение u_2 , а в закреплённом узле, где $u_1 = 0$, неизвестная внешняя *сила реакции* F_1 определяется самим решением: $F_1 = -F_2$. Но ранг матрицы системы при нулевом первом столбце понизится на единицу, что в общем случае неудобно. С формальной точки зрения более последовательным будет преобразование уравнения, в котором первое уравнение есть и оно соответствует просто условию закрепления. Значение нулевого первого перемещения подставляется в остальные(ное) уравнения(ние) с сохранением остальных коэффициентов(та):

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \quad (9.7a)$$

В этом случае матрица будет невырожденной, и мы получим в первом узле $u_1 = 0$ *непосредственно из решения линейной системы*, что важно для единой структуры алгоритма. Этот приём, состоящий в обнулении всех коэффициентов, относящихся к

закреплённому узлу, кроме коэффициента этого узла, как мы увидим дальше, непосредственно обобщается на случай произвольного числа степеней свободы.

Для иллюстрации работы введённых понятий рассмотрим чуть менее тривиальный пример – систему двух пружин с разными жёсткостями (рис.9.6).

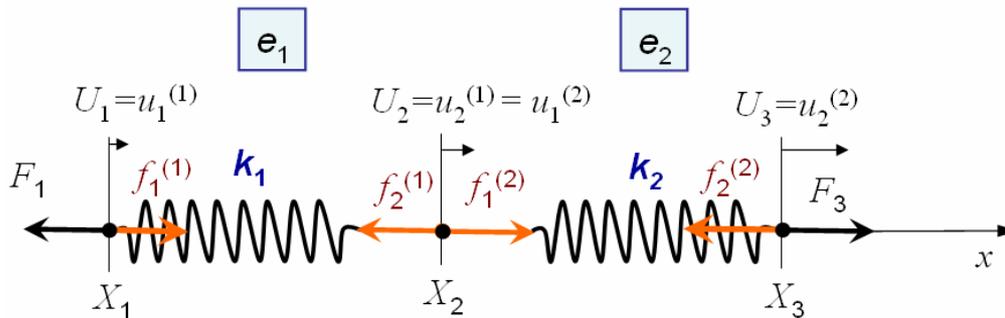


Рис.9.6. Система двух пружин с внешними узловыми силами

Для каждой из пружин записываем в матричной форме по-элементные уравнения связей внутренних сил с перемещениями:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1^{(1)} \\ -f_2^{(1)} \end{Bmatrix}. \quad (9.8)$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1^{(2)} \\ -f_2^{(2)} \end{Bmatrix}.$$

Используем условия равновесия в каждом из трёх узлов рассматриваемой системы пружин, что вместе будет условием общего, *глобального* равновесия:

$$f_1^{(1)} = -F_1, \quad f_2^{(1)} + f_2^{(2)} = -F_2, \quad f_3^{(2)} = -F_3. \quad (9.9)$$

Верхние индексы в скобках указывают номер элемента. Обратим внимание на отличие от предыдущего примера – наличие внутреннего узла 2: если к нему не приложена внешняя сила, формально неизвестные внутренние силы в этом узле взаимоуничтожаются. Поэтому все узловые силы определены условием общего равновесия и граничными условиями. Подставляя, как и ранее, в уравнения (9.8) эти выражения, получим систему, описывающую обе пружины –

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}. \quad (9.10)$$

В этой системе уравнений вместо элементных векторов перемещений $\{u^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)}\}$ введён соответствующий вектор *глобальных* перемещений, содержащий оба элементных вектора, и введён *глобальный вектор нагрузок* $\{F_1, F_2, F_3\}$, содержащий известные внешние силы, причём, как и ранее, в месте приложения граничных условий по перемещениям внешняя сила реакции не задаётся, она обнуляется, и может быть определена из решения. Матрица всей системы суть *глобальная матрица жёсткости* (МЖ). Коэффициенты в правой части получены из правых частей элементных уравнений.

Таким образом, коэффициенты искомой системы алгебраических уравнений определены коэффициентами элементных уравнений. Задание глобальных векторов осуществляется выстраиванием узловых переменных в порядке нумерации узлов, а

получение глобальной МЖ требует суммирования соответственных членов элементных матриц, относящихся к данному узлу. В общем случае это суммирование осуществляется аналогичной процедурой, вытекающей из правил подстановки элементных уравнений (9.8) в условия равновесия в узлах (9.9). Эта процедура *сборки матрицы жёсткости* присутствует во всех реализациях МКЭ. Рассмотрим процедуру объединения элементных уравнений подробнее.

Во-первых, в ней предполагается, что выполнено *условие совместности* узловых перемещений, что отражено на рис. 9.6:

$$u_1^{(1)} = U_1, \quad u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = U_2, \quad u_2^{(2)} = U_3. \quad (9.11)$$

Это означает, что перемещения узлов модели конструкции как целого отождествляются с перемещениями, фигурирующими в соотношениях (9.8), выписанных для отдельных элементов – во всех элементных уравнениях перемещения соответственных узлов полагаются одинаковыми. В данном случае это имеет содержание только для среднего узла. Далее совместность принимается без специальной оговорки. Условие (9.11) позволяет записать элементные равенства (9.8) в *глобальных координатах* $\{U\}$, которые в данном случае те же, что и локальные, отнесённые к конкретному элементу:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1^{(1)} \\ -f_2^{(1)} \end{Bmatrix}. \quad (9.12)$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_2^{(2)} \\ -f_3^{(2)} \end{Bmatrix}. \quad (9.13)$$

Если не отождествлять значения перемещения в срединном узле (полагая пружины развязанными), то здесь написано четыре уравнения, с четырьмя неизвестными, причём линейно независимых уравнений только два. Но т.к. перемещение в срединном узле – одно и то же (условие совместности), то неизвестных – три, и можно сложить второе уравнение с третьим.

Во-вторых, сложение этих уравнений имеет прямой механический смысл: силы в узлах взаимоуравновешены по условию (9.9), и в правой части получится вполне определённое выражение. При сложении левой и правой частей уравнений слева складываются коэффициенты при соответственных неизвестных, справа складываются силы в среднем узле: внутренние и внешние. Если тут нет внешней силы, сумма будет нулевой, по условию равновесия. При этом результирующие три уравнения останутся линейно зависимыми (ранг матрицы=2).

Эта процедура поэлементного сложения уравнений на основании условия равновесия сил во всех узлах и условия совместности называется "сборкой" системы: собирается матрица жесткости в левой части и "вектор нагрузок" – в правой части. Пусть в условиях (9.9) нагрузка приложена к краям области, в среднем узле внешняя узловая сила $F_2=0$. Заменяя внутренние узловые силы $f_i^{(k)}$ их выражением (9.9), получаем систему уравнений, в которую входят только внешние силы и глобальные перемещения:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1^{(1)} \\ -f_2^{(1)} - f_2^{(2)} \\ -f_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix}. \quad (9.14)$$

Полученная *глобальная матрица жёсткости*

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}. \quad (9.15)$$

в которой вторая строка есть сумма первой и третьей с обратным знаком, останется сингулярной, т.к. приложенные внешние силы входят в правую часть, а не в матрицу. Чтобы "снять вырождение" следует задать граничные условия по перемещениям. Положим, что левый край жёстко закреплён: $u_1=0$ – это и будет третье линейно независимое уравнение. Степени свободы, задаваемые в незакреплённых узлах, иногда называют *активными*, поскольку они не фиксированы. Система (9.14) придёт к виду, аналогичному (9.7а), с невырожденной матрицей:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix}. \quad (9.14a)$$

Эта система имеет единственное решение. Из полученного решения можно вычислить силу реакции F_1 в первом узле, которая равна внутренней силе, определяемой из полученного решения.

9.5. Матричный анализ сетей

Положение узлов элемента "пружина" определяется положением тех элементов конструкции, которые соединены этой пружиной. Формальная роль пружины – детализация соотношения между граничными значениями в элементах. Такой элемент применим и в других задачах, где величины u могут быть другими физическими величинами. Описанный метод построения системы уравнений для узловых величин под разными названиями давно применяется для анализа систем подобных элементов, описываемых соотношениями вида (9.2): "матричный метод", "сетевой метод". Следуя [Зенкевич], [Zenkevich] рассмотрим для примера участок электрической цепи с резисторами, аналог сети пружин, которые изображены на рис.9.7а. (Здесь по-прежнему предполагается, что перемещения в узлах пружин малы, этот случай будет рассмотрен в следующем параграфе.)

Разности потенциалов, приложенные на концах сопротивлений, дают электрический ток. Имея связь между током и напряжением резистор можно рассматривать как 2–узловой конечный элемент в задаче определения потенциалов в узлах и электрических токах в элементах.

		Механика пружин (стержней)	Электрическая цепь
		Перемещение u	Потенциал φ
		Сила f	Ток I
Рис.9.7а. Участок сети 2–узловых конечных элементов		Рис.9.7б. Узловые переменные	

Полное описание системы, т.е. распределение токов и потенциалов в линейной цепи можно получить с помощью закона Ома, условий сохранения тока (т.е. из закона сохранения заряда, в данном случае – заряда, протекающего за ед. времени) в каждом из узлов соединения элементов цепи и однозначности потенциала в местах стыка элементов. Например, в узле 1, общем для элементов a , b , c , имеем условия, аналогичные условию равновесия, условию совместности, а условие в элементе b аналогично закону Гука:

$$I_a + I_b + I_c = 0, \quad V_a = V_b = V_c \equiv V_1, \quad r_b I_b = V_1 - V_2 \quad (9.16)$$

Элемент b характеризуется электропроводностью $\kappa_b = \kappa$. Выразим токи, идущие в узлы стыков 1 и 2 от данного элемента b , содержащего эти узлы. В отсутствие источников тока в узлах 1 и 2 равны по величине, а относительно границ элемента – противоположны (входящий и выходящий ток):

$$I_{1 \rightarrow 2} = -I_{2 \rightarrow 1} \quad .$$

Порядок нумерации узлов задаёт "вход" и "выход" в элементе. Входящий в элемент ток условимся считать положительным, а выходящий ток – отрицательным. Токи выражаются через соответственные разности потенциалов. Выражаем ток в каждом узле данного элемента b :

$$\kappa(V_1 - V_2) = I_1 \equiv I_{1 \rightarrow 2} \quad , \quad I_2 \equiv I_{2 \rightarrow 1} = \kappa(V_2 - V_1)$$

что записывается как матричное соотношение для элемента

$$\begin{bmatrix} \kappa & -\kappa \\ -\kappa & \kappa \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix}, \quad \text{или} \quad \{I\} = [C]\{V\}$$

Если между данными узлами имеется источник тока – "распределённая сила", задаваемый разностью потенциалов или током, эта известная величина должна быть помещена в правую часть.

При алгебраическом суммировании токов в каждом узле сохранение заряда (отсутствие накопления – "условие равновесия") и однозначность потенциала в каждом узле ("условие совместности") дают для него уравнение :

$$P_1 = \sum [C]^{(e)} \{V\}^{(e)}$$

Суммирование производится по всем элементам, включающим узел. Включая элементные матрицы проводимости в глобальную матрицу описанным выше способом, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно потенциалов ("степеней свободы"), по которым определяем токи. Естественные граничные условия "по перемещениям" – это потенциалы, приложенные в соответственных точках.

Аналогичное рассмотрение возможно для тепловых сетей (связанные тепловые сопротивления и конденсаторы - сосредоточенные теплоёмкости и источники) и гидравлических сетей (элементы трубопроводов, их сочленений, резервуары ...), хотя в гидродинамике определяющее соотношение (закон Дарси-Вейсбаха), играющее роль закона Ома или Гука, будет нелинейно и должно быть линеаризовано. Но техника "матричного метода" здесь вполне аналогична.

Особенность механической стержневой системы состоит в том, что перемещения и силы являются векторами (в отличие от напора, потока тепла в стержне или тока в проводнике). В случае механической стержневой системы уравнения составляются для каждого измерения - в механике стержней существенно направление деформированного стержня в системе, составляющей "каркас". Подобная система рассмотрена ниже.

9.6. Элемент стержень

2–узловой элемент стержень (truss) моделирует деформированное состояние прямого стержня, работающего только на сжатие–растяжение и не работающего на изгиб. Узлы элемента – это концы стержня. Деформирование вдоль стержня полагается однородным по длине и сечению, поэтому нет необходимости вводить промежуточные узлы, а сечение входит только как параметр площади. Координаты узлов могут иметь три измерения, но положение точки между узлами элемента может быть задано только расстоянием вдоль стержня, поэтому элемент – 1–мерный. Отличие от рассмотренного выше элемента–пружины с вычислительной точки зрения не принципиально, основное отличие состоит в учёте углового положения стержня. Целые конструкции могут быть составлены из стержней различного сечения, например, стрела подъемного крана, ферма моста, крыша торгового центра, телебашня Шухова, Эйфелева башня ... Неоднородность напряжения в узлах сочленения стержней простирается не дальше одного-нескольких сечений стержня (принцип Сен–Венана), и концы стержней полагают шарнирно соединёнными, даже в случае сварного соединения – при малой величине сечения стержня неучёт локального НДС в месте скрепления не даёт большой ошибки при определении напряжения на основной длине. Для упрочнения соединения здесь вводятся утолщения и т.п., и локальное НДС в местах креплений может быть рассмотрено отдельно.

Задача статики может быть поставлена следующим образом:

В узлах шарнирно соединённых элементов стержневой конструкции с известными геометрическими и механическими характеристиками приложена нагрузка. Определить новое положение узлов (значения узловых перемещений) после приложения нагрузки и нормальные напряжения в сечениях стержней.

По перемещениям могут быть определены все остальные величины. Одной из целей расчёта НДС в отдельных стержнях служит определение запаса механической устойчивости отдельных элементов и всей системы. Последовательность действий по сведению задачи к алгебраической системе для узловых величин аналогична изложенной для пружины:

- задание конечных элементов, введение их геометрических характеристик;
- введение узловых перемещений и сил;
- запись элементных соотношений между внутренними силами и перемещениями;
- соотношение локальных и глобальных величин (*это новое относительно пружин*);
- условие глобального равновесия для узловых сил – объединение элементных уравнений;
- учёт граничных условий.

Набор параметров данного стержневого элемента (e) включает его длину L , площадь сечения A , полагаемую постоянной вдоль стержня, и жесткостную характеристику, в данном случае – модуль упругости E материала. Для упрощения записи положим, что все стержни рассматриваемой конструкции расположены в одной плоскости. Подразумевается сплошная нумерация узлов соединения всех стержней рассматриваемой конструкции от 1 до N . Приложенные к системе силы (гравитация, ветровые нагрузки) должны быть сведены к узловым, поскольку условие глобального равновесия записывается только для узловых перемещений и сил.

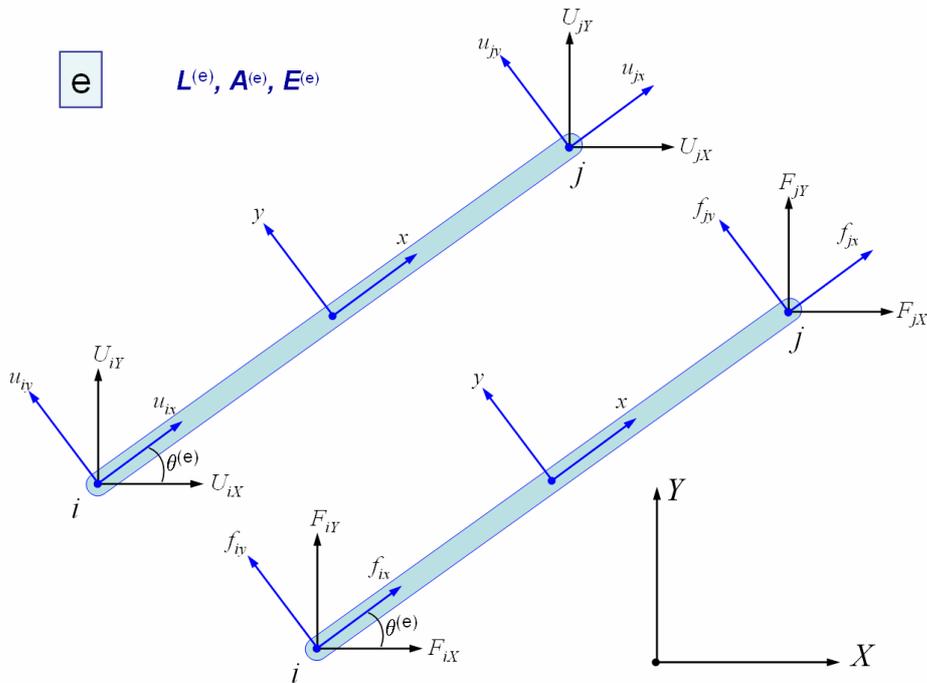


Рис.9.8. Характеристики стержневого элемента в глобальной и локальной системах координат

Перемещения точек конструкции определены движением содержащего их элемента-стержня. Условия равновесия стержня удобно сначала записать через перемещения узлов в *местной (локальной) системе координат* элемента, ось Ox которой направлена вдоль стержня, а ось Oy – перпендикулярно ему. Продольные перемещения узлов обозначим u_{ix} , u_{jx} . В системе стержня вертикальные компоненты перемещения: $u_{iy}=0$, $u_{jy}=0$. Координата любой точки и её перемещение вдоль направления стержня, в предположении однородности по длине, могут быть в местной системе выражены через узловые величины i и j как:

$$u(x) = (1 - \xi^{(e)}) u_i + \xi^{(e)} u_j, \quad \xi^{(e)} = (x_j - x) / (x_j - x_i), \quad x_i \leq x \leq x_j, \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (9.17)$$

Параметр $\xi^{(e)}$ в (9.19) играет роль безразмерной *локальной координаты внутренней точки*. В описываемой процедуре это выражение не используется, но в более общих координатах вдоль стержня нужна для проведения интегрирования по элементу. Нумерация узлов для локальных величин в нижеследующем рассмотрении также оставлена общей, "глобальной". В общем случае локальная нумерация в элементе нужна для задания порядка следования узлов (в "связности" КЭ – см. выше), который участвует в определении геометрических характеристик элемента.

Перемещения всех узлов данного элемента в плоскости составляют набор из $2 \times 2 = 4$ величин. Этот набор в МКЭ представляется в виде 4×1 матрицы-столбца, которая в системе координат стержня (нет поперечных перемещений) имеет вид –

$$\{u\}^{(e)} = \{u_{ix}, u_{iy}, u_{jx}, u_{jy}\}^T = \{u_{ix}, 0, u_{jx}, 0\}^T. \quad (9.18)$$

Как и ранее, связь между перемещениями и начальными/конечными положениями узлов в местной системе:

$$x_i = a_i + u_i, \quad x_j = a_j + u_j. \quad (9.19)$$

Удлинение стержня определено разностью координат узлов, выражаемой через перемещения:

$$x_j - x_i - (a_j - a_i) = u_j - u_i. \quad (9.19a)$$

Для описания конструкции в целом используются *глобальные* координаты $\{X_i, Y_i\}$ и перемещения $\{U_i, V_i\}$ узловых точек, относительно некоторой единой (глобальной) декартовой системы. Напомним, что индексы i и j относятся к глобальным номерам узлов элемента (e). Для каждого стержня, элемента конструкции местная система координат расположена по-своему относительно глобальной системы координат. Естественным образом в формализме появляется преобразование координат (поворот). Проекция длины стержня на оси координат в местных и глобальных координатах связаны через угол $\theta^{(e)}$ наклона данного стержня относительно оси Ox глобальной системы координат соотношениями (Рис. 9.8):

$$X_j - X_i = (x_j - x_i) \cos \theta^{(e)}, \quad Y_j - Y_i = (x_j - x_i) \sin \theta^{(e)}. \quad (9.20)$$

При малых перемещениях угол $\theta^{(e)}$ практически неизменен при переходе к новому положению равновесия (это может быть не так при очень большом количестве стержней, но это требует особого рассмотрения). Перемещения узлов в местной системе координат в этом предположении также можно полагать параллельными исходному положению стержня, и они в местной и глобальной системах отсчёта связаны теми же соотношениями для разностей координат:

$$U_{xi} = u_{xi} \cos \theta^{(e)}, \quad U_{yi} = u_{xi} \sin \theta^{(e)}.$$

Уравнения для сил записываются аналогично случаю пружины. Вводятся *векторы узловых сил, внутренних и внешних*:

$$\{f\} = \{f_{ix}, 0, f_{jx}, 0\}^T, \quad \{F\} = \{F_{ix}, F_{iy}, F_{jx}, F_{jy}\}^T,$$

причём компоненты внешних сил заданы в глобальной системе координат.

В случае упругости внутренние силы в узлах данного элемента в системе стержня пропорциональны его удлинению. В компонентах перемещений и сил условие равновесия стержневого элемента записывается аналогично условию для пружины, но, в данном случае, для двух измерений. Удлинение выражается как разность перемещений (9.19a):

$$\begin{aligned} EA/L (u_{ix} - u_{jx}) &= k (u_{ix} - u_{jx}) = f_{ix} \\ 0 &= k (0 - 0) = f_{iy} \\ -EA/L (u_{ix} - u_{jx}) &= -k (u_{ix} - u_{jx}) = f_{jx} \\ 0 &= k (0 - 0) = f_{jy} \end{aligned} \quad (9.21)$$

Величина $EA/L = k$ – коэффициент жёсткости стержня. Поперечные перемещения в местной системе координат и поперечные компоненты внутренних сил в элементных уравнениях равновесия нулевые. В глобальной системе координат обе компоненты сил и перемещений в узле, вообще говоря, ненулевые. Систему уравнений (9.21) можно переписать в матричном виде как соотношение между введённой матрицей узловых перемещений и аналогичной матрицей внутренних сил, приложенных в узлах. Для каждого элемента (e) уравнение в местных координатах –

$$[E^{(e)}] \{u^{(e)}\} = \{f^{(e)}\}. \quad (9.22)$$

Вид матрицы упругости элемента $[E^{(e)}]$ предлагается определить в качестве упражнения.

Чтобы получить уравнения равновесия для всей системы необходимо в записи элементного выражения (9.21) для внутренних сил перейти от местных к глобальным координатам, поскольку векторы сил можно складывать только в единой системе координат. Преобразование к глобальной системе перемещений координат стержня – это поворот на угол наклона $\theta^{(e)}$, свой для каждого элемента. Прямые и обратные

геометрические преобразования векторов *перемещений* в двух узлах элемента имеют вид (индекс ^(e) для простоты записи опущен, использовано (9.19a)):

$$\begin{aligned} U_{ix} &= u_{ix} \cos \theta - u_{iy} \sin \theta = u_{ix} \cos \theta & , & & u_{ix} &= U_{ix} \cos \theta + U_{iy} \sin \theta \\ U_{iy} &= u_{ix} \sin \theta + u_{iy} \cos \theta = u_{ix} \sin \theta & , & & u_{iy} &= -U_{ix} \sin \theta + U_{iy} \cos \theta = 0 \\ U_{jx} &= u_{jx} \cos \theta - u_{jy} \sin \theta = u_{jx} \cos \theta & , & & u_{jx} &= U_{jx} \cos \theta + U_{jy} \sin \theta \\ U_{jy} &= u_{jx} \sin \theta + u_{jy} \cos \theta = u_{jx} \sin \theta & , & & u_{jy} &= -U_{jx} \sin \theta + U_{jy} \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

где U_i, U_j – перемещения концов, выраженные в глобальных координатах. В матричном виде эти соотношения можно записать единообразно – для каждого элемента (e):

$$\{U^{(e)}\} = [T^{(e)}] \{u^{(e)}\} , \quad \{u^{(e)}\} = [T^{(e)}]^{-1} \{U^{(e)}\} , \quad (9.23)$$

где матрицы (4×4) преобразований $[T^{(e)}]$ и $[T^{(e)}]^{-1}$ свои в каждом конечном элементе, и они составлены из двух матриц (2×2) плоского вращения на угол $\theta^{(e)}$, расположенных на главной диагонали элементной матрицы $[T^{(e)}]$.

Узловые внутренние силы, связанные с растяжением стержневого элемента, в местной системе направлены вдоль него, и *их компоненты в глобальной системе преобразуются по тому же закону*, что следует из общего закона Гука в случае продольного растяжения стержня (индекс ^(e) опущен):

$$\begin{aligned} R_{ix} &= f_{ix} \cos \theta \\ R_{iy} &= f_{iy} \sin \theta \\ R_{jx} &= f_{jx} \cos \theta = -f_{ix} \cos \theta \\ R_{jy} &= f_{jy} \sin \theta = -f_{iy} \sin \theta \end{aligned}$$

или, через введённую матрицу преобразования –

$$\{R\} = [T] \{f_{ix}, 0, f_{jx}, 0\}^T = [T] \{f\} \quad (9.24)$$

Подставив значения узловых сил f из (9.22), получим связь узловых сил и перемещений для каждого элемента в глобальных координатах, которую запишем в матричной форме –

$$[T^{(e)}] [E]^{(e)} [T^{(e)}]^{-1} \{U\}^{(e)} \equiv [k]^{(e)} \{U\}^{(e)} = [T^{(e)}] \{f^{(e)}\} \equiv \{R^{(e)}\}. \quad (9.25)$$

Здесь введена *матрица жёсткости элемента* $[k]^{(e)} = [T^{(e)}] [E]^{(e)} [T^{(e)}]^{-1}$. При малых упругих деформациях (в стали, например, упругие деформации не превышают ~0,1%) общие перемещения будут малы. Поэтому матрица преобразования к глобальной системе, и с ней матрица жёсткости, будет с достаточной точностью неизменна при любом деформировании элементов в допустимых пределах, т.е., поворот элемента при общей деформации практически не влияет на поворот других элементов. В противном случае влияние изменений положения элементов друг на друга следует вводить в расчёт.

Мы получили уравнение равновесия отдельного элемента. Дальнейшая процедура объединения и учёта граничных условий не отличается от проведённой ранее для элемента–пружины:

– преобразованные элементные уравнения (9.25), относящиеся к данному узлу, складываются, учитываются условия равновесия в узлах; в левой части из расширенных элементных матриц жёсткости $[k]$ формируется матрица всей линейной системы уравнений – *глобальная матрица жёсткости*, в правой части стоит *глобальный вектор узловых сил*; внутренние силы в узлах, в которых не приложены внешние силы, уравниваются, и их вклад исчезает. В тех узлах, где приложена внешняя сила, суммарная внутренняя сила, составленная из вкладов отдельных элементов, равна и противоположна приложенной внешней силе. В правой части, поэтому, остаются только внешние приложенные силы;

– полученная система уравнений модифицируется с учётом граничных условий по перемещениям (силовые гран. условия учтены в условиях равновесия);

Процедура в целом пригодна для дискретных стержневых конструкций общего вида.

Таким образом, на примере одномерных, прямолинейных геометрически и линейных физически конечных элементов мы ввели ряд основных понятий МКЭ: *степени свободы, внутренние узловые силы и их связь с деформацией в элементе и внешними узловыми силами, локальные координаты и преобразование к глобальным, матричные обозначения, сборка матрицы системы* (матрицы жёсткости). В случае многомерных пространственно-распределённых систем возникают следующие важные вопросы, которых мы пока не коснулись:

- способы интерполяции величин перемещений в пределах элемента (интерполяционные функции формы): для пружины и стержня это не понадобилось;
- связь исходной, непрерывной, и аппроксимирующей её, дискретной, систем – у нас система изначально бралась составленной из дискретных элементов-стержней;
- получение силовых уравнений для элементов, связи дискретного распределения напряжений с перемещениями – у нас сразу была формула $F=k(x-x_0)$, в общем же случае уравнение получить сложнее.

Эти вопросы встают при проведении КЭ–дискретизации для двумерной задачи статики, которую мы далее рассмотрим. Отличие 2–мерного и 3–мерного случаев в дискретизации МКЭ принципиально и двумерный случай рассмотрен только для лучшей обзорности выкладок.

10. МКЭ в форме метода перемещений

Плоская двумерная задача теории упругости, как мы выяснили ранее, в зависимости от конкретных условий, может быть сформулирована в двух видах: случай плоских напряжений и случай плоских деформаций. Для трёхмерного тела в декартовой системе $Oxyz$ случай *плоских* (в плоскости Oxy) *деформаций* отвечает тождественно нулевым zz -компонентам тензора деформаций (неизменность в процессе деформирования z -координаты в плоскости Oxy), при этом zz -напряжение выражается через остальные. В случае *плоских напряжений* существует ненулевая деформация в z -направлении, но zz -компоненты тензора напряжения нулевые.

Для разбора процедуры метода перемещения возьмём случай плоских напряжений. Соотношения для существенных компонент напряжений и деформаций (закон Гука) имеют вид (5.4)

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}), \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{xy} \quad (10.1)$$

Аналогичное выражение между тремя компонентами тензоров напряжений и деформаций нетрудно выписать в случае плоских деформаций.

10.1. Этапы процедуры дискретизации метода перемещений

Терминология и процедуры схемы дискретизации МКЭ оформились к моменту становления метода решения статических задач механики, называемого "методом перемещений", в котором в качестве основных неизвестных величин используются перемещения точек моделируемой конструкции. Для простейших стержневых элементов он был рассмотрен выше. Построение приближённого численного решения уравнений равновесия методом перемещений в целом следует ранее сформулированной схеме, заключающей в себе основную идею МКЭ, давшую ему название – построение дискретного решения системы дифференциальных уравнений, следуя от аппроксимации решения в элементе к общему решению, определённое на всей системе. Эта схема прослеживается и в приводимых позже более общих формулировках МКЭ, уже не связанных с механическим понятием равновесия.

Выше, в гл. 9, были охарактеризованы этапы получения численного решения методом конечных элементов. В применении к методу перемещений они следующие:

- A. *Выбор типа используемых конечных элементов и способа аппроксимации.* Строится КЭ-разбиение расчётной области (*сетка, КЭ-модель*) и, в соответствии с геометрией КЭ и моделируемой механической системой, выбирается вид интерполяции перемещений в любой точке области: *функции формы*, которые суть функции координат точек. Искомые узловые перемещения – неизвестные пока коэффициенты этой интерполяции.
- B. *Аппроксимация кинематических уравнений и напряжений – внутренних сил.* Дифференцированием интерполяционных выражений по координатам находятся выражения для деформаций через узловые величины. С помощью закона Гука или его обобщения напряжения в каждой точке элемента связываются с полученными деформациями, выраженными, в свою очередь, через перемещения узлов элемента.
- C. *Введение узловых сил.* Вводятся векторы сил, приложенных в узлах. Внешние нагрузки (силовые граничные условия и объёмные силы) также будут сведены к узловым силам. Внутренние узловые силы неизвестны, но, т.к. они

взаимоуравновешены, знать их не нужно, они введены только для формулировки условия равновесия.

- D. *Связь распределённых сил в элементе с узловыми, в том числе, на границах.* Сплошной среде сопоставлена система дискретных узлов и узловых сил, которая постулируется статически эквивалентной распределённой системе. Статическая эквивалентность определена как равенство работ, совершённых на малых перемещениях: (а) распределёнными силами в элементе и (б) узловыми силами в узлах – на малых перемещениях, совместимых со связями (гран. условиями по перемещениям).
- E. *Условие общего равновесия.* Используя условие полного механического равновесия сил во всех узлах дискретной системы (нулевые полные узловые силы), элементные уравнения равновесия путём сложения объединяются в систему алгебраических уравнений для перемещений в узлах.
- F. *Фиксация пространственного положения дискретной системы.* В полученной алгебраической системе учитываются связи: граничные условия по перемещениям.
- G. *Решение и пост-обработка.* Алгебраические уравнения решаются: находятся перемещения, затем – остальные механические величины.

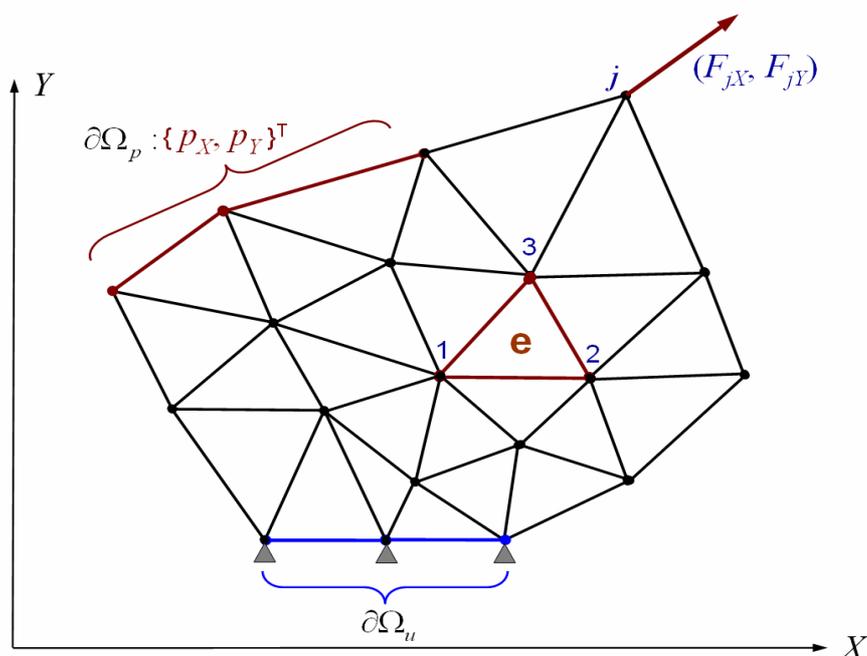


Рис.10.1. Треугольная сетка и задание граничных условий на ней

Переход от сплошной среды с распределёнными силами к дискретной модели с взаимодействием в отдельных точках, постулируя равенство малых работ узловых и распределённых сил, является ключевым этапом процедуры дискретизации. Основания для применения условия физически вполне естественны: если две системы сил совершают одинаковую работу, то и распределение сил в них в среднем (в масштабе размера конечного элемента) должно быть одинаково.

Для дальнейших обобщений будет полезным провести параллель между приведёнными выше этапами процедуры дискретизации задачи статики и самим "объектом дискретизации", т.е., с системой (4.1) уравнений равновесия деформируемого твёрдого тела. Соответствие уравнений и этапов процедуры дискретизации приведено в таблице 1.

Таблица 1. Параллель между непрерывной и дискретной моделями МДГТ

Уравнение непрерывной модели	Процедура дискретной модели
Определение области задания неизвестных функций, формулировка уравнений среды.	А. <i>Выбор типа используемых конечных элементов и способа аппроксимации (включая построение сетки)</i>
Определение деформаций: $\epsilon_{ik} = 1/2(u_{i, k} + u_{k, i})$ и определяющее соотношение: $\sigma_{ij} = 2G(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \epsilon_{kk})$	В. <i>Аппроксимация кинематических уравнений и напряжений.</i>
Уравнение равновесия: $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0$ и граничное условие $p_i = \sigma_{ik} n_k$	Пп. С, D, E. <i>Введение узловых сил. Связь распределённых сил в элементе с узловыми, в том числе, на границах. Условие общего равновесия.</i>
Граничное условие по перемещениям	Ф. <i>Фиксация пространственного положения дискретной системы.</i>

Очевидно, что этап подготовки, этап А, абсолютно необходим при численном решении любого уравнения или системы. Этапы В и С фактически уменьшают полное количество неизвестных функций – всё выражается через перемещения, и эти этапы служат для упрощения итогового интегрального соотношения. Этапы С, D и E – центральные, здесь и появляется искомая система алгебраических уравнений. Этап F завершает формирование дискретной модели – системы алгебраических уравнений, решение которой с заданной точностью аппроксимирует решение исходной дифференциальной задачи.

В случае других уравнений, например, диффузии, этап В может отсутствовать, но этап, эквивалентный С, D и E, присутствует всегда, причём, условие, аналогичное условию равновесия, всегда записывается в интегральной форме. Это, вместе с аппроксимацией искомой функции в конечном элементе через узловые значения, является общим для всех реализаций МКЭ, включая рассмотренный ниже метод перемещений в МДГТ. Формальное изложение этой процедуры может быть разным, иметь разную степень общности. В форме метода перемещений процедура сначала будет приведена в простейшей двумерной формулировке, на примере треугольных элементов. Этот "классический" подход изложен, например, в книгах [Зенкевич], [Zenkevich] и ряде других.

10.2. Интерполирующие выражения. Треугольный линейный элемент

Важный этап построения дискретной модели в МКЭ – введение аппроксимирующих выражений через узловые величины для вычисления перемещений в любой точке, по которым затем можно выразить деформации и напряжения в КЭ. Общее представление для функции $u = u(x, y)$ в точке (x, y) , принадлежащей элементу, в МКЭ записывается в виде

$$u(x, y) \approx u^*(x, y) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x, y) u(x_k, y_k) \equiv \sum_{k=1}^n \varphi_k(x, y) u_k, \quad (10.2)$$

где $\varphi_k(x, y)$ – функции формы (shape functions), обычно полиномы, n – число узлов элемента, индекс k нумерует точки, в которых ищется численное решение – узлы элемента. Здесь звёздочкой обозначено приближённое интерполирующее выражение, u_k –

искомые узловые значения, которые по условию совпадают со своей интерполяцией $u(x,y)$. Координаты (x,y) могут быть глобальными или локальными координатами точки элемента. Для линейного элемента узловые точки совпадают с вершинами соответствующего многоугольника или многогранника. Если порядок полиномов $\varphi_k(x,y)$ выше первого, для определения их коэффициентов необходимы дополнительные узлы.

Для иллюстрации построения интерполирующих выражений рассмотрим простейший плоский элемент – треугольный линейный (в алгебраическом смысле). В треугольнике с вершинами $\{(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)\}$ задаются три линейные аппроксимирующие функции *глобальных* координат, имеющие вид:

$$\varphi_k(x,y) = a_k x + b_k y + c_k, \quad k=1, 2, 3. \quad (10.3)$$

Коэффициенты этого выражения для данного конечного элемента могут зависеть только от координат узлов *данного элемента*. С помощью таких функций две компоненты перемещения (u,v) в любой точке (x,y) треугольного элемента приближённо выражаются через перемещения его узлов $(u_k), (v_k)$ в виде (10.2):

$$u(x,y) \approx u^*(x,y) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x,y) u_i = \varphi_1(x,y) u_1 + \varphi_2(x,y) u_2 + \varphi_3(x,y) u_3 \quad (10.4)$$

$$v(x,y) \approx v^*(x,y) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x,y) v_i = \varphi_1(x,y) v_1 + \varphi_2(x,y) v_2 + \varphi_3(x,y) v_3.$$

Далее для упрощения записи неизвестная функция будет отождествляться с её выражением через интерполянты: $u(x,y) = u^*(x,y)$, и звёздочка будет опускаться. Девять коэффициентов (a_k, b_k, c_k) линейных функций $\varphi_i(x,y)$ находятся методом неопределённых коэффициентов, исходя из условия (10.2) совпадения перемещений в узлах со своими интерполяционными выражениями. Рассмотрим три различных набора коэффициентов интерполяции компоненты u перемещений в каждом из трёх узлов. Значения функции $u(x,y)$ могут быть заданы любыми. Варьируя эти значения удобным образом, можно последовательно написать девять уравнений (три группы по три), из которых и определяются коэффициенты линейных функций. Например, пусть два из узловых значений – нулевые, и перемещение u первого узла отлично от нуля. Координаты этого узла x_1, y_1 известны, как и остальных. По условию должно выполняться –

$$u_1(x_1,y_1) = \varphi_1(x_1,y_1) u_1 + \varphi_2(x_1,y_1) \cdot 0 + \varphi_3(x_1,y_1) \cdot 0 = \varphi_1(x_1,y_1) u_1,$$

откуда –

$$\varphi_1(x_1,y_1) = 1. \quad (10.5)$$

Аналогичным образом можно расписать нулевые значения в двух других узловых точках (x_2,y_2) и (x_3,y_3) –

$$u_2(x_2,y_2) = 0 = \varphi_1(x_2,y_2) u_1 + \varphi_2(x_2,y_2) \cdot 0 + \varphi_3(x_2,y_2) \cdot 0 = \varphi_1(x_2,y_2) u_1,$$

$$u_3(x_3,y_3) = 0 = \varphi_1(x_3,y_3) u_1 + \varphi_2(x_3,y_3) \cdot 0 + \varphi_3(x_3,y_3) \cdot 0 = \varphi_1(x_3,y_3) u_1.$$

Отсюда следует, в силу произвольности значения u_1 , что в других узлах –

$$\varphi_1(x_2,y_2) = \varphi_1(x_3,y_3) = 0. \quad (10.6)$$

Это приводит к трём уравнениям для трёх коэффициентов a_1, b_1, c_1 первой функции:

$$1 = a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1,$$

$$0 = a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1,$$

$$0 = a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1.$$

Обращая эти соотношения, выражаем коэффициенты 1-й функции формы. Далее, по аналогии, находим выражения для двух других функций через координаты узлов конечного элемента, которые в итоге будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,y) &= 1/A_{123}(\zeta_{23} + \eta_{23} x - \xi_{23} y), \\ \varphi_2(x,y) &= 1/A_{123}(\zeta_{31} + \eta_{31} x - \xi_{31} y), \\ \varphi_3(x,y) &= 1/A_{123}(\zeta_{12} + \eta_{12} x - \xi_{12} y),\end{aligned}\tag{10.7}$$

где $A_{123} = x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)$ – удвоенная площадь треугольника, всегда ненулевая для невырожденного элемента, и обозначено

$$\begin{aligned}\zeta_{ik} &= x_i y_k - x_k y_i, \\ \eta_{ik} &= x_i - x_k, \\ \xi_{ik} &= y_i - y_k, \quad i, j = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Из (10.3)–(10.4), (10.7) следует, что перемещения внутри элемента с помощью введённой интерполяции выражаются через перемещения узлов *однозначно*. Кроме того, обеспечена *непрерывность интерполяции перемещений на границах* элементов. Чтобы это увидеть, возьмём два узла 1 и 2 на общей границе двух элементов и рассмотрим, каким станет выражение (10.4) для $u(x)$ в промежуточной точке на линии, соединяющей узлы. Координаты любой точки (x, y) на линии, соединяющей узлы, могут быть представлены через координаты узлов (x_1, y_1) , (x_2, y_2) как

$$x = \xi x_1 + (1 - \xi) x_2,\tag{10.8}$$

$$y = \xi y_1 + (1 - \xi) y_2,\tag{10.9}$$

где $0 \leq \xi \leq 1$. Значения функций формы (10.3) могут быть выражены через координаты узлов 1 и 2 и параметр ξ :

$$\varphi_k(x, y) = \xi \varphi_k(x_1, y_1) + (1 - \xi) \varphi_k(x_2, y_2), \quad k = 1, 2, 3.\tag{10.10}$$

В силу условий (10.5)–(10.6) в интерполирующем выражении (10.4) для перемещения в промежуточной точке между узлами 1 и 2 останется только два слагаемых, соответствующих ненулевым значениям $\varphi_1(x_1, y_1)$, $\varphi_2(x_2, y_2)$, а коэффициенты этих функций выражаются с помощью (10.7) через координаты узлов 1 и 2, т.е. коэффициенты интерполирующего выражения будут зависеть только от координат узлов 1 и 2. Поскольку эти узлы у соседствующих элементов общие, одинаковыми будут и значения интерполирующих выражений, построенных в каждом из двух элементов для точек на их общей границе, что и означает непрерывность интерполяции на границе.

Далее, т.к. согласно (10.5)–(10.6) значения функций формы в узлах равны 1 или 0, то, используя (10.10), линейную интерполяцию вдоль границы можно записать через значения только в граничных узлах 1 и 2 и параметр ξ , линейно зависящий только от расстояния до одного из двух узлов:

$$u(x) = \xi u_1 + (1 - \xi) u_2,$$

т.е. для координат узлов на общей границе выполнены соотношения (10.8)–(10.9), с тем же коэффициентом ξ . Таким образом, координаты граничных точек наших элементов выражаются по тем же формулам через координаты узлов, что и перемещения в этих точках через узловые перемещения. Это свойство *изопараметричности* рассматриваемого конечного элемента несложно продемонстрировать и для любой внутренней точки треугольного элемента, разбив его на два треугольника линией, проходящей через эту точку, и повторив рассуждения.

Непрерывность на границах имеет простую геометрическую интерпретацию: две линейные интерполирующие функции (10.3), построенные для каждого из двух соседних элементов, можно изобразить двумя участками плоскостей, линейных функций координат, определённых каждая на своём конечном элементе. Линия пересечения этих плоскостей должна лежать над границей этих двух соседних элементов.

Производные же по координатам для рассматриваемых линейных функций формы постоянны в пределах элемента и уже не обязаны быть непрерывными на границе, поскольку коэффициенты линейных функций (10.3) в каждом элементе свои. Следовательно, вычисляемые дифференцированием (10.4) деформации, а с ними и напряжения в элементах, также будут только *кусочно–постоянными и разрывными на границах элементов*. Это означает, что на границах этих элементов нельзя записать условие равновесия для напряжений в терминах интерполирующих зависимостей. В данном случае полагается, что в дискретной модели среды равновесие достижимо для узловых сил в дискретной модели среды. Интегральное условие равновесия для распределённых внутренних сил эквивалентно дискретному условию в среднем.

Выбрав интерполирующие функции перемещений второго порядка или выше можно потребовать также непрерывности и их производных. Соответствующие конечные элементы могут быть построены, хотя численная процедура оказывается более сложной. Отметим, что при решении упругих задач, в целях достижения более высокой точности и экономичности численной схемы, обычно рекомендуют 4–угольные элементы, которые мы рассмотрим позже, и использование функций формы более высокого порядка, чем первый.

10.2.1. Перемещения и деформации в конечном элементе

Вернёмся к нашей расчётной области, которая полагается разбитой на треугольные КЭ (рис.10.1). Введём, как и для рассмотренного выше стержня, матрицу–вектор перемещений в точках элемента, функций координат (столбец размером 2×1):

$$\{u\} = \{u(x,y), v(x,y)\}^T. \quad (10.11)$$

Введём матрицу–вектор искомых узловых перемещений в элементе (размером 6×1):

$$\{d\}^{(e)} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}^T. \quad (10.12)$$

Алгебраический вектор $\{d\}^{(e)}$ перемещений узлов элемента (e) содержит все компоненты физических векторов перемещений всех его узлов. Как отмечалось выше, принадлежность узлов данному элементу задаётся его *связностью* – например, в алгоритме расчёта – 2–мерным массивом $k(i,e)$, в котором для каждого элемента с номером e прописаны номера $k(i,e)$ составляющих его узлов. В данном случае $i=1, 2, 3$.

Введём *матрицу функций форм* $[\phi]^{(e)} = [\phi(x,y)]^{(e)}$ (далее индекс (e) принадлежности к элементу часто будем опускать), имеющую размер 2×6 для данного элемента:

$$[\phi] = \begin{Bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{Bmatrix}. \quad (10.13)$$

Соотношение (10.4) для вектора $\{u\}$ (10.11) может быть записано через вектор узловых перемещений (10.12) с помощью введённой матрицы функций форм:

$$\{u\} = [\phi]\{d\}, \quad \{u\}^T = \{d\}^T[\phi]^T. \quad (10.14)$$

В плоском случае есть три существенные компоненты у тензоров напряжений и деформаций, осевые компоненты выражаются через них. Аппроксимирующие функции для существенных компонент тензора деформаций получаются дифференцированием перемещений (10.4), выраженных через интерполирующие функции. В матричном виде компоненты деформации $\{\epsilon\}$ записываются как вектор 3×1 . Для недиагональных

компонент используемого здесь тензора малых деформаций в технике часто используются удвоенные значения, равные изменению углов при повороте (см. (2.16)), и вектор деформаций, приводимый, например, в [Зенкевич], будет иметь вид:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{1x}u_1 + \varphi_{2x}u_2 + \varphi_{3x}u_3 \\ \varphi_{1y}v_1 + \varphi_{2y}v_2 + \varphi_{3y}u_3 \\ \varphi_{1x}u_1 + \varphi_{1y}v_1 + \varphi_{2x}u_2 + \varphi_{2y}v_2 + \varphi_{3x}u_3 + \varphi_{3y}u_3 \end{Bmatrix} \quad (10.15)$$

или –

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\}, \quad (10.16)$$

Здесь второй индекс у функций форм обозначает дифференцирование по соответственной координате и введена (3х6)–матрица

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (10.17)$$

называемая *матрицей деформаций*.

Напомним, что в рассматриваемом далее случае плоских напряжений компонента тензора напряжений в направлении, перпендикулярном Оху, отсутствует, а деформация в этом направлении может быть вычислена по деформациям в плоскости. Случай плоских деформаций аналогичен – при плоских деформациях компонента тензора *деформаций* в направлении, перпендикулярном Оху, отсутствует, *напряжение* же в этом направлении определено напряжениями в плоскости. Различие двух случаев связано проявляется только в законе Гука, как отмечено в гл. 5.

10.2.2. Напряжения в элементе.

Представим существенные компоненты тензора напряжений в виде матрицы-столбца, как и деформации:

$$\{\sigma\} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})^T, \text{ где } \tau_{xy} \equiv \sigma_{xy}. \quad (10.18)$$

Напряжения выражаются через деформации из закона Гука (10.1), который мы запишем через введённые матрицы-векторы:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}. \quad (10.19)$$

Напомним, что $\{\sigma\}$ и $\{\varepsilon\}$ – векторы только в алгебраическом понимании, соответственно, матрица $[E]$ – просто таблица коэффициентов. Вид этой *матрицы упругости*, отвечающий выражению (10.15) для алгебраического вектора деформаций (см. (5.4а)):

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (10.20)$$

С помощью (10.16)–(10.19) выражаем напряжения в элементе через перемещения узлов

$$\{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\}=[E][B]\{d\}\equiv[S]\{d\}, \quad (10.21)$$

где $[S]$ – *матрица напряжений*, которая в общем случае зависит от координат точки, если функции формы (ср. (10.17)) нелинейны. В случае плоских деформаций строятся аналогичные выражения с несколько другой матрицей упругости, отвечающей формулировке закона Гука в этом случае.

Упражнение. Определить матрицу упругости для случая плоских деформаций.

10.2.3. Узловые силы и условие равновесия

Теперь необходимо сформулировать условие равновесия внутренних сил, с тем, чтобы получить соотношения для неизвестных узловых перемещений в построенной дискретной модели сплошного тела. Для этого у нас есть исходные уравнения равновесия (4.1а), в которые можно формально подставить полученные аппроксимации напряжений через узловые перемещения и пытаться получить соотношения между узловыми величинами, в принципе, для любой точки расчётной области, включая узловые. Выражая узловые величины через координаты узлов, упругие постоянные и коэффициенты функций форм, можно далее пытаться получить решение для узловых величин перемещений, подобно тому, как ранее мы определяли неопределённые коэффициенты функций форм треугольного элемента.

Но подобная реализация схемы дискретизации неизвестна и в общем случае невозможна, в первую очередь потому, что, как мы видели, для элементов первого порядка прямая подстановка ступенчатых функций (10.16), (10.19) для деформаций и напряжений в дифференциальные уравнения равновесия даст разрывы на границах конечных элементов и формально непригодна. Регулярный способ добиться удовлетворения уравнений равновесия "в среднем" и получения из них алгебраических уравнений основан на интегрировании. Как отмечалось, оно присутствует во всех формулировках МКЭ как формальный и математически корректный способ получения дискретного решения путём рассмотрения т.н. обобщённых или "слабых" решений, удовлетворяющих исходной системе уравнений не точно, а в пределах некоторой оцениваемой погрешности (см. ниже). В частности, интегрирование будет использовано для определения работы сил на виртуальном перемещении. Как отмечалось выше, стационарность интеграла работы сил на виртуальном перемещении может быть эквивалентом условия равновесия системы, т.е., уравновешенности сил в любой точке тела. Аналогично, равенство работ двух систем сил на любых виртуальных перемещениях может быть использовано как условие их локальной эквивалентности в среднем. Изложенная ниже процедура по своей алгоритмизации принципиально не отличается от более общих формулировок, приводимых далее, но основана на непосредственном использовании условий механического равновесия и потому более наглядна.

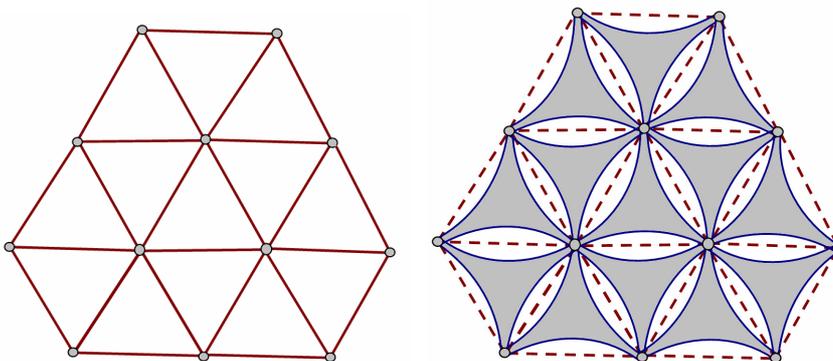


Рис.10.2. "Ферменная аналогия" (справа) сплошных треугольных конечных элементов, взаимодействующих только в узлах (слева)

Для формулировки условий равновесия в узлах введём *дискретные узловые силы*, служащие силовым эквивалентом распределённых напряжений, аппроксимация которых приведена выше. Эти силы необходимы для представления внешних силовых нагрузок, но, как и в стержневых системах, следует ввести также компенсирующие их внутренние узловые силы – следуя, например, [Zenkevich] можно полагать на основе "ферменной аналогии", что дискретные элементы модели взаимодействуют только в узлах, а не через непрерывную границу, как на рис. 10.2. Количество физических компонент узловых сил равно количеству компонент перемещений в узле (в нашем случае =2), они раскладываются по тем же направлениям осей (т.е. Ox и Oy) и записываются так же, т.е. в виде вектора $\{F\}$ – матрицы 6×1 :

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \end{Bmatrix} (i = 1, 2, 3), \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \{F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{x3}, F_{y3}\}^T. \quad (10.22)$$

Суммарная сила в данном узле складывается из внутренних и внешних сил – сосредоточенных, объёмных и поверхностных. В состоянии равновесия полная узловая сила равна нулю. Внешние и внутренние силы в элементах в общем случае – распределённые. Рассмотрим подробнее энергетический критерий, задающий связь между дискретным и непрерывным представлениями сил, т.е., сопоставляющий узловые силы распределённым силам в элементах.

Пусть физическое тело, описываемое как объёмная (не стержневая) конструкция, аппроксимированная КЭ–разбиением, в начальный момент свободно от нагрузок. При приложении нагрузки конструкция деформируется и приходит в новое равновесное состояние. Узлы данного конечного элемента испытывают при этом перемещения, задаваемые *узловым* вектором $\{d\}$, подлежащим определению. Вектору $\{d\}$ отвечают функции компонент перемещений точек элемента, задаваемые двухкомпонентным *физическим* вектором $\{u(x,y)\}$. Пусть элемент, находящийся в состоянии равновесия, испытывает дополнительно малое отклонение от нового равновесного положения. Это дополнительное *виртуальное* перемещение в узлах описывается некоторым узловым алгебраическим вектором $\{\Delta\}$ и компонентами физического вектора:

$$\{\Delta\}^{(e)} = \{\delta u_1, \delta v_1, \delta u_2, \delta v_2, \delta u_3, \delta v_3\}^T.$$

$$\{\delta(x,y)\} = \{\delta_x(x,y), \delta_y(x,y)\}^T.$$

Полагается, что эквивалентность системы распределённых сил в элементе системе дискретных узловых сил в состоянии равновесия при виртуальном отклонении от положения равновесия достигается при выполнении следующих условий.

- Условие равенства узловых перемещений, определяемых в данном узле для всех конечных элементов, содержащих данный узел – *условие совместности*;
- Условие равенства работы узловых сил на любом виртуальном узловом перемещении, задаваемом вектором $\{\Delta\}$, работе внутренних сил в элементе на соответственных распределённых перемещениях $\{\delta(x,y)\} = \{\delta_x, \delta_y\}^T = [\phi]\{\Delta\}$ внутренних точек элемента. Это можно трактовать как интегральное условие *статической эквивалентности* двух систем сил.

Узловым векторам $\{d\}$ и $\{d\} + \{\Delta\}$ отвечают, вместе с распределениями перемещений в элементе, также распределения деформаций в элементе: вместе с векторами $\{u(x,y)\}$ и $\{u^*(x,y)\} = \{u(x,y)\} + \{\delta(x,y)\}$ могут быть введены $\{\epsilon(x,y)\}$ и $\{\epsilon^*(x,y)\} = \{\epsilon(x,y)\} + \{\delta\epsilon(x,y)\}$. Звёздочкой обозначены возмущённые значения. Полагаем виртуальное перемещение малым: $\|\Delta\| \ll \|d\|$. Запишем условие равенства работ на виртуальном перемещении в

непрерывной и дискретной моделях среды, пока только для внутренних сил (внешние будут добавлены позже):

$$\begin{aligned} \{F\}_{in}^T \{\Delta\} &= \int_{V_e} \{\sigma^*\}^T \{\delta\varepsilon\} dV, \text{ или -} \\ \{\Delta\}^T \{F\}_{in} &= \int_{V_e} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma^*\} dV. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Слева работа узловых сил записана как сумма слагаемых вида "сила – на перемещение узла", а слева использовано выражение (3.2) для работы упругих сил, проинтегрированное по сплошному элементу. Используя (10.19) преобразуем подынтегральное выражение:

$$\{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma^*\} = \{\delta\varepsilon\}^T (\{\sigma\} + \{\delta\sigma\}) = \{\delta\varepsilon\}^T [E] (\{\varepsilon\} + \{\delta\varepsilon\}) \approx \{\delta\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} = \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\}.$$

Здесь опущены слагаемые второго порядка малости по деформациям. Используя выражение (10.16) для алгебраического вектора деформаций: $\{\varepsilon\} = [B] \{\Delta\}$, применяя свойства операции транспонирования, получим:

$$\{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} = ([B] \{\Delta\})^T [E] \{\varepsilon\} = \{\Delta\}^T [B]^T [E] [B] \{d\}.$$

Внося это в (10.23), с учётом произвольности виртуального перемещения $\{\Delta\}$, получим равенство:

$$\int_{V_e} [B]^T [E] [B] \{d\} dV = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV \{d\} \equiv [k] \{d\} = \{F\}_{in}, \quad (10.24)$$

где по определению набор известных (вычисляемых) величин

$$[k] = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV \quad (10.25)$$

называется *матрицей жёсткости элемента* (stiffness matrix). Как видно, она симметрична, её размерность в данном случае – 6×6. Матрица жесткости задаёт связь неизвестного вектора перемещений КЭ и вектора узловых сил в КЭ, тоже неизвестного, но который также можно затем исключить. (10.24) служит фрагментом формируемой общей системы алгебраических уравнений для узловых перемещений. Исторически сложившееся название "матрица жёсткости" перекочевало затем и в другие приложения МКЭ.

Таким образом, пользуясь произвольностью виртуального перемещения, мы из одного скалярного уравнения для виртуальной работы выделили шесть соотношений для составляющих вектора узловых сил, по две компоненты в каждом из трёх узлов. Выражение (10.24) позволяет для данного узла вычислить вклад введённой *внутренней узловой* силы F_{in} в общий баланс сил в данном *узле* от любого *элемента*, содержащего этот узел (вклады от элементов, не содержащих данный узел, очевидно, будут нулевыми). Оно показывает также, что величина вклада внутренних узловых сил определяется только параметрами конечного элемента и перемещениями его узлов.

10.2.4. Учёт объёмных, поверхностных и точечных сил

Рассмотрим теперь процедуру сведения к узловым силам внешних нагрузок. Нагрузки могут быть представлены сосредоточенными силами, приложенными в узлах, распределёнными поверхностными силами, задаваемыми на ед. площади (давление, трение etc.), и объёмными силами. Эти сосредоточенные силы будут известны, они войдут непосредственно в дискретное уравнение равновесия сил (10.24). Отметим, что внешние узловые силы могут быть приложены в любом узле, не обязательно граничном.

Рассмотрим поверхностные нагрузки, в частности, нормальное давление. Используем то же условие равенства работ поверхностной нагрузки в непрерывной и дискретной

моделях среды на виртуальном перемещении, заданное не на КЭ, а на границе приложения силовых краевых условий $\{\delta(x,y)\}=[\phi]\{\Delta\}$:

$$\int_{\partial\Omega_p} \{\delta(x,y)\}^T \{p(x,y)\} dA = \{\Delta\}^T \{F\}_b. \quad (10.26)$$

Здесь мы имеем дело с системой, состоящей из граничных поверхностей, и проводим интегрирование по заданному участку $\partial\Omega_p$ этой поверхности. В 2–мерном случае это линия контура границы. Отметим, что вид интерполяции *на границах* конечных элементов отличается от интерполяции в самом элементе, поскольку размерность границы на единицу меньше. (Вопрос – какова размерность вектора $\{\Delta\}$ при рассмотрении границ в плоском случае?) Используя опять произвольность виртуального узлового перемещения $\{\Delta\}$, получим выражение для узловой силы при поверхностном нагружении:

$$\int_{\partial\Omega_p} [\phi]^T \{p(x,y)\} dA = \{F\}_b. \quad (10.27)$$

Приложенная внешняя распределённая сила раскладывается на нормальную к поверхности (давление) и касательную компоненты, причём касательные часто отсутствуют, что упрощает выражение (10.27). Если внешняя нагрузка может быть выражена как функция координат, то эта функция вдоль границы может быть интерполирована через функции формы граничных элементов и узловые значения: $\{p\}=[\phi]\{q\}$, и (10.27) приобретает вид

$$\int_{\partial\Omega_p} [\phi]^T [\phi] \{q\} dA = \left(\int_{\partial\Omega_p} [\phi]^T [\phi] dA \right) \{q\} = \{F\}_b. \quad (10.28)$$

Рассмотрим объёмные силы, которые в исходном уравнении равновесия (4.1a), представляют собой распределённую нагрузку, заданную полем некоторого физического вектора $f(x,y)$. Его компоненты часто могут быть записаны через "плотность" и "напряжённость поля": $f_x = \rho g_x$, $f_y = \rho g_y$. Для этих величин, если напряжённость зависит только от координат, а плотность постоянна, может быть сформулировано условие, аналогичное (10.23), постулирующее равенство работы распределённых объёмных сил в элементе на виртуальном перемещении $\{\delta_i(x,y)\}$:

$$W_\Omega = \int_\Omega \rho g_i \delta_i(x,y) d\Omega \quad (10.29)$$

её дискретному аналогу – работе соответствующих узловых векторов $\{F\}_\Omega$. В матричной форме для конечного элемента:

$$W_\Omega = \int_\Omega \{\delta\}^T \{\rho g\} d\Omega = \rho \int_\Omega \{\Delta\}^T [\phi]^T \{g\} d\Omega = \{\Delta\}^T \left(\rho \int_\Omega [\phi]^T \{g\} d\Omega \right) = \{\Delta\}^T \{F\}_\Omega. \quad (10.30)$$

Здесь виртуальное перемещение записано в стандартной форме (10.15) с помощью узлового вектора $\{\Delta\}$, $\{\delta\}=[\phi]\{\Delta\}$ и введён вектор компонент поля объёмной силы размером 2×1 – $\{g(x,y)\}=\{g_x, g_y\}^T$. Отсюда выражение для вклада объёмных сил в общее равновесие узловых сил в КЭ:

$$\rho \int_\Omega [\phi]^T \{g\} d\Omega = \{F\}_\Omega. \quad (10.31)$$

Часто объёмные силы потенциальны, как, например, сила тяготения, и зависимость потенциала от координат локально сводится к линейной, что записывается в форме,

аналогичной (10.15), через узловые значения потенциала, задаваемые в 3-угольных линейных элементах матрицей–вектором $\{b\}$ размером 6×1 :

$$\{g\} = [\varphi]\{b\}.$$

Выражение (10.31) в этом случае разделяется на "геометрическую" и "полевую" части:

$$\rho \int_{\Omega} [\varphi]^T [\varphi] \{b\} d\Omega = \left(\rho \int_{\Omega} [\varphi]^T [\varphi] d\Omega \right) \{b\} = \{F\}_{\Omega}, \quad (10.32)$$

где $\int_{\Omega} [\varphi]^T [\varphi] d\Omega$ – это 6×6 матрица, образованная умножением матриц 6×2 и 2×6 .

10.2.5. Дискретная форма полного уравнения равновесия элемента

Теперь для всех видов нагрузок, точечной, поверхностной и объёмной, мы можем записать дискретный аналог общего условия равновесия конечного элемента. На распределённом виртуальном перемещении внутренние силы в элементе совершают работу против внутренних сил со стороны соседних элементов, против объёмных полевых сил, против граничных и точечных сил, если они есть. Последние мы явно не выписываем, поскольку это просто дополнительные узловые силы. Собирая с соответствующими знаками слагаемые уравнений (10.24), (10.27), (10.31), получим уравнение полного равновесия сил в элементе, содержащее редуцированные к узловым вклады внутренних и внешних объёмных/поверхностных/точечных сил:

$$\left(\int_{\Omega_e} [B]^T [E] [B] d\Omega \right) \{d\} - \int_{\partial\Omega_p} [\varphi]^T \{p(x,y)\} dA - \rho \int_{\Omega} [\varphi]^T \{g\} d\Omega = \{F\}_{in} - \{F\}_{\Omega} - \{F\}_b \quad (10.33)$$

Введя, в соответствии с (10.25), элементную матрицу жёсткости $[k]$, уравнение, связывающее перемещения с узловыми силами, можно записать в виде

$$[k]\{d\} - \int_{\partial\Omega_p} [\varphi]^T \{p(x,y)\} dA - \rho \int_{\Omega} [\varphi]^T \{g\} d\Omega = \{F\}_{in} - \{F\}_{\Omega} - \{F\}_b. \quad (10.34)$$

Эта матричная запись содержит $6=2 \times 3$ уравнений, для 2-х компонент сил в каждом из 3-х узлов данного элемента.

Т.к. в состоянии равновесия сумма сил, приложенных к каждому узлу, нулевая, при суммировании узловых сил неизвестные слагаемые $\{F\}_{in} - \{F\}_{\Omega} - \{F\}_b$, им отвечающие, взаимоуничтожатся, правая часть (10.33) при сложении станет нулевой. В результате операции суммирования вкладов от содержащих данный узел элементов, проведённой для каждого из n узлов и для каждой из двух компонент перемещений, мы получим $2n$ алгебраических уравнений с $2n$ неизвестными компонентами перемещений. Эта операция «сборки матрицы жёсткости и правой части» рассмотрена в следующем параграфе.

10.3. Общее равновесие в КЭ–модели и сборка глобальной матрицы жёсткости

Условие общего равновесия всей конечно–элементной модели сводится к условию равновесия в отдельных узлах. Оно используется так же, как было рассмотрено ранее для стержневых КЭ, и оно реализуется путём суммирования строк всех отдельных элементных уравнений (10.33) или (10.34), относящихся к данному узлу. При построении конечно–элементной сетки узлы нумеруются непрерывным образом, и перемещения всех узловых точек при формировании общей системы алгебраических уравнений

располагаются по порядку нумерации в одном глобальном векторе перемещений $\{U\}$ – матрице–столбце, аналогично элементному вектору перемещений:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{d}_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_{2i-1} \\ u_{2i} \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10.35)$$

Размерность этой глобальной матрицы–вектора перемещений в нашем случае равна $2n$. Число $2n$ будет числом степеней свободы всей КЭ–модели. В 3–мерном случае для объёмных элементов оно составляет $3n$.

Внешние нагрузки, которые с помощью (10.28) и (10.32) сведены к узловым, в глобальной дискретной модели описываются матрицей–столбцом – глобальным вектором внешних узловых сил:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{G}_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{G}_i = \begin{Bmatrix} G_{xi} \\ G_{yi} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} G_{2i-1} \\ G_{2i} \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.36)$$

Условие равновесия всей КЭ–модели – это условие нулевой полной силы в каждом из n узлов модели. Это условие даёт два набора по n уравнений, записанных в каждом i –ом узле для каждой из двух компонент узловых сил:

$$\sum_{e(i)}^{N_e(i)} (\{F\}_{in} - \{F\}_{\Omega} - \{F\}_b)^{(e(i))} = \sum_{e=1}^{N_e(i)} \left([\mathbf{k}]\{d\} - \int_{\partial\Omega_p} [\boldsymbol{\phi}]^T \{p(x, y)\} dA - \rho \int_{\Omega} [\boldsymbol{\phi}]^T \{g\} d\Omega \right)^{(e(i))} = 0 \quad (10.37)$$

или –

$$\sum_{e(i)} ([\mathbf{k}]\{d\})^{(e(i))} = \sum_{e(i)} \left(\int_{\partial\Omega_p} [\boldsymbol{\phi}]^T \{p(x, y)\} dA + \rho \int_{\Omega} [\boldsymbol{\phi}]^T \{g\} d\Omega \right)^{(e(i))} \equiv \sum_{e(i)} \{G\}^{(e(i))}, \quad (10.38)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, и для данного узла i суммирование идёт по параметру $e(i)$, т.е. по строкам элементных матричных уравнений (10.34), отвечающих элементам с номерами $e(i)$, содержащих данный узел i . Уравнения располагаются в порядке возрастания номеров узлов, для каждого узла есть два уравнения, отвечающих, соответственно, за x – и y –компоненты узловых сил. В правой части (10.38) собраны известные (вычисляемые) внешние узловые силы.

Итак, в результате суммирования вкладов коэффициентов отдельных элементных уравнений при неизвестных узловых перемещениях и суммирования приложенных в узлах внешних сил, из совокупности (10.34) получается $2n$ уравнений относительно узловых перемещений, отвечающих условию глобального равновесия:

$$[\mathbf{K}]\{U\} = \{G\}, \quad (10.39)$$

где $[\mathbf{K}]$ – глобальная матрица жесткости, или просто матрица жесткости системы, $\{G\}$ – глобальный вектор нагрузки. Данная процедура сборки матрицы жёсткости вполне

аналогична рассмотренной выше для двух пружин. Сборка вектора правой части (здесь – суммирование вкладов давления и объёмной силы) могла появиться и в случае пружины, если бы в узле 3 были приложены две внешние силы.

Процедура составления глобальной матрицы жёсткости и вектора нагрузки из элементных матриц и векторов в расчётном алгоритме следует уравнению (10.38), т.е., она проводится в цикле по всем элементам. В этом цикле в каждом элементе вычисляются компоненты элементной матрицы жёсткости $a_{ij}(e) \in [k(e)]$, которые суть коэффициенты при узловых переменных. Вклады в эти коэффициенты от отдельных элементов накапливаются для каждого узла: добавляются к соответствующим компонентам глобальной матрицы $[K]$. К моменту завершения цикла по элементам, суммирующего узловые вклады, глобальная матрица $[K]$ готова. В этом же цикле вычисляется глобальный вектор нагрузки $\{G\}$ – правая часть системы уравнений (10.39).

Величины коэффициентов матрицы могут зависеть от параметров механических свойств, которые переменны в случае физически нелинейного определяющего соотношения, а также от матрицы деформаций, которая зависит от координат (тип элемента, естественно, остаётся постоянным в процессе вычисления). В этих случаях, при последовательном нагружении с изменением конфигурации и свойств материала, вообще говоря, требуется перестроить матрицу жёсткости. Изменение нагрузки не требует перестройки матрицы, а только вектора нагрузки в правой части.

Построение алгоритмов дискретизации МКЭ изложено в ряде книг, см., например, [Zenkevich], [Hughes], [Smith Progr.], в которой приведены и тексты алгоритмов учебных программ.

10.3.1. Свойства матрицы жёсткости, ширина диагонали

Каждое уравнение в системе (10.39) отвечает одной из двух компонент условия равновесия определенного узла, и порядок записи уравнений, т.е. левый индекс i (номер строки) элемента k_{ij} матрицы системы номинально отвечает нумерации степеней свободы КЭ–модели. Это – компоненты узловых перемещений, расположенные в порядке возрастания номеров узлов (ср. (10.35) и (10.36)). Для двумерных плоских элементов порядковые номера двух уравнений $i, i+1$, отвечающих двум компонентам перемещений в n -м узле, связаны с его номером соотношениями

$$i=2n, \quad i+1=2n+1$$

Правый индекс j *ненулевых* коэффициентов МЖ в данной строке (i -е уравнение) отвечает, аналогичным образом, значениям номеров других узлов, с которыми *соседствует* данный узел i через общий конечный элемент, например, с m -м узлом:

$$j=2m, \quad j+1=2m+1.$$

Это можно видеть из уравнения (10.38), выражающего условия равновесия в узле и вытекающей из него процедуры сборки матрицы. Количество ненулевых слагаемых в i -м уравнении определяется количеством узлов в конечных элементах, содержащих узел i , или взаимодействующих с ним иным образом. При достаточно большом общем количестве КЭ (100 и более) количество КЭ, содержащих любой данный узел, которое не превышает некоторого фиксированного значения, будет относительно очень малым, и на практике матрица жёсткости всегда сильно разрежена. В определённых случаях она может быть близкой к диагональной, но, чем больше различие между значениями номеров соседствующих узлов m и n , тем дальше друг от друга в матрице расположены соответствующие ненулевые слагаемые, и тем шире диагональ. Величина ширины диагонали играет определяющую роль для быстродействия алгоритма решения алгебраической системы, поскольку она определяет полное количество матричных элементов, с которыми производятся операции при решении системы. Для уменьшения этой ширины (bandwidth) применяют специальную процедуру перенумерации узлов, т.е.

порядка расположения строк матрицы (bandwidth minimization), в результате которой ненулевые элементы матрицы с новыми номерами оказываются ближе к её диагонали.

10.3.2. Интегрирование по элементу

Элементные матрицы жёсткости (10.25) вычисляются интегрированием. У линейного 3–угольного элемента матрица $[B]$ постоянна по элементу, что следует из её вида (10.17), матрица упругости (10.20) также постоянна. Пусть площадь элемента равна A , его толщина равна t , тогда элементы матрицы жёсткости элемента получаются умножением подинтегрального выражения в (10.24) на объём элемента:

$$[k] = [B]^T [E] [B] V^{(e)} = At [B]^T [E] [B]. \quad (10.40)$$

В случае рассмотренных ниже билинейных функций форм в 4–угольном элементе и в нелинейных задачах провести прямое интегрирование не удаётся, или оно оказывается громоздким. В этом случае применяются процедуры численного интегрирования.

Толщина t обычно берётся по умолчанию равной 1 в единицах измерения задачи. В коммерческих пакетах эта величина, которая в итоговой алгебраической системе не присутствует и влияет только на объёмные интегралы (энергии, массы и др.), иногда может быть выбрана пользователем.

10.3.3. Осесимметричная геометрия

Напомним, что в осесимметричной постановке мы не учитываем кручение. Как сказано в гл. 5, в цилиндрической системе координат соотношения упругого закона между компонентами те же, что в декартовой системе. Треугольный конечный элемент представляет собой не призму, а кольцо с треугольным сечением. Интерполяционное соотношение (10.2), записанное для радиальных и осевых перемещений в плоскости осевого сечения, не изменится, окружные перемещения отсутствуют.

Приведённая выше процедура дискретизации методом перемещений формально может быть полностью воспроизведена и для двумерного осесимметричного случая, но с двумя особенностями, легко учитываемыми. Во–первых, хотя количество существенных геометрических координат и компонент перемещений по-прежнему равно двум, у тензоров напряжений и деформаций относительно плоского случая имеется, как отмечалось в гл. 5, ещё одна существенная, т.е., не выражаемая через остальные, *окружная* компонента: $\sigma_{\theta\theta}$ и $\epsilon_{\theta\theta}$. Соответственно, увеличатся на единицу размеры элементных матриц деформаций, напряжений, упругости и жёсткости. Во–вторых, деформации и соответствующая матрица вычисляются по формулам осевой геометрии (см. гл. 5). В третьих, вид элемента объёма при интегрировании будет другой, для кольца.

Вид вектора деформаций следует из (5.14), вид матрицы упругости определяется ненулевыми компонентами тензоров напряжений и деформаций и законом Гука:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ u \\ x \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = [E]\{\epsilon\}, \quad (10.41)$$

Здесь названия осей сохранены от плоского случая, радиальное отвечает оси Ox , добавлено направление θ вдоль окружности. Радиальное перемещение – это u , осевое – это v . Как и ранее, выражаем вектор деформаций через вектор перемещений в виде

$$\{\varepsilon\}=[B]\{d\}, \quad (10.42)$$

где матрица деформаций, отвечающая определению (10.41), имеет размер (4x6):

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \\ \frac{\varphi_1}{x} & 0 & \frac{\varphi_2}{x} & 0 & \frac{\varphi_3}{x} & 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (10.43)$$

Матрица упругости задана определяющим соотношением (5.15) и в случае осевой симметрии имеет вид (показать):

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (10.44)$$

Объёмное интегрирование в (10.25) проводится по кольцу с поперечным сечением, отвечающим 2D конечному элементу, обычно по полному кольцу, и элемент объёма при интегрировании имеет вид $2\pi x dx dy$. Иногда можно встретить интегрирование по углу в один радиан, тогда интегралы массы и др. будут меньше в 2π раз.

Может возникнуть вопрос, почему не используется запись уравнения равновесия в цилиндрических координатах (см. гл. 5) при формулировке дискретизации МКЭ? Ответ состоит в том, что уравнение равновесия *в дифференциальной форме* вообще не используется – это уравнение фигурирует в эквивалентной *интегральной* формулировке (см. (10.23) и последующие аналогичные соотношения). В представленной ниже формулировке МКЭ через функционал упругой энергии и обобщении в методе взвешенных невязок также фигурирует, в качестве основного соотношения, интеграл работы, при вычислении которого в осесимметричном случае можно ввести локальную декартову систему и, пользуясь круговой симметрией, отнести криволинейность в пространственный элемент интегрирования. Аналогичное замечание относится к уравнению теплопроводности (см. ниже), которое есть частный случай закона сохранения энергии, записываемого при дискретизации МКЭ в эквивалентной интегральной форме.

Явный вид дифференциальных операторов в криволинейных координатах в процедурах дискретизации встречается в следующих случаях:

- в методе конечных разностей с аппроксимацией производных непосредственно через разностные соотношения – это не используется в МКЭ;
- при аппроксимации метрических соотношений, в частности, деформаций – именно это и учитывается в соотношениях (10.41), (10.43).

10.4. Граничные условия по перемещениям

Как и ранее, построенная по-элементно матрица жёсткости системы плоских элементов будет вырожденной, и определитель матрицы полученной системы линейных алгебраических уравнений (10.39) должен обращаться в нуль, т.к. система должна иметь

бесконечное множество решений. Эти решения отвечают перемещению конструкции как целого – в наших рассуждениях мы нигде не ввели на это запрет. Для исключения таких решений следует задать граничные условия для перемещений – условия *наложения связей*, или *закрепления (защемления)*. Без этого ранг матрицы жёсткости системы (10.39) должен быть равным не N , количеству степеней свободы, а $N-k$, где k – минимальное количество степеней свободы, которое надо закрепить, чтобы исключить свободное (без деформаций) перемещение под действием статической нагрузки: поступательное или вращательное. В трёхмерном случае объёмных элементов в односвязной области достаточно полностью закрепить один узел, чтобы исключить поступательное движение, и частично закрепить два других, чтобы исключить вращение. Узлы должны занимать "общее положение", т.е., не находиться на одной линии. Примеры рассмотрены ниже. Отметим, что при закреплении в точках могут возникнуть сосредоточенные силы реакции, не соответствующие реальности, и вопрос об условиях закрепления должен соотноситься с формулировкой задачи.

Граничные условия по перемещениям в статической задаче – это условия 1–го рода:

$$u(x)|_{x \in \partial\Omega_u} = u_b, \quad v(x)|_{x \in \partial\Omega_v} = v_b, \quad (10.45)$$

что в дискретной модели отвечает заданию фиксированных значений соответствующих компонент глобального вектора перемещений для некоторых степеней свободы j общим числом k : $j=j_1, \dots, j_k$:

$$u^{(j)} = a^{(j)}.$$

В статике эти условия обычно имеют характер закрепления, т.е. величины $a^{(j)}$ – нулевые. Если рассматриваются последовательные состояния равновесия с перемещаемой границей (квазистатика), $a^{(j)}$ могут изменяться от шага к шагу.

При фиксации узловых перемещений матрица жесткости и вектор нагрузки должны быть модифицированы. Учёт кинематических граничных условий желательно произвести, не меняя размерность матрицы, а модифицируя левую и правую части алгебраической системы. Из системы уравнений с модифицированной матрицей при решении её стандартным методом должны получиться для закреплённых узлов ровно те значения, что стоят в граничном условии, например, $u_1 = a^{(1)}$ и т.д.

Возможны два способа, с помощью которых, оставаясь в рамках этих требований, можно удовлетворить граничным условиям по перемещениям. Пусть построена система линейных уравнений МКЭ:

$$\begin{aligned} k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + \dots + k_{1n}u_n &= F_1 \\ k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + \dots + k_{2n}u_n &= F_2 \\ &\dots \\ k_{n1}u_1 + k_{n2}u_2 + \dots + k_{nn}u_n &= F_n \end{aligned} \quad (10.46)$$

и из граничных условий следует, что, скажем, $u_1 = a$. Это означает, что во все уравнения можно подставить вместо u_1 значение $u_1 = a$. Фактическое число неизвестных уменьшится на 1, причём, формально количество уравнений сохранится. Образовавшуюся свободу действий используют для модификации системы уравнений. В соответствии с первым способом, уравнение, отвечающее условию равновесия для первой переменной, у которого коэффициент на диагонали матрицы ненулевой, заменяется уравнением $u_1 = a$. Аналогично, в случае граничного условия для k -й переменной, то же делается для k -го уравнения: $u_k = a$. Подставим значение $u_1 = a$ в остальные уравнения и перенесём известные величины в правую часть. Вектор правой части примет вид:

$$F_i \rightarrow F_i - k_{i1}a \quad (i = 2, n), \quad F_1 = a.$$

С точки зрения механики, замена уравнения для k -го узла, полученного как условие равновесия в k -м узле, фактическим равновесием в этом узле: $u_k = a$, представляется очевидной. С точки зрения линейной алгебры операция явного задания одной степени свободы может увеличить ранг матрицы вырожденной системы на 1. Получаемая система уравнений:

$$\begin{aligned} 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n &= a \\ 0 \cdot u_1 + k_{22}u_2 + \dots + k_{2n}u_n &= F_2 - k_{21}a \\ &\dots \\ 0 \cdot u_1 + k_{n2}u_2 + \dots + k_{nn}u_n &= F_n - k_{n1}a. \end{aligned} \quad (10.47)$$

В частном, но частом случае, когда $a = 0$ (неподвижная граница), преобразуется матрица системы, вектор же нагрузки, очевидно, неизменен во всех уравнениях, кроме первого (k -го). Получаемая матрица системы, очевидно, остаётся симметричной. Нетрудно видеть, что система (10.47) представляет собой общую форму уравнения (9.14а), полученного для системы с тремя степенями свободы.

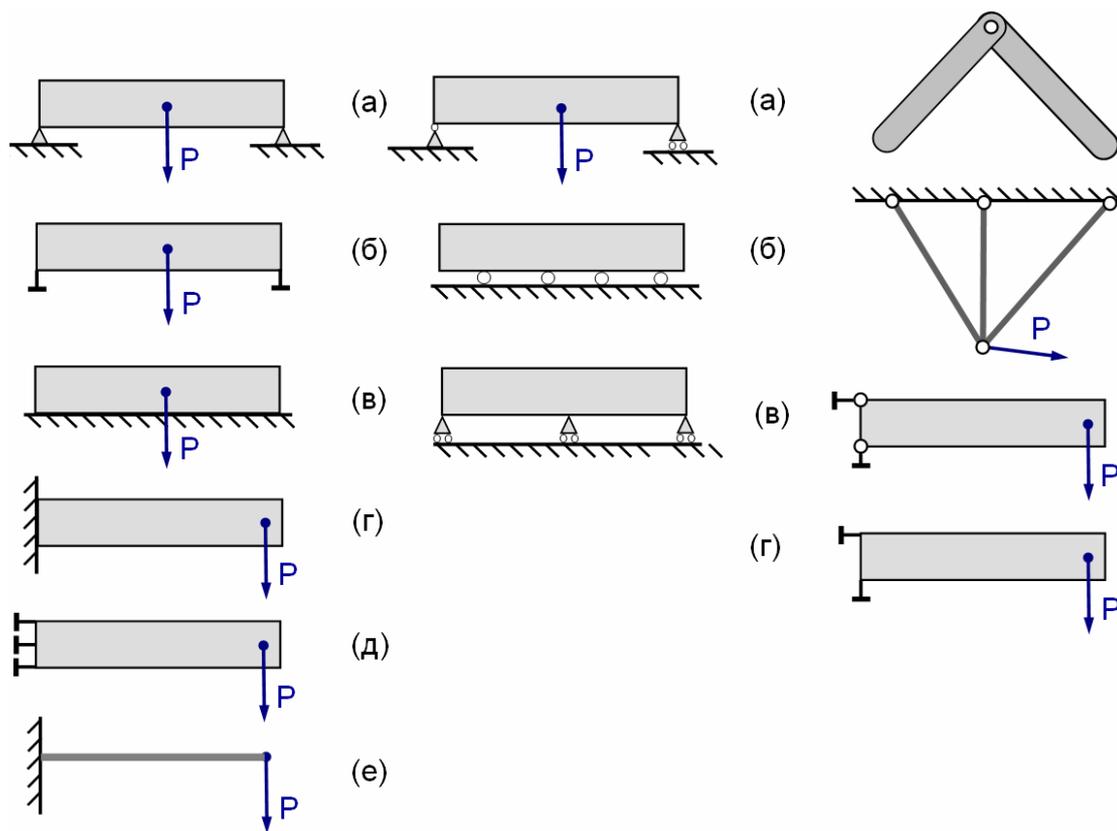
Второй способ учёта граничных условий по перемещениям состоит в том, чтобы просто ввести сильное диагональное преобладание в уравнениях, отвечающих равновесию закреплённых узлов. В правой части соответствующий коэффициент нагрузки, а в левой части – соответствующий диагональный элемент матрицы умножаются на некоторое большое число, скажем, 10^{20} . В рассматриваемом случае мы получили бы новые коэффициенты:

$$\begin{aligned} k'_{11} &= k_{11} \cdot 10^{20}, \quad F'_1 = k_{11} \cdot 10^{20} \cdot a; \\ k'_{ij} &= k_{ij} \quad (\text{кроме случая } i = 1, j = 1), \quad F'_i = F_i \quad (i \neq 1). \end{aligned}$$

Если затем поделить всё уравнение, в которое входит величина с множителем 10^{20} , на этот множитель, то все остальные коэффициенты уменьшатся в 10^{20} раз и станет видно, что данный способ фактически соответствует первому. В полученном решении u_i будет с высокой точностью равно a . Этот способ проще в реализации, но он менее точен, т.к., вообще говоря, приводит к погрешностям округления.

10.4.1. Примеры задания условий закрепления

При задании гран. условий по перемещениям (способов закрепления) важно ставить ровно те ограничения, которые есть в задаче. Избыточные закрепления могут исказить решение, т.е. будет получено решение несколько другой задачи. При недостаточном закреплении матрица системы остаётся сингулярной. В итерационных вычислительных процедурах решения линейных алгебраических систем часто принимаются специальные меры для улучшения сходимости итераций, и даже при плохих граничных условиях решение системы (неправильное) может быть получено, хотя при этом вероятны отклонения в ходе вычислений. Например, плохая сходимость итераций может быть признаком ошибки в задании граничных условий по перемещениям.



1. Полное закрепление

2. Перемещение вдоль одного направления

3. Шарнирное соединение (на стержне, шарике)

Рис.10.3. Обозначения способов закрепления

Часто при постановке задачи и построении области можно использовать наличие симметрии конфигурации – по форме и приложенной нагрузке, что существенно уменьшает объём вычислений. На оси или плоскости симметрии при этом должны задаваться соответствующие условия на перемещения.

В технике существует большое количество способов сочленения узлов конструкций, по различным кинематическим схемам, отвечающим всевозможным ограничениям движения. Они каталогизированы в ЕСКД и их обозначения могут быть найдены в справочной литературе, например, в [Общетех]. В литературе по МДТТ, в руководствах пользователя расчётных кодов обычно применяются гораздо более простые обозначения, причём, они несколько различаются в разных источниках для одинаковых случаев. Обозначения способов закрепления, встречающиеся в учебной и др. литературе по решению задач МДТТ, частично собраны на рис. 10.3 в виде примеров. Общим у них является следующее: для указания неподвижности любого звена часть его контура покрывают штриховкой, шарнирное соединение обозначают маленьким кружком, стержни – сплошной толстой линией. В МКЭ соединение в одном узле нескольких стержней отвечает их шарнирному соединению.

Прокомментируем простейшие ситуации, изображённые на рис. 10.3. Случаи 1а и 1б эквивалентны. Наличие точечного закрепления (нет перемещения, возможно вращение) на конце малого треугольника не всегда обозначается кружком, но этот маленький кружок показывает отсутствие размыкания точечного или прямолинейного контакта. Случаи 1г, 1д и 1е также аналогичны – это жёсткое закрепление торца (но в случаях 1г, 1д не видно, что изображённая там консоль – это тонкий стержень). Случаи 3в и 3г эквивалентны, но не тождественны случаям 1г, 1д в случае толстого стержня. Далее, случаи 2б и 2в обозначают одно и то же, но не совпадают со случаем 2а, где одно закрепление –

шарнирное. Ситуация в случае 1в не тождественна обозначенной схемами 1а и 1б, причём, 1в может также означать не жёсткое закрепление, а возможность скольжения с *трением*. Возможность размыкания контакта может не обозначаться, но подразумеваться в условиях. При ознакомлении с кинематической схемой следует также внимательно ознакомиться с условиями задачи.

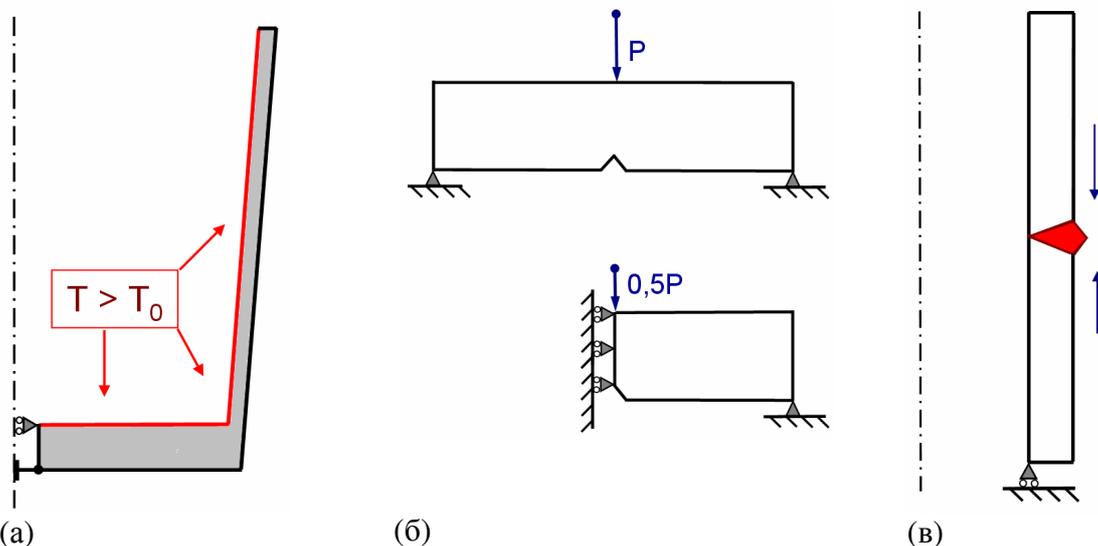


Рис.10.4. Примеры постановки граничных условий :

- а) осесимметричная задача о тепловом расширении при нагреве стакана изнутри;
- б) раскрытие трещины в двухконсольной балке (образец на трёхточечный изгиб) – полная и половинная симметричная постановки плоской задачи;
- в) к определению остаточных напряжений при стыковой сварке труб в предположении одновременного наложения шва по всей окружности.

Рассмотрим другие примеры задания граничных условий (рис. 10.4):

- (а) Задача о внезапном (однородном по границе) нагреве изнутри сосуда вращения: осевая симметрия вдоль направления Oy – полное закрепление в одной точке на оси симметрии и условие $u(x)|_{x=0}=0$ в остальных точках оси. Тепловое расширение изнутри приводит к радиальной и осевой деформации во всей области, точки на оси перемещаются только по вертикали, в одной точке задана фиксация стакана как целого;
- (б) Задача о 3–точечном изгибе. Плоская конфигурация, симметричная также относительно вертикальной центральной плоскости P , перпендикулярной оси Ox , здесь $u(x)|_{x \in P}=0$. В двух точках заданы точечные (шарнирные) закрепления, фиксирующие образец как целое. В отдалении от выемки напряжённое состояние относительно однородно (принцип Сен-Венана) и не оказывает влияния на концентрацию напряжений в вершине угла, которая служит предметом исследования. Точечное закрепление на нижней границе в действительности означает закрепление вдоль прямой линии, перпендикулярной плоскости рисунка, и в 2D расчёте надо указать ещё постановку задачи – здесь по характеру испытания более правдоподобны плоские напряжения. Аналогичное замечание относится к условию симметрии;
- (в) Одновременное наложение кольцевого сварного шва по всей окружности при стыковой сварке труб (нагрев и остывание металла в пределах разделки кромок стыка труб) – осесимметричная постановка задачи об определении остаточных напряжений после остывания трубы, с учётом упруго-пластического НДС. Стрелки показывают направление общей деформации (усадки) после остывания. Закрепление по радиусу

обеспечено осевой симметрией, и здесь достаточно дозакрепить трубу как целое по осевому перемещению в одной точке $v(x, y)|_{x=a, y=y_0} = 0$. Труба должна браться достаточно длинной, чтобы была смоделирована общая изгибная деформация в окрестности сварного шва. В случае несвободных дальних концов труб следует учесть фактические ограничения на перемещения.

Другие примеры постановки гран. условий по перемещениям можно найти в существующей многочисленной литературе и пособиях (см., например [ANSYS book], [ANSYS Басов], [ANSYS в руках], [Беляев]).

11. Общие формулировки МКЭ

В построенной выше конечно–элементной модели можно учесть все существенные особенности постановки исходной статической задачи МДТТ (4.1), в том числе, физическую нелинейность. Существующий "дуализм" численного описания – введение, наряду с узловыми перемещениями и интерполяцией по КЭ, также дискретных узловых сил, необходим для формулировки в условия равновесия системы в терминах узловых величин. Линейные по координатам функции формы дают непрерывную аппроксимацию перемещений, но не позволяют обеспечить непрерывность аппроксимации внутренних сил на границах КЭ. Поэтому силы и равновесие сил определяются "в среднем", с помощью интегрирования. В рассмотренном методе перемещений связь непрерывной аппроксимации сил (10.21) с дискретной моделью узловых сил осуществляется на основании условия (10.23) равенства малых работ введённых узловых сил и "реально существующих" распределённых сил в элементах на виртуальном перемещении. Это, а также условие совместности узловых перемещений в разных элементах, позволяет сформулировать условие равновесия в терминах узловых величин: условие глобального равновесия приводит к взаимной компенсации неизвестных узловых внутренних сил, они не входят в конечную систему уравнений. Таким образом, при построении схемы дискретизации мы существенно использовали механический смысл решаемого уравнения.

Далее мы будем двигаться в сторону большей универсализации подхода МКЭ, с целью его применения к другим уравнениям. Физическая/механическая интерпретация будет возможна, но не необходима для построения процедуры. Первый путь обобщений связан с математической постановкой задачи – ниже рассмотрен пример построения схемы МКЭ для МДТТ, исходя из вариационной формулировки, которая связана с видом уравнения, и механика доставляет просто удобный для понимания пример.

Ранее говорилось, что задачу равновесия упругого тела можно сформулировать как задачу минимизации его упругой потенциальной энергии. Эта энергия суть функционал от перемещений, который в дискретной модели среды может быть сведён к функции многих переменных – узловых перемещений. Далее можно использовать аналог того, что принималось выше для установления эквивалентности распределённых внутренних сил и узловых – говорится, что условие экстремума *функционала* энергии исходной системы эквивалентно условию экстремума построенной *функции* узловых величин дискретной системы. Это основная идея известного *метода Рунца* решения задачи минимизации [Стренг Фикс] и одно из проявлений упомянутого выше "дискретно-непрерывного дуализма" численного описания, происходящего из "проеекционно-сеточного" подхода.

Из условия экстремума функции (нулевые частные производные) могут быть получены уравнения для перемещений в конечном множестве узловых точек, ровно те же, что уравнения равновесия в узлах по методу перемещений. Процедура дискретизации МКЭ, основанная на минимизации потенциальной энергии всей системы, формулируется на всей расчётной области. Минимум потенциальной энергии является базовым физическим принципом, и метод перемещений вместе с методом минимизации функционала энергии служат примерами "силового" и "энергетического" подходов к решению задач МДТТ, которые можно проследить в разных её разделах. Заметим, однако, что энергия деформирования не сохраняется при пластичности, и с этой точки зрения функционал энергии – не самая общая формулировка. Дальнейшее обобщение МКЭ, основанное на методе взвешенных невязок, носит черты, как метода перемещений, так и вариационного.

Перед тем как перейти к изложению методов аппроксимации решения задачи "в целом", на всей области задания, следует обобщить понятие интерполирующих функций, которые также должны быть формально определены на всей области.

11.1. Полилинейные функции формы

При использовании элементарных функций форм часто удобно ввести внутренние координаты в каждом элементе и через них строить интерполяцию в КЭ. При формулировке же условия полного равновесия, суммировании и т.п. нужны глобальные координаты. Для рассмотренных выше 3–угольных элементов введение локальных координат было необязательным, но для 4–угольных и др. элементов интерполяционные выражения непосредственно через глобальные координаты приводят к громоздким выкладкам. Здесь часто проще иметь дело с локальными координатами, применяя при сборке матрицы жёсткости соответствующие функции преобразования (точнее, их производные), аналогично процедуре для стержневых элементов.

Для интерполяции в плоских 4–угольных и объёмных 6–гранных элементах 1–го порядка точности часто используются т.н. билинейные и трилинейные функции формы, устроенные одинаково в 2–мерном и 3–мерном случаях. Они рассмотрены ниже. Для начала приведём их аналог для 1–мерного случая 2–узловой элемента-стержня. Пусть непрерывная функция $U(x)$ задана на некотором отрезке $[a, b]$. Выражение для линейной интерполяции значения $U(x)$ в некоторой точке $a \leq x \leq b$ через значения в точках $x = a$ и $x = b$ записывают во "взвешенной" форме как

$$U(x) = \xi U(a) + (1 - \xi)U(b) \quad (11.1)$$

Параметр ξ можно рассматривать как локальную координату точки отрезка, изменяющуюся на отрезке $[0, 1]$, и функция $x: \xi \rightarrow x(\xi)$ задаёт преобразование координат от локальных к глобальным на отрезке $[0, 1]$. Для функции $U(x) = x$ координата точки, интерполяционное выражение (1.11) выражение будет точным. Если положить область изменения $\xi \in [-1, 1]$, то значение функции $U(x)$ в точке $a \leq x \leq b$ можно представить в более симметричном виде

$$U(x(\xi)) = 1/2 (1 - \xi) U(a) + 1/2 (1 + \xi) U(b) . \quad (11.2)$$

Связь локальной координаты ξ , заданной на отрезке $[-1, 1]$, с глобальной координатой x даётся тем же соотношением

$$x = 1/2 (1 - \xi)a + 1/2 (1 + \xi)b . \quad (11.3)$$

Введём на отрезке $[-1, 1]$ по определению две линейные функции формы :

$$\varphi_1(\xi) = 0,5(1 - \xi) , \quad \varphi_2(\xi) = 0,5(1 + \xi) , \quad (11.4)$$

принимающие значения от 0 до 1 включительно. С ними соотношение (11.2) примет вид общей аппроксимации МКЭ (10.2):

$$U(x(\xi)) = U^*(\xi) = U(a) \varphi_1(\xi) + U(b) \varphi_2(\xi) .$$

Легко видеть, что сумма базисных функций $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ равна 1: свойство нормировки. Мы также можем сказать, что отрезок $[a, b]$ исходной области задания функции $U(x)$ непрерывно отображается на отрезок $[-1, 1]$ области задания функции $U^*(\xi)$.

11.1.1. Четырёхугольный 4–узловой элемент

Аналогично одномерному случаю, интерполирующие выражения могут быть получены для 4–угольного элемента на плоскости как результат некоторого отображения его на 2×2 квадрат вида (рис.11.1): граница и внутренние точки элемента $e: (x, y) \in e$ преобразуются в точки квадрата с координатами (ξ, η) . При этом, аналогично (11.3), глобальные координаты точек 4–угольника при отображении должны выражаться через его глобальные узловые координаты по общей форме интерполяции МКЭ (10.2) :

$$x = x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(\xi, \eta) y_i. \quad (11.5)$$

Величины $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ служат *локальными координатами* точек в 4–угольном элементе, и (11.5) можно трактовать как запись отображения $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$ (рис. 11.1).

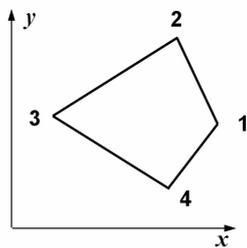


Рис.11.1. 4-угольный конечный элемент.

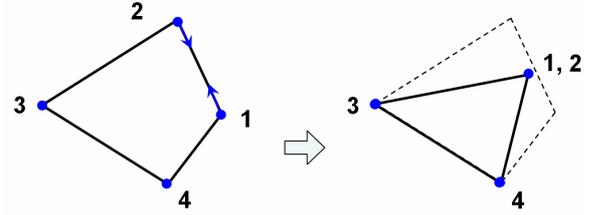
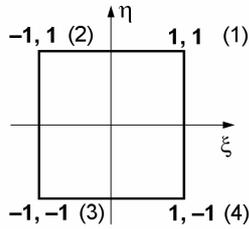


Рис.11.2. Вырожденный 4-угольный КЭ

Вид функций форм $\varphi_i(\xi, \eta)$ может быть различным. Т.к. значение во внутренней точке КЭ интерполируется по значениям не в 3–х, а в 4–х узловых точках, требование (11.5) несовместимо с требованием линейности по обеим координатам. Один из простых вариантов для 4–угольного элемента это т.н. "билинейные" функции формы (bilinear shape functions, см. [МитчелУэйт], [Hughes] и др.):

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi, \eta) &= 1/4(1 - \xi)(1 - \eta), & \varphi_2(\xi, \eta) &= 1/4(1 + \xi)(1 - \eta), \\ \varphi_3(\xi, \eta) &= 1/4(1 + \xi)(1 + \eta), & \varphi_4(\xi, \eta) &= 1/4(1 - \xi)(1 + \eta), \end{aligned} \quad -1 \leq \xi, \eta \leq 1. \quad (11.6)$$

Нетрудно убедиться в том, что функции (11.6) при подстановке в (11.5) дают соответствие координатных линий локальных координат, т.е. линий $\xi=\text{const}$, $\eta=\text{const}$, прямым линиям в исходном 4–угольнике, соединяющим точки его противоположных сторон: раскрывая после подстановки скобки и приводя подобные члены, (11.6) можно представить в виде

$$x = x(\xi, \eta) = X_0 + X_1\xi + X_2\eta + X_3\xi\eta, \quad y = y(\xi, \eta) = Y_0 + Y_1\xi + Y_2\eta + Y_3\xi\eta,$$

где X_i , Y_i – комбинации узловых координат. Фиксируем одну из локальных координат, пусть $\xi = \xi_0 = \text{const}$. Тогда x и y будут линейными функциями координаты η , исключая которую, получим линейную взаимосвязь глобальных координат x и y , т.е., прямую линию, которая задана параметрическими зависимостями (11.6): $x = x(\xi_0, \eta)$, $y = y(\xi_0, \eta)$ от η при постоянном $\xi = \xi_0$. При $\xi_0 = 0$ отрезок прямой $x = x(0, \eta)$, $y = y(0, \eta)$, $-1 \leq \eta \leq 1$ соединяет в 4–угольном элементе середины противоположных сторон.

Для интерполяции функций на КЭ часто (но не всегда) используется *изопараметрическая аппроксимация*, упомянутая ранее: в любой точке 4–узлового конечного элемента значение функции $U(x,y)$ находится через четыре узловые значения с помощью того же интерполяционного выражения (11.5) по четырём функциям формы элемента, что и глобальные координаты точки:

$$U(x, y) = \bar{U}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(\xi, \eta) U_i. \quad (11.7)$$

Совместность значений, вычисленных на границе элементов (непрерывность аппроксимации), проверяется непосредственно. Так же проверяется, что частные производные по локальным координатам, которые будут зависеть от всех 4–х узловых значений в каждом из элементов, по-прежнему будут разрывны на их границе.

В (11.5) присутствуют произведения координат, и как преобразование оно нелинейно, *произвольная* прямая в координатах (ξ, η) , например, диагональ $\xi=\eta$, может переходить в

непрямую линию в глобальных координатах, и наоборот. Это видно, хотя бы, из того, что в произвольном 4–угольнике точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, не всегда лежит на диагоналях, в то время как в локальных координатах (ξ, η) соответствующая точка $(\xi=0, \eta=0)$ совпадает с точкой пересечения диагоналей квадрата, отвечающего в локальных координатах этому 4–угольнику. Но значения вдоль линий $\xi=const$ или $\eta=const$ в локальных координатах будут переходить в значения вдоль прямых в глобальных координатах, и линейная функция локальной координаты будет линейной функцией вдоль соответствующей прямой линии в конечном элементе.

В 3–мерном случае 8–узловые 6–гранные изопараметрические трилинейные (trilinear) элементы строятся аналогично – как отображение гексаэдра на куб размером $2 \times 2 \times 2$. Функции формы имеют в локальных координатах вид –

$$\varphi(\xi, \eta, \theta) = 1/8(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)(1 \pm \theta), \quad -1 \leq \xi, \eta, \theta \leq 1. \quad (11.8)$$

Упражнение. Найти сумму билинейных функций формы в 8–узловом элементе.

Отметим, что при обращении преобразования (11.5), т.е. при нахождении локальных координат через глобальные, для нахождения коэффициентов обратного преобразования в каждом элементе приходится решать квадратное уравнение, а в 3–мерном случае аналогичное уравнение будет кубическим.

Стягиванием одной из сторон (рёбер) элемента в точку можно получить треугольные (которые остаются 4–узловыми) элементы в 2–мерном случае (рис.11.2) и, соответственно, призматические и тетраэдральные элементы – в 3–мерном случае (которые остаются 8–узловыми). Количество узлов не меняется, но часть из них совмещена друг с другом в пространстве. Такой приём используется для единообразия расчётной схемы (однотипные элементы), хотя считается, что точность аппроксимации при этом ухудшается.

Описанный конечный элемент является простейшим примером т.н. серендиповых элементов ("аккуратных", "красивых" - см. [Зенкевич] и Интернет), узлы которых расположены преимущественно на сторонах (для 1–го и 2–го порядка – только на сторонах). Дальнейшую информацию о построении функций форм КЭ разного типа можно найти в [Hughes], [Стренг Фикс], [ANSYS в руках] и др. учебниках и монографиях.

11.2. Конечные элементы для решения задач МСС

Основные типы элементов, обычно используемые в задачах механики сплошной среды, приведены на рис.11.3-4. Геометрически они сводятся к рассмотренным ранее треугольникам, четырёхугольникам, тетраэдрам, призмам, гексаэдрам и элементам поверхности, топологически эквивалентным треугольникам и четырёхугольникам. В литературе могут встретиться другие геометрические типы элементов, но перечисленные есть в любом коммерческом "структурном коде". Общая классификация элементов для задач механики может быть следующей:

- "Полноразмерные" – моделирующие 3–мерный объём тем или иным способом (например, в 2–мерном плоском или осесимметричном приближении);
- "Неполноразмерные" – моделирующие многомерные тела, один или более размеров которых малы – оболочка и балка, работающие на изгиб, стержень, работающий на сжатие–растяжение, пружина или элемент сети, которые как отдельный элемент нульмерны. Для построения КЭ, моделирующих балки и оболочки, используются соответствующие механические теории – теория оболочек и теория изгиба. Для неполноразмерных КЭ, работающих на изгиб, применяется интерполяция порядка выше второго по причинам, которые будут ясны в гл. 14, где рассмотрен изгибный элемент;

Дальнейшая классификация конечных элементов возможна –

- по форме:
 - 1–мерные – пружины, стержни (растяжение вдоль), балки (изгиб и растяжение);
 - 2–мерные – 3– и 4–угольные;
 - 3–мерные – сплошные – тетраэдры, 3–угольные призмы, 6–гранники;
 - 3–мерные;
- по порядку аппроксимирующих полиномов :
 - линейные;
 - квадратичные;
 - кубические и более;
- по физике моделируемых процессов :
 - только механика деформируемого тела, либо только теплопроводность и т.п.;
 - "мультифизика" – учёт механики и температуры, электромагнитных полей и др. в рамках одного геометрического КЭ-разбиения расчётной области.

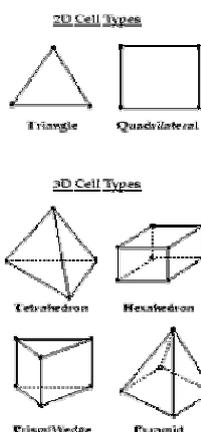


Рис.11.3. Полноразмерные КЭ

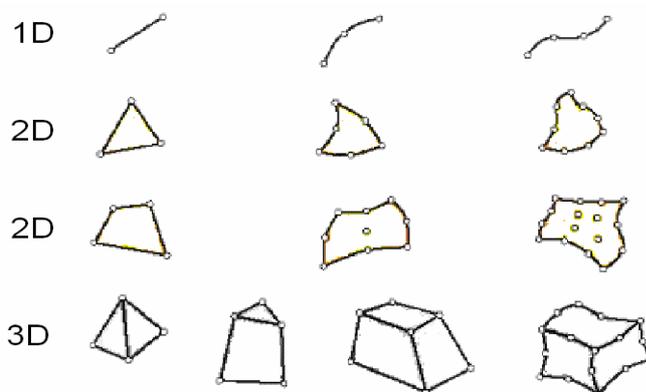


Рис.11.4. КЭ 1-3 порядков для МДТТ, включая неполноразмерные – стержни, балки, оболочки

Для того чтобы задать квадратичную аппроксимацию в элементе, недостаточно вершинных узлов, и элементы 2–го порядка имеют дополнительные узлы, расположенные вне вершин. Перемещение смежных точек таких КЭ не обязано быть линейной функцией расстояния вдоль границы, граница соседствующих, например, плоских элементов будет кривой 2–го порядка, т.е. криволинейна, и необходимо обеспечить их совместность. В лагранжевом описании элементы с дополнительными узлами это более сложные фигуры.

Выбор аппроксимирующей функции (обычно это полиномы, иногда – тригонометрические функции) определяется рядом обстоятельств, связанных с общей аппроксимацией решения и характером матрицы алгебраической системы. Например, в упруго-пластических расчётах требуется избежать т.н. эффекта запираения – пониженной деформируемости искусственного происхождения – это может достигаться введением дополнительных узлов, в которых могут дополнительно определяться не перемещения, а напряжения. Аналогичным целям служит введение разных типов интерполирующих функций, дополнительные узлы которых могут находиться на рёбрах, на гранях или в объёмах. В механике жидкости возникают аналогичные проблемы, связанные с несжимаемостью. Упомянутое выше свойство изопараметричности, когда в элементе аппроксимация координат и определяемых величин одинакова, может отсутствовать в "мультифизических" элементах. Всё это определило большое количество разнообразных видов КЭ в рамках ограниченного количества их геометрических конфигураций, приведённых на рис. 11.3 и 11.4. При выборе типа КЭ из семейства предлагаемых, например, в меню коммерческого кода, следует ознакомиться с его свойствами.

11.3. Пирамидальные базисные функции

Функции формы, заданные на совокупности элементов КЭ–модели, могут быть сгруппированы вокруг узлов для формирования *базисных функций* (global shape functions [Hughes]), отвечающих узлам конечно-элементного разбиения. С помощью таких базисных функций КЭ–методика математически формулируется в компактной и весьма общей форме, независимой от формы КЭ. Для начала, рассмотрим опять 1–мерный случай.

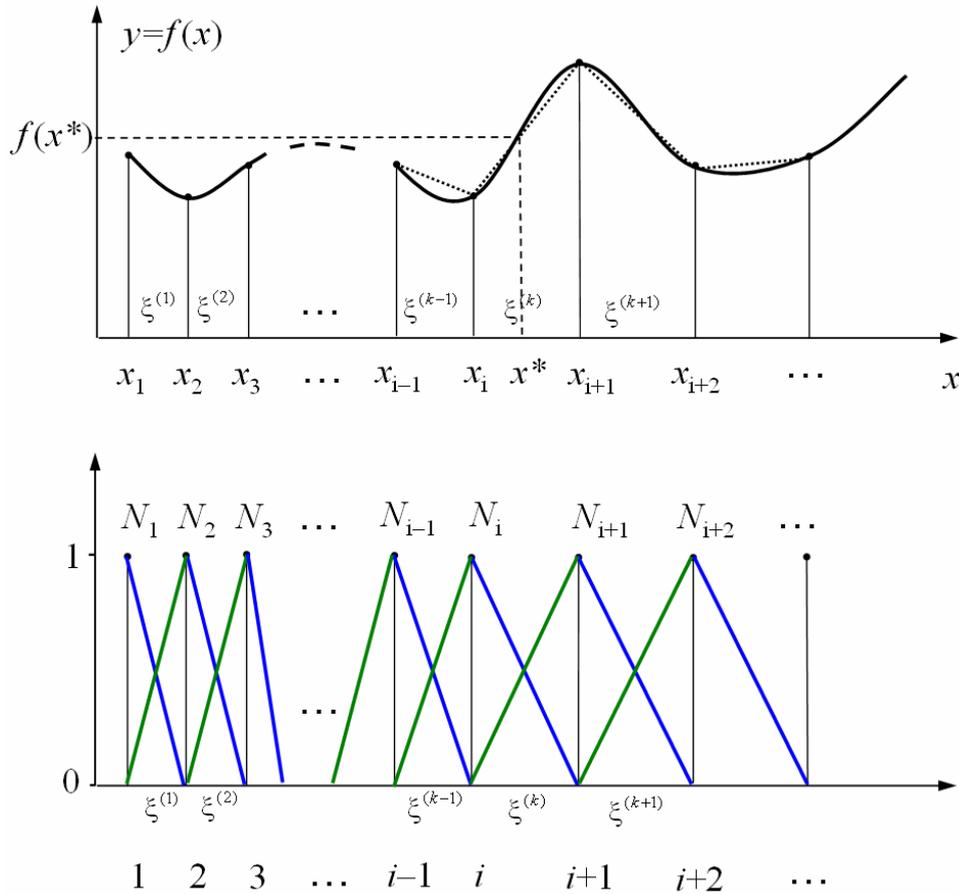


Рис.11.5. Линейная аппроксимация на отрезках – линейных КЭ, и базисные функции, составленные из "однолинейных" функций форм (11.4)

Пусть область задания Ω_U функции $U(x)$ (отрезок) разбита на n отрезков (одномерных конечных элементов), $1 \leq k \leq n$, на каждом из которых задана своя локальная координата $\xi^{(k)}$, изменяющаяся от -1 до 1 при возрастании x . В окрестности каждого внутреннего узла с номером $i = k+1$, $1 < i < n+1$, можно ввести *базисную функцию* $N_i(x)$ как комбинацию рассмотренных выше линейных функций форм на отрезках:

$$N_i(x) = 1/2 (1 + \xi^{(k)}) = \varphi_2(\xi^{(k)}), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}. \quad (11.9)$$

$$N_i(x) = 1/2 (1 - \xi^{(k+1)}) = \varphi_1(\xi^{(k+1)}), \quad x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2}$$

Она имеет вид треугольника (рис.11.5). Точка стыка x_{i+1} отрезков "k" и "k+1" принадлежит им обоим, и функция $N_{i+1}(x)$ непрерывна в этой точке. В граничных элементах базисная функция совпадает с одной из двух функций форм. Базисные функции (11.9) образуют *линейный базис* приближений $U^*(x)$ на всей области Ω_U , аппроксимирующих функции на

Ω_U внутри элементов данного конечно-элементного разбиения прямой линией. А именно, такая кусочно-линейная аппроксимация любой функции $U(x)$ может быть представлена как линейная комбинация базисных функций – полнота семейства базисных функций $\{N_j(x)\}$. Постулировав изопараметричность КЭ, это свойство "базисности", т.е. полноты линейной системы аппроксимирующих функций, приписывается и базисным функциям, скомпонованным из функций формы на КЭ высших размерностей. Свойство полноты позволяет ограничиться конечным, вполне определённым количеством алгебраических уравнений в общей процедуре дискретизации.

В случае интерполяции системой полиномов степени n свойство полноты системы можно определить как требование точного отображения любого полинома n -й степени. (Это связано также со свойством гладкости аппроксимации – см. [Стренг Фикс]). В рассмотренных выше треугольных элементах это очевидно. В случае полилинейных функций формы интерполяция имеет первый порядок точности в следующем смысле: линейная функция вдоль "координатных направлений" в конечном элементе точно отображается интерполирующим выражением (11.5) с функциями вида (11.6).

Ещё одно очень важное свойство, которым обладают все "хорошие" базисные функции, состоит в их ортогональности – равенство нулю попарных произведений несовпадающих элементов базиса. Определив обычным образом, произведение базисных функций семейства $\{N_j(x)\}$ как интеграл от их произведения, легко увидеть, что полученный базис, хотя и не полностью, но "локально" ортогонален: ненулевыми будут только произведения базисных функций, приписанных к несовпадающим соседствующим узлам.

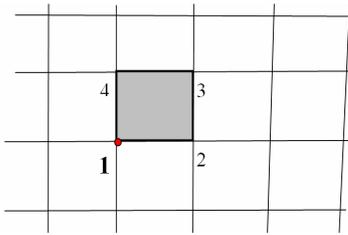


Рис.11.6.

Базисная функция в 2-мерном случае устроена аналогично одномерному случаю и имеет пирамидальную форму. Рассмотрим некоторую точку $A \in (e)$ элемента (e) , характеризуемого узлами 1, 2, 3, 4 (рис.11.6). Пусть функция $T(x, y)$ задана на всей расчётной области, разбитой на билинейные конечные элементы, введённые выше. Аппроксимация $T(x, y)$ в точках, принадлежащих некоторому элементу, записывается через функции формы (11.6),

заданные на конечном элементе ("shape functions"), в виде (11.5). Далее можно ввести базисные функции, отвечающие узлам КЭ-разбиения, в полной аналогии с одномерным случаем (11.9) – базисная функция номер k – это совокупность функций форм, заданных на элементах, содержащих узел k , принимающих в нём значение 1. Базисная функция данного узла полагается *заданной на всей области* ("global shape function"), но за пределами элементов, сгруппированных вокруг этого узла, она равна нулю. В каждом из четырёх узлов 1, 2, 3, 4 данного элемента (рис.11.7) задана базисная функция номер 1, 2, 3, 4, соответственно. Сужение каждой из этих базисных функций N_1, N_2, N_3, N_4 на элемент (e) (график одной из них показан на рис. (11.7)) даёт одну из четырёх функций форм, заданных на элементе, ту, которая равна 1 в данном узле. Каждая из четырёх функций форм данного элемента может быть приписана к узлу, в котором она принимает значение 1 (в остальных узлах она равна 0). Следовательно, все функции формы задействованы в своих базисных функциях, по одному разу. Обратное, элемент (e) будет общим пересечением областей задания базисных функций, построенных в узлах 1, 2, 3, 4. Поэтому, вместо интерполяции вида (11.7) по функциям формы, заданным в конечном элементе, можно формально говорить об интерполяции по базисным функциям, заданным в любой точке области.

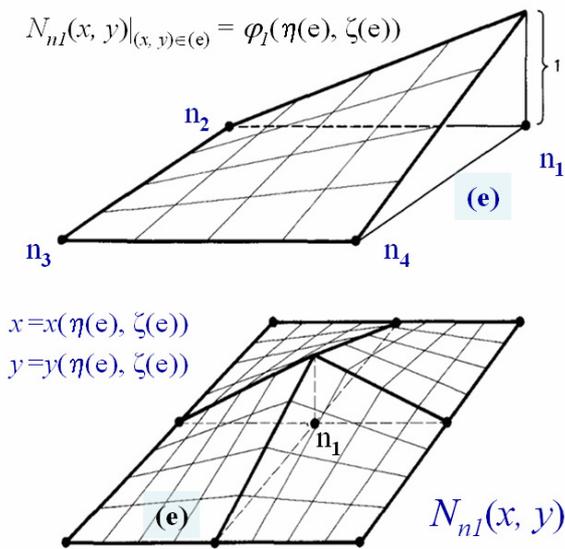


Рис.11.7. Базисная функция (2D) и её сужение на КЭ

Итак, введённые функции формы на элементах, содержащих данный узел, взятые в определённых совокупностях, образуют *финитную базисную функцию*, определённую в окрестности данного узла с центром в этом узле. Напомним, что финитной называется функция, заданная во всей рассматриваемой области, но равная нулю за пределами конечной подобласти, в нашем случае – окрестности узла. Название "базисная" говорит о том, что взятых в совокупности этих функций достаточно для аппроксимации с определённой точностью любой непрерывной функции заданной степени гладкости на расчётной области: они образуют базис в пространстве функций данного вида. (В этом смысле русскоязычное название "базисная функция" отличается от англоязычного термина "global shape function", вместе же они

содержат информацию о строении и назначении функции.) На рис.11.5 иллюстрируется строение финитной базисной функции для 1–мерного случая, а на рис.11.7 – для 2–мерного.

В общих формулировках МКЭ искомое приближённое решение во всей области Ω представляется в виде разложения по базисным функциям $N_i(x)$ из некоторого набора $\{N_i\}$, $i = 1, \dots, n$. Каждой базисной функции сопоставлен определённый узел разбиения i , а коэффициенты разложения $\{u_i\}$ – это неизвестные значения искомой функции в узлах разбиения. Они могут зависеть от времени или иного параметра нагружения t : $u_i = u_i(t)$. С помощью финитных базисных функций $N_i(x)$ интерполяционные соотношения вида (10.2), (10.4) формально записываются сразу на всей области Ω :

$$u(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_i(t), \quad (11.10)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) v_i(t), \quad (x, y) \in \Omega .$$

Элементные функции формы по-прежнему обозначаются как $\varphi^{(e)}(x)$ – это сужения $N_{i(e)}(x)$ на элемент (e) : $\varphi^{(e)}(x) = \{(x, N_{i(e)}(x)) | x \in (e)\}$, где $i(e)$ – номера узлов элемента e . Разложение (11.10) – одна из форм записи аппроксимации непрерывной функции через её значения в дискретных точках на всей области задания. Для получения дискретной формы исходных уравнений на всей области (сейчас у нас уравнения механического равновесия) используем интегральные формулировки.

11.4. Формулировка МКЭ через принцип минимума потенциальной энергии

Рассмотрим опять двумерную плоскую задачу статики: определить положение равновесия деформируемого тела под действием приложенной нагрузки. Приведённый ниже формализм непосредственно обобщается на осесимметричный или трёхмерный случай. Задано разбиение расчётной области на конечные элементы. Узлы общим количеством n занумерованы сплошным образом, и для каждого элемента задана

связность, т.е. узлы, которые его образуют, а также материал, свойства которого, входящие в матрицу упругости, известны. Заданы границы, поставлены краевые условия. Дискретизация проводится аналогично рассмотренному выше в методе перемещений.

- Вводятся *глобальные* векторы обобщённых перемещений – в данном случае это матрицы размером $2n \times 1$, где n – общее количество узлов; согласно с типом КЭ строятся интерполяционные соотношения для обобщённых перемещений и других переменных задачи;
- Строятся соответствующие матрицы деформаций и напряжений, заданные *на всей области*;
- В качестве исходной математической формулировки условия равновесия используется вариационный принцип минимума функционала потенциальной энергии. В функционал подставляются аппроксимации деформаций и напряжений с использованием конечного набора неизвестных узловых перемещений. Условие экстремума функционала полагается эквивалентным условию экстремума полученной функции многих переменных, т.е. узловых перемещений. Из этого условия получают искоемые алгебраические соотношения между введёнными дискретными величинами.

Напомним, что ранее из уравнений равновесия был получен принцип стационарности полной возможной работы всех сил, приложенных в системе. В данном случае используется обратное утверждение – если потенциальная энергия стационарна, то состояние системы – равновесное. Вопросы проверки устойчивости равновесия, мы не касаемся. Ключевым предположением процедуры дискретизации служит перенос условия экстремума функционала упругой энергии на условие экстремума интерполирующей его функции узловых перемещений.

Запишем выражения для интерполяции функций, заданных на области Ω , в общей форме (11.10) через базисные функции. Полагается, что область разбита на 4–угольные билинейные элементы, но это непринципиально. Пусть $\{d\}$ – матрица-вектор перемещений всех узлов. Соотношение (11.9) для перемещений в точке области записывается в символическом виде для 2×1 матрицы $\{u\} = \{u(x,y), v(x,y)\}^T$ аналогично элементному выражению (10.15), но оно определено на всей области:

$$\{u\} = [N]\{U\}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (11.11)$$

где зависящая от координат матрица базисных функций $[N] = [N(x,y)]$, имеющая в 2-мерном случае размер $2 \times 2n$, составлена нулями и базисными функциями $N_i(x,y)$:

$$[N] = \begin{Bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{Bmatrix}. \quad (11.12)$$

Проверим справедливость выражения (11.10). Пусть некоторая точка области находится в пределах элемента e , образованного узлами $n_{e1}, n_{e2}, n_{e3}, n_{e4}$, которым соответствуют базисные функции $N_{e1}, N_{e2}, N_{e3}, N_{e4}$. Для u –компоненты перемещений в этой точке в сумме (11.10) останутся слагаемые:

$$u(x) = N_{e1}(x)u_{e1} + N_{e2}(x)u_{e2} + N_{e3}(x)u_{e3} + N_{e4}(x)u_{e4},$$

вследствие того, что функции $N_{ei}(x)$ ненулевые только в элементах, содержащих i –й узел. Здесь $u_{e1}, u_{e2}, u_{e3}, u_{e4}$ – узловые значения компоненты перемещений. Сужение N_{ei} на конечный элемент даёт функцию формы, принимающую значение 1 в узле n_{ei} , и можно видеть, что формальное выражение (11.11) для перемещений в точке, принадлежащей данному конечному элементу, совпадает с соотношением (10.5), т.е. значения глобального вектора $\{u\}$ в данном элементе совпадают со значениями элементного вектора $\{u^{(e)}\}$. Этот

вектор может быть выражен через вектор $\{d^{(e)}\}$ узловых перемещений в элементе с помощью матрицы функций форм $[\phi^{(e)}]$ этого элемента:

$$\{u^{(e)}\} = [\phi^{(e)}]\{d^{(e)}\}, \quad \{u^{(e)}\}^T = \{d^{(e)}\}^T [\phi^{(e)}]^T.$$

Эквивалентность общей записи интерполяции в КЭ в виде (11.11) выражению для интерполяции в конечном элементе (10.4) приводит в итоге к тем же коэффициентам матрицы жёсткости алгебраической системы, что в рассмотренном методе перемещений.

Далее, на основании (11.11) с помощью кинематических и определяющих соотношений вида (10.14)–(10.17) записываются соотношения между глобальным вектором перемещений $\{d\}$ и глобальными векторами (3×1) деформаций и напряжений:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\}, \quad \{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = [E][B]\{U\}. \quad (11.13)$$

Здесь матрица деформаций $[B]$ размером $3 \times 2n$ составлена из нулей и пространственных производных базисных функций. Как и выше, эти производные сводятся к частным производным функций форм по координатам и в совокупности включают выражения, вычисленные поэлементно.

Функции формы (11.6) в выражении для матрицы деформаций $[B]$ необходимо дифференцировать по глобальным координатам, введены же они через локальные координаты. Формально функции формы, заданные на данном элементе (e) , могут быть выражены как через локальные, так и через глобальные координаты точки x –

$$\tilde{\varphi}_i(x, y) = \tilde{\varphi}_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \varphi_i(\xi(x, y), \eta(x, y)). \quad (11.14)$$

Функции $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ известны, но нам нужны только производные $\tilde{\varphi}'_{ix} = \partial \tilde{\varphi} / \partial x$, $\tilde{\varphi}'_{iy} = \partial \tilde{\varphi} / \partial y$. Для их получения можно воспользоваться соотношением, следующим из (11.13) (φ обозначает любую из четырёх функций формы):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta},$$

или, вводя обозначения для производных –

$$\varphi'_{\xi} = \tilde{\varphi}'_x x'_{\xi} + \tilde{\varphi}'_y y'_{\xi}$$

$$\varphi'_{\eta} = \tilde{\varphi}'_x x'_{\eta} + \tilde{\varphi}'_y y'_{\eta}$$

Из этих уравнений выражаем производные функций форм по глобальным координатам через известные функции, собранные в матрицу:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\varphi}'_x \\ \tilde{\varphi}'_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\|J\|} \begin{Bmatrix} y'_{\xi} & -y'_{\eta} \\ -x'_{\xi} & x'_{\eta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi'_{\eta} \\ \varphi'_{\xi} \end{Bmatrix}, \quad \|J\| = x'_{\eta} y'_{\xi} - x'_{\xi} y'_{\eta}. \quad (11.15)$$

Определитель $\|J\|$ – якобиан преобразования к локальным координатам, всегда отличен от нуля для невырожденных элементов. Он естественным образом появляется в выкладках в случае использования локальных координат. Матрица преобразования от локальных к глобальным координатам уже встречалась нам при построении расчётной схемы для стержневых систем (см. (9.23)). Ниже в формальных выкладках считается, что преобразование координат уже учтено в матрице деформаций.

Механическая потенциальная энергия системы складывается из: потенциальной упругой энергии, обусловленной деформаций $\{\varepsilon_{ik}(x)\}$ и выраженной по формуле Клапейрона (3.4), из потенциальной энергии, накопленной на перемещении $\{u_i(x)\}$ в поле сил, задаваемых вектором $\{f_i(x)\}$, и из работы граничных внешних сил $\{p_i(x)\}$ на

перемещении $\{u_i(x)\}$, которые мы также полагаем потенциальными (что допустимо, если эти силы не зависят от состояния). Функционал полной потенциальной энергии имеет вид:

$$\Pi(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sigma_{ik} \varepsilon_{ik} - \rho f_i u_i \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} p_i u_i dA. \quad (11.16)$$

Здесь индексами обозначены физические компоненты векторов и тензоров. Аппроксимируя перемещения, деформации и напряжения с помощью соотношений (11.11)-(11.13), получим:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega - \{U\}^T \{R\}, \quad (11.17)$$

где вектор нагрузки, как и ранее (см.(10.33)), связан с внешними объёмными и поверхностными силами:

$$\{R\} = \int_{\Omega} [N]^T [\rho f] d\Omega - \int_{\partial\Omega_p} [N]^T \{p(x, y)\} dA. \quad (11.18)$$

В (11.18) подынтегральные выражения формально представлены с помощью соотношений вида (10.27) и (10.31) через узловые значения перемещений и входят в узловые силы, описываемые глобальным вектором $\{R\}$, аналогично тому, как это делалось в методе перемещений. Интегрирование распространяется на всю расчётную область и проводится по-элементно. В подынтегральное выражение входят только первые производные от перемещений, и для билинейных функций форм элементов оно определено почти всюду, хотя и разрывно на границах элементов.

Векторы $\{\varepsilon\}^T$ и $\{\sigma\}$ выражаются через неизвестный вектор перемещений $\{d\}$. Внесём в (11.17) интерполяционные выражения для деформаций и напряжений через узловые величины и выразим наш функционал от неизвестных функций координат $u(x, y)$, $v(x, y)$ как квадратичную функцию конечного числа переменных $\{u_i, v_i\}$ – неизвестных компонент перемещений в узлах:

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{U\}^T [B]^T [E] [B] \{U\} d\Omega - \{U\}^T \{R\} = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} - \{U\}^T \{R\}. \quad (11.19)$$

Здесь введена глобальная матрица жёсткости размером $2n \times 2n$ –

$$[K] \equiv \int_{\Omega} [B]^T [E] [B] d\Omega, \quad (11.20)$$

и, поскольку зависимыми от координат могут быть только коэффициенты матрицы $[B]$ и вектора $\{R\}$, узловые перемещения могут быть вынесены из–под соответствующих интегралов. В подынтегральные функции входят только параметры сетки и материалов, интегралы вычисляются независимо. Потенциальная энергия стала квадратичной функцией только неизвестных узловых перемещений.

Интеграл (11.20), взятый по всей области, составлен суммой $4n^2$ слагаемых, отвечающих попарным произведениям производных по координатам базисных функций, фигурирующих в записи (11.10). Большая часть этих вкладов – нулевая, поскольку базисные функции ненулевые только в элементной окрестности узлов.

В индексных обозначениях квадратичная форма (11.19) может быть записана как

$$\Pi(r_1, \dots, r_{2n}) = \sum_{i,j} \frac{1}{2} k_{ij} r_i r_j - \sum_i f_i r_i, \quad (11.21)$$

где r_i обозначает узловые значения компонент перемещений системы общим числом $2n$.

Применим необходимое условие экстремума по узловым компонентам перемещений к полученной функции многих переменных. Вычисляя $2n$ частных производных функции (11.21) по узловым перемещениям и приравнявая производные нулю –

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial r_{2n}} = 0,$$

учитывая, что коэффициенты не зависят от узловых величин и квадратичная форма симметрична –

$$\frac{\partial (k_{ij} r_i r_j + k_{ji} r_j r_i)}{\partial r_i} = 2k_{ij} r_j,$$

получаем $2n$ линейных уравнений, которые образуют искомую линейную систему уравнений для всей КЭ–модели:

$$\sum_{i,j} k_{ij} r_i = \sum_i f_i, \text{ или } - [K] \{U\} = \{R\}. \quad (11.22)$$

При вычислении компонент матриц интегралы по объёму вычисляются разбиением объёма всей области Ω на объёмы конечных элементов и суммированием итоговых выражений. Организация цикла вычислений в КЭ–программе не отличается от той, что была выше описана для метода перемещений – в цикле по элементам происходит вычисление коэффициентов элементных матриц жёсткости и узловых нагрузок с суммированием элементных коэффициентов в глобальные узловые значения с учётом граничных условий и объёмных сил.

Пользуясь техникой МКЭ можно и в других областях физики, при наличии вариационной формулировки задачи, построить процедуру численного решения [МитчелУэйт].

11.5. Численное интегрирование по элементу

Интеграл (11.20) в общем случае вычисляется численно. В формулах приближённого численного интегрирования составляется интегральная сумма, использующая значения подынтегральной функции в заданных точках области ("точки квадратуры") и некоторые весовые множители. Эти квадратурные формулы "типа Гаусса" (см., например, [Никифоров]) в случае определённых интегралов по 1–мерной области (отрезок) имеют вид

$$\int_a^b f(\xi) \rho(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^m c_k f(\xi_k). \quad (11.23)$$

В них коэффициенты взяты такими, что формула точна для полиномов степени $2n-1$, аппроксимирующих функцию на отрезке. Точки квадратуры отвечают корням полинома степени n из некоторой системы полиномов, ортогональных на отрезке $[a,b]$ с весом $\rho(\xi)$. В МКЭ используется гауссова квадратура, которая в одномерном случае сводится к –

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^m c_k f(\xi_k) \quad c_k = \frac{2}{(1-\xi_k^2)(P'_k(\xi_k))^2}, \quad m=1, 2, \dots$$

где m значений аргумента ξ_k суть корни полинома Лежандра $P_n(\xi)$. Эти полиномы ортогональны с весом 1.

При 1–мерном интегрировании на отрезке можно взять две точки вычисления функции, в этом случае говорят о *двухточечном* интегрировании. Может применяться также

одноточечное интегрирование – т.е. по формуле трапеций. В многомерном случае разбиение по точкам интегрирования берётся вдоль каждого измерения, например, в случае 2–мерного 4–угольного элемента обычно используется (2×2) интегрирование, по 2 точки на измерение. В нелинейном случае интеграл вида (13.7) (см. ниже) в процессе решения преобразуется к выражению вида (11.23), аппроксимируемому суммой

$$\{F\} = \sum_{i=1}^{2n} \omega_i [\mathbf{B}(\xi_i, \eta_i)]^T \{\sigma(\xi_i, \eta_i)\} u(\xi_i, \eta_i) \|\mathbf{J}(\xi_i, \eta_i)\|,$$

где весовые коэффициенты $\omega_i = 1$, \mathbf{J} – якобиан преобразования к локальным координатам $(x, y) \rightarrow (\zeta, \eta)$, а суммирование проводится по значениям локальных координат в 4–х точках элемента, $i=1, \dots, 2n$, n – размерность задачи. В 2–мерном случае точки интегрирования:

$$(\xi_i, \eta_i) : (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}); (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}); (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \quad (11.24)$$

11.6. МКЭ как метод взвешенных невязок

Приведённые выше два способа дискретизации уравнений равновесия могут быть обобщены в виде формальной процедуры МКЭ-дискретизации *непосредственно из дифференциальных уравнений задачи*. Существенные преимущества такого метода состоят в том, что:

а) исчезает необходимость в явной формулировке эквивалентной задачи минимизации функционала или физического принципа (в МДТТ – функционал потенциальной энергии или условие равновесия) и поэтому –

б) метод может быть формально распространён на решение уравнений, для которых такой функционал или принцип не существует.

Для аппроксимации решения вне дискретных точек используются введённые выше базисные функции.

Рассмотрим общую задачу приближенного решения системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, которым должна удовлетворять неизвестная функция или набор функций u (компоненты вектора) в области Ω . Линейность существенна для формулировки метода в замкнутой форме. Запишем уравнения в символическом виде (9.1) как

$$A(u)=0, \quad x \in \Omega,$$

где A – линейный оператор, содержащий также правую часть уравнения (9.1). Приближённое решение $u^*(x)$ ищется в дискретных узлах, удовлетворяет краевым условиям на границе $\partial\Omega$ и путём интерполяции распространяется на всю область Ω . Запишем его в общей форме (11.10) как разложение по некоторой системе аппроксимирующих функций с неизвестными пока коэффициентами:

$$u^*(x) = [N(x)]\{d\}. \quad (11.25)$$

Не зная точного решения, мы не можем определить погрешность приближения $\|u^* - u\|$, и наилучшим приближённым решением полагается то, которое даёт во всех точках области Ω наименьшую норму *невязки* $R(u^*)$, т.е. величину отклонения

$$\|R(u^*)\| = \|A(u^*) - A(u)\| = \|A(u^*)\|.$$

Это допустимо, если существует непрерывная зависимость решения от аргументов. Если функция невязки $R(u^*(x))$ тождественно равна нулю всюду в области Ω , то очевидно также, что будут нулевыми и скалярные произведения

$$\int_{\Omega} \omega(x)R(u^*(x))d\Omega = \int_{\Omega} \omega(x)A(u^*(x))d\Omega = 0, \quad (11.26)$$

где $\omega(x)$ – некоторая функция координат. Это соотношение можно использовать для построения приближённого решения по причине справедливости, при определённых условиях, обратного утверждения, родственного основной лемме вариационного исчисления: если для семейства непрерывных функций $\omega(x)$, удовлетворяющих определённым условиям, выполнено (11.26), то непрерывная функция $R(u^*(x))=0$ на области Ω , т.е. $u^*(x)$ будет решением исходного уравнения. Здесь равенство нулю понимается в приближённом смысле, поскольку количество базисных функций в разложении (11.25) для получения приближённого решения с формально сколь угодно высокой точностью в большинстве практически важных случаев было бы сколь угодно большим.

В линейном пространстве функций, образующих решение линейного уравнения (9.1), приближённое решение можно толковать как конечномерный образ, *проекцию* решения исходного дифференциального уравнения при отображении этого бесконечно-мерного пространства на конечномерное пространство аппроксимирующих функций, натянутое на некоторый конечный базис. Наиболее удобными для аппроксимации оказываются полиномиальные функции. Как отмечалось ранее, методы типа МКЭ или МКО, в которых с сеточным разбиением можно связать конечномерное пространство аппроксимирующих функций, называются в отечественной литературе также проекционно-сеточными [Марчук]. Если аппроксимирующие (базисные) функции (11.25) в соотношении (11.26) совпадают с семейством функций $\omega(x)$: $\omega_i = N_i$, то (11.26) можно интерпретировать как ортогональность вектора невязки аппроксимирующему пространству – с точки зрения аппроксимации решения в конечном подпространстве с данным базисом вектор невязки не должен иметь в нём существенной компоненты. Подробнее о вычислительно-математических основах МКЭ можно прочитать, например, в [Митчел-Уэйт], [Стрэнг Фикс], [Оден] и ряде других книг.

Пусть число неизвестных величин (размер) вектора $\{d\}$ равно n , тогда, построив базис из n линейно независимых аппроксимирующих функций ω_i , можно им аппроксимировать искомое решение в виде (11.25). Далее, можно записать n независимых равенств вида (11.26) для каждой функции базиса ω_i . После подстановки в (11.26) аппроксимации (11.25) получим систему n (и не более) независимых алгебраических уравнений

$$\int_{\Omega} \omega(x)R(u^*(x))d\Omega = \int_{\Omega} \omega_i A(u^*(x))d\Omega = \int_{\Omega} \omega_i A([N]\{d\})d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11.27)$$

из которой может быть найдена дискретная функция $\{d\}$. Т.к. оператор A – линейный, то $A([N(x)]\{d\}) = [A]\{d\} - \{F\}$, и система алгебраических уравнений будет линейной:

$$\int_{\Omega} \omega_i A([N]\{d\})d\Omega = \left(\int_{\Omega} \{\omega_i\} [A] d\Omega \right) \{d\} - \int_{\Omega} \{\omega_i\} \{F\} d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.28)$$

Здесь в квадратные скобки заключена матрица, состоящая из известных (непосредственно вычисляемых) величин. В случае линейного оператора A алгебраические соотношения для получения коэффициентов в уравнении (11.27) будут аналогичны рассмотренным выше для задач механики.

Нетрудно видеть, что описанные формальные манипуляции весьма похожи на те, что проводились при формулировке принципа виртуальных перемещений. Уравнению (11.26) в случае механики может быть придан физический смысл – это соотношение (4.15), т.е. виртуальная работа приложенных сил. После интегрирования по частям, в упругом случае, может быть также получен полный аналог уравнения (11.22), дискретного аналога

принципа минимума потенциальной энергии. В неупругом случае уравнение (11.28) и принцип виртуальной работы сохраняют силу, в отличие от принципа минимума потенциальной энергии. (Здесь можно также усмотреть параллель с основным предположением метода перемещений – равенства работ узловых и распределённых сил на виртуальном перемещении. Отметим, что с помощью введённых базисных функций метод перемещений может быть сформулирован сразу для всей расчётной области, но рассмотрение отдельных конечных элементов содержит в себе также алгоритм вычислений.) Соотношение вида (11.26) будет использовано при получении схемы пространственной аппроксимации уравнений динамики деформируемого тела.

Рассмотренный общий метод называется *методом взвешенных невязок*, если функции ω_i интерпретировать как весовые функции. Выбор различных весовых функций приводит к различным методам приближённого решения (см. [Митчел Уэйт] и др.). В частности, когда $\omega_i = N_i$, т. е. в качестве весовой функции выбирается определённая базисная функция МКЭ, с помощью которой аппроксимируется решение, получим широко распространённый *метод Бубнова–Галеркина*, к которому сводятся вышеприведённые процедуры дискретизации МКЭ для МДТТ.

При использовании соотношений (11.27), задающих процедуру пространственной дискретизации, видны основные, уже знакомые, особенности процедуры метода.

Во–1 (в предположении, что границы между элементами (ячейками сетки) не дают никакого вклада), интегралы могут быть вычислены для каждого элемента независимо с последующим их независимым суммированием (процедура построения матрицы алгебраической системы).

Во–2, в случае финитных аппроксимирующих функций, в частности, пирамидальных базисных функций, описанных выше, результирующая система уравнений будет иметь очень разреженную матрицу, так как влияние каждой узловой переменной распространяется только на элементы, примыкающие к данной узловой точке.

Продолжением достоинств служат, как известно, недостатки. В данном случае недостаток универсального метода взвешенных невязок состоит в том, что дифференциальный оператор A и отвечающий ему интеграл в (11.28) могут содержать производные более высоких порядков, чем функционал вида рассмотренной выше механической работы. Поэтому в общем случае при получении матрицы системы может оказаться необходимым обеспечить выполнение условий непрерывности градиентов и применять функции формы второго порядка, т.е. нелинейные. Это обстоятельство существенно, так как оно ограничивает выбор функций формы и тем самым может вызвать формальные и вычислительные трудности. Один из способов понижения максимального порядка производной состоит в проведении в интеграле (11.28) интегрирования по частям, как в примере, рассмотренном ниже. Это позволяет, например, для уравнений второго порядка строить расчётную схему, используя линейные или полилинейные конечные элементы.

11.6.1. Пример: дискретизация уравнения нестационарной теплопроводности

Для иллюстрации общих формулировок рассмотрим их применение к нестационарному квазилинейному уравнению теплопроводности. В таком виде процедура реализована в двумерном коде HEFEST [HEFEST] и его трёхмерном аналоге коде POLYFEM, разработанных в ИБРАЭ РАН. Различие между 2–мерным и 3–мерным случаями не принципиально и прокомментировано ниже. Рассмотрим 3–мерный случай.

В декартовой системе $Oxyz$ уравнение имеет вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} + Q(x, y, z, t), \quad x \in \Omega. \quad (11.29)$$

Заданы граничные условия:

$$T(x,y,z,t) = T_b(x,y,z) \quad , \quad x \in \Omega_T, \quad (11.30)$$

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial n_x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial n_y} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial n_z} + a(x,y,z,t)T = b(x,y,z,t) \quad , \quad x \in \Omega_C \quad (11.31)$$

и начальные условия при $t = 0$:

$$T(x,y,z,0) = T_0(x,y,z) \quad , \quad x \in \Omega_i \quad . \quad (11.32)$$

Здесь n_x, n_y, n_z – компоненты единичного вектора внешней нормали к границе, ρ – плотность, c – теплоемкость, $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ – коэффициенты теплопроводности по направлениям осей координат для ортотропного материала, $Q(x,y,z)$ – мощность тепловыделения, a, b – параметры. Теплофизические коэффициенты могут зависеть от температуры, от координат и от времени. Если на данной граничной площадке не поставлены условия типа (11.30) или (11.31), то на ней автоматически выполнены адиабатические граничные условия, соответствующие соотношению (11.31), в котором $a=b=0$. Частные случаи граничных условий (11.31):

– условие по потоку (2-го рода):

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \equiv \lambda_x \frac{\partial T}{\partial n_x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial n_y} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial n_z} = F \quad , \quad (11.33)$$

– условие конвективного теплообмена с внешней средой температуры T_b (3-го рода):

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = H_b(T - T_b) \quad , \quad (11.34)$$

где $H=H(T,t)$ – коэффициент теплообмена,

– аналогично: условие радиационного теплообмена со средой температуры T_b :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \varepsilon \sigma_0(T^4 - T_b^4) = \varepsilon \sigma_0[(T + T_b)(T^2 + T_b^2)](T - T_b) \equiv H_r(T)(T - T_b) \quad , \quad (11.35)$$

где ε – излучательная способность, σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана. Линеаризованное радиационное г.у. может рассматриваться как температурно-зависимое условие 3-го рода.

При задании внешнего потока тепла следует выбирать правильный знак: входящий поток тепла всегда положителен. Это следует из того, что входящий поток тепла – это фактически двумерный источник, и этот источник должен нагревать, т.е. увеличивать температуру в окрестности данного участка границы. Соответственно, выходящий поток тепла отрицателен – он выносит тепло через границу и охлаждает.

Отметим, что взятое для примера уравнения нестационарно, в отличие от всего, рассмотренного выше. Важнейшая особенность процедуры дискретизации нестационарных уравнений состоит в том, что зависимость от времени, как правило, учитывается *независимо* от пространственной аппроксимации, т.е. в результате пространственной дискретизации мы придём не к алгебраической системе, а к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Её интегрирование по времени осуществляется через конечные разности, на 1-мерной сетке дискретного времени $[t_0, t_1, \dots, t_p]$ с шагом $\tau_k = t_k - t_{k-1}, k=1, \dots, p$.

Ещё одна очевидная особенность эволюционных (нестационарных) задач состоит в том, что рассматривается *эволюция* системы – последовательные состояния, в которых каждое новое определяется предыдущим. Очевидно, что такой расчёт не может быть параллелизован по времени – задача должна решаться последовательно. В случае теплопроводности неоднородность алгоритма решения нестационарного уравнения –

отсутствие "пространственно-временного конечного элемента" имеет математическую причину – характеристики уравнения теплопроводности комплексные. В случае динамики (волновые движения упругой среды) попытки построить такую схему известны (см. ссылки в [Срэнг-Фикс]), но они не привели к эффективному методу решения, и здесь используются другие методы.

Обобщённая (слабая) формулировка задачи

Для уравнения теплопроводности с произвольными температурно–зависимыми коэффициентами отсутствует потенциальная функция. В методе взвешенных невязок приближённое решение дифференциального уравнения ищется в более общем классе функций, называемых также *обобщёнными* (в зарубежной литературе: "слабое решение"). Функцию, которая удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению в форме (9.1)

$$Au=F \quad (u=u(x), x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2), \quad (11.36)$$

называют *классическим* решением, в отличие от *обобщенного (слабого, weak)* решения [МитчУэйт], [Hughes] для которого полагается выполненным только соотношение вида (11.28)

$$(Au, \omega) = (F, \omega) \quad (u=u(x), x \in \mathbb{R}^2), \quad (11.37)$$

где функция $\omega \in X$ принадлежит некоторому семейству допустимых функций, и обращается в нуль на границе области Ω . Здесь скалярное произведение (11.37) определяется как интеграл по области Ω :

$$(F, \omega) = \int_{\Omega} F(x, y, z) \omega(x, y, z) d\Omega.$$

В соответствии с этим определением, обобщённым решением уравнения (11.29) будет функция $T(x, y, z)$, такая, что для любой функции $\omega(x, y, z) \in X$ из некоторого пространства пробных функций X выполнено равенство:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \omega(x, y, z) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} + Q(x, y, z, t) \right) \omega(x, y, z) d\Omega \quad (11.38)$$

Функции $\omega(x, y, z) = 0$ на границах с условиями первого рода. Они удовлетворяют определённым требованиям гладкости и не зависят от времени.

Как отмечалось выше, с вычислительной точки зрения наиболее полезная обобщённая форма задачи получается после интегрирования (11.38) по частям, что позволяет снизить требования к дифференцируемости функций. В нашей задаче тогда потребуется существование только первых производных.

Переход к приближенному решению преобразованного уравнения (11.38), как и в задаче статики, осуществляется разложением $T(x, y, z)$ по конечному набору функций $N_i = N_i(x, y, z)$ из некоторого пространства финитных базисных функций $\{N_i\}$, $i = 1, \dots, n$, заданных каждая в окрестности одной точки из некоторого конечного множества n точек – узлов разбиения. Носители этих функций (совокупности конечных элементов, приписанные к определённым узлам) покрывают всю расчётную область. Условие (11.37) для данного конечного набора функций $\{N_i\}$ выполняется в пределах некоторой точности аппроксимации. Функции N_i строятся такими, что выполнено соотношение вида (11.10) :

$$T(x, y, z, t) \approx \tilde{T}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) T_i(t) \equiv \mathbf{N} \mathbf{T} \equiv \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{T}\}, \quad (11.39)$$

где введена матрица–вектор базисных функций и вектор температур в узлах, независимых переменных задачи:

$$\mathbf{N}=\{N_i(x,y,z)\} , \quad \mathbf{T}=\{T_i(t)\} .$$

Т.к. температура – скаляр, размерность вектора узловых значений (количество степеней свободы) = n – количеству узлов.

Метод Бубнова–Галёркина

Рассмотрим процедуру дискретизации. Интегрирование по частям для интеграла по области Ω с границей $\partial\Omega$ основано на формуле производной произведения функций. Частные производные по координатам объединяются в вектор градиента скалярной функции с помощью оператора набла. Интегрирование по объёму и применение формулы Гаусса-Остроградского даёт соотношения:

$$\int_{\Omega} (\nabla\psi)\varphi d\Omega + \int_{\Omega} \psi(\nabla\varphi) d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla\varphi\psi) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\varphi\psi)_n dA ,$$

откуда –

$$\int_{\Omega} \psi(\nabla\varphi) d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla\psi)\varphi d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\varphi\psi)_n dA . \quad (11.40)$$

Применяя это к уравнению (11.38), обозначим $\omega(x, y, z) = \psi(x, y, z)$, вторая скалярная функция φ – это одна из компонент потока тепла. Имеем:

$$\begin{aligned} \omega \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\omega \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}) - \frac{\partial \omega}{\partial x} \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x} (\omega F_x) - \frac{\partial \omega}{\partial x} F_x , \\ \omega \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}) &= \frac{\partial}{\partial y} (\omega \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}) - \frac{\partial \omega}{\partial y} \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial y} (\omega F_y) - \frac{\partial \omega}{\partial y} F_y , \\ \omega \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}) &= \frac{\partial}{\partial z} (\omega \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}) - \frac{\partial \omega}{\partial z} \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial z} (\omega F_z) - \frac{\partial \omega}{\partial z} F_z . \end{aligned} \quad (11.41)$$

Здесь в правом уравнении введены обозначения для компонент потока тепла F_x, F_y, F_z . Сумму этих уравнений можно с помощью оператора ∇ записать как:

$$\omega \nabla \mathbf{F} = \nabla (\omega \mathbf{F}) - (\nabla \omega) \mathbf{F} .$$

Интегрируя это уравнение по объёму, аналогично (11.40) и заменяя объёмный интеграл поверхностным, получим искомую подстановку для правой части уравнения (11.38):

$$\int_{\Omega} \omega \nabla \mathbf{F} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla (\omega \mathbf{F}) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \omega \nabla \mathbf{F} d\Omega = - \int_{\Omega} (\nabla \omega) \mathbf{F} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \omega \mathbf{F} dA .$$

Внося сюда определения компонент потока тепла по тождествам (11.41), можно уравнение (11.38) записать в виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \omega d\Omega &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \omega d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} Q(x, y, z) \omega d\Omega + \int_{\partial\Omega} \omega \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial n_x} dA_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial n_y} dA_y + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial n_z} dA_z \right) \end{aligned} \quad (11.42)$$

Здесь скалярное произведение потока тепла на элемент поверхности интегрирования заменено на его формальное выражение, которое при интегрировании по поверхности не

используется, т.к. выражается через граничное условие вида (11.31) с нормальной компонентой потока тепла, которая умножается просто на площадь:

$$\int_{\partial\Omega} \omega \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial n_x} dA_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial n_y} dA_y + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial n_z} dA_z \right) = \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \omega dA = \int_{\partial\Omega_F} H_b (T - T_b) \omega ds + \int_{\partial\Omega_F} F_b \omega dA \quad (11.43)$$

Символ dA обозначает элемент поверхности, а поверхность задания гран. условий разбита на две части (возможно, пересекающиеся), задаваемые, соответственно, на участках границы $\partial\Omega_C$ и $\partial\Omega_F$, отвечающих потоковым и температурно-зависимым конвективным г.у., в число которых включены радиационные:

$$\partial\Omega = \partial\Omega_C \cup \partial\Omega_F.$$

Замечание относительно двумерных задач. Запись интеграла (11.42) для плоской задачи теплопроводности формально отличается только отсутствием слагаемых с производными вдоль z -направления. В случае осесимметричной постановки задачи, наряду с декартовой вводится система цилиндрических координат с осью, проходящей через нулевую точку декартовой системы. Координаты в двух этих системах связаны соотношением (5.8), в котором обозначения координат в декартовой системе – цифровые. Для случая изотропного коэффициента теплопроводности нетрудно убедиться, например, применяя соотношения для производных вида (11.15), отнесённые к преобразованию вида (5.8), либо переходя в каждой точке цилиндрической координатной системы к местной декартовой системе координат, что интеграл (11.42) сведётся для системы цилиндрических координат (r, z) с отсутствующей зависимостью от угла к выражению вида

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \omega d\Omega = -\lambda \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \omega(r, z) 2\pi r dr,$$

т.е. переход к цилиндрической геометрии интегрирования с учётом только радиальной и осевой зависимостей изменит только элемент интегрирования, оставив подинтегральное выражение таким же, как в 2D плоском случае.

Отметим, что в данном случае введённая декартова, как и цилиндрическая, системы координат – глобальные, и используются не для записи дифференциального уравнения, а только для вычисления интеграла, пользуясь трансляционной симметрией – вдоль третьего измерения в плоском случае, или вдоль окружности – в случае осевой симметрии. Подинтегральное выражение в изотропном случае формально не меняется при переходе к зависимости от радиуса вместо декартовых координат на плоскости, меняется только элементарный объём интегрирования. При последующей дискретизации, в которой вводятся базисные функции, построенные на конечных элементах, по которым фактически, с помощью квадратурных формул, вычисляются интегралы, элементы следует представлять в виде колец четырёхугольного (треугольного) сечения. Их сечения не отличаются от сечения в плоской задаче. Объём кольца равен произведению площади сечения на окружность, описанную центром тяжести сечения (теорема Кёнига), он отличается от объёма плоского КЭ, но соотношения вида (11.5) между локальными и глобальными координатами, аппроксимация (11.7) и соотношения (11.15) между производными по глобальным и локальным координатам в конечном элементе формально не изменятся в случае описываемых здесь простейших четырёхугольных изопараметрических КЭ первого порядка. Эти выражения аналогичны и отчасти иллюстрируют сделанное ранее замечание относительно очень небольших формальных отличий двумерного плоского и осесимметричного случаев при вычислении интеграла (10.23) работ внутренних сил.

Вернёмся к методу Бубнова-Галеркина, в котором пробными функциями в функционале (11.42) взяты базисные функции N_i , по которым производится разложение

решения. Примером служат пирамидальные функции, рассмотренные выше. Они линейно независимы и образуют базис в пространстве "кусочно–3–линейных" функций, заданных на Ω , т.е. интерполяций через 3–линейные функции форм вида (11.8). Подставим вместо искомой функции её приближённое выражение в виде разложения вида (11.10)–(11.11). Условие (11.37), сформулированное для любой функции из пространства пробных функций N_i , даёт при последовательной подстановке $\omega(x,y,z)=N_i(x,y,z)$, $i=1,\dots,n$, n линейно независимых соотношений соответственно количеству функций базиса. Учитывая (11.43), получим n уравнений:

$$\int_{\Omega} N_k \rho c \{N\} \frac{\partial \{T\}}{\partial t} \omega d\Omega = - \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_k}{\partial x} \lambda_x \frac{\partial \{N\}}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial y} \lambda_y \frac{\partial \{N\}}{\partial y} + \frac{\partial N_k}{\partial z} \lambda_z \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right) d\Omega \right\} \{T\} +$$

$$+ \int_{\Omega} N_k Q d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} N_k f_n dA - \int_{\partial\Omega_c} N_k H T_b dA - \left\{ \int_{\partial\Omega_c} N_k H_b \{N\} dA \right\} \{T\}, \quad (11.44)$$

где f_n – проекция потока тепла на нормаль к элементу границы $\partial\Omega_f$ потоковых граничных условий.

Введём матрицы: проводимости \mathbf{H} , теплоемкости \mathbf{C} и вектор тепловых нагрузок \mathbf{F} :

$$\mathbf{H} \equiv [\mathbf{H}] = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_k}{\partial x} \lambda_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial y} \lambda_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial N_k}{\partial z} \lambda_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega_c} N_k H_b N_i ds \quad (11.45)$$

$$\mathbf{C} \equiv [\mathbf{C}] = \left[\int_{\Omega} N_k \rho c N_i dx \right], \quad (11.46)$$

$$\mathbf{F} \equiv \{F_k\} = \left\{ \int_{\Omega} N_k Q dx - \int_{\partial\Omega_f} N_k f_n dA - \int_{\partial\Omega_c} N_k H_b T_b dA \right\} \quad (11.47)$$

Система n дифференциальных уравнений первого порядка для вектора $\mathbf{T} = \{T(t)\}$ температур в узлах расчетной сетки запишется в виде

$$[\mathbf{C}] \frac{d\{T\}}{dt} + [\mathbf{H}] \{T\} = \{F\}. \quad (11.48)$$

Матрицы и объемные интегралы (11.46)–(11.47), как и в описанных ранее процедурах, строятся и вычисляются сначала для каждого элемента с помощью элементных формул типа (11.22) и затем суммируются. Интегрирование по элементам производится с помощью квадратурных формул Гаусса (11.22) по восьми точкам $2 \times 2 \times 2$ для 3–мерных элементов и по 4–м точкам 2×2 в 2–мерном случае. Температурные зависимости свойств берутся по интерполированному значению температуры в гауссовских точках интегрирования. Обратив матрицу теплоёмкости, уравнение можно проинтегрировать по явной схеме, при соблюдении соответствующего ограничения на шаг по времени.

Вследствие квадратичной зависимости условия устойчивости явной схемы от шага по пространству, уравнение теплопроводности практически всегда интегрируется неявно. Для улучшения сходимости итерационного процесса в случае нелинейных задач часто используется матрица теплоёмкости, в которой значения её элементов полагаются приписанными к одному узлу – для данной строки m матрицы значения в узлах, отличных от узла номер m , суммируются, сумма приписывается узлу m , а прочие значения обнуляются (lumped matrix). В случае плавной зависимости от температуры это практически не оказывает влияния на вычисляемое нестационарное поле температуры. В задачах с фазовыми переходами (первого рода), которые часто решаются введением эффективной теплоёмкости большой величины на малом температурном интервале, расчёт с сосредоточенной узловой теплоёмкостью требует внимания при задании сетки и интервала превращения. Это замечание, в принципе может быть отнесено и к расчётам с

фазовыми превращениями второго рода, где скачок теплоёмкости (лямбда-точка) свойственен самой системе (хотя здесь перепады обычно гораздо меньше).

При расчете нестационарной температуры система уравнений (11.48) численно интегрируется по времени с некоторым шагом. Дискретизация по времени приводит к совокупности стационарных задач для функции $T(x, y, z, t_{k+1})$ с известным предыдущим состоянием $T(x, y, z, t_k)$ и нагрузками и граничными условиями, заданными во все моменты $[t_0, t_1, \dots, t_p]$. Температуры в узлах на $j+1$ -м шаге находятся по двухслойной однопараметрической схеме с весом α , безусловно устойчивой при $\alpha > 1/2$:

$$C_{j+\alpha} (\mathbf{T}_{j+1} - \mathbf{T}_j) / \tau_{j+1} + \mathbf{H}_{j+\alpha} \mathbf{T}_{j+\alpha} = \mathbf{F}_{j+\alpha}$$

где для некоторого α из интервала $[0, 1]$ по определению –

$$t_{j+\alpha} = t_j + \alpha \tau_j, \quad \mathbf{T}_{j+\alpha} = (1 - \alpha) \mathbf{T}_j + \alpha \mathbf{T}_{j+1}, \quad (11.49)$$

$$C_{j+\alpha} = C_{j+\alpha}(T_{j+\alpha}, t_{j+\alpha}), \quad \mathbf{H}_{j+\alpha} = \mathbf{H}_{j+\alpha}(T_{j+\alpha}, t_{j+\alpha})$$

В случае чисто неявной схемы $\alpha = 1$. Вводя в этом случае температуру на следующем шаге, получим систему уравнений в виде

$$\mathbf{K}^* \mathbf{T}_{j+1} \equiv (1/\tau_j C_{j+1} + \mathbf{H}_{j+1}) \mathbf{T}_{j+1} = \mathbf{F}_{j+1} + (C_{j+1}/\tau_{j+1}) \mathbf{T}_j \equiv \mathbf{F}^* \quad (11.50)$$

В линейном случае матрицы \mathbf{K}^* , \mathbf{F}^* не зависят от температуры и формальное решение –

$$\mathbf{T}_{j+1} = (\mathbf{K}^*)^{-1} \mathbf{F}^*$$

Решение нестационарной задачи теплопроводности сводится к решению системы (11.50) в последовательные моменты времени.

Приращение температуры на шаге обычно на два-три порядка меньше, чем значение самой температуры, что означает соответствующую потерю точности аппроксимации за счёт погрешностей округления при вычислении собственно температуры. Для снижения их влияния уравнение (11.48), как правило, записывается для приращения на шаге:

$$[C(T^{(n+\alpha)})] \frac{\Delta T^{(n+1)}}{\Delta t^{(n+1)}} + [\mathbf{H}] \{\Delta T^{(n+1)}\} = \{F(T^{(n+\alpha)})\} - [\mathbf{H}] \{T^{(n)}\}. \quad (11.51)$$

где искомое приращение относится к вычисленным узловым температурам на предыдущем шаге (функции узла i) -

$$\Delta T^{(n+1)}(i) = T^{(n+1)}(i) - T^{(n)}(i), \quad (11.52)$$

а температурно-зависимые коэффициенты вычисляются для значений экстраполированной температуры $T^{(n+\alpha)}$. Аналогичная процедура используется и при решении квазистатических задач механики, в которых явная зависимость от времени в уравнении отсутствует, но значения нагрузок изменяются от шага к шагу.

12. Нелинейные задачи МДТТ

В рассмотренной выше процедуре КЭ–дискретизации алгебраические уравнения относительно узловых перемещений линейны, т.к. линейными были исходные уравнения и все промежуточные соотношения. Нелинейность в исходной постановке задачи возникает вследствие конечности деформации, вычисляемой по перемещениям, и нелинейности определяющего закона. Далее рассмотрены подходы к численному решению таких задач.

12.1. Формулировки для нелинейных задач. Последовательное нагружение

Все схемы численного решения задач МДТТ, основанные на перемещениях, требуют дискретного выражения деформаций и напряжений через перемещения. В использованных выше способах неявно предполагалось:

- а) процедура вычисления компонент тензоров деформаций и напряжений не зависит от достигаемого состояния равновесия (от перемещения относительно исходного состояния);
- б) определяющее соотношение – закон линейной упругости (Гука).

Оба этих предположения могут быть в общем случае нарушены: а) получаемые перемещения могут быть настолько велики, что уже нельзя не учитывать вращение тела при выражении внутренних сил через деформации (и затем – через перемещения), и условие малости конечной деформации, необходимое для использования тензора малых деформаций Коши, может не выполняться; б) линейная упругость обычно имеет место только при очень малых деформациях.

Линейность играет принципиальную роль в единственно существующем вычислительном аппарате сведения уравнений в частных производных к алгебраическим уравнениям. В процедурах численного решения алгебраических систем линеаризация тоже имеет принципиальное значение. Поэтому излагаемые ниже примеры подходов к решению нелинейных задач МДТТ фактически являются способами линеаризации исходных нелинейных соотношений. Эта линеаризация осуществляется по-разному в случаях геометрической и физической нелинейности и будет рассмотрена по-отдельности. Пока предположим, что можно использовать тензор малых деформаций, что будет продемонстрировано позже. Тогда можно ввести матрицу деформаций в том виде, как она приведена выше или аналогичном при других функциях формы.

Метод минимизации потенциальной энергии не может применяться в общем случае физически нелинейной задачи, т.е. при неупругом деформировании (зависящем от пути нагружения). В процедурах же методов перемещений и взвешенных невязок в случае неупругости соотношения для возможной работы (уравнение (10.23) и общая форма (11.27)) не зависят от определяющего соотношения. В методе перемещений условие равенства работ узловых и распределённых сил в КЭ можно представить в виде:

$$\{\Delta^{(e)}\}^T \{F\}_{in}^{(e)} = \int_{V_e} \{\delta \epsilon^{(e)}\}^T \{\sigma^{(e)*}\} dV = \int_{V_e} \{\Delta^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T \{\sigma^{(e)}\} dV = \{\Delta^{(e)}\}^T \int_{V_e} [B^{(e)}]^T \{\sigma^{(e)}\} dV \quad (12.1)$$

Виртуальные перемещения и деформации по-прежнему можно считать достаточно малыми. Как и ранее, отсюда получается элементное уравнение, связывающее внутренние узловые силы и перемещения:

$$\int_{V_e} [B^{(e)}(u)]^T \{\sigma^{(e)}(\epsilon(u))\} dV = \{F\}_{in}^{(e)}, \quad (12.2)$$

где тензор напряжений может зависеть от деформации достаточно общим образом.

Условие глобального равновесия и требование совместности узловых перемещений остаются без изменений. После процедуры поэлементного объединения и формирования глобальных матриц получается система алгебраических уравнений относительно узловых перемещений, которая будет нелинейной:

$$\int_{\Omega} [B(U)]^T \{\sigma(\varepsilon(U))\} d\Omega = \{R\} \quad (12.3)$$

Это же соотношение получается применением метода взвешенных невязок. Здесь введены глобальные вектор перемещений, матрица деформаций, вектор узловых сил. В символической форме –

$$\Sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{R} \quad \text{или} \quad \Sigma(\mathbf{u}) - \mathbf{R} = 0 \quad (12.4)$$

Если функции $B(u)$ и $\sigma(\varepsilon(u))$ известны, решение получаемой системы нелинейных алгебраических уравнений можно провести методом последовательных приближений. Основная трудность состоит в приведении системы уравнений (12.3) при заданном нелинейном поведении системы к виду, допускающему решение стандартными методами вычислительной линейной алгебры. При физической нелинейности явная зависимость напряжения от достигнутой деформации $\sigma(\varepsilon(u))$ в форме закона нелинейной упругости далеко не всегда существует – например, в обычно применяемой инкрементальной теории пластичности определяющее соотношение связывает не абсолютные величины тензоров, а их приращения, что требует соответствующей переформулировки уравнения (12.3). Специфика физически нелинейного деформирования определяет подход к решению задачи, который ниже изложен на примере "базовой" нелинейности – модели упруго-пластически деформируемого тела, в котором при вычислении напряжений по деформациям на шаге используется аналог закона Гука, получаемый путём линеаризации неупругого закона.

При конечных деформациях неточны используемые выше простые формы тензоров деформаций и напряжений. Использование более общих определений сопряжено с рядом дополнительных трудностей [Malvern], [Коробейников]. Здесь линеаризация связана со сведением процесса деформирования, трактуемого как геометрическое преобразование, к кусочно-линейному с точки зрения преобразования. Как упоминалось ранее, статическая задача, если она нелинейная, может решаться поэтапно: процесс нагружения при вычислениях разбивается на последовательные шаги $n=1, \dots, n_m$, на которых состояние меняется мало. Вводится изменяющийся дискретно параметр нагружения, обычно, имеющий размерность времени: $t_m = t_0 + \Delta t_1 + \dots + \Delta t_m$. На каждом из шагов деформирование должно быть мало с точки зрения некоторых критериев, с тем чтобы быстро и надёжно получать решение алгебраической системы на каждом шаге. Статическая задача решается как *квазистатическая*.

В случае более чем одного шага по времени (по нагружению) на последующих шагах после первого нагрузка будет прикладываться к уже нагруженной конструкции, что учитывается в системе уравнений (12.3) на уровне основного соотношения (11.27) метода взвешенных невязок. На $n+1$ -ом шаге в каждом узле будут приложены: силы $\{F^n(X^n)\}$ с n -го шага, вычисленные на конфигурации $\{X^n\}$, приращение внутренних сил, отвечающее неизвестным перемещениям на новом шаге $\{U^{n+1}\}$, и уравновешивающие их внешние силы $\{R\}^{n+1}$ при новом значении параметра нагружения:

$$\{F^n(X^n)\} + \int_{\Omega} [B(X^n)]^T \{\sigma^{n+1}(\varepsilon(U^{n+1}))\} dV = \{R\}^{n+1} \quad (12.5)$$

Зависимость напряжений и деформаций в уравнении (12.5) от решения $u(x)$ может быть связана: (а) с заметным изменением геометрии при последовательном деформировании,

что должно быть учтено при построении матрицы деформации и в тензоре напряжений; (б) с определяющим законом, связывающим компоненты тензоров напряжений и деформаций. С определённой точностью геометрические и физические факторы (а) и (б) могут быть введены в расчёт в рамках используемого приближения малых деформаций, причём, соответствующие алгоритмы могут строиться независимо. Далее рассмотрен сначала способ учёта геометрической нелинейности, затем – физической, на примере упруго-пластического материала.

12.2. Геометрическая нелинейность: конечные деформации

Под конечными деформациями в механике деформируемого тела понимаются такие движения, для количественного описания которых при одношаговом расчёте состояния равновесия под приложенной нагрузкой следует привлекать общий нелинейный тензор деформаций. Но изменение конфигурации на малом шаге относительно исходной системы может быть учтено в пошаговом процессе вычислений последовательных НДС путём соответствующего преобразования исходной системы отсчёта на следующем шаге по нагружению, т.е. расчётной сетки. Это позволяет упростить расчётную схему в целом – вместе с сеткой преобразуются и заданные на ней величины, тогда изменения, связанные с геометрией, будут на каждом малом шаге последовательного расчёта относительно малыми, и могут учитываться в приближении малых деформаций. Изменение метрических соотношений в конечном элементе учитывается в матрице деформаций при вычислении пространственных производных на текущем шаге по времени. Деформирование данного объёма часто сопровождается его поворотом, который суммарно может быть не малым, например, при изгибе, и тоже учитывается при вычислениях на каждом шаге.

В англоязычной литературе подобный способ описания называется "updated Lagrangian" ("текущий лагранжев"). Ниже описывается простой способ его реализации в численном расчёте. Обзор геометрических понятий и определений, связанных с описанием кинематики геометрически нелинейного деформирования, имеется, например, в книгах [Malvern], [Коробейников], [Поздеев].

12.2.1. Компоненты тензора напряжений в системе элемента и в лабораторной системе

На каждом лагранжевом шаге расчёта методом последовательных нагружений определяются – *обновляются*, координаты узлов по перемещениям, вычисленным непосредственно из решения построенной алгебраической системы:

$$\{X^{(n)}\} \rightarrow \{X^{(n+1)}\} = \{X^{(n)}\} + \{U^{(n+1)}\}. \quad (12.6)$$

По перемещениям с помощью матрицы деформаций определяются приращения тензоров деформаций, по которым находятся приращения тензоров напряжений $\Delta\sigma_{ik}^{(n+1)}$ и новые значения тензора напряжений (обновление тензора напряжений):

$$\sigma_{ik}^{(n+1)} = \sigma_{ik}^{(n)} + \Delta\sigma_{ik}^{(n+1)}. \quad (12.7)$$

Определение приращений тензоров напряжений базируется на некотором определяющем соотношении (или некоторой их совокупности), составляющих основу *модели материала*. Простейшая модель – линейно-упругая, рассмотренная выше, основанная на соотношениях закона Гука. В ней приращения напряжений в конечном элементе выражаются через приращения деформаций через соответствующую *матрицу упругости*. В случае физически нелинейного поведения материала такая матрица может быть построена путём соответствующей линеаризации, на основе соотношений модели

материала. Этот вопрос рассмотрен ниже по тексту. Здесь предполагается, что приращения напряжений некоторым образом определены.

После того, как на $n+1$ -м шаге определён новый тензор напряжений, задающий внутренние силы, и с ним – узловые силы на данном шаге, можно начинать следующий шаг по нагружению, т.е. обновлять нагрузки и строить новую матрицу жёсткости (если это предусмотрено на данном шаге). Рассмотрим подробнее процедуры обновления тензоров напряжений с точки зрения переменной геометрии конечного элемента.

Помимо деформирования конечный элемент может переместиться как целое и повернуться относительно неподвижной системы координат. Вместе с элементом должны "повернуться" и "деформироваться" компоненты тензора напряжений $\sigma_{ik}^{(n)}$, который вычислен на предыдущих шагах, безотносительно определяющего соотношения. Строго говоря, при больших деформациях следует использовать определение тензора напряжений в форме Пиолы-Кирхгофа (см. гл. 4). При малых деформациях поправки, связанные с преобразованием деформирования, часто малы относительно приращений компонент тензора напряжений, связанных с физикой (с определяющим соотношением), поскольку первые имеют порядок $\sigma_3 \epsilon_3$, а вторые – порядок $E \epsilon_3$, где E в упругом случае – модуль упругости, а при пластическом течении – модуль упрочнения. Максимальное главное напряжение σ_3 при пластическом течении имеет порядок предела текучести. Поэтому при упругих и малых пластических деформациях геометрическим эффектом деформации в изменении тензора напряжений можно, например, для металлов, пренебречь. Повороты же должны учитываться.

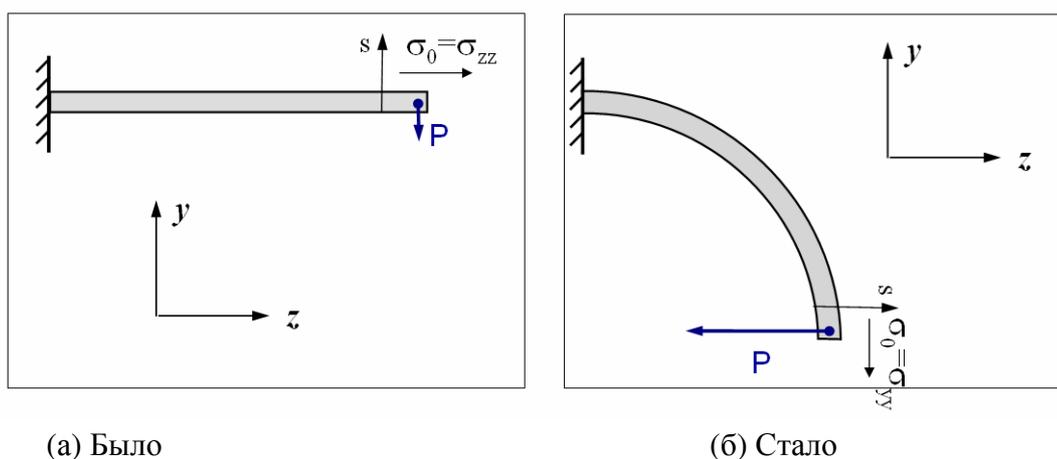


Рис. 12.1. Поворот локального напряжённого состояния вместе с элементом

Влияние вращения на вычисляемые в лабораторной системе координат компоненты тензора напряжений иллюстрирует рис.12.1. Пусть гибкая линейка (консоль) последовательно нагружается приложенной на конце возрастающей сосредоточенной силой. Рассматриваются нормальные напряжения при изгибе.

В начальный момент (рис.12.1а) линия изгиба горизонтальна и параллельна оси Ox лабораторной системы координат, и только вдоль этой оси имеется существенная компонента деформации $\epsilon_{zz} = \partial u_{zz} / \partial z$ (касательные напряжения при изгибе не рассматриваются). Ненулевая компонента тензора напряжений: $\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz} = \sigma_0$. Если элемент конструкции повернётся при деформировании, то его НДС повернётся вместе с ним. В случае поворота относительно оси Oz на 90° компоненты тензора напряжений *относительно лабораторной системы* изменятся (рис.12.1б): единственной ненулевой компонентой напряжений после поворота станет $\sigma'_{yy} = \sigma_0$.

Таким образом, даже при физически малых деформациях повороты могут оказаться не малыми, как, например, в упругих тонких стержнях, оболочках и т.п. Для уменьшения поворота до малой величины шаг по времени можно разделить на ещё более мелкие. Ниже рассмотрен случай, когда малы как повороты, так и деформации на шаге вычислений. В этом случае преобразования конфигурации линейны: как мы помним, существенное для вычисления компонент тензоров напряжений и деформаций движение элемента складывается из вращения и деформации. При этом, как следует из (2.31), малые изменения компонент тензора за счёт вращения и деформации могут учитываться независимо. На каждом малом шаге вычисляются (малые) деформации и повороты относительно предыдущего положения. Разделение процесса нагружения/деформирования на малые шаги позволяет учитывать при вычислениях изменения конфигурации, оставаясь в рамках линейного подхода. Этот простой способ представления конечного деформирования в численной модели очень удобен, хотя точность вычисления, вообще говоря, ухудшается по мере деформирования.

12.2.2. Поворот тензора напряжений

Напомним соотношения между поворотом и деформацией малого отрезка, задаваемого компонентами $\{dx_i\}$, при малом движении материального тела. Две близкие точки с координатами $\{x_i\}$ и $\{x_i+dx_i\}$ при малом движении переходят в точки $\{x_i^*\}$ и $\{x_i^*+dx_i^*\}$, где $x_i^*=x_i+u_i$. Поле вектора малых перемещений $\{u_i\}$ задаёт геометрическое преобразование исходной конфигурации в деформированную и изменение дифференциала координат, задаваемого точками $\{x_i, x_i+dx_i\}$. Изменение в первом приближении линейно:

$$dx_i^* - dx_i = du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \equiv B_{ik} dx_k .$$

Матрица градиентов деформаций B_{ik} описывает малую вариацию относительного положения точек и представим в виде суммы матриц малых преобразований:

$$B_{ik} = 1/2(u_{i,k} + u_{k,i}) + 1/2(u_{i,k} - u_{k,i}) \equiv \varepsilon_{ik} + \omega_{ik} ,$$

$$\varepsilon_{ik} \equiv 1/2(u_{i,k} + u_{k,i}) \quad - \text{ матрица малых деформаций,}$$

$$\omega_{ik} \equiv 1/2(u_{i,k} - u_{k,i}) \quad - \text{ матрица малых поворотов.}$$

Малый поворот, описываемый матрицей ω_{ik} , задаёт соответствующее преобразование векторных и тензорных величин в данной окрестности (данном КЭ). Для получения компонент тензора напряжений в конечном элементе относительно неподвижной системы координат следует повернуть, т.е. преобразовать тензор напряжений вместе с элементом. Формула преобразования компонент вектора (тензора первого ранга) при малом повороте элемента с точностью до первого порядка по изменениям координат имеет вид:

$$X_k^* = X_k + \omega_{ki} X_i = (\delta_{ki} + \omega_{ki}) X_i .$$

Преобразование компонент тензора второго ранга:

$$\begin{aligned} \sigma_{kp}^* &= (\delta_{ki} + \omega_{ki}) (\delta_{pj} + \omega_{pj}) \sigma_{ij} = (\delta_{ki} + \omega_{ki}) (\delta_{pj} \sigma_{ij} + \omega_{pj} \sigma_{ij}) = \\ &= (\delta_{ki} + \omega_{ki}) (\sigma_{pi} + \omega_{pj} \sigma_{ji}) = \sigma_{kp} + \omega_{ki} \sigma_{ip} + \omega_{pj} \sigma_{jk} + \omega_{ki} \omega_{pj} \sigma_{ji} \approx \\ &\approx \sigma_{kp} + \omega_{ki} \sigma_{ip} + \omega_{pj} \sigma_{jk} . \end{aligned} \quad (12.8)$$

Здесь опущено слагаемое второго порядка малости. Изменение компонент тензора при малом повороте равно $\omega_{ki} \sigma_{ip} + \omega_{pj} \sigma_{jk}$. Компоненты ω_{pj} вычисляются по перемещениям узлов элемента на шаге вычислений, так же как компоненты тензора деформаций.

Полное изменение компонент тензора напряжений относительно лабораторной системы на малом шаге по нагружению приближённо представимо в виде суммы изменений, связанных с деформированием (d), и связанных с поворотом (ω):

$\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^{(d)} + \Delta\sigma_{ij}^{(\omega)}$. Изменения, связанные с деформированием, учитываются только с точки зрения физического закона (определяющего соотношения). В линейризованной форме для малых приращений $\Delta\sigma_{ij}^{(d)} = C_{ijkl}\Delta\epsilon_{kl}$, и полное изменение –

$$\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^{(d)} + \Delta\sigma_{ij}^{(\omega)} = C_{ijkl}\Delta\epsilon_{kl} + \omega_{jk}\sigma_{ki} + \omega_{ik}\sigma_{kj}. \quad (12.9)$$

Условие применимости этих соотношений, т.е., условие малости вращения на шаге по нагружению, есть условие малости полного угла поворота φ : $\varphi \ll 1$. Это условие может быть связано не столько с погрешностью учёта поворота в (12.9), сколько с влиянием квадратичного слагаемого в общем определении тензора деформаций (2.12) – погрешности, связанные с его неучётом в тензоре деформаций Коши, вычисляемом на "повёрнутой" конфигурации, накапливаются при последовательном нагружении с поворотом, и даже в упругом случае (например, при изгибе: малые деформации, большие повороты) могут приводить к нефизическим результатам, т.к. в вычислениях невозможно отделить эффекты модели от физических эффектов. Более точные модели рассматриваются в рекомендованной литературе.

12.2.3. Производная по времени тензора напряжений

Для дальнейшего введём понятия скорости деформаций и "чисто деформационную" производную тензора по времени, которая в англоязычной литературе называется *коротационной* (corotational) – сопутствующей вращению. Определим массовую скорость \dot{u}_i в точке и скорость деформации $\dot{\epsilon}_{ik}$ относительно лабораторной системы во времени задачи простейшими соотношениями (см. обсуждение определений дифференцирования тензоров по времени в [Malvern], [Коробейников]):

$$\dot{u}_i = du_i / dt, \quad \dot{\epsilon}_{ik} = \frac{1}{2}(\partial\dot{u}_i / \partial x_k + \partial\dot{u}_k / \partial x_i). \quad (12.10)$$

Эти выражения пригодны и в случае динамического нагружения, когда массовые ускорения существенны. Элементарный объём может деформироваться по разному в разных направлениях, следовательно, главные оси тензоров деформации и скорости деформации, вообще говоря, разные. В лагранжевой системе отсчёта элемента изменение величины в нём, описываемое материальной (полной) производной по времени, включает физическое изменение (для тензора напряжений – это изменение за счёт нагружения) и изменение за счёт движения элемента, в нашем случае учитывается только изменение из-за вращения. Коротационная производная тензора напряжений по времени задачи исключает вращение, и она связана с полной производной соотношением

$$\sigma_{ij}^J = \frac{D\sigma_{ij}}{Dt} - \Omega_{jk}\sigma_{ki} - \Omega_{ik}\sigma_{kj}, \quad (12.11)$$

где Ω_{ij} – тензор угловой скорости, выражаемый через компоненты массовой скорости \dot{u}_i :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial\dot{u}_j}{\partial x_i}\right). \quad (12.12)$$

Величина σ_{ij}^J называется также *яумановой* (Jaumann) *производной* тензора напряжений σ_{ij} по времени (см. [Коробейников]). Фактически, это то изменение тензора за ед. времени, что связано с деформированием, и оно вычисляется по деформациям с помощью определяющего соотношения. Для обозначения производной тензора напряжений по Яуманну используют символы ∇ и J : $\sigma^{\nabla} \equiv \sigma^J$.

12.2.4. Обновление полного тензора напряжений. Давление и термдеформации

Приращение некоторой величины S на $n+1$ -м шаге Δt_{n+1} по времени (по нагружению) может быть записано через скорость её изменения:

$$\Delta S = \dot{S} \Delta t_{n+1} = S_{n+1} - S_n. \quad (12.13)$$

При квазистатическом нагружении производная по времени удобна для представления приращения на новом шаге. Скорость изменения тензора напряжений выражается в конечном элементе, преобразованном на шаге по нагружению, через скорости деформации с помощью определяющих соотношений. В упругом случае или в линеаризованной форме для случая неупругости –

$$\sigma_{ij}^J = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}. \quad (12.12)$$

Здесь C_{ijkl} – тензор модулей упругости или его аналог, $\dot{\epsilon}_{ik}$ – тензор скоростей деформаций:

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right). \quad (12.14)$$

Тензоры скоростей деформаций и вращений, $\dot{\epsilon}_{kl}$ и Ω_{ij} , вычисляются, используя элементы матрицы деформаций $[B]$, вид которой аналогичен приведённому в (10.17). В 4-узловом билинейном элементе компоненты градиента массовой скорости \dot{u}_i могут быть получены дифференцированием по времени, а затем по пространственным координатам соотношения (11.7) для перемещений. Тензор скоростей деформаций будет связан с узловыми величинами массовой скорости соотношением вида (11.11). Алгебраическая матрица *скоростей* деформаций будет состоять из производных функций форм и формально не будет отличаться от матрицы деформаций в статическом случае, поскольку выражения для градиентов перемещений и массовых скоростей полностью аналогичны:

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \dot{u}_i^{(k)},$$

Новый тензор напряжений вычисляется на каждом шаге по времени непосредственно по величине σ_{ij}^J (12.12) и "поворачивается" (напомним, что деформационная составляющая учитывается только в определяющих соотношениях):

$$\sigma_{ij}(t + \Delta t) = \sigma_{ij}(t) + C_{ijkl} d\epsilon_{kl} + \omega_{jk} \sigma_{ki}(t) + \omega_{ik} \sigma_{kj}(t). \quad (12.15)$$

При вычислении напряжений девиаторная и шаровая составляющие тензоров напряжений и деформаций связаны каждая своими соотношениями. Имеем по определению:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \epsilon_{ij} - 1/3 \epsilon, \quad p = -1/3 \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad \epsilon = \epsilon_{ij} \delta_{ij}. \quad (12.16)$$

В упругом случае связь между шаровыми и девиаторными составляющими тензоров:

$$p^J = -K \epsilon^J, \quad s_{ij}^J = 2G e_{ij}^J,$$

где K и G – объемный модуль и модуль сдвига. В случае нелинейного поведения материала определяющее соотношение на каждом шаге приводится к аналогичному виду, но с переменными коэффициентами. В приближении линейной упругости прирост давления вычисляется через приращение объемной деформации ϵ как:

$$\Delta p^{n+1} = -K \Delta \epsilon^{n+1}$$

При больших объёмных деформациях давление как функция объёма может быть вычисляться уравнению состояния через степень сжатия ("давление холодного сжатия"):

$$p^{n+1} = p(V^{(n+1)}/V^{(0)})$$

Если в рассчитываемом процессе существенно тепловое расширение, приращения термодформаций учитываются на каждом шаге по известному полю температуры в узлах. Новое НДС, включающее возможные термонапряжения, будет рассчитываться, исходя из полной деформации, как это рассмотрено в гл. 5.

Учёт теплового деформирования в квазилинейном приближении производится аддитивно, через термодформации (5.34), добавляемые при вычислении напряжений к механическим деформациям на шаге. Эти деформации в общем случае учитываются через уравнение состояния. Температура может также входить как фактор изменения коэффициентов определяющих соотношений материалов.

Итак, разбивая процесс деформирования на малые шаги, можно, с некоторой степенью точности, решать геометрически нелинейные задачи. В технических расчётах упругих задач поворот элемента часто не учитывается, т.к. полная упругая деформация на совокупности шагов для обычных ("гипоэластических") материалов типа металлов всегда мала геометрически, мала и поправка на поворот. Исключения могут составить "длинные" или тонкостенные конструкции, где при малой деформации в точках полный поворот относительно исходного состояния локально может быть значительным. В инженерных пакетах расчёт при больших перемещениях и поворотах обычно требует задания отдельной опции, подключающей соответствующую процедуру вычислений.

В задачах деформирования, возникающих при анализе аварий и подобных ситуаций, деформации как правило велики, могут быть велики и повороты. Постановки задач геометрически и физически нелинейны. Для учёта физических нелинейностей, связанных с неупругостью материала, необходимо использовать нелинейные модели материала.

12.3. Численная модель пластического поведения

Рассмотрим нелинейную модель пластического деформирования. Основные положения теории пластичности изложены в гл. 7. Основной объект её приложения – металлы, но по аналогии с пластической моделью построены и более сложные модели, описывающие неупругое поведение разных материалов. Достаточно универсальный и распространённый способ решения задач пластического деформирования состоит в применении инкрементальной теории пластичности с упрочнением, которое может быть линейным и более сложным. Она позволяет алгоритмически просто учесть упругую разгрузку и явление упрочнения при немономтонном нагружении.

Как отмечалось выше, процедура дискретизации в общем случае физически нелинейного деформирования базируется на линеаризации определяющего соотношения, причём результатом этой линеаризации служит *матрица определяющего соотношения*, аналогичная матрице упругости вида (10.20) или (10.44) в случае упругого материала. "Вычислительно-механические" основы процедуры построения этой матрицы легче понять на более простом алгоритме, изначально разработанном для расчётов динамики по явной схеме, когда каждый узел расчётной модели обсчитывается отдельно и нет необходимости матрицы вводить. Ниже приведена простая форма такой процедуры для случая идеальной пластичности – алгоритм "возврата на поверхность текучести" [Уилкинс], и его расширение на случай упрочняющегося пластического тела. Случай квазистатики будет рассмотрен в следующей главе.

12.3.1. Процедура "радиального возврата" на поверхность текучести

Вычисленные на очередной итерации перемещения могут отвечать как упругому, так и пластическому деформированию, в том смысле, что напряжения, вычисляемые по перемещениям, могут удовлетворять, либо не удовлетворять критерию упругости деформации на шаге (в нашем случае – критерию текучести Мизеса). В неупругом случае, при монотонном нагружении деформация на части шага по нагружению может быть

упругой, затем – пластической (напомним, что разгрузка всегда идёт упруго). Это должно учитываться при вычислении новых напряжений на шаге по времени (итерации). Приращение давления рассчитывается отдельно, с помощью уравнения состояния, и в пластичности участвуют только тензоры девиаторы.

При обновлении напряжений в данном КЭ новые значения приращений компонент девиатора напряжений на шаге нагружения вычисляются сперва упругим образом. Пусть $(s_{ij})^{(e)n+1}$ – девиаторные напряжения на $n+1$ -м шаге, вычисленные по упругим формулам по полным приращениям девиаторных деформаций на шаге:

$$(s_{ij})^{(e)n+1} = (s_{ij})^n + 2G\Delta e_{ij} . \quad (12.17)$$

Используем функцию текучести, основанную на критерии Мизеса (7.10):

$$F(I_2, \sigma_y) \equiv I_2 - \sigma_y^2/3 = s_{ij}s_{ij}/2 - \sigma_y^2/3, \quad (12.18)$$

где предел текучести определён по порогу текучести при одноосном растяжении σ_{02} :

$$\sigma_y^2/3 = \sigma_{02}^2 . \quad (12.19)$$

Если функция текучести (12.18) отрицательна, пластическое состояние в данном элементе не достигается. Положительность "упруго" вычисленной функции текучести означает, что в данном элементе должно быть пластическое состояние (отметим, что при более чем одной точке интегрирования в элементе возможна ситуация, в которой только часть КЭ охвачена пластическим течением). В предположении идеальной пластичности вычисленные компоненты девиаторов напряжений должны удовлетворять критерию текучести – функция текучести должна быть нулевой, и компоненты следует уменьшить так, чтобы вернуть их на поверхность текучести. Поверхность в пространстве компонент напряжений представляет собой гиперсферу (см. гл. 7), в главных осях она будет трёхмерной, условие нулевого следа тензора девиатора даёт окружность в сечении соответствующей плоскостью. Отсюда происходит англоязычное название процедуры – radial return algorithm [Уилкинс].

Для возврата состояния в данном КЭ на поверхность текучести уменьшается длина вектора, представляющего в пространстве компонент напряжённое состояние в данной точке: вычисленные значения девиаторов умножаются на нормирующий множитель q :

$$(s_{ij})^{n+1} = (s_{ij})^{(e)n+1} q, \quad q = \frac{\sigma_y^{n+1}}{S_e}, \quad S_e = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{ij}^{(e)})^{n+1}(s_{ij}^{(e)})^{n+1}}}. \quad (12.20)$$

Здесь σ_y^{n+1} – новый предел текучести, если учитывается упрочнение. Механическая интерпретация связана с условием текучести Мизеса: при монотонном нагружении приращение деформаций на шаге по времени идёт сначала упруго, и величина S_e возрастает, а затем – пластически, и тогда S_e не должно возрастать, если предел текучести постоянен. С точки зрения геометрии поверхности текучести интерпретация процедуры в том, что в пластическом состоянии вектор напряжённого состояния находится на окружности текучести (в случае произвольного расположения главных осей относительно системы координат – на "гиперсфере текучести"), что следует непосредственно из уравнений пластического течения. Запишем уравнения Прандтля-Рейсса (7.28)-(7.30) через производные по времени от приращений:

$$2G(\dot{e}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{e}_{ii}) = 2G\dot{e}_{ij} = \dot{s}_{ij}^{(e)} = \dot{s}_{ij} + 2Gs_{ij}\dot{\lambda}, \quad (12.21)$$

$$\dot{e}_{ii} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{ii}^J, \quad \dot{\lambda} = \frac{\dot{Q}}{2\sigma_y^2} = \frac{3s_{ij}\dot{e}_{ij}}{2\sigma_y^2} = \frac{3\dot{S}}{2\sigma_y E_t}. \quad (12.22)$$

$$\dot{\lambda}=0 \quad \text{при } S < \sigma_y \text{ и при разгрузке, } s_{ij}\dot{e}_{ij} < 0. \quad (12.23)$$

Множитель $\dot{\lambda}$ равен нулю при значении интенсивности напряжения в пределах поверхности текучести и при разгрузке, когда материал в процессе формоизменения разгружается (упруго), производя работу, так что приращение энергии (мощность) формоизменения отрицательна: $s_{ij}\dot{e}_{ij} < 0$. При нулевом множителе $\dot{\lambda}$ скорость изменения тензора девиатора напряжений, вычисленная по упругому закону, совпадает с истинным её изменением. В определении $\dot{\lambda}$ первые два равенства описывают общий случай, включая идеальную пластичность, последнее равенство относится к случаю линейного упрочнения, с линейным изменением предела текучести в зависимости от приращения (скорости) девиатора деформации. Величина \dot{S} в данном случае – это скорость изменения интенсивности напряжений $S = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$, или эффективное напряжение. Работа внутренних сил при пластическом течении может быть также записана в виде

$$\dot{Q}^{(p)} = s_{ij}\dot{e}_{ij} = \sigma_y \dot{e}^{(p)} = S \dot{e}^{(p)}, \quad (12.24)$$

поскольку вследствие критерия текучести Мизеса $\sigma_y = S$. Само наличие соотношения с множителем $\dot{\lambda}$ связано с ассоциированным законом текучести (см. (7.7) и (7.9)), следующим из принятых постулатов теории пластичности.

Свернём равенство (12.21) с тензором девиатором истинных напряжений и воспользуемся условием текучести Мизеса:

$$2Gs_{ij}\dot{e}_{ij} = s_{ij}\dot{s}_{ij} + 2Gs_{ij}s_{ij}\dot{\lambda} = s_{ij}\dot{s}_{ij} + 2Gs_{ij}s_{ij} \frac{3s_{ij}\dot{e}_{ij}}{2\sigma_y^2} = s_{ij}\dot{s}_{ij} + 2Gs_{ij}\dot{e}_{ij},$$

откуда получим, что $s_{ij}\dot{s}_{ij} = 0$, т.е. скорость изменения девиатора истинных напряжений лежит в касательной плоскости к поверхности текучести, и модуль вектора девиаторов напряжений (в пространстве компонент) не изменяется, что соответствует условию текучести. Сказанное иллюстрируется рисунком 12.2.

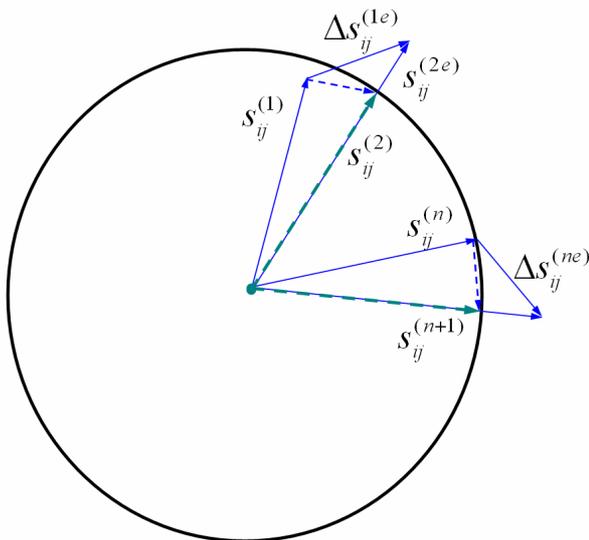


Рис.12.2. Упруго-пластическая коррекция тензора девиатора напряжений

С помощью (12.21), (12.24) и (7.23) нетрудно выразить пластическую часть деформации, используемую в модели упрочнения. Уравнение (12.21) можно записать как

$$\frac{\dot{s}_{ij}^{(e)}}{2G} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + s_{ij} \frac{3\dot{e}^{(p)}}{2\sigma_y} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \dot{e}^{(p)}. \quad (12.25)$$

Для приращения пластической деформации на $n+1$ -м шаге получим –

$$\Delta e_{ij}^{(p)} = \frac{(s_{ij})^{(e)n+1} - (s_{ij})^{n+1}}{2G} = \frac{1-q}{2G} (s_{ij})^{(e)n+1} = \frac{1-q}{2Gq} (s_{ij})^{n+1}. \quad (12.26)$$

Оценим величину нагрева за счёт работы внутренних сил при пластическом деформировании. Её можно вычислить при помощи соотношения (7.22):

$$dW^p = \sigma_y de^{(p)}.$$

Если сюда подставить предел текучести стали (низкосортной) $\sigma_y \sim 7 \cdot 10^8$ Па, плотность $\rho = 7200$ кг/м³ и пластическую деформацию $de^p = 0,002$ ($=0,2\%$), то удельная пластическая работа по деформированию до такой величины составит

$$\frac{1}{\rho} dW^p = \frac{\sigma_y}{\rho} de^p = \sim 7 \cdot 10^8 \text{ Па} \cdot 0,002 / 7200 \text{ кг/м}^3 \approx 200 \text{ Дж/кг},$$

что отвечает нагреву стали на $\sim 0,3$ К. Отсюда видно, что при численном решении квазистатической задачи, где деформация на шаге изменяется на доли процента, влиянием тепла пластической работы в металле, имеющим высокую теплопроводность часто можно пренебречь. При циклическом нагружении и ограниченном теплоотводе оно может быть заметно (пример: ломание проволоки попеременным сгибанием – разогрев места изгиба).

12.3.2. Учёт упрочнения при деформировании

Описанная процедура моделирует идеальную пластичность, при которой предел текучести не возрастает при пластическом деформировании (см. рис. 7.7Б). Сопротивление несущего сечения образца не растёт при возрастании приложенного напряжения, что физически должно приводить к деформированию с возрастающей скоростью, лимитируемой только инерцией материала и увеличением нагрузки на оставшуюся упругую область несущего сечения. В качестве примеров укажем продольно растягиваемый стержень и трубу (или полый шар) под внутренним давлением (рис.12.2). В первом случае всё поперечное сечение, начиная с некоторого момента, попадает в область пластического течения. Во втором случае при росте нагрузки пластическое течение начинается с внешней границы и постепенно распространяется на всю толщину. В обоих случаях деформируемая конструкция при росте нагрузки превращается, начиная с некоторого значения, в "механизм с одной степенью свободы" (см. у Ю.Л.Работнова [РаботновМДТТ]), который разрушается за конечное небольшое время. Квазистатическое рассмотрение с моделью идеальной пластичности в первом случае возможно до достижения предела текучести в сечении, а во втором – до момента распространения пластичности на всё сечение трубы.

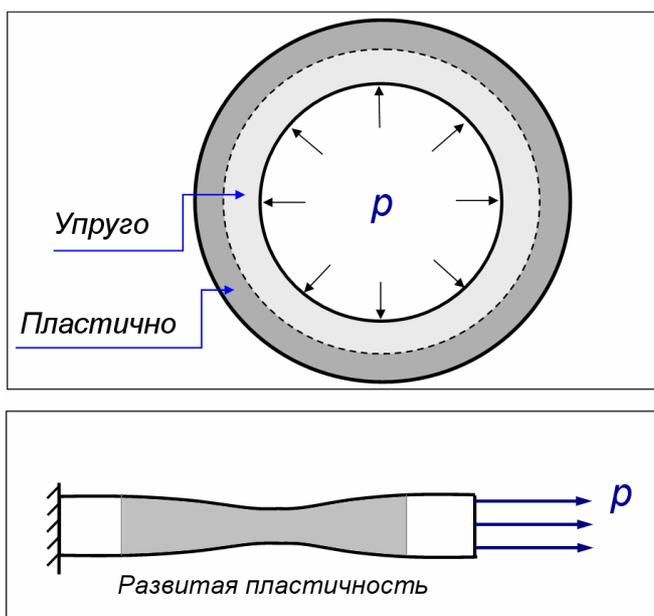


Рис.12.3. Пластическая область при нагружении трубы внутренним давлением и стержня растяжением

Физически, многие металлы упрочняются при деформировании – предел текучести повышается при пластическом деформировании, и это необходимо ввести в модель пластичности. Причина явления упрочнения в поликристалле упомянута в гл.7 – исчерпание возможности сдвигового деформирования кристаллических зёрен, наиболее податливых ("стопорение дислокаций"), и вовлечение в процесс деформирования других зёрен поликристалла более "жёстко" ориентированных относительно направления сдвига. Требуемая внутренняя сила и нагрузка растут. Процесс формально аналогичен упругому нагружению: рост деформации приводит к росту сил сопротивления. Отличие в том, что пластическая деформация необратима, и разгрузка происходит по другому пути, всегда соответствующему упругому состоянию. При этом достигнутому состоянию равновесия отвечает новый предел текучести – при повторении нагружения после разгрузки упругое состояние будет сохраняться приблизительно до достижения этого нового предела текучести, который может быть зависимым от знака нагрузки – растяжение или сжатие, что упоминалось в гл. 7 как эффект Бушингера.

Наиболее проста модель линейного упрочнения: зависимость напряжений от пластической деформации (зависимость между вторыми инвариантами девиаторов скоростей деформации и напряжений) имеет вид прямой линии. В её обоснование можно сказать, что характеристики упрочнения известны обычно с гораздо меньшей точностью, чем упругие величины, поскольку первые определяются кристаллическим строением (решёткой), а вторые – деталями поликристаллической структуры. Эта структура, к тому же, существенно зависит от состава металла, термообработки и прочей предыстории.

Возвращаясь к численным методам отметим, что упрочнение как параметр модели материала в расчётах весьма полезно, т.к его введение в квазистатике улучшает сходимость процедуры последовательных приближений. Но для соответствия реальности необходимо знать фактические параметры моделируемого материала. Т.к. эти параметры часто неизвестны и могут зависеть от партии металла etc., эффективный модуль *линейного* упрочнения в расчёте часто неопределённый параметр, влияние которого следует изучить.

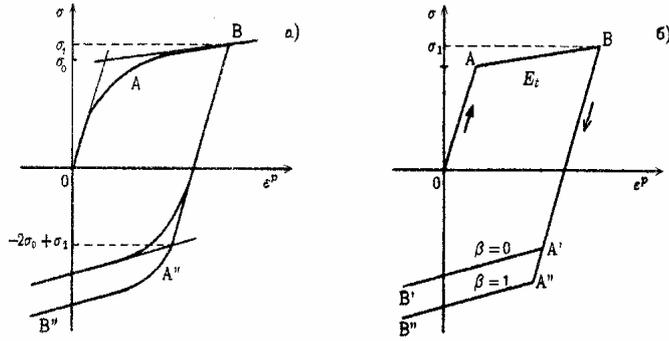


Рис. 12.4. Изотропное и трансляционное упрочнение при знакопеременном нагружении

Параметр модели упрочнения, задающий изменение предела текучести при пластическом деформировании, это обычно накопленная пластическая деформация (7.27):

$$\epsilon^{(p)}(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} \dot{\epsilon}_{ji}^{(p)}} dt. \quad (12.27)$$

Зависимость эффективного напряжения σ_y от $\epsilon^{(p)}$ при нагружении подобна кривой OAB, изображенной на рис. 12.3а. В модели линейного упрочнения её схематизируют зависимостью, состоящей из двух отрезков прямых (рис.12.3б). Закон упрочнения строится в полной аналогии со случаем одномерного растяжения, по инвариантам.

Рассмотрим модель изотропного упрочнения. В ней центр поверхности текучести в пространстве девиаторов фиксирован, радиус же её зависит от пластической деформации, что соответствует процессу OABA''B'' на рис.12.3а. Новый радиус поверхности текучести:

$$\sigma_y^{(n+1)} = \sigma_y^{(n)} + E_t \epsilon^{(p)}. \quad (12.28)$$

Здесь величина E_t – модуль упрочнения (касательный модуль). В процедуре радиального возврата следует учесть это изменение поверхности текучести на шаге.

Один из известных алгоритмов, учитывающих изотропное и кинематическое упрочнение, был реализован в работе [Krieg & Key]. Рассмотрим, в частности, изотропное упрочнение. Выразим приращение эффективной пластической деформации (12.26), $\Delta e^{(p)}$:

$$\begin{aligned} (\Delta e^{(p)})^2 &= \frac{2}{3} \Delta e_{ij}^{(p)} \Delta e_{ij}^{(p)} = \frac{2}{3} \left(\frac{1-q}{2G} \right)^2 \frac{3}{2} s_{ij}^{(e)n+1} s_{ij}^{(e)n+1} = \left(\frac{1-q}{3G} \right)^2 S_e^2, \\ \Delta e^{(p)} &= \frac{1-q}{3G} S_e = \frac{S_e - \sigma_y^{n+1}}{3G} \end{aligned} \quad (12.29)$$

Исключая из равенств (12.28) и (12.29) величину σ_y^{n+1} , получим

$$\Delta e^{(p)} = \frac{S_e - \sigma_y^n}{3G + E_t}.$$

Для множителя q (12.20) в процедуре радиального возврата получим выражение

$$q = \frac{\sigma_y^{n+1}}{S_e} = \frac{\sigma_y^n + E_t \Delta e^{(p)}}{S_e} = 1 - \frac{3G(S_e - \sigma_y^n)}{S_e(3G + E_t)} \equiv 1 - r$$

Новые девиаторы напряжений находятся как

$$s_{ij}^{n+1} = q s_{ij}^{(e)n+1} = s_{ij}^{(e)n+1} - r s_{ij}^{(e)n+1}. \quad (12.30)$$

12.3.3. Нелинейное упрочнение и установившаяся ползучесть

Нелинейный закон упрочнения можно ввести в численный расчёт, обобщая разными способами линейные зависимости типа (12.28), например, как:

$$\sigma_y^{(+1)}(\sigma, \dots) = \sigma_y^{(0)}(T) + E_t(T, \sigma, \dots)\epsilon^{(p)} + F(T, \sigma, \dots). \quad (12.31)$$

Здесь σ означает компоненты тензора напряжений, T – температура, $\epsilon^{(p)} = \epsilon$ – эффективная пластическая деформация. В пошаговой итерационной процедуре можно задавать зависимость σ_y не только от напряжений или деформаций, но и от других параметров, в частности, от скорости деформаций, что позволяет строить квазистатические модели ползучести (см. гл. 7). При практической реализации здесь возникают проблемы, связанные с одновременным учётом зависимости от температуры, напряжённого состояния (упрочнение) и, в моделях ползучести и аналогичных реологических явлений, также от времени. Экспериментальные данные по деформированию, даже, если они имеются, как правило, относятся к узкому диапазону режимов, и за пределами диапазона приходится прибегать к экстраполяции. Поэтому, реально работающие модели обычно довольно просты. Рассмотрим одну из них: применение для моделирования высокотемпературной ползучести степенной зависимости скорости эффективной пластической деформации $\dot{\epsilon}$ от эффективного напряжения. При 1–осном растяжении она известна как закон Нортона, упоминаемый в гл. 7:

$$\dot{\epsilon} = A(T)\sigma_{eff}^{m(T)}. \quad (12.32)$$

Напряжённое состояние будет нестационарным, когда зависимость скорости деформации от напряжённого состояния ненулевая.

При пластическом течении эффективное напряжение, или интенсивность напряжений, равно пределу текучести, $\sigma_{eff} = \sigma_y$, который может зависеть от температуры, от эффективной деформации и от интенсивности скорости пластической деформации, что представляется в виде

$$\sigma_y(T, \epsilon^{(p)}) = \sigma_y^{(0)}(T) + E_t(T)\epsilon^{(p)} + f(\epsilon^{(p)}, T) = \sigma_e. \quad (12.33)$$

Зависимости от температуры в рассмотренных корпусных сталях можно выбрать таким образом, чтобы при низких температурах основной вклад в предел текучести вносил обычный предел текучести (т.е. пластическая часть), а при высоких температурах – последнее слагаемое (т.е. вязкая часть), зависимое от скорости деформации. Зависимость $f(\epsilon)$, где при пластическом течении $\epsilon^{(p)} = \epsilon$, отвечает (12.32):

$$f(\epsilon) = B(T)\dot{\epsilon}^{\beta(T)}. \quad (12.34)$$

В случае достаточно высокой температуры можно положить $\sigma_y^{(0)}(T) \approx 0$ и $E_t = 0$. Обращая соотношения (12.33), (12.34) относительно $\dot{\epsilon}$ приходим к выражению для скорости эффективной пластической деформации, зависящей от эффективного напряжения в данной точке аналогично закону Нортона для скорости деформации ползучести. Роль температурно-зависимого коэффициента при степенной зависимости играет комбинация предела текучести и множителя $B(T)$ –

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{\sigma_e}{B(T)} \right)^{1/\beta(T)} \equiv A(T)\sigma_e^{m(T)} \quad (12.35)$$

Показатель степени $\beta(T)=0.25$ отвечает показателю степени $m=4$ в законе Нортона (12.32).

При нулевой скорости деформирования эффективный предел текучести при отсутствии "настоящей" мгновенной пластичности – нулевой. Когда материал начинает деформироваться, скорость деформации конечна, предел текучести становится конечным, уменьшая скорость деформации. При проведении итерационных вычислений эффективный предел текучести таким образом автоматически подстраивается под скорость деформации, и принимаемый ε -н деформирования (12.33) удовлетворяется. Изменение предела текучести на шаге по закону "упрочнения" в форме (12.28) при этом также формально удовлетворяется, и, если правильно выбрать коэффициенты матрицы определяющего соотношения (см. ниже) метод работает и в квазистатическом режиме. Такая нелинейная пластическая модель внедрена в код HEFEST-M [MMod]. Она позволяет проводить устойчивые расчёты деформирования ползучести в квазистатическом режиме вплоть до развития пластической неустойчивости с деформациями $\sim 10 \div 100\%$. Теории ползучести, основанные на соотношении между скоростью деформации и приложенным напряжением, в механике так и называются: "теория упрочнения" (см. [Малинин 1975]), "time hardening model".

12.3.4. К построению квазистатического численного алгоритма модели пластичности

В квазистатике целью вычислений на текущем шаге по нагружению служит получение равновесного НДС, соответствующего новому значению нагрузки, при данном определяющем законе материала. В упругом случае при подстановке в уравнение (12.5) линейного определяющего закона получается линейная алгебраическая система. Единственность положения равновесия определяет единственность решения. Точность решения в основном определяется запасом механической устойчивости искомого положения равновесия, аппроксимационной точностью используемых КЭ и точностью алгебраической процедуры.

В случае неупругости вычисляемое положение равновесия может зависеть от пути нагружения, поскольку получаемая нелинейная алгебраическая система уравнений решается методом последовательных приближений. Близость численного решения к фактическому результату может зависеть от того, насколько близок путь нагружения в численном расчёте к моделируемому механическому процессу. Например, завышение упрочнения (фактического предела текучести) на итерации может сильно исказить итоговое распределение НДС. Это показывает важность выбора модели пластичности и её параметров. Реализация численного алгоритма также имеет первостепенную важность.

Построение численной процедуры решения квазистатической упруго-пластической задачи имеет два аспекта:

- получить эффективный (быстро и надёжно сходящийся) алгоритм численного решения уравнения (12.5);
- дать критерии сходимости и оценки численной погрешности.

К настоящему времени достаточно разработаны итерационные методы решения нелинейных алгебраических уравнений. Ближайшая задача – показать, как из формальной записи (12.5) с использованием рассмотренных выше моделей получается линейная алгебраическая система, аналогичная системе (10.39), решаемая стандартным способом.

При наличии упрочнения пластичность при монотонном нагружении можно рассматривать как нелинейную упругость, при которой существует в КЭ однозначная зависимость $\sigma(\varepsilon)$, хотя и нелинейная. После подстановки этой зависимости в уравнение (12.5) и линеаризации полученную алгебраическую систему можно решать одним из методов последовательных приближений. Существенное отличие от линейного случая (10.24ы) на шаге по нагружению связано с резким переходом от упругости к пластичности

- в нелинейном уравнении (12.5) зависимости $\sigma(\epsilon)$ в соседствующих элементах, находящихся в упругом и пластичном состояниях, могут сильно различаться на шаге, что можно охарактеризовать как "локальную" нелинейность, часто не позволяющую получить решение в одну итерацию. Для учёта локального состояния КЭ в каждом из них строится своя матрица определяющего соотношения, приближённо описывающая его нагружение как квазиупругое, что может отвечать, как нагружению, так и разгрузке. На основе таких элементных матриц жёсткости собирается общая матрица жёсткости упруго-пластической системы.

13. Физически нелинейные задачи квазистатики

Ниже рассмотрены некоторые общие понятия, связанные с методом последовательных приближений, и специфические для механики особенности. Решение больших *линейных* алгебраических систем, получаемых после линеаризации, представляет собой относительно решённую проблему, которая здесь не затрагивается. Отметим только, что существующие методы их решения разделяются на *прямые* и *итерационные*. В первом случае на каждом шаге строится обратная матрица получаемой линейной системы или её аналог, во втором случае линейная система решается итерационным методом. Всё излагаемое ниже по итерационным процессам etc., относится только к решению нелинейной алгебраической системы. Требуется свести её к линейной системе, решаемой стандартным способом.

13.1. О решении нелинейных алгебраических уравнений

Система алгебраических уравнений (12.4), полученная в результате дискретизации МКЭ, может быть записана в виде:

$$\{F(u)\}=0 . \quad (13.1)$$

Здесь вектор $\{F(u)\}$ обозначает набор функций $\{f_1(u), \dots, f_n(u)\}^T$ от компонент неизвестного вектора $\{u_1, \dots, u_n\}^T$. Все рассматриваемые ниже понятия основаны на линеаризации этой системы с последовательным решением линеаризованного уравнения. Напомним некоторые термины.

13.1.1. Метод последовательных приближений: терминология

Рассматриваемый здесь метод последовательных приближений является одношаговым, т.е., новое $(n+1)$ -е приближение к искомому решению вычисляется, используя найденное предшествующее n -е :

$$\{u_{n+1}\}=S(\{u_n\}), \quad (13.2)$$

где S обозначает оператор построенной численной процедуры, действующий на алгебраический вектор численного решения в узлах. Последовательные приближения должны образовывать сходящуюся последовательность. Для количественной оценки разности векторов и формулировки критериев сходимости вводится *норма* – положительная скалярная функция – "длина" вектора. Она должна быть линейна по умножению вектора на число и удовлетворять неравенству треугольника – для двух узловых векторов a и b –

$$\|a+b\|\leq\|a\|+\|b\|. \quad (13.3)$$

Норма матрицы может быть введена из нормы для вектора $\{x\}$ как *подчинённая норма* на основании соотношения $\|A\|=\max\|Ax\|, \|x\|=1$, при этом удовлетворяется неравенство

$$\|Ax\|\leq\|A\|\|x\| \quad (13.4)$$

Норму для матриц можно ввести также как независимую, аналогично векторной норме. Для того чтобы эта норма была *согласованной*, должно выполняться неравенство (13.3).

После введения нормы векторы и матрицы образуют линейное нормированное пространство. Условие *монотонной* сходимости по данной норме записывается как

$$\|\{u_{n+1}\}\|<\|\{u_n\}\|. \quad (13.5)$$

13.1.2. Итерационный процесс метода Ньютона

Наипростейшую демонстрацию сходящегося процесса и условий сходимости можно провести на примере линейного алгебраического уравнения:

$$ax=b, \text{ или } F(x)=ax-b=0. \quad (13.6)$$

Для осуществления операции деления, обратной к умножению, требуется найти алгоритм приближённого решения через умножение и сложение, аналогичный процедуре деления "в столбик". Возьмём начальное приближение $x=x_0$. Невязка: $\delta=F(x_0)=ax_0-b$. Выпишем последующие приближения как одношаговую схему (13.2):

$$x_1=x_0-\tau F(x_0)=x_0-\tau(ax_0-b), \quad x_2=x_1-\tau(ax_1-b).$$

Рассмотрим постоянное τ . Процесс будет сходящимся при условии

$$|x_2-x_1| < |x_1-x_0|,$$

что даёт: $|\tau(ax_1-b)| < |\tau(ax_0-b)|$, или $|ax_1-b| < |ax_0-b|$. Внесём сюда выражение для x_1 –

$$|a(x_0-\tau(ax_0-b))-b|=|ax_0-b - a\tau(ax_0-b)|=|ax_0-b| |1-a\tau| < |ax_0-b|,$$

откуда получаем условие на τ : $|1-a\tau| < 1$, или $0 < a\tau < 2$. Таким образом, сходимость имеется в довольно широком диапазоне параметра τ . При $0 < a$ имеем условие $0,5a < 1/\tau$. Графически процесс при $0,5a < 1/\tau < a$ и при $a < 1/\tau$ изображён на рис.12.4а. При $a=1/\tau$ мы бы получили точное решение на первом шаге. Метод продолжения по секущей, как известно, называется *метод секущих*, а по касательной – метод касательных, или *метод Ньютона*.

Формула приближённого решения уравнения общего вида $f(x)=0$ получается как продолжение по касательной в окрестности точки текущего приближения $x=x_c$:

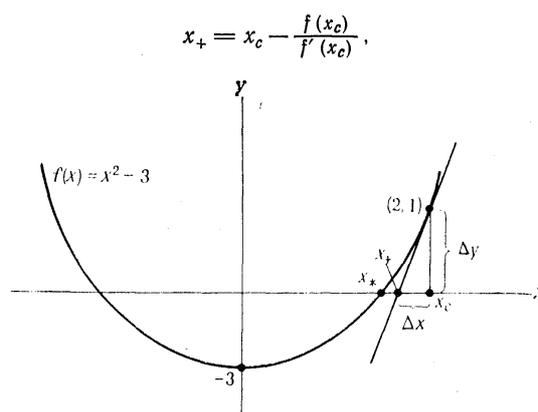
$$y(x) \approx y(x)^+ = f(x_c) + f'(x_c)(x-x_c) \quad (13.7)$$

Новое приближение получается из условия равенства нулю приближённой функции $y(x)^+=0$, откуда алгоритм итераций:

$$x_+ = x_c - f(x_c)/f'(x_c).$$

Графически процесс изображён на рис.12.4б.

а)



Итерация метода Ньютона для $f(x) = x^2 - 3$
(в искаженных масштабах).

б)

Рис. 12.4. Метод секущих (а) и метод касательных (б).

Чтобы не вычислять часто производную $f'(x_c)$ и её обратную величину применяется *модифицированный метод Ньютона*, в котором производная вычисляется не на каждой итерации, т.е. представляющий собой комбинацию метода касательных и секущих ("метод хорд и касательных"). Метод Ньютона имеет хорошую сходимость, если начальное приближение взято достаточно близко к решению. Чтобы попасть в эту окрестность

быстрой сходимости, т.е. получить хорошее начальное приближение, в комбинации с методом Ньютона применяют более медленные, но "всеядные" итерационные методы, например, метод деления отрезка пополам.

Процедура естественным образом обобщается на системы алгебраических уравнений вида (13.1):

$$\{F(\mathbf{X})\} = 0,$$

где $\{F(\mathbf{X})\} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \{F_1(\mathbf{X}), \dots, F_n(\mathbf{X})\}^T$ – это матрица–вектор n функций от компонент неизвестного вектора $\mathbf{X} = \{X\}$, решения системы. Задаёмся начальной точкой $\mathbf{X}^c = \{X^c\}$ из предполагаемой окрестности решения. Раскладывая функции $F_1(\mathbf{X}), \dots, F_n(\mathbf{X})$ в ряд Тейлора в окрестности начальной точки $\mathbf{X}^c = \{X^c\}$, приближённое выражение для $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ записываем в виде, аналогичном (13.7):

$$\{F(\mathbf{X})\} \approx \{F\}^{+1} = \{F\}^c + [\mathbf{T}^{(c)}](\{X\}^{+1} - \{X\}^c) = 0 \quad (13.8)$$

Здесь обозначено $\{F\}^c = \{F(\mathbf{X}^c)\}$, а матрица $[\mathbf{T}^{(c)}]$ играет роль *касательной* матрицы, т.к. она задаёт касательную плоскость к векторной функции $\{F_i(\mathbf{X})\}$ и составлена из частных производных по компонентам неизвестного вектора:

$$T_{ik}^{(c)} = \frac{\partial F_i^{(c)}}{\partial X_k}. \quad (13.9)$$

Схема итераций имеет вид, аналогичный одномерному случаю – новое приближенное значение $\{X\}$ находится как:

$$\{X\}^{+1} = \{X\}^c - [\mathbf{T}^{(c)}]^{-1} \{F\}^c \quad (13.10)$$

Итерационный процесс завершается, когда погрешность решения, вычисляемая определённым образом, уменьшается до заданной малой величины. Напомним, что здесь итерационный процесс строится для решения нелинейной алгебраической системы, полученной в результате процесса дискретизации исходной системы уравнений механики. В вычислительной гидродинамике для этого употребляется термин "внешние итерации". Получающаяся в результате линеаризованная система алгебраических уравнений может решаться на внешней итерации также итерационно – это будут "внутренние итерации".

13.1.3. Нелинейности в теории пластичности

Вернёмся к нелинейным упруго-пластическим задачам. Все описанные ранее процедуры построения матрицы жёсткости (т.е. матрицы линейной алгебраической системы, из которой получают узловые перемещения) основаны на введении матрицы упругости, что и позволяет ввести квазилинейную алгебраическую систему и вычислять её коэффициенты. Линеаризация строится на основе соответствующих уравнений, в частности, Прандтля-Рейсса, задающих определяющий закон пластического течения – в рамках инкрементальной модели пластического течения с упрочнением. Ниже рассмотрена процедура построения матрицы определяющего соотношения для закона линейного упрочнения (12.28). Процедура аналогична той, что описана выше для алгоритма радиального возврата и вполне ей аналогична:

– если элемент находится в упругом состоянии, то новые напряжения вычисляются по закону линейной упругости как –

$$\sigma_{ij}^{i+1} = \sigma_{ij}^i + C_{ijkl}^{(e)} \dot{\epsilon}_{kl}^{(p)} dt. \quad (13.11)$$

– если при нагружении элемент находится в пластическом состоянии, то новые напряжения вычисляются по линеаризованному определяющему соотношению через некоторую *матрицу определяющего соотношения* при пластическом состоянии $C_{ijkl}^{(t)}$:

$$\sigma_{ij}^{i+1} = \sigma_{ij}^i + C_{ijkl}^{(t)} \dot{\epsilon}_{kl}^{(p)} dt. \quad (13.12)$$

При выборе способа вычисления напряжений (13.11)–(13.12) состояние элемента по-прежнему идентифицируется по функции текучести (12.18), в зависимости от её знака.

Текущие коэффициенты элементных матриц жёсткости при этом определяются в соответствии с (10.25), т.е. элементных матриц линеаризованного закона деформирования, но этот закон в каждом элементе свой. Он может задаваться матрицей упругости типа (10.20), единой при упругом деформировании элемента данного материала, либо, в случае упруго-пластичности, заменяться некоторой "касательной" матрицей упругости $C_{ijkl}^{(t)}$, вычисляемой в каждом элементе и использующей модуль упрочнения для определения нового локального радиуса поверхности текучести. Отметим, что здесь слово "касательный" в задании локального аналога элементной матрицы упругости следует отнести к "касательному модулю" в линеаризованной модели пластического деформирования. В монографии [Коробейников] для общего случая введён термин "матрица определяющего соотношения", который ниже также будет использоваться.

13.1.4. Матрица определяющего соотношения в модели линейного упрочнения

Определим вид матрицы определяющего соотношения (МОС) для рассмотренной выше модели линейного упрочнения. Изложение основано на [Беличко 2001]. Вместо приращений полного тензора напряжений на шаге по нагружению в деформируемом КЭ, используются производные по времени в форме (12.11). Эквивалент соотношений (13.11)–(13.12) для производной напряжений по времени –

$$\sigma_{ij}^J = C_{ijkl}(\epsilon_{kl}, \dot{\epsilon}_{kl}, E_t) \dot{\epsilon}_{kl}, \quad (13.13)$$

где вид матрицы зависит от характера деформирования. Для единообразия обозначений признак ямановой производной будем в приводимых ниже выкладках опускать и обозначать дифференцирование напряжений по времени точкой, подразумевая, что вращение КЭ учтено. Коэффициенты определяющего закона могут зависеть от деформации, скорости деформации в данном КЭ, температуры и параметров материала.

Вид элементной матрицы упругости для двумерных задач плоских напряжений и осесимметричного нагружения был приведён выше. Для применения этой единообразной записи в неупругом случае в расчёте следует уметь определять коэффициенты матрицы C_{ijkl} , исходя из конкретного вида определяющего закона (13.13) в данном элементе. Эффективность решения получаемой квазилинейной алгебраической системы уравнений зависит в значительной степени от того, насколько точно адекватно построена её матрица жесткости, вычисляемая с помощью элементных касательных матриц упругости. Здесь термин "упругость" подчеркивает линеаризацию исходного нелинейного определяющего соотношения.

Для элемента, в котором присутствуют пластические деформации, функция текучести (12.18) равна нулю:

$$F(I_2(s_{ij}), \sigma_y) = 1/2 s_{ij} s_{ij} - \sigma_y^2 / 3 = 0. \quad (13.14)$$

Рассмотрим случай изотропного упрочнения, $\sigma_y = \sigma_y^0 + E_t e^p$. В модели с переменным касательным модулем E_t , представляющим собой некоторую функцию текущего

состояния, величина σ_y^0 будет соответствовать пределу текучести на предыдущем шаге. Дифференцируя (13.14) по времени можно написать:

$$s_{ij}\dot{s}_{ij} - 2/3\sigma_y\dot{\sigma}_y = 0 . \quad (13.15)$$

Из уравнений (12.24) и (7.8) следует, что в состоянии пластичности

$$\dot{\sigma}_y = E_t\dot{\epsilon}^{(p)} = 2/3E_t\dot{\lambda}\sigma_y . \quad (13.16)$$

Внося это в предыдущее уравнение, исключаем производную $\dot{\sigma}_y$ –

$$s_{ij}\dot{s}_{ij} - 4/9E_t\sigma_y^2\dot{\lambda} = 0 .$$

Используя тождества $\dot{\sigma}_{ij} = \dot{s}_{ij} - \dot{p}\delta_{ij}$ и $s_{ij}\delta_{ij} = 0$, запишем это соотношение в виде

$$s_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - 4/9E_t\sigma_y^2\dot{\lambda} = 0 \quad (13.17)$$

На внутренней стороне поверхности текучести напряжения удовлетворяют упругому соотношению $\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{(e)}\dot{\epsilon}_{kl}^{(e)}$. С учётом равенств

$$\dot{\epsilon}_{kl}^{(e)} = \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^{(p)} = \dot{\epsilon}_{kl} + \dot{\epsilon}\delta_{kl} - \dot{\lambda}s_{kl}$$

преобразуем (13.17):

$$0 = s_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - 4/9E_t\sigma_y^2\dot{\lambda} = s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}\dot{\epsilon}_{kl}^{(e)} - 4/9E_t\sigma_y^2\dot{\lambda} = s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda}s_{kl}) + s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}\dot{\epsilon}\delta_{kl} - 4/9E_t\sigma_y^2\dot{\lambda} \quad (13.18)$$

откуда выражаем множитель $\dot{\lambda}$ (13.10):

$$\dot{\lambda} = \frac{s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}(\dot{\epsilon}_{kl} + \dot{\epsilon}\delta_{kl})}{s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}s_{kl} + 4/9E_t\sigma_y^2} = \frac{s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}\dot{\epsilon}_{kl}}{s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}s_{kl} + 4E_t\sigma_y^2/9} . \quad (13.19)$$

Для определения МОС воспользуемся тождеством

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(p)} = \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} = C_{ijkl}^{(t)}\dot{\epsilon}_{kl} = C_{ijkl}^{(e)}\dot{\epsilon}_{kl}^{(e)} = C_{ijkl}^{(e)}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}\delta_{kl}) = C_{ijkl}^{(e)}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda}s_{kl}), \quad (13.20)$$

это следует из определения линейного упрочнения и иллюстрируется рис. 13.1. Внесём в (13.20) выражение (13.19) для $\dot{\lambda}$:

$$C_{ijkl}^{(t)}\dot{\epsilon}_{kl} = C_{ijkl}^{(e)}\dot{\epsilon}_{kl} - \frac{C_{ijpq}^{(e)}s_{pq}s_{mn}C_{mnkl}^{(e)}\dot{\epsilon}_{kl}}{s_{mn}C_{mnkl}^{(e)}s_{kl} + 4E_t\sigma_y^2/9} = \left(C_{ijkl}^{(e)} - \frac{C_{ijpq}^{(e)}s_{pq}s_{mn}C_{mnkl}^{(e)}}{s_{mn}C_{mnkl}^{(e)}s_{kl} + 4E_t\sigma_y^2/9} \right) \dot{\epsilon}_{kl} \quad (13.21)$$

Напомним, что дифференцирование по времени здесь служит только обозначением приращений $d\sigma_{ij}$, $d\epsilon_{kl}$ etc. напряжений и деформаций на шаге по нагружению в локальной системе конечного элемента. Учитывая произвольность величины $\dot{\epsilon}_{kl}$ в равенстве (13.21), получаем искомое соотношение для построения МОС в элементе при пластическом течении с законом упрочнения, задаваемым касательным модулем E_t :

$$C_{ijkl}^t = C_{ijkl}^e - \frac{C_{ijpq}^e s_{pq} s_{rs} C_{rskl}^e}{s_{ij} C_{ijkl}^e s_{kl} + 4E_t \sigma_y^2 / 9} . \quad (13.22)$$

Упруго-пластическое деформирование изотропно, и из уравнений Прандтля-Рейсса (13.10) следует, что построение матрицы определяющего соотношения, т.е., линейного соотношения, связывающего алгебраические векторы деформаций и напряжений в

элементе, полностью аналогично случаю упругой изотропии, рассмотренному ранее. Для этого используются компоненты полученного тензора "модулей псевдоупругости" C_{ijkl}^t .

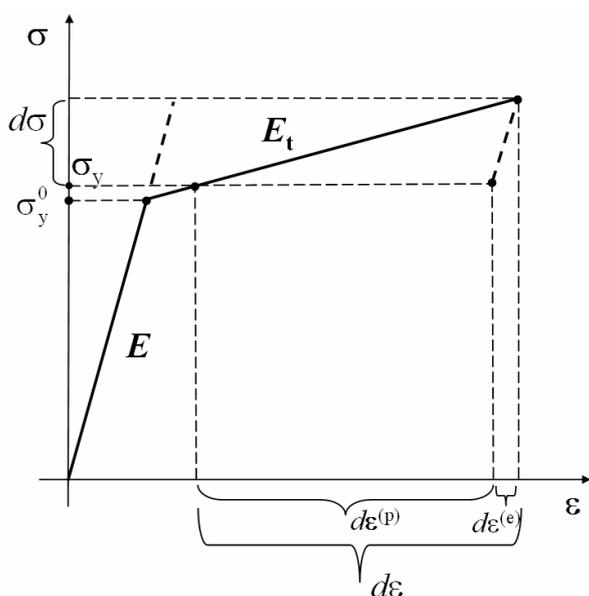


Рис. 13.1 Полная, упругая, пластическая (остаточная) деформация при одномерном растяжении

Делая величину E_t зависимой от различных физических параметров, можно получать численные модели различных законов упрочнения, в том числе, зависящих от скорости деформации (2-я стадия ползучести), как это описано выше. Матрица жёсткости строится по найденной МОС как в упругом случае, используя матрицу деформаций. В итоге нелинейное уравнение (12.4) будет линеаризовано на данном шаге по нагружению, т.е. оно может быть приведено к виду (13.8), т.е. к линейной алгебраической системе. На следующем шаге НДС меняется, и, вследствие нелинейности, меняются коэффициенты МОС, они должны

быть найдены заново, т.е. касательная матрица в соотношении (13.8) должна быть построена заново и заново найдена обратная матрица в (13.10). Это наиболее затратная часть всей процедуры численного решения. Если изменения не велики, то матрицу можно не перестраивать – это несколько увеличит количество итераций, но сэкономит время на обращении матрицы – как отмечалось, для сходимости итераций в методе Ньютона необязательно использовать точно касательную матрицу. При этом, погрешности могут быть связаны не только с неточностями линеаризации, но и с ошибками округления. Имеющаяся некоторая свобода в коэффициентах касательной матрицы может быть использована для улучшения её качества и ускорения расчёта. Рассмотрим пример такого показателя качества.

13.1.5. Свойства матрицы линейной системы: погрешность и число обусловленности

Описанная нелинейная процедура – итерационная, она требует многократного решения некоторой линейной алгебраической системы уравнений вида

$$[K]\{u\}=\{R\} . \quad (13.23)$$

Фактическая ошибка, т.е. различие n -го приближения и точного решения $\{u\}$ по определению – это:

$$\|\{\delta u\}^n\|=\|\{u\}-\{u\}^n\| . \quad (13.24)$$

В процессе решения производятся многие миллиарды арифметических действий. Для того, чтобы ошибка решения не нарастала при вычислениях из-за округлений, матрица системы должна обладать свойством, называемым хорошей обусловленностью. Плохая обусловленность может сделать получение решения невозможным. Рассмотрим вопрос о влиянии на решение малых изменений (возмущений) правой части и левой части, т.е. элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений (13.23). Пусть правая часть ("нагрузка") известна неточно:

$$[K]u=R+\delta R .$$

Формальное решение: $u=[K]^{-1}R$. Точным решением системы с возмущенной правой частью $R+\delta R$ будет некоторый вектор $u+\delta u$, удовлетворяющий равенству

$$[K] (u+\delta u)= R+\delta R. \quad (13.25)$$

Соответственно –

$$u+\delta u= [K]^{-1} (R+\delta R) ,$$

а, так как $u= [K]^{-1} R$, то

$$\delta u= [K]^{-1} \delta R. \quad (13.26)$$

Для измерения δu воспользуемся парой совместимых векторной и матричной норм. Это приведет к оценке

$$\|\delta u\| \leq \| [K]^{-1}\| \|\delta R\| , \quad (13.27)$$

где при некотором δR возможно равенство. Таким образом, возмущение точного решения может превосходить возмущение правой части не более, чем в $\| [K]^{-1}\|$ раз.

Для определения *относительного* эффекта того же самого возмущения заметим, что

$$\|R\| \leq \|K\| \|u\| .$$

Поделив (13.27) на $\|[K]u\|=\|R\|$, получим такую оценку для "коэффициента усиления" возмущения правой части:

$$\frac{\delta u}{u} \leq \| K \| \| K^{-1} \| \frac{\delta R}{R} \quad (13.28)$$

Предположим теперь, что *матрица* системы изменилась на δK . Тогда возмущенное решение $u+\delta u$ будет обеспечивать равенство $(K+\delta K)(u+\delta u)=R$, откуда следует, что

$$\delta u= - K^{-1} \delta K (u+\delta u)$$

и, соответственно, для норм –

$$\|\delta u\| \leq \| K^{-1}\| \|\delta K\| \|u +\delta u\| ,$$

или, что то же самое,

$$\|\delta u\| / \|u +\delta u\| \leq \| K^{-1}\| \|\delta K\| .$$

Умножив и разделив правую часть на $\|K\|$, получим неравенство в относительных величинах:

$$\frac{\|\delta u\|}{\|u +\delta u\|} \leq \| K \| \| K^{-1} \| \frac{\|\delta K\|}{\| K \|} \quad (13.29)$$

Как в этом выражении, так и в (13.28), верхней границей относительного изменения точного решения служит произведение порождающего его относительного возмущения данных (правой части, или матрицы) на одно и то же число $\|K^{-1}\| \|K\|$. Это число называют *числом обусловленности матрицы K* в процедуре решения линейной системы (указание на процедуру обычно опускается) и обозначают как $\text{cond}(K)$.

Т.к. для любой подчиненной матричной нормы выполняется равенство $\|I\|=1$, и по определению $K^{-1}K=I$, I – единичная матрица, то справедлива оценка

$$1 = \|I\| = \|K^{-1}K\| \leq \|K^{-1}\| \|K\| , \quad (13.30)$$

так что $\text{cond}(K) \geq 1$ для любой матрицы K .

Число обусловленности матрицы \mathbf{K} характеризует максимальный эффект от возмущений в \mathbf{K} и \mathbf{R} при решении линейной системы. Из оценок (13.28) и (13.29) следует, что при большой величине $\text{cond}(\mathbf{K})$ точное решение системы может существенно изменяться даже при малом изменении данных. Матрицы \mathbf{K} с "большими" $\text{cond}(\mathbf{K})$ принято называть плохо обусловленными, а с "малыми" $\text{cond}(\mathbf{K})$ – хорошо обусловленными.

Оценку числа обусловленности матрицы, как можно показать, даёт отношение максимального и минимального собственных чисел. Если собственные числа расположены "кучно", обусловленность – хорошая, если нет – плохая. В пределе, когда модуль минимального собственного значения стремится к нулю, матрица вырождается в особенную.

Геометрическая интерпретация. Если матрицу \mathbf{K} отождествлять с линейным преобразованием, то плохо обусловленная матрица переводит компактную область в сильно растянутую, погрешности вычислений сильно изменяют вид преобразованной области и ограничивают точность восстановления её первоначальной формы.

Число обусловленности уже построенной матрицы можно уменьшать, производя независимую её коррекцию. При этом сходимость может несколько ухудшиться за счёт отклонения от "правильной" матрицы, но выигрыш за счёт уменьшения влияния ошибок округления может перевешивать проигрыш в сходимости.

13.1.6. О критериях сходимости итераций и общих проверках решения

Полученное на данной итерации НДС проверяется на соответствие критериям близости к решению – *критериям сходимости*. Критерии сходимости итераций используют функционалы невязки (см. гл. 11), построенные так, чтобы они стремились к нулю при наличии сходимости к некоторому решению (как правило, всё же, искомому). С точки зрения механики эти функционалы могут быть следующими:

- квадрат или модуль приращения средней деформации на итерации;
- энергетический критерий: работа сил на малом перемещении на данной итерации.

Примеры соответствующих выражений приведены ниже. Пороговые значения этих критериев, нужные для завершения итераций оцениваются и затем уточняются из опыта. Использование невязки естественно, т.к. предел последовательных приближений заранее неизвестен. Применяемые критерии сходимости аналогичны критерию Коши сходимости числовых последовательностей $\{x_n\}$, где роль разности $|x_{n+1} - x_n|$ выполняют некоторые функционалы, связанные с перемещениями на итерации.

Для контроля желательны также общие проверки достижения нужного результата:

- в случае достигнутой сходимости – того, что достигнутое состояние действительно равносуще (существование решения), а также единственно при данной нагрузке;
- в случае отсутствия сходимости итераций следует оценить достижимость состояния механического равновесия при данных условиях, т.е., существование решения исходных уравнений.

Единственность решения в методе последовательных нагружений может быть проверена измельчением шагов по нагружению – при устойчивом деформировании, т.е., отсутствии бифуркаций состояния системы (что также требует дополнительного анализа), и применении корректной процедуры решения единственность обычно гарантируется хорошей сходимостью итераций при таких проверках. Достижение состояния равновесия, если оно существует, контролируется надлежащим образом построенными функционалами невязок и величиной погрешности. Если не удаётся сделать критерии сходимости достаточно малыми, это означает недостаточную устойчивость численной процедуры, что может иметь как численную, так и физическую природу. Полное

отсутствие сходимости итераций тоже может иметь физическую природу – например, пластическая неустойчивость, приводящая к разрушению. Эти случаи могут быть в некоторых случаях идентифицированы по ходу деформирования – оно ускоряется вблизи неустойчивости. Возможность неединственности получаемого численного решения на малых шагах по нагружению может быть связана с погрешностями численной процедуры или граничных условий, приводящих к плохой обусловленности. Здесь проверка возможна по степени монотонности поведения рассчитанного НДС – заметные немонотонные изменения НДС на фоне больших невязок могут указывать на некорректность вычисляемого решения.

13.2. Решение нелинейной системы в коде HEFEST-M

В качестве примера итерационной процедуры решения нелинейной системы рассмотрим решение системы алгебраических уравнений МКЭ в коде HEFEST-M, разработанном в ИБРАЭ РАН [HEFEST-M], предназначенного для расчёта нелинейного деформирования при больших деформациях и высокой температуре, обуславливающей сильную физическую нелинейность. Аналогичная процедура используется в модуле HEFEST [HEFEST], в котором решается нелинейная задача теплопроводности, конечно-элементная процедура дискретизации которого описана выше. Итерационный процесс решения нелинейной задачи в обоих модулях сходен. Ниже кратко описано построение и оптимизация процедуры решения системы нелинейных алгебраических уравнений квазистатики, обеспечивающие сходимость и устойчивость.

В исходной алгебраической системе уравнений (12.4) зависимость от решения можно формально представлять как через узловые перемещения U , так и через текущие координаты узлов X . Следуя (13.8), разложим левую часть этого векторного уравнения в ряд Тэйлора относительно точки начального приближения $X^c = X^{(c)}$:

$$\Sigma(X) \approx \Sigma(X^{(c)}) + \Sigma'(X^{(c)})(X - X^{(c)}) \approx R(X) . \quad (13.31)$$

В статической задаче надо найти новое равновесное состояние при приложенной нагрузке. Перепишем это в виде :

$$[\Sigma'(X^{(c)})]({X} - {X}^{(c)}) = [T(X)]\{U\} = \{Q(X^{(c)})\} \equiv \{R(X)\} - \{\Sigma(X^{(c)})\} , \quad (13.32)$$

где $\{X\}^{(c)}$ – вектор текущей конфигурации узлов, $\{U\} = \{X\} - \{X\}^{(c)}$ – неизвестный вектор перемещений относительно конфигурации $\{X\}^{(c)}$. Матрица жёсткости построена на основе элементных матрицы деформаций и матрицы определяющего соотношения (МОС). В упругом случае получим линейное уравнение для новой конфигурации:

$$[K(X)]({X} - {X}^{(c)}) = [K(X)]\{U\} = \{R(X)\} , \quad (13.33)$$

где матрица жёсткости системы $[K(X)] = K(X)$ строится, исходя из элементных матриц упругости в соответствии с общим выражением (10.25), и в упругом случае при малых деформациях и поворотах зависимости матрицы жёсткости от конфигурации нет.

В общем случае последовательного нагружения вектор $X^{(c)}$ – это положение равновесия на предыдущем шаге n по нагрузке, для которого вычислены напряжения и узловые силы $\Sigma(X^{(c)})$. При $X = X^{(c)} = X^n$ тело уравновешено, $\{U\} = 0$, $\Sigma(X^{(n)}) = R^{(n)}$. Шаги по нагружению идут во времени задачи. Поскольку ускорения не учитываются, явная зависимость от времени в (13.33) будет только в функциональных зависимостях нагрузок:

$$[K(X(t_n))]\{U_{n+1}\} = \{Q(t_{n+1}, X(t_n))\} = \{R(X(t_n), t_{n+1})\} - \{\Sigma(X(t_n))\} \quad (13.34)$$

Новая конфигурация нам неизвестна, и величины, зависящие от $\{X\}$, вычисляются по предыдущей конфигурации, экстраполяцией.

Решение квазистатической задачи (13.34) сводится к решению уравнений равновесия для последовательных моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ и пересчёту координат, т.е. к переходу к новой конфигурации, отвечающей новому положению равновесия. В уравнении (13.34) вектор внешней нагрузки, который может зависеть от времени и от конфигурации, задан по конфигурации $\mathbf{X}(t_n)$ в момент $t = t_n$, но для нового шага по нагружению с номером $n+1$.

В случае линейной упругости $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ не зависит от напряжённого состояния, изменение конфигурации учитывается преобразованием локальной системы координат, и система алгебраических уравнений (13.34) на каждом шаге будет линейной:

$$[\mathbf{K}]\{U_{n+1}\} = \{Q(t_{n+1})\} - \{\Sigma(\mathbf{X}(t_n))\} = \{Q(t_{n+1})\} - \{Q(t_n)\}. \quad (13.35)$$

В HEFEST-M используется прямой метод решения алгебраических систем, причём, матрица жёсткости обновляется раз в несколько итераций или шагов по времени. Решив один раз систему (13.35) линейных алгебраических уравнений, решения на последующих шагах $t = t_n$ находятся умножением на найденную обратную матрицу $[\mathbf{K}]^{-1}$, пока матрица $[\mathbf{K}]$ не перестроена. Значения узловых координат $\{X_{n+1}\}$ на $n+1$ -ом слое:

$$\{X_{n+1}\} = \{X_n\} + \{U_{n+1}\},$$

В физически нелинейной постановке задачи на каждом шаге ищется итерационным путём решение полученного линеаризованного уравнения. На каждой итерации решается система

$$[\mathbf{K}(X^{(i)}(t_n))]\{U_{n+1}^{(i+1)}\} = \{Q(t_{n+1}, X^{(i)}(t_n))\} = \{R(X^{(i)}(t_n), t_{n+1})\} - \{\Sigma(X^{(i)}(t_n))\}, \quad (13.36)$$

где i – номер предыдущей итерации. Её решение формально сводится к умножению вектора правой части на обратную матрицу $[\mathbf{K}(X(t_n))]^{-1}$.

Решение линейной системы (13.36) прямым методом основано на факторизации Холецкого [23]. (Отметим, что в инженерных пакетах решение линейных алгебраических систем может проводиться и итерационно, что неизбежно, если число степеней свободы велико). В процессе решения производится контроль и коррекция матрицы с тем, чтобы не допустить нарастания погрешности, о чём сказано выше. Для этого, в случае, если минимальное собственное значение матрицы станет меньше заданного числа, проводится модификация соответствующей строки матрицы разложения Холецкого.

После каждой итерации проводится проверка сходимости. Сходимость оценивается относительно значений, полученных на нулевой итерации, и считается достигнутой, если относительные изменения на итерации становятся малыми:

$$\| \{U^{(i+1)}\}_{n+1} \| / U_{max} \leq \epsilon_d \quad \text{и} \quad \| \{U^{(i)}\}^T \{R^{(i)}\} \| / \| \{U^{(0)}\}^T \{R^{(0)}\} \| \leq \epsilon \quad (13.37)$$

Здесь U_{max} – максимальное значение узловых перемещений на итерации, ϵ_d, ϵ_e – заданные значения относительных погрешностей. Физический смысл величины $\{U^{(i)}\}^T \{R^{(i)}\}$ в критерии (13.37) – это работа узловых сил на перемещении $\{U^{(i)}\}$ при i -ой итерации. Таким образом, в итерационном процессе нахождения нового положения равновесия на $n+1$ -ом шаге по нагружению мы переходим от одной конфигурации к другой, более близкой к искомой, а критериями приближения служат прекращение изменения узловых координат и изменения механической энергии.

Если сходимость не была достигнута, обновление конфигурации, т.е. пересчет перемещений в узлах производится по формуле (12.6) с параметром s_i ($0 < s_i < 1$):

$$\{X^{(i+1)}_{n+1}\} = \{X^{(i)}_{n+1}\} + \alpha_i \{U^{(i)}\}, \quad (13.38)$$

где α_i определяется в процедуре т.н. *линейного поиска*, оптимизирующей сходимость метода. Этот параметр отражает разрешённую степень продвижения в направлении построения нелинейного решения. В сильно-нелинейных задачах задаётся ограничение

$$\alpha_i < 0,1 \div 0,2.$$

В итерационной процедуре программы HEFEST проводится дополнительный анализ получаемого решения, позволяющий избежать тупиков сходимости и ускорить её (*метод BFGS: Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno [BFGS]*). При использовании для решения системы нелинейных уравнений метода BFGS на каждой итерации между глобальными перестройками матрицы проводится ее корректировка по формуле

$$[K]^{-1}_i = [I + \{W\}_i \{V\}_i^T] [K]^{-1}_{i-1} [I + \{V\}_i \{W\}_i^T],$$

где $\{V\}_i$, $\{W\}_i$ - некоторые векторы. В процедуре линейного поиска ищутся оптимальные значения параметра α_i в уравнении (13.38), таких, чтобы произведение $(\{\Delta U^i\}^T \{R^i\})$ достаточно быстро уменьшалось от итерации к итерации и стремилось к нулю. Формулы для вычисления векторов $\{V\}_i$, $\{W\}_i$ и детальное обсуждение организации вычислительного процесса метода BFGS и линейного поиска приведены в [ДеннисШнабель], [ГиллМюррей].

Перестройка матрицы K производится не только через заданное количество итераций, или шагов по времени, но и, если параметр s_i достигнет минимально допустимого значения, или, если появляется расхождение решения, определяемое как рост нормы матрицы правой части:

$$\|R_{n+1}^{(i)}\| \leq \|R_{n+1}^{(i+1)}\|.$$

При перестройке матрицы и вычислении коэффициентов с помощью определяющих соотношений в случае пластического течения следует, как отмечалось, применять разные соотношения при нагружении и разгрузке материала, проверка этого производится в каждой точке интегрирования КЭ, поскольку именно в них определяются значения тензоров.

Таким образом, процедура решения нелинейной системы построена из итерационных циклов, и действия в процессе итерирования следующие:

- нахождение нового приближения решения линейной системы (13.36);
- проверка сходимости (13.37);
- коррекция и перестройка матрицы при необходимости;
- пересчёт узловых координат (13.38);
- перестройка матрицы в заданные моменты процедуры.

Эти этапы, циклы и действия достаточно общие для процедур численного решения, поскольку сами процедуры и методы, которые они реализуют, устроены в целом одинаково и преследуют одну цель – численное решение системы уравнений МСС. Ниже приведен общее описание алгоритма такого рода.

13.3. Общая последовательность численного решения задачи

МДТТ

Процедура численного решения здесь понимается в двух аспектах: 1) это последовательность шагов алгоритма численного решения (схема алгоритма) или 2) последовательность действий пользователя стандартного инженерного пакета. Для понимания того, что происходит в результате действий пользователя (второй аспект), в частности, выдаваемой расчётным кодом диагностики, полезно иметь общее представление об организации вычислений, т.е. о первом аспекте.

Следует отметить, что, в зависимости от целей и функционала расчётного средства, алгоритмическая реализация и внутренняя организация расчётного кода могут быть разными, к тому же, в коммерческих пакетах они часто известны только в общих чертах. Что касается порядка действий пользователя инженерного пакета, то это – один из

основных вопросов, которому уделяется внимание при обучении, разного рода тренингах, в руководствах пользователя и специальной литературе (в том числе, на русском языке, см. например, [Ансис в руках ...]). Последовательность численного решения, кратко очерченная ниже в упомянутых двух аспектах, имеет основной целью подведение краткого итога всему вышесказанному:

1. Констатация того, что описанные модели и алгоритмы могут быть сведены в универсальную численную схему (программу для ЭВМ), выбор отдельных составляющих которой обладает определённой свободой, определяемой решаемой задачей, и –

2. Замечания о том, что последовательность действий с таким расчётным средством также подчинена некоторой рутине. При этом, с одной стороны, значительная часть этапов работы по факту может быть регламентирована, либо должна удовлетворять определённым требованиям. С другой стороны, существует определённая свобода в выборе расчётных средств, способов работы с ним и процедур численного решения в рамках данного расчётного средства. Они выбираются, исходя из конкретных требований и приоритетов пользователя расчётного кода, но при этом не следует забывать об общих требованиях контроля процесса решения и получаемых результатов.

13.3.1 Вычислительный цикл решения квазистатической задачи

Ниже схематически перечислены основные действия, совершаемые при получении численного решения внутри КЭ–программы.

Ввод данных – чтение из файла или интерактивный ввод с построением области

Инициализация – представление введённых данных в нужной форме; расчёт вспомогательных величин

Начальное вычисление матрицы жёсткости K и вектора нагрузок

(1) Цикл по времени

если нелинейная задача – при необходимости – **перевычисление матрицы K**

(2) Цикл по итерациям

линейная задача – **решение линейной системы – обращение матрицы K (один раз)**

$$\{U\} = [K]^{-1} \{R\} \quad (13.39)$$

Решение линейной системы (14.1) часто также проводится итерационными методами, что вводит дополнительный цикл.

линейная задача – решение системы (14.1) получено;

нелинейная задача – проверка сходимости нелинейного решения;

обновление конфигурации в случае успешной итерации (невязка уменьшилась) – задание данных для новой итерации

– пересчёт координат по вычисленным перемещениям

$$\{X\}^* = \{X\} + \{U\}$$

– вычисление деформаций на новом шаге

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U\}$$

– вычисление напряжений по деформациям ("обновление") – линейное соотношение:

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\};$$

- в случае нелинейного соотношения – линеаризация для вычисления $\{\sigma\}$
- вычисление новых узловых сил по вычисленным напряжениям
- вычисление новых нагрузок (правая часть алгебраической системы (12.3))
- линейная задача – выход из цикла (2)

нелинейная задача – выход из цикла или – при необходимости – коррекция и перестройка матрицы системы, её обращение или эквивалентная процедура;

(2) завершение шага по итерациям; переход на начало цикла

Фиксация результатов данного шага по времени; задание данных для нового шага нагружения:

- увеличение или уменьшение шага по времени, исходя из оценки сходимости итераций или физически[параметров;
- проверки физических критериев (разрушения и др.);
- модификация нагрузок и матрицы при наличии разрушенных элементов;
- (в случае термомеханики) – подготовка температурных данных (чтение или интерполяция по времени);
- другие процедуры, задаваемые физикой задачи.

Периодически: выдача в файлы для обработки результатов.

Проверка на окончание расчёта и выход из цикла 1 при удовлетворении критерия

- по заданному времени (по количеству шагов);
- по критерию (кроме нештатных ситуаций) .

(1) завершение шага по времени; переход на начало цикла 1

Выход из решения. Проведение заключительных процедур (запись данных, выдача сообщений).

Рассмотрим второй из упомянутых выше аспектов численного решения.

13.3.2. Этапы получения численного решения МДТТ-пакетом

Во введении упоминались стандартные средства подготовки и проведения решения задач МДТТ. Ниже рассмотрены основные этапы этой работы, которые являются общими для большинства задач механики сплошной среды (см., например, [Ансис в руках]).

Расчёт по численной процедуре МКЭ идёт после того, как задача подготовлена к решению, т.е. построена "КЭ–модель", заданы свойства материалов, нагрузки, граничные условия, параметры процедуры решения и выдачи. Это делается на стадии ввода данных в программу и *инициализации* – представления данных в удобном для вычислений виде. Рассмотрим процесс получения численного решения задачи МДТТ с точки зрения расчётчика. Процесс решения начинается с постановки проблемы и оканчивается "защитой результата".

Этапы решения представлены на схеме рис.13.2, взятой из [Ансис в руках]:

- 1) идентификация проблемы; работа с документацией по конструкции, определение нагрузок
- 2) создание геометрии модели конструкции, предназначенной для численного решения
- 3) разбиение геометрической модели на конечные элементы ("генерация сетки"), выбор аппроксимирующих КЭ;

- 4) задание свойств материала, отвечающих предполагаемым физическим процессам;
- 5) приложение граничных условий и нагрузок в КЭ–модели (закрепление, движение на границе; объёмные и поверхностные силы и др.);
- 6) численное решение системы алгебраических уравнений, анализ диагностических сообщений;
- 7) визуализация, анализ, оформление результатов.

Этапы 1, 2, 3, 4 условно можно отнести к "препроцессорной" стадии подготовки данных, этапы 5, 6 – к рабочей стадии, этап 7 – к "постпроцессорной" стадии обработки и анализа результатов.

Обычно наиболее трудоёмкая стадия решения – это создание конечно-элементной модели, т.к. автоматическое построение сетки элементов не гарантирует от появления ошибок. Задание нагрузок и граничных условий также требует опыта и аккуратности.

6–й из перечисленных выше этапов (численное решение системы уравнений) выполняется автоматически и, как правило, особых трудностей не вызывает, за исключением случаев, когда матрица системы оказывается по тем или иным причинам плохо обусловленной.

7–ой этап (анализ результатов) существенно облегчается средствами графической визуализации.

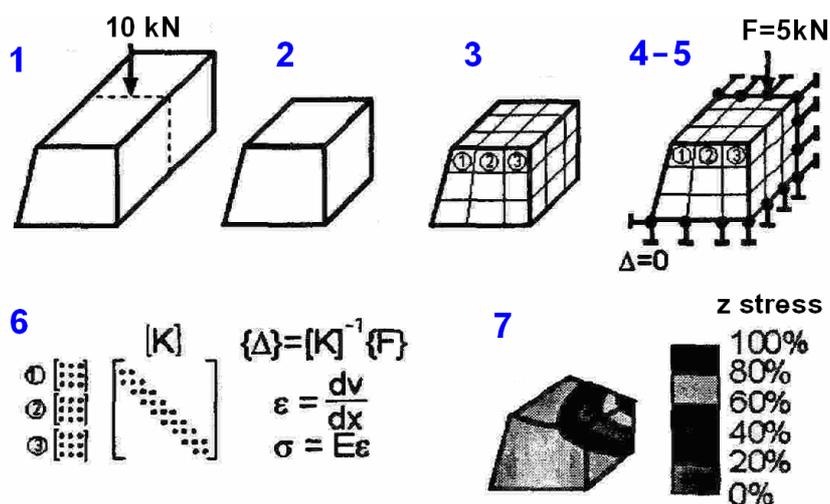


Рис.13.2. Схема решения задачи МДТТ (по [АНСИС в руках инженера])

Прокомментируем некоторые шаги вышеуказанной последовательности

13.3.2.1. Построение расчётной области (Preprocessing) и решение

Для построения конечно-элементной модели используется специальная программа, часто интегрированная в используемый пакет программ, называемая *препроцессор* (например, коммерческие ANSYS Prep7, ANSYS ICEM CFD, открытый препроцессор GMesh и другие). Этапы построения КЭ-разбиения:

- задание областей, поверхностей границ – построение геометрии;
- задание подобластей (материалов); выбор типов КЭ для каждой из подобластей;
- разбиение границ подобластей для постановки граничных условий;
- разбиение области на элементы – задаётся глобальная нумерация узлов и связность элементов.

В сложных "реальных" случаях геометрия объекта часто строится специальными программами (САПР–пакетами: AutoCAD, SolidWorks etc.) и затем передаётся в одном из стандартных форматов в пакет–решатель, где строится сетка. Сетка "импортируется" в

пакет–решатель (построение сетки и импорт сетки могут быть соединены). Отметим, что в 2–мерных задачах с пластическим деформированием 4–угольные элементы предпочтительны 3–угольным, поскольку в последних сильнее проявляется эффект т.н. "запираания" КЭ – появление в КЭ при определённых условиях избыточной жёсткости численного происхождения. В пластических задачах эффективная жёсткость конструкции меньше, а деформации – гораздо больше, чем в упругих, что способствует проявлению этого эффекта.

Дальнейшие действия относятся к процедуре решения:

- задание требуемых физических моделей (теплопроводность, пластичность, ползучесть, трещиностойкость, внешние поля etc.);
- задание свойств материалов подобластей: выбор модели и задание её параметров;
- задание краевых условий на границах и других нагрузок (зависимости от координат, времени, температуры и др.);
- выбор схемы дискретизации ("решателя") и задание параметров итерационной процедуры для нелинейных задач;
- задание начальных данных, задание параметров выдачи результатов;
- сборка матрицы системы квазилинейных алгебраических уравнений и решение системы (автоматически)

При решении возможны два основных случая

- Линейные задачи – матрица системы постоянна, решение на шаге по нагружению сводится к решению линейной алгебраической системы; это решение осуществляется прямым методом (до $\sim 10^5$ - 10^6 уравнений) или итерационным;
- Нелинейные задачи – геометрически, или – физически; например, задачи с пластичностью, где вычисление тензора напряжений может осуществляться по–разному, в зависимости от достигнутого НДС; здесь физическую модель нелинейного явления надо задавать, исходя из условий задачи (обычно имеется выбор), а решение нелинейной задачи проводится итерационным путём (не путать с итерационным решением линейных систем).

В результате получается массив узловых перемещений (или иных величин, в зависимости от задачи и численного метода решения), по которому, с использованием аппроксимаций, описанных выше, строятся распределения остальных физических величин.

13.3.2.2. Работа с результатами решения

Чтобы представить результаты в обозримой форме, в виде картинок, графиков и т.п. используется специальная программа – *постпроцессор*. Она читает данные, записанные в процессе решения, обрабатывает их нужным образом, строит графические изображения – карты (изолинии, "изо–подобласти"), распределения вдоль заданного пути, зависимости от времени.

В целом численное решение средствами универсального пакета – рутинная и существенно автоматизированная процедура, но, если задача сложна геометрически и физически, её решение имеющимися средствами может доставить немало затруднений.

Важнейший этап решения – *оценка достоверности* получаемого численного решения. При постановке, решении и анализе результата надо запомнить и регулярно повторять себе истину, сформулированную в виде одного из законов Мэрфи(?): "всякое непроверенное вычисление неверно". При решении инженерных, в особенности проектировочных, задач возможности проверки экспериментом ограничены или отсутствуют, и анализ достоверности численного решения приходится вести другими имеющимися средствами.

Эталон для проверки решения новых задач отсутствует, и решение проверяется по его отдельным свойствам. Процедура проверки достоверности может иметь много разных аспектов, как, например:

- оценка фактической области применимости физических моделей (например, выход за пределы упругости)
- сравнение с точными решениями похожей задачи, если таковые имеются, или –
- аналитические оценки решения по порядку величины, если возможны;
- экспериментальные данные по похожим случаям и данные других расчётов;
- расчёт упрощённых конфигураций для сравнения получаемых результатов и выявления тенденций;
- измельчение сетки – исследование "сходимости по сетке", или применение элементов более высокого порядка
- вариация параметров модели и численного метода – исследование влияния существенных и несущественных параметров (например, способа дискретизации).

Этап исследования влияния различных факторов на получаемое решение может быть проведён систематически и с применением статистического анализа :

- многовариантные расчёты: составляется таблица вариантов – "матрица расчётов", в которых параметры меняются в заданных пределах; влияние каждого оценивается по результатам расчётов;
- статистический анализ неопределённостей – составляется набор вариантов, в котором параметры меняются во всевозможных комбинациях в рамках статистического распределения; результаты анализируются методами статистики: строятся распределения, вычисляются коэффициенты корреляции и т.п.; здесь решаются обычно сотни или более однотипных задач, и такая процедура практически всегда в той или иной степени автоматизирована, что необходимо, хотя бы, для контроля входных данных.

13.3.3. Режимы работы с универсальным пакетом программ

13.3.3.1. Интерактивный

Интерактивный (диалоговый) режим уже довольно давно ассоциируется с графическим интерфейсом пользователя GUI (graphical user interface) – системой меню, подсказками и т.п. Изначально диалоговый режим существовал в виде текстового интерфейса TUI (text user interface) – посылка текстовых команд с параметрами. Он назывался также командным режимом – ввод команд на исполнение. Команды могут также вводиться и в графическом интерфейсе из специального окна. Суть одинакова – посылка с экрана инструкций программе на выполнение определённых инструкций.

Отметим, что в коммерческих пакетах командный режим (TUI) всегда существует и может быть первичным в том смысле, что содержит несколько больше возможностей управления решением, чем меню графического интерфейса. Обычно новые, ещё недокументированные, тестируемые возможности кода ("beta-features") первоначально проще ввести через команды (где они и меньше видны, не отвлекают внимание), и только после успешной длительной апробации дублировать их в графическом интерфейсе. Командный режим необходим также при пакетном выполнении задания, например, при дистанционном запуске на расчёт, когда возможности графического обмена лимитированы, либо при множественных запусках типового задания на расчёт.

13.3.3.2. Пакетный

В пакетном режиме инструкции по выполнению считываются из *командного файла* ("*скрипта*"), составленного на соответствующем языке (Scheme, Python etc.); такой файл

обычно предусмотрен в коммерческих кодах. Командный файл составляется вручную на основе соответствующих описаний в документации. Существенно более простой путь его формирования состоит в первоначальном выполнении соответствующих команд интерактивно, из GUI, поскольку подобный файл, дублирующий в текстовом режиме интерактивные действия пользователя, может формироваться самой исполняемой программой в процессе интерактивной работы.

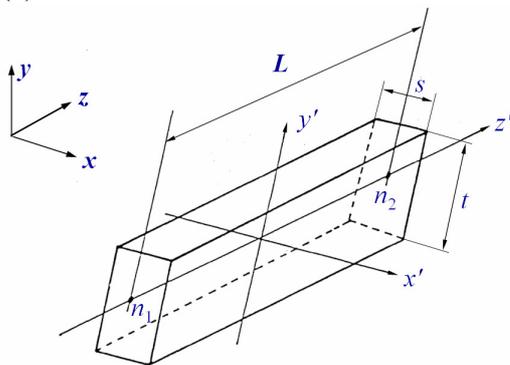
При дальнейшей работе командный файл может служить основой для доработки модели, поскольку редактировать текст готового командного файла и запускать готовый пакет заданий обычно легче, чем повторять с небольшими модификациями набор действий на экране. Существенно, что при этом облегчается контроль входных данных – они приведены не в пунктах меню и подменю, а в текстовой таблице, "input deck". Командный режим полезен, например, при построении сетки препроцессором, а также при графической обработке результатов – построении "картинок" нужного ассортимента, ракурса, цветовой гаммы, линий и т.п. Одно из преимуществ работы с текстовым командным файлом состоит также в том, что, например, при задании входных данных размеры конструкции, мелкость разбиения, константы материалов и др. величины могут быть заданы в параметрической форме, легко варьируются и контролируются в параметрических расчётах.

14. Неполноразмерные элементы. Балочный элемент

14.1. Основные неполноразмерные элементы: балка и оболочка

Как отмечалось, неполноразмерными называются конечные элементы, моделирующие конструкции, у которых один или более размеров h много меньше остальных L : $h/L \ll 1$. В этом случае (нормальные) напряжения в направлениях, перпендикулярных направлению с размером h , могут превосходить напряжения в h -направлениях в $\sim L/h$ раз. С точки зрения прочности наиболее интересными будут эти нормальные напряжения при изгибе, что позволяет свести общий трёхмерный случай к квазидвумерному (оболочка) или одномерному (балка). Теория оболочек является довольно сложной, и для целей иллюстрации основных подходов в неполноразмерных моделях будет разобран только пример изгиба стержня. Нормальные напряжения при изгибе были рассмотрены в гл.6. На основе этого строится простейший изгибный конечный элемент.

(а)



(б)

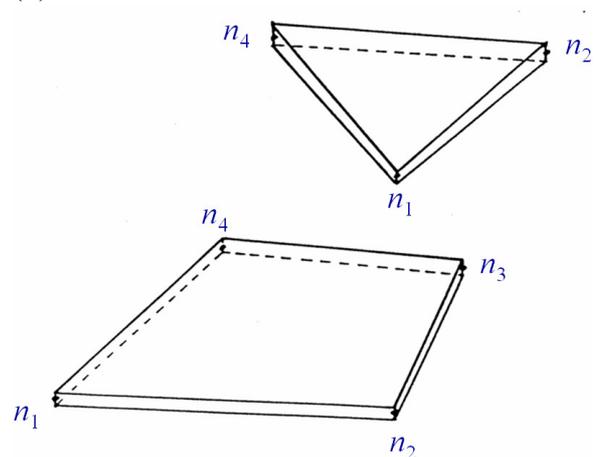


Рис.14.1. Балочный (а) и оболочечные (б) элементы

Основные параметры балок и оболочек приведены на рис. 14.1. Во входных данных расчёта балка может быть задана своими размерами L , t , s , как на рис.14.1а и узлами n_1 , n_2 . Модуль упругости задаётся в свойствах материала. Описанная ниже геометрическая теория изгиба применима и при пластическом деформировании. Аналогично, но более сложно, конструируются оболочечные элементы, отвечающие участку оболочки или пластины. Здесь также пространственное распределение деформаций сводится к изгибу некоторой эффективной срединной поверхности, и узловыми переменными служат отклонение от исходного положения поверхности (прогиб) и распределённые по поверхности элемента углы изгиба относительно двух направлений. Параметрами геометрии оболочечного элемента (рис.14.1б) могут служить размеры (толщина и положение узлов) и параметры модели материала. Существует несколько теоретических моделей балок и оболочек, и ряд типов КЭ, отвечающих этим моделям.

14.2. Балка (изгибный элемент)

Балочный элемент (beam, flexure element) используется для моделирования элементов конструкций, аналогичных стержню, но работающих также на изгиб. В простейшем случае он задаётся двумя узлами – концами балки. Ниже описывается модель с

минимальным количеством параметров, основанная на элементарной теории изгиба, рассмотренной в гл.6. В ней учитываются только нормальные напряжения при изгибе, вычисленные поперечные перемещения не участвуют в изменении геометрии балки. Напомним два общих ограничения, связанных с нагрузками. Первое связано с гипотезой плоских сечений, которая отвечает идеализированному случаю моментного нагружения призматического стержня простого сечения (в частности, не коробчатого) и тех, которые могут к ним сведены. При более сложных нагрузках, например, касательных, на продольных плоскостях, применимость этой гипотезы подлежит проверке. Второе ограничение связано с граничными условиями: для точного соответствия решению в объёме стержня приложение, например, концевой силы на краю стержня должно в точности следовать этому решению. Это ограничение отчасти снимается применением принципа Сен-Венана, если длина стержня велика (малое отношение: $h/L \ll 1$). Но напряжения на концах стержня требуют при этом отдельного анализа.

В итоге мы приходим к идеализации изгибного конечного элемента как отрезка прямой линии, характеризуемого двумя концевыми точками, на котором задано распределение перемещений, описываемое решением задачи изгиба. Положение линий отвечает геометрическому месту точек центров тяжести поперечных сечений стержня. В соответствии с идеологией МКЭ, деформирование при изгибе моделируется заданием узловых обобщённых перемещений и функций формы, позволяющих приближённо вычислить эти перемещения в любой точке между узлами. Введение узловых переменных здесь не так очевидно, как для сплошных (solid) и стержневых элементов. Чтобы понять, каковы должны быть эти узловые величины и определить функции формы, напомним и обобщим некоторые приведённые ранее результаты элементарной теории изгиба.

14.3 Характеристики изгиба

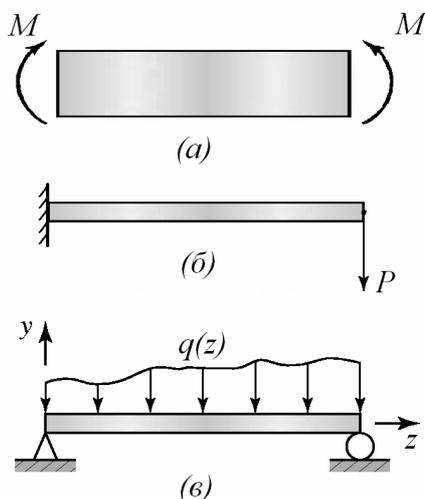


Рис.14.2. Геометрия изгиба и нагрузки

Обозначим (рис.14.2) через Oz направление вдоль балки. Поперечное сечение находится в плоскости xOy , ось Oy находится в плоскости чертежа и направлена вниз. Координата z характеризует положение текущего сечения балки. Сечение в точке с координатой z делит балку на две части, левую и правую. Основное предположение элементарной теории изгиба – это гипотеза Сен-Венана о деформированном состоянии при изгибе: все сечения при изгибе только поворачиваются на малый угол, при этом изменения поперечных расстояний между продольными волокнами обусловлены только поворотом и в первом порядке не изменяются.

Для упрощения построения конечного элемента принимаются ранее сделанные предположения элементарной теории:

- балка имеет призматическую (цилиндрическую) форму, в точках вдоль длины образующей цилиндра поперечные сечения неизменны;
- отклонения при изгибе от начального положения малы относительно её полной длины (линейная теория);
- материал балки – однородный, изотропный, упругий;
- имеется плоскость симметрии (*центральная плоскость*), в которой действует изгибная нагрузка, растягивающие силы приложены вдоль линии изгиба.

Силовыми характеристиками изгиба в каждом сечении служат перерезывающие силы F_x, F_y , приложенные в центральной точке, и изгибающие моменты M_x, M_y относительно пары осей Ox и Oy в плоскости данного сечения (см. гл. 6). Напомним, что перерезывающей силой называется равнодействующая всех сил, приложенных к сечению по одну его сторону, левую, либо правую, с обратным знаком, а изгибающим моментом – моменты соответствующих сил относительно поперечной оси, проходящей через центр изгиба. С точки зрения левой или правой половин балки полный момент и перерезывающая сила, приложенные в сечении с центром в точке z , создаются распределёнными напряжениями в этом сечении, такими, что при убиении одной из половин балки напряжённое состояние в другой части не меняется. Основные (наибольшие по величине) напряжения при изгибе это, как правило – нормальные к сечению. Перерезывающая сила приводит также к касательным напряжениям, которые мы здесь не учитываем.

Пусть стержень нагружен моментом относительно оси Ox , перпендикулярной центральной плоскости, $M=M_x$. При наличии изгиба дополнительно моментом M_y относительно оси Oy упругое решение в случае малых поворотов даётся суперпозицией состояний, связанных с M_x и M_y . При чистом изгибе (рис.14.2а) полный момент по определению одинаков в каждом поперечном сечении: $M_x(z) = const(z)$. Распределение нормального напряжения по толщине даётся уравнением (6.13):

$$\sigma_{zz} = (M_x / J_{xx}) y, \quad (14.1)$$

а распределение перпендикулярного перемещения $v(x)$ вдоль линии изгиба при малых отклонениях – (приближённым) уравнением (6.15):

$$v'' = M_x / (EJ_{xx}). \quad (14.2)$$

Это – уравнение *параболы изгиба*.

14.3.1. Точечное и распределённое нагружение

В общем случае в уравнении (14.1) полный момент может быть непостоянным по длине, в частности, при нагружении концевой силой он линейно изменяется вдоль длины. Изгибное нагружение может задаваться также силой, приложенной по длине балки, сосредоточенной, F_y (рис.14.2б) или распределённой, f_y (рис.14.2в). При этом в каждом сечении возникают свои перерезывающие силы и изгибающие моменты. Рассмотрим участок балки от $z = a$ до $z = b$, $a \leq z \leq b$, с приложенной распределённой силой. Эквивалентная перерезывающая сила, приложенная в промежуточном сечении $z = \xi$ справа или слева, по определению суть интеграл от *плотности* распределённой силы (силы на ед. длины):

$$F_y(\xi) = F_y^{лев}(\xi) = \int_a^\xi f_y dz = -F_y^{прав}(\xi) = -\int_\xi^b f_y dz. \quad (14.3)$$

По определению момента эту силу можно также представить как производную по z от изгибающего момента, приложенного в данном сечении балки $z = \xi$. Чтобы показать это, приравняем момент $M_x(\xi)$ *внутренних* сил, приложенных в сечении балки при $z = \xi$, уравновешивающему его моменту *внешней* распределённой силы $f_y(z)$, приложенной вдоль оси, и продифференцируем полученный интеграл по продольной координате $z = \xi$:

$$M_x(\xi) = \int_\xi^b f_y(z)(z - \xi) dz = \int_\xi^b f_y(z) z dz - \xi \int_\xi^b f_y(z) dz, \quad (14.4)$$

$$dM_x(\xi)/d\xi = -\xi f_y(\xi) - \int_{\xi}^b f_y(z)dz + \xi f_y(\xi) = -\int_{\xi}^b f_y(z)dz \equiv F_y^{npag}(\xi). \quad (14.5)$$

Для консоли, нагруженной одной концевой силой P , перерезывающая сила в сечении постоянна вдоль Oz , а изгибающий момент изменяется линейно.

С учётом (14.5) дифференцируем последовательно уравнение (14.2) по z . Получим уравнения, связывающие деформации с перерезывающей силой:

$$v''' = F_y / (EJ_{xx}), \quad (14.6)$$

или с плотностью распределённой боковой силы:

$$v^{(IV)} = f_y / (EJ_{xx}). \quad (14.7)$$

Таким образом, в общем случае при произвольной плотности распределённой боковой нагрузки f_y , линия изгиба описывается уравнением 4-го порядка. Если $F_y = \text{const}$, то линия будет кривой 3-го порядка. При чистом изгибе концевым моментом внутренний момент вдоль балки постоянен, и решение – кривая второго порядка.

В случае не бесконечно малых деформаций при изгибе следует учитывать локальный поворот, поскольку перерезывающая сила может стать не перпендикулярной линии изгиба. В вычислительной практике это можно приближённо учесть, разбивая балку на небольшие отрезки и путь нагружения – на малые участки, учитывая на каждом малом шаге поворот элемента и изменение направления нагрузки, подобно тому, как это описано для сплошных элементов общего вида.

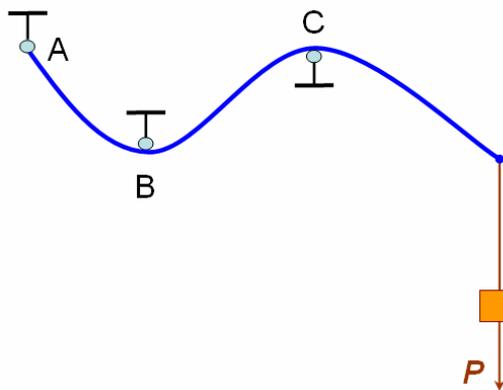


Рис. 14.3. Сплайн, проведённый по точкам A, B, C (spline – рейка)

Энергия упругого изгиба и "сплайны"

Происхождение названия кубической аппроксимации сплайнами связывают с упругим изгибом (см., например, [Форсайт]). Первоначально "сплайном" (spline) называлась гибкая чертёжная линейка для построения плавных линий. Эта линейка с подвешенными грузиками в заданных точках, использовалась чертёжниками для проведения плавных линий по заданным точкам. Как мы видели, при малых перемещениях функция, отвечающая форме изгиба, имеет гладкие первые производные между точками и непрерывные вторые и, как мы видели, при малых перемещениях представляется кубическим полиномом.

Кубические сплайны, обладающие этими свойствами, появились в середине 20в. и начали применяться в теории аппроксимации в 50–60-е гг. Плавность линий, проводимых по "деревянным" сплайнам, связана с механикой.

Составим интеграл упругой энергии при изгибе балки постоянного сечения, в котором учитываем только нормальные напряжения и соответствующие деформации:

$$\begin{aligned} U(a,b) &= \int_a^b \int_A \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} dAdz = E \int_a^b \int_A (v_z''(z)y)^2 dAdz = \\ &= E \int_a^b v_z''(z)^2 \left(\int_A y^2 dA \right) dz = E J_{xx} \int_a^b v_z''(z)^2 dz. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Упругая энергия участка балки (a,b) оказывается пропорциональной интегралу от квадрата кривизны. Учитывая принцип минимума потенциальной энергии при упругой деформации, мы заключаем, что форма консоли, нагруженной только на конце, отвечает минимуму этой интегральной кривизны линии, и эта форма при малых изгибах (относительно толщины консоли) приближённо описывается кубической параболой.

Пусть, например, нам надо через три точки А, В, С (рис. 14.3) провести плавную кривую с минимальным квадратом кривизны. Закрепим металлическую линейку шарнирно слева в точке А и со скольжением – в точке В. Если на правом конце линейки подвесить груз (приложить сосредоточенную силу, направленную вниз), который сгибает её до касания линейкой точки С, то форма линейки будет отвечать "самой плавной" кривой, проведённой через точки А, В и С. Эта кривая между точками А, В и С будет состоять из двух отрезков кубической параболы. При больших перемещениях следует рассматривать полную форму уравнения (6.14), к тому же, гипотеза плоских сечений, на которой оно основано, может быть не вполне точна. В этом случае кубичность по z для кривой с минимальным квадратом кривизны может выполняться только приближённо.

Задача. Останкинская телебашня изготовлена (до высоты 385м) из бетона и преднапряжена 132-мя стальными тросами, создающими сжимающие осевые напряжения. Зачем? Оценить требуемое минимальное усилие в одном тросе (Указание – оценить максимальную нагрузку (ветровую, постоянную во времени), задаться средним радиусом башни – считать её трубой; полное усилие ~100МН).

14.4. Построение изгибного КЭ

Под построением изгибного двухузлового КЭ подразумевается выбор обобщённых перемещений и построение функций формы $\varphi_i(z)$ от продольной координаты z , таких, что обобщённые перемещения в любой точке КЭ могут быть вычислены по формуле (10.2), и могут быть построены аналоги матрицы деформации и матрицы упругости, приведённых выше для случаев полноразмерных элементов. После этого матрица жёсткости конструкции определяется в рамках стандартной техники дискретизации МКЭ – определение элементных матриц жёсткости, учёт равновесия сил, формирование алгебраической системы для неизвестного алгебраического вектора перемещений. Случай неупругости (пластичности) здесь не рассматривается, но, поскольку расчётный алгоритм будет вполне аналогичен ранее описанному (расчёт перемещений, деформаций, напряжений, обновление нагрузок и далее – в цикле), вычислительная процедура, например, модели пластичности вполне может быть внедрена в этот алгоритм, с надлежащими коррекциями матрицы определяющих соотношений и др.

Функции формы изгибного КЭ

В отличие от общего случая многомерных КЭ, где общий вид решения заранее не известен, и функции формы выбираются на основе компромисса между порядком аппроксимации и простой вычислений, в случае изгибного элемента распределение перемещений вдоль него может быть построено на основе элементарной теории изгиба, и вид функций формы вполне этим определён. Как и в случае многомерного КЭ, принимается, что сосредоточенные силы приложены в узлах элемента (концах стержня). Из уравнения (14.6) следует, что функция смещения нейтральной линии, распределённого по длине элемента, будет тогда полиномом степени 3 от продольной координаты – единственной в конечном элементе. Кубический полином $p_3(z)$ имеет 4 коэффициента:

$$v(z) = p_3(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3. \quad (14.9)$$

Необходимо определить эти коэффициенты, для чего надо построить четыре уравнения: аналогично рассмотренному выше случаю 3-угольного плоского элемента,

используем метод неопределённых коэффициентов. Т.к. значения функции $v(z)$ в промежуточных точках неизвестны, значения для определения коэффициентов могут быть заданы только в узлах. Это определяет количество обобщённых узловых координат: в каждом узле задаются не одна, а две степени свободы: обобщённые узловые перемещения. В каждом из узлов 1 и 2 обозначим их как пары (v_1, θ_1) , (θ_2, v_2) .

Очевидно, что одно из этих обобщённых перемещений в узлах должно задавать смещение нейтральной линии (v_1 и v_2), поскольку непрерывность $v(z)$ есть необходимое условие *совместности* узловых перемещений соседних КЭ. Второе требование на непрерывность компонент обобщённых перемещений в точке соединения элементов вытекает из условия *равновесия внутренних сил* – в общем узле соседствующих элементов внутренние силы между ними взаимоуравновешены (в общем случае присутствует также внешняя узловая сила, что рассматривается в процедуре задания граничных условий).

Чтобы удовлетворить требованию равновесия, необходимо выполнение условия непрерывности первых производных перемещений по продольной координате. Это следует из того, что при отсутствии поперечной силы в месте соединения КЭ будет состояние чистого изгиба, описываемое уравнением (14.2). В уравнение для чистого изгиба входит вторая производная от перемещения $v(z)$, поэтому требуется непрерывность угла наклона в узле, т.е., первой производной перемещения по длине, поскольку при малых углах $\theta \sim dv(z)/dz$.

Таким образом, на каждой из двух границ элемента выполнены условия:

$$v(z_1) = v_1 \quad , \quad v(z_2) = v_2 \quad , \quad (14.10)$$

$$v_z'(z_1) = \theta_1 \quad , \quad v_z'(z_2) = \theta_2 \quad . \quad (14.11)$$

Здесь z_1, z_2 – координаты узлов элемента, локальные или глобальные, θ_1, θ_2 – значения производных на границах элемента. Значения перемещений и их производных – общие для обоих КЭ в местах их соединения (нет узловой силы). Для изгиба балки в двух плоскостях количество степеней свободы, соответственно, удваивается.

Подставим в (14.9) значения четырёх неизвестных пока обобщённых перемещений, заданных в 2–х узлах элемента (по паре на каждый узел), и приравняем получившихся выражений самим этим перемещениям. После нахождения коэффициентов a_i (14.9) может быть преобразовано к общей форме (10.2) для интерполяции перемещений в точке z конечного элемента через узловые значения:

$$v(z) = \varphi_1(z) v_1 + \varphi_2(z) \theta_1 + \varphi_3(z) v_2 + \varphi_4(z) \theta_2, \quad (14.12)$$

где $\varphi_k(z)$ – линейно независимые кубические полиномы, которые в данном случае служат функциями формы изгибного конечного элемента.

Определим коэффициенты аппроксимаций (14.9). Используем внутреннюю систему координат элемента, аналогичную той, что была использована для стержня. В ней координаты узлов элемента $z_1 = 0$, $z_2 = L$ неизменны, вследствие предположения об относительной малости вертикальных перемещений в КЭ. Условия (14.10)–(14.11) на производные в этих точках приводят к линейной системе уравнений для коэффициентов a_k в (14.9):

$$\begin{aligned} a_0 &= v_1 \\ a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 &= v_2 \\ a_1 &= \theta_1 \\ a_1 + 2 a_2 L + 3 a_3 L^2 &= \theta_2 \quad , \end{aligned}$$

решение которой:

$$a_0 = v_1$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \theta_1 \\
a_2 &= 3(v_2 - v_1)/L^2 - (2\theta_1 + \theta_2)/L \\
a_3 &= 2(v_1 - v_2)/L^3 + (\theta_1 + \theta_2)/L^2.
\end{aligned} \tag{14.13}$$

Для идентификации коэффициентов общей интерполирующей функции в форме (14.12) подставляем в него эти коэффициенты. После приведения подобных слагаемых при узловых величинах $(v_1, v_2, \theta_1, \theta_2)$ получим функцию узловых перемещений в виде конечно-элементной аппроксимации общего вида, выраженную через обобщённые координаты:

$$v(z) = (1 - 3z^2/L^2 + 2z^3/L^3) v_1 + (z - 2z^2/L + z^3/L^2) \theta_1 + (3z^2/L^2 - 2z^3/L^3) v_2 + (z^3/L^2 - z^2/L) \theta_2.$$

Это выражение аналогично выражению (10.2) для плоского элемента. Коэффициенты при перемещениях v_k и углах θ_k , $k=1, 2$ – это искомые функции формы $\phi_i(z)$, $i=1, \dots, 4$, зависящие от z по кубическому закону. Подчеркнём, что углы (θ_1, θ_2) являются независимыми переменными, определяемыми, наряду с перемещениями (v_1, v_2) , в процессе решения.

Вторая производная интерполирующей функции по z , фигурирующая в определении деформации, получается непосредственно:

$$v''(z) = \phi_1''(z) v_1 + \phi_2''(z) \theta_1 + \phi_3''(z) v_2 + \phi_4''(z) \theta_2. \tag{14.14}$$

Напомним, что при анализе напряжённого состояния стержня нас интересуют только нормальные напряжения при изгибе, рассмотренные выше в гл. 6.

Дискретное уравнение равновесия изгибного КЭ

Для дискретизации МКЭ используем метод перемещений. Определим сначала элементные матрицы жёсткости изгибных КЭ, из которых затем собирается глобальная матрица жёсткости. Введём вектор $\{d\}$ обобщённых перемещений в элементе, матрицу функций форм $\{\phi\}$ и матрицу деформаций $[B]$ в виде:

$$v(z) = \{\phi\}\{d\}, \quad v''(z) = \{\phi''\}\{d\} \equiv [B]\{d\}, \tag{14.15}$$

где использовано соотношение (14.14) и -

$$\{d\} = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}^T, \quad \{\phi\} = \{\phi_1(z), \phi_2(z), \phi_3(z), \phi_4(z)\}^T, \quad \{\phi''\} = \{\phi_1''(z), \phi_2''(z), \phi_3''(z), \phi_4''(z)\}.$$

Матрица деформаций $[B]$ (здесь это вектор–строка), составлена вторыми производными функций формы. Это следует из выражения для напряжений в изгибном элементе, основанного на соотношениях (6.6)–(6.9) (рассматриваются нормальные напряжения в плоском сечении $A(z)$, координата y перпендикулярна линии изгиба):

$$\sigma(y, z) = E \varepsilon = E v''(z) y = E(\{\phi\}^T\{d\})|_z y = E(\{\phi\}^T)_z \{d\} y = E [B]\{d\} y.$$

Интерпретация следующая: при изгибе концевой силой в плоскости Oz напряжённое состояние в любой точке плоскости поперечного сечения стержня вычисляется через момент внутренних сил в данном сечении, взятый относительно центра изгиба, который может быть определён через вторую производную функции перемещения. Подчеркнём, что, хотя изгиб элемента представляется распределением смещения центральной линии, напряжённое состояние и работа внутренних сил относятся ко всему стержню, т.е. интегрирование проводится по всему объёму элемента.

Как и в случае полноразмерных элементов, для численного представления условия равновесия всего элемента используем принцип равенства работ внутренних сил и узловых сил, задаваемых вектором $\{F\}$ узловых сил, на виртуальном обобщённом перемещении. Узловое виртуальное перемещение задаётся вектором $\delta(z) = \{\delta v_1, \delta \theta_1, \delta v_2, \delta \theta_2\}$, это отклонение от искомого деформированного состояния $v(z)$, заданного узловым

вектором $\{\delta\}$, $\|\delta\| \ll \|d\|$. Виртуальное перемещение в точках КЭ приводит к распределённой виртуальной деформации $\delta\varepsilon$, аппроксимируемой с помощью приведённых выражений.

Работа внутренних сил, в соответствии с принятым приближением, равна работе осевых напряжений в объёме элемента при его деформировании. Интегрируя по объёму:

$$\begin{aligned} \{\delta\}^T \{F\} &= \int_V \sigma(y, z) \delta\varepsilon(y, z) dV \approx \int_V E v''(z) \delta v''(z) y^2 dV = \int_V E v''(z) \delta v''(z) \left(\int_V y^2 dA \right) dz = \\ &= J_{xx} E \int_V v''(z) \delta v''(z) dz = Q \int_V [B] \{\delta\} [B] \{d\} dz = Q \int_V (\{\delta\} [B])^T [B] \{d\} dz = \\ &= Q \{\delta\}^T \left(\int_V [B]^T [B] dz \right) \{d\} \equiv \{\delta\}^T [k] \{d\}, \end{aligned} \quad (14.16)$$

где обозначено $J_{xx} E = Q$ и введена матрица жёсткости конечного элемента. При преобразованиях мы воспользовались тем, что для скалярной величины – произведения строки на столбец, $[B] \{\delta\} = ([B] \{\delta\})^T = \{\delta\}^T [B]^T$. Произведение $[B]^T [B]$ столбца на строку – это матрица размером 4×4 , составленная из попарных произведений вторых производных функций форм вида $\varphi''_i \varphi''_k$. При непосредственном вычислении интеграла удобно перейти к внутренней координате элемента, $\xi = (z - z_1)/L = (z - z_1)/(z_2 - z_1)$, которая изменяется вдоль его длины от 0 до 1.

Определения узловых сил, которые непосредственно используются и при задании граничных условий, следуют из условий нагружения стержня. Вводится вектор *обобщённых узловых сил*, отвечающих силовой и моментной нагрузкам. В левой части (14.16) при изгибе относительно Ox берётся пара перерезывающих сил F_y , приложенных на концах элемента, и изгибающих моментов M_x :

$$\{F\} = \{P_1, M_1, P_2, M_2\}^T.$$

Это следует из определения работы сил и моментов на обобщённом виртуальном перемещении $\{\delta\}$ заданного выше вида:

$$\{\delta\}^T \{F\} = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\} \{P_1, M_1, P_2, M_2\}^T = P_1 \delta v_1 + M_1 \delta \theta_1 + P_2 \delta v_2 + M_2 \delta \theta_2 \quad (14.17)$$

Используя произвольность виртуального перемещения $\{\delta\}$, получим условие равновесия виртуальных работ внутренних и внешних сил для элемента в виде

$$[k] \{d\} = \{F\},$$

где матрица жесткости элемента –

$$[k] = Q \int_V [B]^T [B] dz. \quad (14.18)$$

В матрицу жёсткости входят модуль упругости E , момент инерции $J = J_{xx}$ сечения, длина балки. При плоском изгибе балки достаточно задать толщину балки в направлении Oy . При рассмотрении изгиба также относительно оси Oy надо знать и момент инерции или толщину элемента и для этого направления. Эти параметры и длина L должны быть заданы для элемента в исходных данных (рис.14.1). Размеры матриц жёсткости при рассмотрении изгиба вокруг обеих поперечных осей увеличатся вдвое. При объединении матриц балочных элементов в отсутствие сосредоточенных сил и моментов полные обобщённые узловые силы в местах их сочленения – нулевые. На краях должны быть заданы необходимые условия закрепления или нагружения.

Силовые граничные условия задаются как узловые обобщённые силы. Условия по перемещениям задаются в полной аналогии с полноразмерным случаем.

Описанный КЭ пригоден только для моделирования изгиба, но в нём нетрудно учесть также растяжение (сжатие) осевой силой F_z . Пользуясь принципом суперпозиции выражение (6.10) для полного нормального напряжения переписывается в виде суммы нормального изгибного и чисто растягивающего напряжений:

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}^b + E\varepsilon_{zz}^s \approx Ev''y + Ew'_z.$$

Продольное удлинение w полагается однородным по сечению, оно учитывается независимо от поперечных перемещений. При этом должны быть добавлены соответствующие слагаемые в векторы перемещений, в вектор узловых сил и в матрицу жёсткости.

15. Динамические явления и методы их количественного описания

15.1 Введение: общая классификация динамических задач

В задачах динамики существенно ускорение, испытываемое точками тела при приложении нагрузки. Это имеет место, например, при распространении колебаний. Универсального критерия "динамичности" движения материального тела нет, но, рассматривая характерные времена и другие масштабы задачи можно понять, существенно ли ускорение для НДС. Такими масштабами могут быть время изменения нагрузки, характерное время изменения перемещений в точках, время прохождения звуковой волной характерного размера тела, относительный вклад сил инерции в напряжённое состояние и т.п.:

$$\tau, u/\dot{u}, L/c, |\rho\ddot{u}/\sigma_e|, \dots \quad (15.1)$$

Типичное динамическое нагружение – удар – быстрое нагружение контактной силой при соударении твёрдых тел, воздействии сжатого газа и т.п. При достаточно высокой амплитуде воздействия деформирование материала будет неупругим, возможно разрушение, изучение которого часто служит основной задачей исследования. Неупругое деформирование поглощает избыточную начальную энергию воздействия, и возмущение с уменьшенной амплитудой распространяется в виде упругих волн. В теле конечных размеров возможны только стоячие волны, имеющие частоту, близкую к одной из собственных частот системы. В металлах затухание может быть слабым, и собственные колебания могут длиться относительно долго, как, например, в колоколе. В технике интерес представляет резонансный отклик системы на периодическое внешнее воздействие, поскольку нагружение с собственной частотой чревато разрушением конструкции. Соответственно, обычно рассматриваемые динамические явления можно условно разбить на 2 класса, отвечающие импульсным (ударно-волновым) явлениям и колебательным (волновым) процессам. Как импульсные, так и волновые задачи могут быть рассмотрены с помощью общей численной методики, изложенной ниже. В сложных конструкциях основной интерес чаще представляют собственные частоты и формы колебаний, которые рассчитываются с помощью специфического аппарата, предъявляющего меньшие требования к ресурсам.

Приведём простой пример динамической задачи: ***Вертикально расположенный упругий стальной стержень падает на жёсткий пол. Оценить максимальную деформацию стержня.***

При контакте нижнего конца стержня с полом в момент $t = 0$ нижний конец останавливается, а остальной материал будет продолжать движение до прихода волны сжатия снизу. Для оценок полагаем, что в момент $t = \tau$ начала разгрузки, на котором весь стержень остановится, и деформация станет максимальной, массовая скорость в любом сечении стержня – нулевая, и вся его кинетическая энергия перешла в потенциальную энергию упругой деформации:

$$M \dot{u}^2 / 2 = M/\rho E \epsilon^2 / 2 .$$

Здесь \dot{u} – скорость, приобретённая стержнем при падении к моменту контакта с полом. Выражаем деформацию в момент максимального сжатия –

$$\varepsilon = \frac{\dot{u}}{\sqrt{E/\rho}}. \quad (15.2)$$

Величина $c = \sqrt{E/\rho}$ отвечает величине скорости продольной звуковой волны в бесконечной упругой среде. Это можно показать, оценив деформацию из метрических соотношений. К моменту τ , перед началом отскока, волна вдоль стержня пройдёт длину $L = c\tau$, дальний конец стержня пройдёт длину $\Delta L = \dot{u}\tau$, откуда

$$\varepsilon = \Delta L/L = \dot{u}/c.$$

Продольная скорость звука c в металлах составляет величину порядка нескольких км/с. Возьмём оценкой порога пластичности $\varepsilon = 0,002$. Это отвечает скорости соударения $5 \div 7$ м/с – падение с высоты 2 м.

Данную задачу, в сравнении с квазистатикой, можно рассматривать в лабораторной системе так: внешняя сила ускоряет тело, после чего оно соударяется со стенкой и испытывает деформацию – появляются внутренние силы. В системе отсчёта стержня можно сказать, что в процессе ускорения сил не было (состояние покоя), затем на него внезапно подействовала внешняя сила со стороны пола. Обе точки зрения важны: вторая – для определения сил, действующих на стержень, первая – для расчёта общей кинематики движения самого стержня и деформации пола, если это учитывается.

Приведённое рассмотрение упрощено в ряде отношений. Во-первых, мы не учитывали деформирование преграды – материала пола, на который падает стержень. Это может изменить профиль нагружения края стержня и характер деформирования, поскольку сталь обычно более жёсткая, чем пол, и испытываемое стержнем ускорение будет меньшим – пол частично демпфирует. Во-вторых, мы не учли, что стержень может деформироваться поперёк – расплющиваться из-за отсутствия стеснения на боковых границах. В общем случае, мы считали деформацию одноосной и волну – продольной. В действительности в стержне будут поперечные перемещения, которые максимальны на боковой поверхности, и наряду с продольной волной возникнут отстающие от неё поперечные волны. При малых скоростях пластическая деформация будет иметь место только в соударяющемся конце стержня, далее начальное возмущение распространяется в стержне во все стороны, деформируя границы. Возникает система упругих волн, которые распространяются с разной скоростью. Если стержень – тонкий (провода), то при ударе могут быть изгибные деформации. Все эти вопросы требуют детализации постановки задачи.

В общем случае картина динамического воздействия может быть очень сложной, особенно – колебательного характера. В принципе, такие задачи могут быть решены по рассмотренной далее общей схеме численной дискретизации динамической задачи. Но такие расчёты часто весьма затратны, а в случае тонкостенных конструкций с большим количеством контактов могут быть очень неточными или просто невыполнимыми. Поэтому анализ колебательных явлений и следующие из него редукции исходной общей постановки динамической задачи играют важнейшую роль. Они рассмотрены после нижеследующего общего введения в МКЭ для динамических задач.

15.2 Дискретизация МКЭ для динамических задач

15.2.1 Система уравнений динамики твёрдого деформируемого тела.

По 2–му 3–му Ньютона ускорение и движение точек материального тела связаны с приложенными внешними и связанными с ними внутренними силами. Для описания движения в динамике, как и в квазистатике, можно применить "текущий лагранжев"

подход: на каждом шаге по времени элемент преобразуется, и с ним преобразуются компоненты тензора напряжений, взятые в неподвижной системе отсчёта. Введя некоторые естественные предположения относительно описания ускорения, можно пользоваться силовыми (тензор напряжений) и кинематическими (тензор деформации) характеристиками состояния, построенными для случая малых квазистатических деформаций. Напомним, что в лагранжевом подходе координаты точек в момент времени t отнесены к координатам (a_1, a_2, a_3) точек тела в некоторый предшествующий момент времени $t=t_0$:

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t), \quad a_i = x_i(a_1, a_2, a_3, 0), \quad u_i(a_1, a_2, a_3, t) = x_i(a_1, a_2, a_3, t) - a_i. \quad (15.3)$$

На шаге по времени Δt перемещения точек:

$$u_i(a_1, a_2, a_3, t + \Delta t) = x_i(a_1, a_2, a_3, t + \Delta t) - x_i(a_1, a_2, a_3, t) = x_i(a_1^*, a_2^*, a_3^*, \Delta t) - a_i^*,$$

где $a_i^* = x_i(a_1, a_2, a_3, t)$ – преобразованные координаты точки на шаге.

Ускорение (или скорость изменения импульса) ед. объёма материальной частицы обусловлено внутренней и внешней силами в ед. объёма. Уравнение движения можно получить, повторив рассуждения, сделанные в гл. 1 при выводе уравнения равновесия, учтя, что силы, приложенные к малому объёму, не уравновешены, а вызывают его ускорение:

$$\rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i. \quad (15.4)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений Коши, ρ – плотность, ρf_i – объемная сила, \ddot{x}_i – ускорение.

В динамической постановке задачи надо определить перемещения точек тела в зависимости от времени (закон движения) и напряжённое состояние при движении из исходного положения в момент t_0 в неизвестное новое положение в момент t :

$$A(a_1, a_2, a_3, t_0) \rightarrow X(x_1, x_2, x_3, t),$$

Исходные и новые координаты отнесены к некоторой неподвижной декартовой системе координат – "лабораторной системе". В начальный момент $t=t_0$ должны быть заданы начальные условия по координатам и скоростям:

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t_0) = a_i \quad (15.5)$$

$$\dot{u}_i(x, t_0) = \dot{u}_i^0(x, t_0)|_{x \in \Omega}.$$

Заданы граничные условия по напряжениям на части границы $\partial\Omega_S$:

$$\sigma_{ij} n_j = p_i, \quad (15.6)$$

и граничные условия по координатам (скоростям) на части границы $\partial\Omega_U$:

$$x_i(t) = b_i(t) \quad \text{или} \quad \dot{u}_i(x_1, x_2, x_3, t) = U_i(t). \quad (15.7)$$

В случае контакта поверхностей тел 1 и 2 должно выполняться условие непрерывности нормального напряжения на границе контакта $\partial\Omega_C$:

$$(\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}) n_j = 0. \quad (15.8)$$

Здесь $\{n_j\}$ – вектор единичной внешней нормали к элементу границы.

Уравнение движения (15.4) описывает изменение импульса деформируемого твёрдого тела. В эйлеровом описании, отвечающем фиксированной в пространстве сетке конечных элементов, существенен также закон сохранения массы. Но для лагранжевой частицы,

через границы которой вещество не перетекает, сохранение массы тривиально и определяет текущую величину средней плотности ρ данного малого объема V :

$$\rho V = m = \text{const} , \quad \text{или} \quad - \rho \epsilon = \rho_0 , \quad (15.11)$$

где $\epsilon = V/V_0$ – относительное изменение объема.

Изменение полной энергии частицы рассматривается, если заметная часть механической энергии переходит во внутреннюю. В динамике имеют дело с производными по времени, т.е. с соответствующими мощностями. Изменение полной энергии складывается из изменения кинетической энергии, мощности работы приложенных сил (внешних и внутренних) и источников (стоков) тепла:

$$\dot{E} = \dot{T} + \dot{W} + \dot{U} + \dot{Q} \quad (15.9)$$

Если диссипация и источники тепла отсутствуют, то при отсутствии внешних механических воздействий это уравнение выражает сохранение механической энергии: $\dot{T} + \dot{W} + \dot{U} + \dot{W} = 0$, где \dot{W} – мощность работы внешних объёмных сил. Сохранение механической энергии следует из уравнения движения (15.4): умножая его на \dot{x} , получим

$$\begin{aligned} \rho \dot{x}_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} &= \rho \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}_i^2}{2} = \dot{x}_i \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right) = \frac{\partial \dot{x}_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \dot{W} = \frac{\partial \dot{x}_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \dot{W} = \\ &= \frac{\partial \dot{x}_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} + \dot{W} \end{aligned}$$

Здесь учтено равенство $\dot{u}_i = \dot{x}_i$, разложение тензора градиентов скоростей деформаций на тензор скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ik}$ и угловой скорости и то, что полная свёртка симметричного (напряжений) и антисимметричного (угловой скорости) тензоров равна нулю. Интегрируем по объёму равенство

$$\dot{T} \equiv \rho \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}_i^2}{2} = \frac{\partial \dot{x}_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} + W - \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} \equiv P + W - \dot{U} ,$$

и для первого слагаемого P правой части воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского, интеграл будет нулевым. Интеграл от слагаемого \dot{U} будет мощностью работы внутренних сил, интеграл от W – полной мощностью работы внешних объёмных сил. Нетрудно видеть, что данное рассмотрение аналогично рассуждениям при выводе принципа виртуальной работы.

Как и в статике, мощность работы внутренних сил можно разложить на мощность сжатия, оказываемого силами давления, и мощность формоизменения. Последняя при неупругости связана с пластическими деформациями и диссипацией. Раскладывая тензоры на девиаторную и шаровую составляющие, получим для полной мощности, как и ранее, в гл. 3, мощность работы формоизменения и мощность сил сжатия:

$$\dot{U} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = (s_{ij} - p \delta_{ij})(\dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\epsilon} \delta_{ij}) = s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - p \dot{\epsilon} .$$

Величина $\dot{\epsilon}$ – это скорость объёмной деформации, фигурирующая в термодинамическом описании системы. Диссипацией (нагревом) при формоизменении обычно можно пренебречь.

В общей форме уравнения энергии, описывающего баланс полной энергии (15.10), учитывается изменение во времени составляющих баланса, связанных с деформированием и теплопереносом. В термодинамике изменение внутренней энергии замкнутой системы

входит, обычно через температуру, в уравнение состояния, которое связывает, в частности, давление со степенью сжатия ϵ (или удельным объёмом) и температурой θ :

$$p=p(\epsilon, \theta) .$$

При малой деформации влиянием температуры на давление часто можно пренебречь. Например, используемое для жидкостей эмпирическое уравнение Тэта имеет вид:

$$p=p(\epsilon) , \quad p = p_0 + B \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^b - 1 \right) ,$$

где B и b – константы материала.

Отметим, что уравнение состояния используется только для вычисления давления в определяющем соотношении, и в лагранжевых координатах, в которых объём и плотность – это характеристики данного элемента объёма, перенос тепла связан непосредственно с движением этих элементов, если теплопроводность не важна. Поэтому уравнение энергии как уравнение в частных производных не требуется. В задачах динамики твёрдого тела молекулярный теплоперенос за характерное время процесса, как правило, пренебрежимо мал, либо может быть учтён в численном расчёте как дополнительный процесс, идущий в деформируемой системе параллельно деформации. Аналогично, влияние теплопереноса (теплопроводности) на колебательное движение рассматривается, при необходимости, как отдельный фактор. То же можно сказать и про тепловое излучение при рассмотрении движения газа. Поэтому при изложении дискретизации МКЭ мы, в полной аналогии со случаем квазистатики, ограничимся только уравнением движения, привлекая соответствующие кинематические и определяющие соотношения.

15.2.2. Пространственная дискретизация уравнений динамики ДТТ

Дискретизация системы уравнений (15.4-15.8) и решение получаемой системы алгебраических уравнений проводятся отдельно по пространственным координатам и времени, как это было сделано выше для уравнения теплопроводности. Механическая интерпретация этой процедуры расщепления состоит в том, что динамическая задача формулируется как (квази)статическая для текущего момента времени в локальной системе отсчёта каждой материальной частицы тела: известный принцип Д'Аламбера (см. [Голдстейн]) гласит, что силы инерции, возникающие в неинерциальной системе частицы, трактуются наравне с прочими объёмными силами. Динамической системе в каждый момент времени соответствует статическая, нагруженная определёнными внешними силами, известными на каждом шаге по времени, в которой уравнение (15.4) примет вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho(f_i - d^2 u_i / dt^2) = 0 , \quad u_i = u_i(x), \quad x \in \Omega \quad (15.11)$$

Всё, что говорилось ранее про квазистатические системы, справедливо и в этом случае квазиравновесия. При этом время является не просто параметром нагружения, а новой переменной, фигурирующей в объёмном источнике импульса, определяющей изменение всего состояния тела. Это изменение формулируется в дифференциальной форме, и по времени необходимо интегрировать. Очевидно, что точка отсчёта интегрирования должна быть единая для всех КЭ. Единая лабораторная система отсчёта, необходимая при сборке матрицы жёсткости, включает и единый отсчёт времени. Различие локальных неинерциальных систем отсчёта конечных элементов, вводимых для получения квазиравновесия, состоит в ускорении, которое проявляется как внешняя объёмная сила.

15.2.2.1. Обобщённая формулировка уравнения квазиравновесия

Для пространственной дискретизации используем метод взвешенных невязок, в котором производная скорости по времени полагается просто некоторой функцией источника. В соответствии с процедурой метода взвешенных невязок, рассмотрим

обобщённую формулировку "замороженного" уравнения движения (15.11). Умножим его почленно на пробную функцию $\omega = \omega(x, y, z)$ из некоторого семейства допустимых (дифференцируемых нужное количество раз и совместимых с граничными условиями по перемещениям/скоростям на границе области $\partial\Omega_U$), проинтегрируем получившееся уравнение по объёму:

$$\int_{\Omega} \omega \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} \omega \rho (f_i - d^2 x_i / dt^2) d\Omega = 0. \quad (15.12)$$

Обобщённое (слабое) решение уравнения (15.4) – это функция перемещений (набор трёх компонент смещений относительно начального положения) и связанных с ними компонент тензоров деформаций и напряжений, удовлетворяющих (15.12) при любых допустимых $\omega(x, y, z)$ и заданной аппроксимации по времени, что по факту означает решение уравнения равновесия на каждом шаге по времени, в полной аналогии с квазистатикой.

Функционал (15.12) имеет прямой физический смысл: наборы из трёх пробных функций $\omega = \omega(x, y, z)$ можно рассматривать как векторы виртуального перемещения с тремя физическими компонентами, $\vec{\omega} = \{\delta u_k(x, y, z)\}$, $k = 1, 2, 3$, которые могут браться независимо друг от друга. В этом случае (15.12) можно рассматривать как работу внутренних и внешних сил на этих перемещениях – суммируя слагаемые, получим скалярное произведение силы на перемещение за единицу времени, т.е. полную возможную работу главной силы, тождественно равную нулю в каждой материальной частице и во всём объёме:

$$\int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i \rho (f_i - d^2 x_i / dt^2) d\Omega = 0. \quad (15.13)$$

Интегрирование в (15.13) проводится по объёму системы на текущий момент времени, при вычисленных производных по времени. Напомним, что эквивалентность в обратную сторону, т.е. формулировки (15.13) – решению квазистатического уравнения (15.11), дополненного кинематическими соотношениями и граничными условиями, следует из вариационного принципа для задач МДТТ и выполнена при любом определяющем соотношении материала (которое сюда просто не входит).

Дальнейшее повторяет вывод принципа возможных перемещений в гл. 4 – преобразованию (15.13) к виду суммы виртуальных работ сил, приложенных к системе. Раскрывая в левой части (15.13) слагаемое с дивергенцией тензора напряжений по формуле интегрирования по частям и заменяя интеграл с полной дивергенцией по формуле Гаусса–Остроградского, получаем:

$$\int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega = - \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta u_i \sigma_{ij} n_j dA.$$

Подставляем это в (15.13):

$$\int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_i \rho (f_i - d^2 x_i / dt^2) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta u_i \sigma_{ij} n_j dA. \quad (15.14)$$

Примем во внимание граничные условия (15.5)–(15.6) на участках границ $\partial\Omega_U$, $\partial\Omega_S$, $\partial\Omega_C$. При этом учитываются условия по перемещениям на границе $\partial\Omega_U$, $\delta u_i(x, y, z) = 0$, и по скорости, которые предполагаются интегрируемыми связями [Голдстейн]. В частности, в условие не входит сила трения, зависящая от скорости, и в любой момент известно положение граничных точек, вычисленное путём интегрирования скорости на всём интервале времени. На остальных границах отсутствуют напряжения, и интеграл по всей

границе, как и ранее, сводится к сумме интегралов по границам задания силовых граничных условий:

$$\int_{\partial\Omega} \delta u_i \sigma_{ij} n_j ds = \int_{\partial\Omega_S} \delta u_i \sigma_{ij} n_j ds + \int_{\partial\Omega_C} \delta u_i \sigma_{ij} n_j ds .$$

Далее, преобразуя первое слагаемое в правой части (15.14), получим –

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} \delta u_{(i,j)} \sigma_{ij} d\Omega \equiv \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \rho (f_i - d^2 x_i / dt^2) \delta u_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_S} \delta u_i P_i ds + \int_{\partial\Omega_C} \delta u_i \sigma_{ij} n_j ds \end{aligned}$$

Здесь при свёртке тензоров в левой части использовано тождество $t_{ik} s_{ik} = t_{(ik)} s_{ik}$, где операция $t_{ik} \rightarrow t_{(ik)}$ означает симметрирование тензора: $t_{(ik)} = 1/2(t_{ik} + t_{ki})$. Симметрирование тензора градиентов деформаций $\delta u_{(i,j)}$ даёт, как мы помним, тензор деформаций на виртуальных перемещениях: $\delta u_{(i,j)} = \delta \varepsilon_{ij}$, и в левой части мы получили работу внутренних сил W_I . Полученное в итоге соотношение представляет собой принцип виртуальных перемещений для "замороженной" на шаге по времени конфигурации, в которой в мощность работы объёмных сил W_V включена мощность работы сил инерции, а работа внешних сил W_B учитывает приложенные силы на границах:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \rho (d^2 x_i / dt^2 - f_i) \delta u_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_S} \delta u_i P_i ds + \int_{\partial\Omega_C} \delta u_i \sigma_{ij} n_j ds . \quad (15.15)$$

или, как упоминалось выше –

$$W_I = W_V + W_B .$$

Условие (15.5) на начальные скорости в точках также приводится к обобщённой форме:

$$\int_{\Omega} \omega u_i(x, t_0) d\Omega = \int_{\Omega} \omega \dot{u}_i^0(a, t_0) d\Omega .$$

15.2.2.2 Дискретизация МКЭ

Начальный этап процедуры дискретизации, как и ранее, включает разбиение на конечные элементы и задание аппроксимирующих функций (функций форм) в пределах элементов. Основными неизвестными служат компоненты перемещений в узлах, взятые в зависимости от времени. Узловые точки КЭ–разбиения общим количеством n при этом рассматриваются как точки задания набора дискретных базисных функций $\{N_i(x, y, z)\}$, $i=1, \dots, n$, и формальное приближённое решение задачи (15.3)–(15.8) в области Ω ищется как комбинация этих функций, взятых с весами, равными значениям компонент перемещений в узлах КЭ. Базисная функция $N_i(x, y, z)$ (пирамидальная) задана в окрестности каждого из узлов, её сужение на данный конечный элемент, содержащий данный узел, даёт одну из восьми функций формы элемента. За пределами элементов, содержащих данный узел k , базисная функция $N_k(x, y, z)$ равна нулю. Используем метод Бубнова–Галеркина, в котором набор пробных функций совпадает с набором базисных функций, используемых для аппроксимации компонент вектора перемещений в узле.

При дискретном представлении количество линейно независимых уравнений вида (15.11), необходимое для получения пространственной зависимости решения, определяется количеством линейно независимых пробных функций, т.е. в нашем случае – конечно-элементной сеткой и набором функций формы. Разложение решения по

базисным функциям для k -й физической компоненты перемещения в данной точке (x,y,z) имеет вид (11.7):

$$u_k(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^n N_i(x,y,z)u_k^{(i)}(t), \quad k=1, 2, 3, \quad (15.16)$$

где $u_k^{(i)}(t)$ – узловые значения. В полной аналогии с двумерным случаем, рассмотренным в квазистатике, это будет три независимых равенства: интерполяция трёх компонент вектора перемещений $\{u_k\}$ одним и тем же набором базисных функций $\{N_i\}$. В любой точке области выражение (15.16) сводится к интерполяционной формуле по функциям формы элемента, содержащего эту точку. Это же представление справедливо для координат, скоростей и ускорений.

Как и ранее, при матричной записи соотношений неизвестные узловые перемещения представляются в виде матрицы–вектора перемещений $\{d\}$ размерности $3n \times 1$. Аналогично (11.9) вводится матрица базисных функций $[N^{(e)}]$ размером $3 \times 3n$, составленная из нулей и базисных функций. В точке $(x,y,z) \in \Omega$, находящейся внутри некоторого КЭ, содержащего данный узел m : $(x,y,z) \in e^m \subset \Omega$, аппроксимирующее выражение для компонент u_i , $i=1,2,3$ физического вектора перемещения, представляемого матрицей размером 3×1 , записывается в матричном виде как:

$$\{u(x,y,z,t)\}^T = [N] \{d\}^T, \quad (x,y,z) \in e^m \subset \Omega. \quad (15.17)$$

В данном соотношении ненулевыми будут только слагаемые, содержащие базисные функции узлов, принадлежащих данному КЭ.

Деформации в любой точке области по-прежнему определяются с помощью тензора малых деформаций Коши:

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^n \frac{\partial N_m(x)}{\partial x_i} u_{(k)}^{(m)} + \frac{\partial N_m(x)}{\partial x_k} u_{(i)}^{(m)} \right). \quad (15.18)$$

Далее вводится матрица деформаций $[B]$ размером $6 \times 3n$, элементы которой по-прежнему суть производные базисных функций, сводящиеся к производным от функций формы. С её помощью алгебраический вектор деформаций, записанный в виде столбца 6×1 , выражается как:

$$\{\epsilon(x,y,z,t)\} = [B(x,y,z)] \{d(t)\}. \quad (15.19)$$

Определяющее соотношение, связывающее приращения напряжений и деформаций на шаге по времени, запишем, как и ранее, в квазилинейной форме:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \equiv C_{ijkl} u_{(k,l)}.$$

В упругом случае –

$$\{\sigma(x,y,z,t)\} = [E] \{\epsilon\} = [E] [B] \{d\}. \quad (15.20)$$

Рассмотрим подробнее схему сведения интегрального соотношения (15.15) к алгебраической системе. Используются описанные ранее трilinearные (билинейные, линейные в случае размерностей 2 или 1) функции формы на гексаэдральных (4–сторонних или стержневых/изгибных 2–точечных) элементах. Из определения базисных функций и изопараметрических конечных элементов следует, что набор $\{N_i(x,y,z)\}$, взятый для всех узлов данного КЭ–разбиения, будет полным в смысле представления решения в виде аппроксимации по трilinearным функциям формы вида (11.8). Как отмечалось ранее, формальное равенство (15.16), расписанное для точки, принадлежащей некоторому КЭ, есть просто детализация выражения (11.10) через

базисные функции. Следуя общей схеме метода взвешенных невязок (11.27) в интегральное выражение (15.15) следует подставить аппроксимацию (15.16) и следующие из неё соотношения (15.19)-(15.20). С граничными условиями и объёмными силами обходимся так же, как и ранее в гл. 10, вводя функции формы, определённые на двумерных сегментах границы.

В методе Бубнова-Галёркина пробные функции, используемые для записи обобщённого решения, равны базисным функциям, используемым для аппроксимации решения: $\omega_i(x, y, z) = N_i(x, y, z)$. Для того чтобы из интегрального выражения (15.15) получить $3n$ формально независимых уравнений для $3n$ независимых переменных, его надо проинтегрировать поочерёдно с $3n$ линейно независимыми пробными функциями. Мы построили для каждого узла свою базисную функцию координат, и общее количество этих линейно независимых базисных функций равно n , в соответствии с количеством узлов. Поскольку компоненты векторов перемещений формально независимы, уравнение (15.15) может быть написано для набора из $3n$ независимых пробных функций вида $\omega_k^{(i)}(x, y, z) = \{\delta_{k1}, \delta_{k2}, \delta_{k3}\} N_i(x, y, z)$, взятых с некоторыми коэффициентами. Здесь $\omega_k^{(i)}(x, y, z)$ может быть представлено как матрица $[N]$ размером $3 \times n$, δ_{kj} – символ Кронекера, $i=1, \dots, n$ – номер узла, $k=1,2,3$ нумерует координатные направления. Пространство пробных функций фактически является декартовым (прямым) произведением трёх пространств исходных базисных функций $N_i(x, y, z)$, и его размерность равна $3n$. $(3n+1)$ -е уравнение будет линейно зависимым от остальных. Запись интегральных выражений с использованием $N_i(x, y, z)$ ниже будет пониматься в указанном смысле.

Дальнейшие преобразования аналогичны рассмотренным в гл. 10. Введём алгебраический вектор $\{\Delta\}$ виртуальных узловых перемещений размерности $1 \times 3n$: $\{\delta(x, y)\} = [N]\{\Delta\}$, где 3-вектор $\{\delta(x, y)\}$ – функция координат. Введём деформации, построенные на виртуальных перемещениях. В компонентной форме – в окрестности m -го узла, аппроксимация виртуальной деформации, записанная через базисные функции и виртуальные узловые перемещения, записываются по формуле (15.18). В окрестности m -го узла её можно записать в виде:

$$\delta u_{i,k}^m = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k^m}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta u_i^m}{\partial x_k} \right) = \sum_{p(m)} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_{p(m)}^{(e)}(x)}{\partial x_i} \Delta_{(k)}^{p(m)} + \frac{\partial N_{p(m)}^{(e)}(x)}{\partial x_k} \Delta_{(i)}^{p(m)} \right) . \quad (15.21)$$

Здесь $p(m)$ пробегает восемь глобальных номеров узлов одного из конечных элементов (e), содержащих данный узел (m), $N_{p(m)}^{(e)}$ – сужение базисной функции $N_{p(m)}$ узла $p(m)$ на этот конечный элемент, $\Delta_{(i)}^{p(m)}$ – значение i -го узлового перемещения в узле $p(m)$, причём по индексам координат i нет суммирования. В матричной форме, для всей области записываем в полной аналогии с (15.19) –

$$[\delta u_{i,k}] = [B]\{\Delta\} . \quad (15.21)$$

Соотношение для виртуальной работы внутренних сил из (15.15) примет вид

$$\begin{aligned} W_I &= \int_{\Omega} \delta u_{i,k} E_{ikpq} \varepsilon_{pq} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_j(x)}{\partial x_i} \Delta_{(k)}^{(j)} + \frac{\partial N_j(x)}{\partial x_k} \Delta_{(i)}^{(j)} \right) E_{ikpq} \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^n \frac{\partial N_m(x)}{\partial x_p} u_{(q)}^{(m)} + \frac{\partial N_m(x)}{\partial x_p} u_{(q)}^{(m)} \right) d\Omega \end{aligned}$$

В матричном виде:

$$W_l = \{\Delta\}^T \int_{\Omega} [B]^T [E] [B] d\Omega \{d\} \equiv \{\Delta\}^T [K] \{d\} = \{\Delta\}^T \{F\}_{in}^{\Omega}, \quad (15.23)$$

где [E] - это матрица определяющего соотношения, $\{F\}_{in}^{\Omega}$ - вектор внутренних узловых сил.

Далее вводятся алгебраические векторы нагрузок, соответствующие узловым векторам поверхностных сил (граничные условия по нагружению) и объёмных сил. Внося выражения для соответствующих слагаемых уравнения (15.15), запишем его в матричной форме, аналогично ранее рассмотренному в 2D методе перемещений, (10.33) –

$$\{\Delta\}^T \int_{\Omega} ([B]^T [E] [B] \{d\} + [N]^T \rho [N] d^2 \{x\} / dt^2) d\Omega = -\{\Delta\}^T \int_{\Omega} [N]^T \rho \{f\} d\Omega + \{\Delta\}^T \{P\} \quad (15.24)$$

где {P} – узловой вектор граничных нагрузок, определяемый по граничным условиям:

$$\{P\} = \int_{\partial\Omega_p} [N_s]^T \{p(x, y, z)\} dA. \quad (15.25)$$

Ввиду произвольности узлового вектора виртуальных перемещений $\{\Delta\}^T$, его можно опустить, и мы приходим к системе $3n$ линейно независимых уравнений:

$$\int_{\Omega} ([B]^T [E] [B] \{d\} + [N]^T \rho [N] d^2 \{x\} / dt^2) d\Omega = -\int_{\Omega} [N]^T \rho \{f\} d\Omega + \{P\} \quad (15.26)$$

Большинство слагаемых в каждом из уравнений системы – нулевые, поскольку произведение двух базисных функций отлично от нуля только в случае, если они имеют общую область, в которой обе отличны от нуля. Матрица

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [E] [B] d\Omega \quad (15.27)$$

будет матрицей жёсткости, а матрица при ускорениях –

$$[M] = \int_{\Omega} [N]^T \rho [N] d^2 \{x\} / dt^2 d\Omega \quad (15.28)$$

называется **матрицей масс системы**. С помощью введённых матриц уравнение (15.26) можно написать в виде

$$[M] \{\ddot{d}\} + [K] \{d\} = \{F\} \quad (15.29)$$

Здесь в правой части объёмные силы и поверхностные нагрузки объединены в вектор нагрузки {F}. Обе матрицы [M] и [K] симметричны и положительно определены.

15.2.2.3 Матрица демпфирования. Псевдовязкость

Полученное уравнение (15.29) – это система обыкновенных дифференциальных уравнений 2–го порядка относительно функций узловых перемещений, зависящих от времени. 1–е производные по времени в уравнениях отсутствуют, и любое начальное возмущение порождает незатухающие колебания разных частот и форм – моды колебаний. Физически, в случае толстостенных конструкций большая часть мод быстро затухает или несущественна. Для того, чтобы уменьшить их вклад, в расчётах вводят демпфирование в виде слагаемого вида $[C] \{\dot{d}\}$ – произведение скорости на **матрицу вязкого демпфирования** [C]:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{d}\} + [K] \{d\} = \{f\}. \quad (15.30)$$

Обычно используемая форма матрицы [C] в случае матрицы масс общего вида – это т.н. **рэлеевская форма** [C]:

$$[C] = a[M] + b[K],$$

где a и b – коэффициенты, подлежащие определению. Формальное, разрешённое относительно ускорений, аппроксимированное уравнение движения имеет вид

$$\{\ddot{x}\} = [M]^{-1} (-[C]\{\dot{d}\} - [K]\{d\} + \{f\}) \quad (15.31)$$

Таким образом, в общем случае интегрирование по времени требует обращения матрицы масс, вообще говоря, переменной.

При расчёте импульсных нагружений, характеризуемых резкими фронтами и образованием ударных волн, когда вариация давления доминирует относительно сдвиговых сил (в частности, в жидкостях), в вязкое демпфирование добавляется *квадратичное по скорости слагаемое* в виде *псевдовязкости* Неймана–Рихтмайера, известной из газодинамики ("искусственная вязкость"). Это – скаляр, играющий роль дополнительного давления:

$$p_v = \rho d |\dot{\epsilon}| (q_1 d |\dot{\epsilon}| + q_2 c).$$

Здесь ρ – плотность в элементе, $\dot{\epsilon}$ – скорость объёмной деформации, d – характерный размер подобласти, например, кубический корень из объёма КЭ, c – местная скорость звука. Если скорость объёмной деформации положительна, т.е., если идёт разгрузка и материал расширяется, то полагается $p_v = 0$. Поэтому вязкие "квадратичные" силы увеличивают сопротивление материала только при сжатии, работа внешних сил не запасается в паразитных колебаниях, частично диссипирует, что отвечает реальности. Вязкое давление учитывается в общем давлении, и работа псевдовязких сил суммируется в полной внутренней энергии, что в целом соответствует реальности.

Динамические процессы, в которых доминируют ударно–волновые явления, обычно требуют задания уравнения состояния для давления, причём при "средних" давлениях, когда сдвиговые силы сравнимы с силами сжатия (в пределах ~100 кбар), они могут протекать *реологически*, т.е. с явной зависимостью свойств материала от времени (запаздывание текучести, откольные явления и др.). Это – весьма обширная область исследований, тесно связанная с материаловедением. При небольших нагрузках материал часто может рассматриваться как упругий или упруго–пластический с характеристиками, близкими к квазистатическим. Ввиду быстрого затухания движения при импульсной нагрузке, накопление энергии может происходить только при периодическом – колебательном воздействии. Отдельный класс задач составляет распространение упругих или близких к таковым возмущений в бесконечной среде. Типичные относящиеся сюда постановки задач рассмотрены ниже по тексту.

15.2.2.4 Сосредоточенные массы. Явное интегрирование по времени

Уравнения (15.26) динамики дискретной системы могут быть разбиты на n групп (число узлов) по три уравнения (размерность задачи), отвечающих n базисным функциям. Каждому узлу соответствуют 3 уравнения для 3–х степеней свободы в узле. Слагаемое с ускорением в x –направлении в уравнении для m –го узла, представляющее собой сумму интегралов от силы инерции по объёму Ω_m элементов, окружающих узел m , записывается как

$$\int_{\Omega_m} \sum_{(e)} \rho^{(e)} \ddot{u}_x^{(e)} d\Omega = \sum_{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} \rho^{(e)} \varphi_m^{(e)} \sum_k \varphi_k^{(e)} \ddot{u}_k^{(e)} d\Omega = \sum F_m^e \quad (15.32)$$

Ненулевой вклад в этот интеграл дают только элементы, содержащие узел m . Вне этих элементов подынтегральное выражение тождественно равно нулю. Суммирование идет по элементам, окружающим m –й узел, занумерованных индексом (e) , а также по вкладам узлов в каждом элементе (индекс k). Среднее выражение в левой части двух равенств

(15.32) – это слагаемые с узловыми ускорениями, справа – сумма по приложенным силам. Для регулярной сетки 6–гранных элементов в общем положении в каждом уравнении имеются слагаемые с компонентами ускорений и перемещений 27 узлов. При дискретизации по времени ускорения выражаются с помощью конечных разностей через неизвестные перемещения узлов, и в результате получается система квазилинейных уравнений, которая решается методами, аналогичными описанными для статики.

Чтобы иметь возможность использовать явную схему интегрирования по времени, требующую малого шага по времени, но минимума арифметических действий, матрицу масс преобразуют к диагональной – тогда ускорения явно разрешаются относительно остальных величин. Чтобы получить диагональную матрицу масс, представим себе, что массы элементов вблизи данного узла частично стягиваются в этот узел, и аналогично – для остальных узлов. Плотность становится набором δ –функций с центрами в узлах, и в левой части второго уравнения (15.32) вместо 27–ми слагаемых с узловыми ускорениями остаётся одно, умноженное на сосредоточенную массу m –го узла:

$$\begin{aligned} \sum_{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} \rho^{(e)} \varphi^{(e)} \sum_k \varphi_k^{(e)} \ddot{x}_k^{(e)} d\Omega &= \sum_{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} \rho^{(e)} \varphi^{(e)} \ddot{x}_m^{(e)} \sum_k \varphi_k^{(e)} d\Omega = \\ &= \sum_{(e)} \ddot{x}_m^{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} \rho^{(e)} \varphi^{(e)} d\Omega \approx \sum_{(e)} \ddot{x}_m^{(e)} \rho^{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} \varphi^{(e)} d\Omega \end{aligned} \quad (15.34)$$

Здесь отсутствуют слагаемые с ускорениями узлов, окружающих m –й узел, т.к. массы и ускорения этих узлов в приближении точечных (lumped) масс учтены в других уравнениях и учтено, что сумма базисных функций даёт единицу. Обозначение $\varphi^{(e)}$ указывает в каждом элементе на ту функцию формы, которая принимает максимальное значение в узле m . При интегрировании проводится замена переменных, поскольку φ заданы в локальных координатах. В итоге матрица масс становится диагональной: $[M] \equiv [m]$, m – масса узла.

Указанная процедура существенно упрощает вычисления, хотя, как указывают некоторые авторы в ранних работах по МКЭ, может приводить к частичной потере аппроксимации [Зенкевич], что восполняется измельчением сетки в нужных подобластях. В уравнениях (15.31) умножение на обратную матрицу сводится к делению на массу узла, и ускорения в уравнении легко разрешаются

$$\{ \ddot{x} \} = [m^{-1}] (-[C]\{ \dot{d} \} - [K]\{ d \} + \{ f \}) \quad (15.35)$$

В задачах распространения волн интересующий отрезок времени имеет порядок скорости звука, поделённой на длину, поэтому явное интегрирование вполне приемлемо.

15.2.2.5 Процедура интегрирования по времени

В качестве примера интегрирования ускорений по времени приведём самую простую, центрированную 2–слойную явную разностную схему:

$$a_m = \ddot{x}_m = \frac{1}{m_m} \sum F_m^e, \quad a_m^{(n)} = \frac{v_m^{(n+1/2)} - v_m^{(n-1/2)}}{\tau_{n+1/2}}, \quad v_m^{(n+1/2)} = \frac{x_m^{(n+1)} - x_m^{(n)}}{\tau_n}, \quad \tau_{n+1/2} = 1/2(\tau_{n-1} + \tau_n)$$

В данном случае индекс n обозначает номер шага по времени, m – номер узла, τ – шаг по времени, v – скорость. Очевидно, что в случае точечных масс в явной схеме интегрирование по времени может быть проведено для каждого уравнения независимо, что существенно облегчает распараллеливание численной процедуры.

Для численной устойчивости решения по явной схеме необходимо выполнение условия Куранта для шага интегрирования

$$\Delta x / \Delta t > c, \quad (15.36)$$

где c – местная скорость звука, Δx , Δt – местный шаг по пространству (минимальный размер КЭ) и шаг по времени. В программах расчёта динамики по явной схеме текущий шаг по времени, учитывающий ограничение (15.36), определяется в начале цикла вычислений на шаге. Вследствие не квадратичного, как в задаче теплопроводности, а линейного ограничения на шаг по времени, явные схемы часто используются для решения динамических задач, особенно ударно-волновых.

15.2.2.5 Физические особенности динамики твёрдого тела и её численной модели

Суммируем выявленные основные физические особенности уравнений динамики ДТТ, проявляющиеся и в схеме построения численной процедуры решения:

- время – физически значимый параметр, вместе со скоростью звука; вместо уравнений квазистатического перехода от состояния к состоянию решается уравнение движения, которое интегрируется по времени в случае явной схемы с соблюдением соответствующего критерия (Куранта);
- инерция материала проявляется в виде дополнительной "матрицы масс" системы, требующая обращения; явное интегрирование по времени возможно путём дискретизации распределения плотности – по отдельным узлам, с общей суммой, равной полной массе тела;
- при больших давлениях заметную роль может играть внутренняя энергия системы;
- типичное динамическое явление - колебания, которые в численном расчёте могут иметь нефизический характер вследствие отсутствия естественного демпфирования – возникает ряд новых проблем, решаемых на уровне общей методологии – отделение физически значимых колебаний, демпфирование паразитных мод и т. п.

Эти особенности определяют специфику всей процедуры прямого, т.е., исходящего непосредственно из уравнения движения, решения динамической задачи. Для анализа частотных характеристик системы используются иные подходы.

Литература к разделу 1

1. МДТТ *Н.И. Дробышевский, А.Е. Киселёв, В.Ф. Стрижов, А.С. Филиппов*. HEFEST-M: программное средство для расчёта высокотемпературного нелинейного деформирования. // Математическое моделирование, 22 (2), 2010, стр. 45-63
2. А.С. Филиппов, Н.И. Дробышевский, А.Е. Киселёв, В.Ф. Стрижов. Расчёт термомодеформирования корпуса реактора с расплавом с помощью кода HEFEST-M. Известия РАН, Энергетика, 6, 2010 стр. 92-104
3. Работнов, Соппротивление материалов, М., ГИФМЛ, 1962, 456 с.
4. *Л.И.Седов*, МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. Т. 1, М.: Наука, 1970 г., 492 стр.
5. MALVERN, L.E. - Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall, 1969
6. Х.Хан, Теория упругости. М., Мир, 1988.
7. Г.В. Коренев, Тензорное исчисление. М., Изд-во МФТИ, 1996., 240 с.
8. В.И. Феодосьев, Соппротивление материалов. М. Наука, 1986, 512 с.
9. С.Н. Коробейников, Нелинейное деформирование твёрдых тел. Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2000, 262 с.
10. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела, М., Наука, 1988, 712с.
11. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория упругости
12. А.М. Кац, Теория упругости, М., ГТТИ, 1956, 207 с.
13. А.С. Монин, А.М. Яглом. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М., Наука, 1965, 640 с.
14. Р. Хилл, Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956, 407 с.
15. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных установок. М. 1989.
16. Тайра С., Отани Р.. Теория высокотемпературной прочности материалов. М., 1986.
17. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М. ГИФМЛ, 1966.
18. Н.Н.Малинин, Прикладная теория пластичности и ползучести, М., Машиностроение, 400 с. 1975
19. Rempre, J.L., S.A.Chavez, G.L.Thinnes et al. 1993. Light Water Reactor Lower Head Failure Analysis. NUREG/CR-5642. EGG-2618
20. *Дробышевский Н.И., Филиппов А.С.* Численный анализ высокотемпературной ползучести реакторной стали. Известия РАН, Энергетика, 3, 2004, с.27–34.
21. Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ. /Под ред. С. Атлури.— М.: Мир, 1990.—392 с.
22. *Filippov A.S., Drobyshevsky N.I., Strizhov V.Th.*, Simulation of Vessel-with-melt Deformation by SOCRAT/HEFEST Code, 17th Int. Conf. on Nucl. Eng., ICONE17, July 12-16, 2009, Brussels, Belgium
23. A.S.Filippov, N.I.Drobyshevsky, D.D.Kamenskaya, A.E.Kisselev, E.V.Moiseenko. End-to-end technology of modeling a melt-structure interaction during IVMR in VVER with HEFEST-URAN toolkit. Proceedings of the 22nd International Conference on Nuclear Engineering, ICONE22 July 7-11, 2014, Prague, Czech republic
24. Т. Belytschko. Finite Elements for Nonlinear Continua & Structures. 1998

Литература к разделу 2

1. [Марчук] Г.И. Марчук, В.И. Агошков. Введение в проекционно-сеточные методы. М. Наука, 1977
2. [Оден] Дж. Оден. Конечные элементы в нелинейной механике сплошной среды. Пер. с англ. "МИР", М. 1975.
3. [Стренг Фикс] Г. Стренг, Дж. Фикс. Теория метода конечных элементов. Пер. с англ. «МИР» М. 1977
4. [Митчел Уэйт] Э. Митчелл, Р. Уэйт. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. "МИР", М. 1981.
5. [Hutton] D.Hutton. Fundamentals of Finite Element Analysis. McGraw-Hill, 2004.
6. [ANSYS в руках] Каплун А. Б., Морозов Е. М., Олферьева М. А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. — М.: Едиториал, 2003. - 272 с.
7. [Зенкевич] О.Зенкевич. Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ. «МИР» М. 1975
8. [Zenkevich] O.C. Zienkiewicz, R.L Taylor. The Finite Element Method. Fifth edition. Volume 2: Solid Mechanics. Oxford 2000.
9. [Hughes] Hughes T.J.R., The Finite Element Method. New Jersey, 1987, 803 p.
10. [Smith Progr.] I.M.Smith and D.V. Griffiths. Programming the Finite Element Method. 2nd ed., Wiley, 1988.
11. [Общетех] Общетехнический справочник, ред. Е.А.Скороходов, М., 1990
12. [ANSYS book] Moaveni, Saeed. Finite element analysis. Theory and application with ANSYS. Prentice Hall, 1999
13. [ANSYS Басов] К.А.Басов. ANSYS в примерах и задачах. Компьютер пресс, М. 2002 – 224 с.
14. [Беляев] Н. М. Беляев. Сборник задач по сопротивлению материалов. М., «НАУКА», 1968
15. [Никифоров] Никифоров Уваров. Специальные функции (Формулы типа Гаусса)
16. [HEFEST] Филиппов А.С., Дробышевский Н.И., Киселёв А.Е., Стрижов В.Ф., Фокин А.Л. СОКРАТ/HEFEST: модели взаимодействия расплава активной зоны ВВЭР с конструкциями реактора при тяжёлой аварии. Известия РАН, Энергетика, 3, 2010, стр.4-24
17. [HEFEST–M] *Н.И. Дробышевский, А.Е. Киселёв, В.Ф. Стрижов, А.С. Филиппов.* HEFEST-M: программное средство для расчёта высокотемпературного нелинейного деформирования. // Математическое моделирование, 22 (2), 2010, стр. 45-63
18. [Уилкинс ВМГД] Уилкинс Расчёт упруго-пластических течений. В сб. Вычислительные методы в гидродинамике. Пер. с англ. Ред. Григолюк. М. Мир, 1967
19. [Krieg, Key] Krieg R.D., Key S.W. Implementation of a time independent plasticity theory into structural computer programs, ASME, AMD-20, 1976, pp.125-137.
20. [Алгоритмы для Пластичности] EA de Souza Neto, D Perić, DRJ Owen. Computational methods for plasticity theory and applications. Wiley 2008
21. [Беличко 2001] Т. Belytschko. Finite Elements for Nonlinear Continua & Structures. 1998
22. [Дэннис] Дэннис Дж., мл., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных систем уравнений. М.: Мир, 1987. 440с.
23. [Гилл] Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509с
24. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984. 333с.
25. [Среер] *Дробышевский Н.И., Филиппов А.С.* Численный анализ высокотемпературной ползучести реакторной стали. Известия РАН, Энергетика, 3, 2004, с.27–34.
26. [Голдстейн] Голдстейн, Классическая механика

Приложение. Механика упруго-пластических трещин и численные расчёты

П.1. Трещиностойкость материалов и элементов конструкций.

П.1.1. Разрушение и трещины

При вязком разрушении материал испытывает значительные пластические (необратимые) деформации, приводящие к уменьшению несущего сечения. В качестве примера возьмём продольное растяжение стержня. В месте локального сужения (образования шейки) напряжение растёт, что способствует дальнейшей деформации и росту напряжения. Когда подобный рост напряжения при невозрастающей нагрузке продолжается и ускоряется, говорят о *пластической неустойчивости*, приводящей к разрушению. Но при этом мы, в принципе, можем фиксировать любой этап нагружения и в любой момент определить НДС, т.е. напряжения, действующие в любом сечении, по приложенной силе и размеру сечения. Это позволяет, в принципе, применять критерии предельного состояния типа (8.1), и возможные способы количественного описания вязкого разрушения в целом понятны.

Хрупкое разрушение происходит очень быстро, "катастрофически", и долго оставалось загадкой. О том, что хрупкость связана с трещинами, что существует концентрация напряжений в трещине, о возможности хрупкого разрушения нехрупких металлов знали уже сравнительно давно, но не было соответствующих понятий и параметров, которые бы позволяли надёжно классифицировать трещины на их склонность к неустойчивому росту, а материалы тестировать на хрупкое разрушение.

Наличием и развитием трещиноподобных дефектов с концентраторами напряжений объясняют низкую (относительно теоретической) прочность стёкол и подобных материалов. Идеальная прочность кристалла, как отмечалось выше:

$$\sigma_{\max} \sim E/\epsilon_{\text{perfect}} \sim E/0,1 \text{ (железо: } \sim 10 \text{ ГПа)}$$

Есть эксперименты, демонстрирующие возможность прочности, близкой к теоретической:

- опыты Иоффе (1920) с каменной солью ;
- кристаллические нити ("усы") – бездефектные кристаллы;
- прочность стеклянных нитей (А. Гриффитс и др.), которая оказалась обратно пропорциональной толщине и может быть очень высокой.

Как отмечалось, фактическая прочность конструкционных материалов на 1-3 порядка ниже. В пластических материалах это объясняется наличием микродефектов, приводящих к поэтапному пластическому деформированию. В случае хрупкого разрушения этот дефект чаще поверхностный, сингулярный, т.е. является трещиной, которая неустойчиво и очень быстро растёт при нагружении. Она служит основным объектом изучения в механике разрушения (т.е. в механике трещин – "fracture mechanics").

П.1.2. Основные понятия и этапы развития линейной механики трещин

С некоторой точностью контур прямой внутренней трещины в пластине, в которой задано поле растягивающего напряжения перпендикулярного к трещине направления, может быть представлен эллипсом. Оценку концентрации напряжений в такого рода щели даёт задача о НДС в окрестности эллиптического отверстия с полуосями a и b , $a > b$, при внешнем приложенном напряжении σ : *решение Колосова* (1909г.) и *Инглиса* (1913г.). Концентрация растягивающего напряжения в крайних точках большой полуоси описывается т.н. формулой эллипса (см., например, [П.1]):

$$\sigma_{yy} = \sigma (1 + 2alb) . \quad (\text{П.1})$$

Ось Oy направлена вдоль малой полуоси b , вдоль которой приложена нагрузка. Предельный случай $a = b$ был рассмотрен выше в гл. 5. Заметим, что при $a \gg b$, в соответствии с принципом Сен-Венана, область большого напряжения должна быть мала и сосредоточена в окрестностях крайних точек, в которых расстояние между берегами щели заметно меньше $2b$.

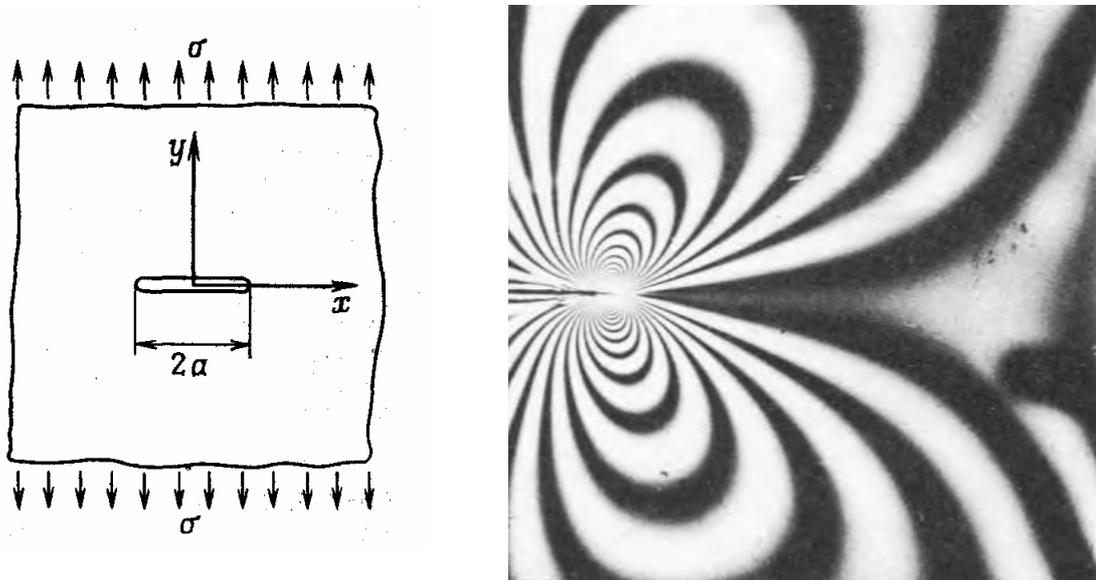


Рис.П.1. Трещина Гриффитса и поле напряжений в окрестности вершины ([2])

Предельный переход $b/a \rightarrow 0$ в задаче с эллиптическим отверстием даёт бесконечные напряжения у вершины трещины растяжения. Эллипс вырождается в математический разрез: "трещину Гриффитса" (Рис. П.1) по имени исследователя, впервые работавшего с ним. Решение будет иметь две особенности по краям разреза. Асимптотическое выражение для компонент поля напряжения в малой окрестности вершины трещины растяжения длиной $2a$ имеет вид (см. [П.1] и др.):

$$\sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \dots \right) \quad (\text{П.2})$$

$$\sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \dots \right) \quad (\text{П.3})$$

$$\tau_{yy}(r, \theta) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \dots \quad (\text{П.4})$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

где r, θ – полярные координаты. Параметр K_1 служит одним из критериев трещиностойкости. Визуализация поля напряжений методом фотоупругости показана на рис. П.1 справа (из [8]).

Подходы к решению проблемы хрупкого разрушения

В подходе А. Гриффитса (А.А.Griffith, Англия, 1921 г.) сформулирован энергетический критерий хрупкого разрушения, который вкратце можно свести к следующему:

- Трещина – концентратор напряжений под нагрузкой;

- Хрупко разрушающиеся материалы содержат микротрещины;
- Когда при приложении нагрузки трещина растёт, запасённая и высвобождаемая за счёт снижения деформации механическая энергия идёт, за счёт концентрации напряжений в концах трещины, на дальнейший разрыв материала;
- Если высвобождаемая при разрыве механическая потенциальная энергия превышает ту, что необходима для формирования новых участков поверхности трещины, то развитие трещины неустойчиво, и она неудержимо растёт.

Для практики необходимо количественное выражение условия неустойчивости роста трещины. Рассуждения Гриффитса при выводе критерия примерно таковы. Рассмотрим плоское НДС при 1-осном нагружении бесконечного образца единичной толщины, в котором выделим прямоугольную область $a_0 \times b_0$. Ось Ox и размер a_0 – по горизонтали, ось Oy и размер b_0 – по вертикали (Рис. П.1). Пусть образец растянут вдоль вертикальной оси, и в нём возникло однородное НДС. Пусть в середине возникла трещина длиной $2a \ll a_0$, достаточно малая, чтобы не рассматривать влияние границ.

Случаи плоских напряжений и плоских деформаций отличаются множителем в выражении энергии. Толщину образца полагаем единичной, краевыми эффектами пренебрегаем, и объёмные величины будут относиться к ед. площади.

Полагаем напряжение в пластине без трещины однородным, пусть оно равно $\sigma > 0$. Деформация: $\epsilon = \sigma/E$. Плотность упругой энергии

$$U = \sigma \epsilon / 2 = \sigma^2 / 2E,$$

полная энергия в сечении $W = U a_0 b_0 = a_0 b_0 \sigma^2 / 2E$.

При возникновении трещины участок пластины площадью $\sim a^2$ разгружается, упругая энергия уменьшается на величину

$$\Delta W \sim U a^2 = C a^2 \sigma^2 / 2E, \quad C - \text{константа.}$$

С другой стороны, возникли две новые поверхности с поверхностной энергией

$$\Gamma = 4\gamma a.$$

Величина убыли объёмной упругой энергии растёт пропорционально квадрату длины, а прибыль поверхностной энергии – линейно. Образование новой поверхности – необходимое условие роста трещины, следовательно, пока убыль объёмной упругой энергии не компенсирует прибыль поверхностной энергии, трещина подрастает устойчиво за счёт сторонних факторов.

Найдём критическую длину трещины, при которой "убыль" = "прибыли". В точке равновесия при квазистатическом подрастании трещины на длину Δa (виртуальное перемещение) должно быть

$$\Delta W + \Delta \Gamma = 0 \quad \text{или} \quad 4\gamma \Delta a = C \sigma^2 / 2E \cdot 2a \Delta a, \quad \text{или} \quad 4\gamma = C a \sigma^2 / E. \quad (\text{П.5})$$

Взяв для константы её значение $C = 2\pi$, полученное из точного решения задачи (см., например, [П.2], [П.3]), получим связь критической длина трещины с нагрузкой и константами материала в рассматриваемом случае плоской деформации:

$$a_c = 2\gamma E / \pi (1 - \nu^2) \sigma^2. \quad (\text{П.6})$$

При плоском напряжении –

$$a_c = 2\gamma E / \pi \sigma^2.$$

Концентрация напряжений у вершины трещины приводит к локализации потенциальной энергии деформирования: в литературе по МР говорится, что упругая механическая энергия, высвобождаемая при подрастании трещины, "стекает" к вершине

трещины. Большая часть материала, у плоской части границы трещины, оказывается разгруженной (принцип Сен-Венана), и плотность энергии там почти нулевая. Величина

$$2\gamma = J_w = \frac{\partial W}{\partial a} \quad (\text{П.7})$$

называется иногда *трещиноподвижная сила* или *работа разрушения*. При хрупком разрушении это энергия образования поверхности (которую Гриффитс отождествлял с поверхностной энергией жидкости). Требуемый количественный *энергетический критерий* предельной устойчивости трещины схематически можно записать через критерияльный параметр J_C в виде

$$J_w = J_C, \quad (\text{П.8})$$

где величина J_w может быть вычислена через упругую энергию конфигурации, а J_C – экспериментально измеряемая величина.

В случае, когда мы можем выразить J_w , критерий устойчивости может быть с помощью (П.6) сформулирован через некоторую критическую длину трещины или критическое напряжение для конфигурации с трещиной заданной длины:

$$a < a_c, \quad \sigma < \sigma_c.$$

Концепция Гриффитса первоначально не получила широкого признания из-за двух существенных недостатков. Во-1, предложенный критерий сложен для вычислений, поскольку требует вычисления упругой энергии во всей области трещины. Во-2, трещиноподвижная сила, вычисленная как мощность, идущая на увеличение поверхностной энергии, оказывается очень малой. Для металлов подход Гриффитса в первоначальной форме оказался неприменим, поскольку для роста трещины в металлах необходима на порядок-два большая работа разрушения.

Если мы попытаемся повторить мысленный эксперимент по подрастанию трещины для пластически деформируемого тела, то нам придётся включать работу при пластическом деформировании. Непосредственное вычисление работы разрушения по формуле (П.7) и применение энергетического критерия разрушения возможно в этом случае только численно.

Различие между хрупким и квазихрупким (трещина в пластическом материале), как оказалось, и состоит в том, что работа разрушения идёт в основном на пластическое деформирование в окрестности вершины трещины и оказывается гораздо выше прироста поверхностной энергии. Соответствующие теоретические построения были развиты в УПМР. Применение и развитие механики трещин началось после формулировки более удобного *силового критерия*.

Силовой критерий разрушения

Критерий устойчивости трещины (П.8) в основе – энергетический, но его можно сформулировать через более удобную величину, характеризующую поле напряжений в окрестности вершины. Для получения своей формулы Дж. Ирвин прибегнул к полуколичественным рассуждениям, довольно простым, но которые мы не будем здесь воспроизводить [П.4]. Основная идея такова. Поскольку "упругая энергия стекает к вершине", и эта область – мала по сравнению с размером трещины, для вычисления критерия Гриффитса в виде (П.8) не надо интегрировать упругую энергию по всему объёму, но только – по окрестности вершины – области распространения трещины, где напряжения, даваемые асимптотическими соотношениями (П.2)-(П.4), вносят основной вклад в изменение упругой энергии. В остальной области как НДС, так и упругая энергия остаются неизменными. Подставив в формулу (П.7) значение упругой энергии, вычисленное с помощью (П.6)-(П.7), Ирвин получил связь трещиноподвижной силы J и *коэффициента интенсивности напряжений* (КИН). Для случая трещины отрыва КИН

обозначается K_1 , как коэффициент в формулах (П.4)-(П.4). Для этого случая *формула Ирвина*, связывающая K_1 с трещиновдвижущей силой, при плоской деформации имеет вид:

$$J_1 = (1 - \nu^2) \frac{K_1^2}{E} . \quad (\text{П.9})$$

Т.к. эта формула справедлива также и для критического состояния, когда трещина становится неустойчивой, можно ввести *критический коэффициент интенсивности* K_{1C} . По определению:

$$K_1 < K_{1C} . \quad (\text{П.10})$$

Этот критерий в приложениях удобней энергетического, поскольку поле напряжений как правило вычислить проще, чем величину (П.7). Критерий позволяет избавиться от первого недостатка первоначальной концепции Г.Гриффитса хрупкого разрушения. Существуют таблицы теоретически вычисленных для разных конфигураций коэффициентов интенсивности. Величину K_{1C} можно измерить экспериментально.

Формулы (П.7)–(П.10) фактически исчерпывают содержание собственно *линейной* механики разрушения, имеющей дело с хрупким разрушением, не учитывающей нелинейное пластическое деформирование.

Упруго-пластическая трещина

Начало развития УПМР связано с несколькими исследователями, среди которых упомянем Дж. Ирвина (США) и Е. Орована. Оба автора имели дело с разрушением металла и наблюдали при металлографических исследованиях, что пластические деформации обычно наблюдаются в малой окрестности трещины, а большая часть материала разгружалась упруго. Это привело их к концепции *квазихрупкого разрушения*. В ней по прежнему утверждалось, что упругая энергия, высвобождающаяся при подрастании трещины, "стекает" к вершине трещины в место концентрации напряжений, но тратится не столько на образование новой поверхности, сколько на пластическое деформирование материала.

Второе предположение состоит в том, что асимптотическое выражение типа (П.2) для поля напряжений в окрестности вершины трещины сохраняет силу там, где нет пластических деформаций, а в пластической области все напряжения имеют величину порядка предела текучести материала. Следовательно, при квазихрупком разрушении можно применять силовой критерий разрушения (П.10), где величина K_{1C} вычисляется по формулам в случае хрупкого разрушения, для пластических же материалов измеряемая экспериментально величина K_{1C} оказывается на порядок большей. Для углеродистой стали при нормальных условиях: $K_{1C} \sim 100 \text{ МПа}\cdot\text{м}^{-1/2}$. Данные предположения позволили избавиться от вышеуказанного второго недостатка первоначальной концепции хрупкого разрушения.

Пластическая поправка – размер пластической зоны

Пластическая зона у вершины трещины фактически входит в область влияния внешней нагрузки, создающей концентрацию напряжений. Соответственно, Ирвин же предложил при вычислении K_{1C} использовать эффективную длину трещины, увеличенную на величину порядка размера этой пластической зоны. Оценка этого размера получается, если приравнять ему величину максимального напряжения из формулы (П.3), полагая все напряжения в области пластичности равными пределу текучести σ_y :

$$\sigma_y \approx \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}$$

откуда –

$$\delta_p = \xi \frac{K_1^2}{2\pi\sigma_y^2} = C \frac{K_1^2}{\sigma_y^2}, \quad C=0,015-0,1,$$

Коэффициент C отражает неопределённость параметра, поскольку уровень минимальной пластической деформации не вполне определён. Порядок величины δ_p для стали – миллиметр.

Проведённые в разных странах мира дальнейшие исследования по выяснению и измерению критических параметров трещиностойкости позволили разработать несколько методик, по которым можно оценить опасность трещин. Некоторые из этих методик приняты за стандарты испытаний, применяемые в разных странах мира, соответствующие величины и формулы входят в нормы расчётов на прочность (в РФ – КИН-критерий). Применение механики разрушения вошло в инженерную практику оценок трещиностойкости объекта под нагрузкой. Пусть, например, при обследовании объекта выявилась трещина известного расположения и размера. Решение практической задачи предотвращения разрушения может включать следующие шаги.

- Оценка возможных местных напряжений путём сведения задачи к известной конфигурации. Оценка КИН;
- Сравнение с табличными данными, оценка предельно возможной скорости роста;
- На основе анализа и принимаемого запаса можно, либо прекратить эксплуатацию объекта, либо, при необходимости и возможности, застопорить трещину (укрепить края, рассверлить концы).

В компетенцию анализа МР входят все три пункта. Кроме КИН существуют другие критерии, которые могут быть вычислены. Примеры приведены ниже. Дальнейшие сведения по УПМР можно почерпнуть в руководствах по механике трещин, приведённых в литературе к настоящему Приложению.

П.1.3. Параметры трещиностойкости

Для конкретизации введённых выше понятий механики трещин далее рассмотрены результаты численных расчётов некоторых параметров, существенных в оценках трещиностойкости. Они обсуждаются ниже. Нас будут интересовать только трещины растяжения, поскольку они типичны, и для них условия по напряжениям наиболее жесткие.

Рассмотренный выше подход к оценке трещиностойкости с использованием коэффициента интенсивности напряжений (КИН) основан на рассмотрении поля напряжений в малой окрестности вершины трещины, которое описывается с помощью сингулярных функций (П.2-П.4), что позволяет отвлечься от структуры поля вдали трещины. Коэффициент интенсивности K_1 в малой окрестности вершины не зависит от координат (θ, r) . Для рассматриваемой простейшей конфигурации трещины Гриффитса $K_1 = \sigma\sqrt{\pi a}$, и величина КИН есть функция двух основных переменных – нагрузки p и длины трещины a . В общем случае K_1 включает в себе зависимости от нагрузки, формы образца, от длины трещины и её расположения относительно его границ, его записывают в виде

$$K_1 = p\sqrt{\pi a} f(S) Y(a/b), \quad (\text{П.11})$$

где p – нагрузка, $Y(a/b)$ - некоторая функция, b – длина остаточного сечения (нетто-сечение), $f(S)$ – функция других размеров.

Условие роста трещины при малых пластических деформациях, т.е. критерий (квази)хрупкого разрушения сводится к условию $K_1 = K_{1C}$, где K_{1C} суть характеристика материала. Оценка состояния трещины сводится к определению K_1 в зависимости от её

размера и приложенной нагрузки. Условие разрушения задает некоторую кривую $F(p,a)=K_{1C}$ в координатах $a-p$.

Инвариантный интеграл – Г.П.Черепанов [П.5]: "В 1967г. автор получил основной инвариантный Γ -интеграл механики разрушения непосредственно из закона сохранения энергии

$$\Gamma = \oint_{S_c} ((W+T+H)n_i - \sigma_{ij}n_j u_{i,1}) ds, \quad (i,j = 1,2) \quad (\text{П.12})$$

... Величина Γ – инвариантный параметр механики разрушения – равна потоку энергии в конец трещины, приходящемуся на ед. площади ... В качестве простейшего локального критерия разрушения на фронте трещины был предложен критерий $\Gamma=\Gamma_c$, где Γ_c - эмпирически определяемая характеристика материала, равная потоку избыточной диссипации энергии в конец трещины, не учитываемый принятой моделью тела."

Инвариантный интеграл Черепанова–Райса (чаще обозначаемый как " J -интеграл") широко используется в МР. Критерий $\Gamma=\Gamma_c=J_c$ до 80-х гг. обосновывался и применялся при монотонном нагружении, когда применима деформационная теория пластичности – нелинейно-упругое тело. В экспериментах по определению J для растущей трещины обычно используется монотонное нагружение образцов. При использовании инкрементальной модели пластичности в общем случае для достижения инвариантности в численном расчете к интегралу по контуру следует добавить некоторый интеграл по объему (см. [П.4]). Соотношение (П.9) линейной механики разрушения (ЛМР) – эквивалентность J и скорости высвобождения упругой энергии $\partial\Pi/\partial a$ выполнено для квазихрупкого разрушения и используется при экспериментальном определении J . Но при развитой пластичности согласно [П.4]: "утрачивается физический смысл J -интеграла в виде потенциальной энергии, необходимой для обеспечения распространения трещины ... Но считают что J -интеграл можно использовать в качестве параметра. Для использования J -интеграла как параметра, описывающего условия разрушения пластического тела, теоретических обоснований недостаточно. Тем не менее, эксперименты и численные расчеты показывают, что J -интеграл может быть использован в такой роли при проектировании." Интеграл (П.12) может быть определен численно в стандартных расчетах, например, методом конечных элементов. Критерий $J=J_c$ широко применяется на западе, в основном в США. Для его применения необходимы экспериментальные данные по J_c для материалов, которые пока не входят в число стандартных в нашей стране.

Другие величины, фигурирующие в критериях трещиностойкости элементов конструкций, это, вместе с коэффициентами K_I, J , величины

- $C(T)OD$ (crack (tip) opening displacement: раскрытие трещины у вершины);
- δ_p (размер пластической области у вершины трещины) в образце из упруго-пластического материала в условиях плоских напряжений/плоских деформаций.

Линейная механика разрушения (ЛМР) дает формулы для оценок этих параметров. Для трещины растяжения основные используемые соотношения ЛМР:

$$J_1 = (1 - \nu^2) \frac{K_1^2}{E} \quad (\text{П.13})$$

$$COD = \delta = C \frac{K_1^2}{E\sigma_y}, \quad C=0,4-0,7 \quad (\text{П.14})$$

$$\delta_p = C \frac{K_1^2}{\sigma_y^2}, \quad C=0,015-0,1, \quad (\text{П.15})$$

В терминах этих величин обычно формулируются результаты исследований по трещиностойкости. При (квази)хрупком разрушении достаточно знать вязкость разрушения K_{Ic} . В условиях развитой пластичности поле напряжений также можно описывать асимптотическими соотношениями типа (П.2), но показатель степени может быть другим, а критерий начала роста трещины $K_{Ic} = K_{Ic}$ начинает зависеть от образца и теряет свою универсальную роль. В упруго-пластической механике разрушения для тела со степенным законом упрочнения $\varepsilon_p \propto \sigma^n$ было построено асимптотическое решение HRR (Хатчинсон-Райс-Розенгрэн) [П.4], аналогичное решению (П.2), которое вместо него может быть использовано для оценок вязкого разрушения:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_y \left(\frac{JE}{I\alpha\sigma_y^2} \right)^{1/(n+1)} \frac{1}{(r/a)^{1/(n+1)}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$$

где $I=3\div 6$ – безразмерный коэффициент, a – длина трещины, J – J -интеграл, $\sigma_y = \sigma_{0.2}$ – предел текучести. Оно применимо на расстояниях порядка нескольких COD от вершины трещины. Величина J_i , отвечающая началу роста трещины, при монотонном нагружении, как показали эксперименты, в определенных пределах не зависит от размера образца.

П.2. Примеры численных расчётов в механике трещин

П.2.1. Методика расчетов

Благодаря тому, что напряжения, деформации и факторы роста сосредоточены в вершине трещины, она (в идеализированной постановке с ровными берегами etc.) сравнительно проста для анализа, "одинакова" во всех конструкциях, и результаты для трещин в однородном материале обычно хорошо согласуются с экспериментом. При численном расчёте можно рассчитать на сетке величины, которые часто невозможно получить непосредственно из измерений, не говоря уже о влиянии на НДС 3-мерности конфигурации. Всё это обусловило успех численных методов в расчётах трещиностойкости.

Численные расчёты служат не просто поддержкой экспериментальных испытаний в механике разрушения, но фактически оказываются источником новых знаний о поведении конструкции. Например, в [П.6] широко использованы и рекомендованы для применения интерполяционные формулы, построенные по результатам численных расчётов для поведения прямых и изогнутых труб и сочленений труб, содержащих трещины, под всевозможными нагрузками (обоснование концепции "течь перед разрушением" (ТПР) [20] основанное на анализе поведения трещин). Ниже по тексту приведён простейший пример подобного расчёта. Основная цель расчётов состоит в максимально точном представлении трёхмерного поля напряжений в окрестности сингулярной вершины трещины. Для этого часто вводятся специальные сингулярные элементы (см., например, [П.7]). Но в двумерной постановке задачи могут достаточно точно решаться "минимальным МКЭ", использующим стандартные билинейные 4-узловые элементы.

Приводимые ниже результаты тестовых расчетов по 2-мерной программе HEFEST отчасти носят характер верификации методики, поскольку часть решённых задач имеет приближённо-аналитическое решение, или сравнивается с экспериментом, а отчасти – иллюстративный, наглядно показывающий введённые критерии трещиностойкости.

Применяемое расчётное средство – программа HEFEST-M, разработана в ИБРАЭ в 90–е гг. и модернизирована в 2008–2012 гг. [П.8], [П.9]. Она предназначена для решения методом конечных элементов в двумерной плоской и аксиально-симметричной геометрии нелинейных задач (термо)механики деформируемого твердого тела в условиях медленно меняющихся нагрузок, когда можно пренебречь ускорениями и рассматривать задачу в квазистатическом режиме. Ее сильными сторонами являются:

- updated лагранжев подход, что дает возможность рассматривать геометрически нелинейные задачи с деформациями в десятки процентов и более;
- применение инкрементальных нелинейных моделей пластичности, благодаря чему возможно рассмотрение немонотонного и циклического нагружения;
- развитый аппарат решения нелинейных алгебраических уравнений, что позволяет надежно получать решение в условиях развитой пластичности;
- аппарат контактных линий (скольжение со смыканием и отделением) позволяет решать контактные задачи с переменными и несовпадающими границами взаимодействующих областей;
- совместимость с программой HEFEST [П.10] расчета задач нелинейной теплопроводности и наличие термо-упруго-вязко-пластических моделей материалов, что дает возможность решать широкий класс задач термомеханики.

Программа HEFEST-M успешно применялась для расчета остаточных сварочных напряжений [П.12], [П.13] экспериментов по высокотемпературной ползучести [П.8], преднапряженного состояния железобетонной защитной оболочки АЭС [П.14], высокотемпературной ползучести корпуса ВВЭР [П.11], [П.15], [П.16] и других задач с высокой степенью геометрической и физической нелинейности. В настоящей работе она прилагается к механике трещин. На примере нескольких модельных задач с помощью HEFEST-M определяется упруго-пластическое напряженно-деформированное состояние в образце с трещиной и вычисляются некоторые основные критерии механики разрушения: коэффициент интенсивности, раскрытие трещины и др. величины. Полученные численно значения хорошо согласуются с аналитическими оценками и точными решениями. Проведено также сравнение с экспериментом по определению пластической зоны в образце с трещиной, испытываемом на трехточечный изгиб.

П.2.2. Численное определение основных критериев механики разрушения

Трещина Гриффитса в линейно-упругой бесконечной области.

Рассматривается плоскость Oxy сечения трещины плоскостью, перпендикулярной фронту. Ось Ox направлена вдоль берегов трещины. Начало координат – в вершине трещины. Приложено постоянное напряжение σ в направлении y . Профиль yy -компоненты тензора напряжений вдоль оси x дается следующей формулой [П.1], a - полуразмер трещины:

$$\sigma_{xx} = \sigma \left(\frac{1}{\sqrt{(1-a^2/(x+a)^2)}} - 1 \right), \quad x > 0 \quad (\text{П.16})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma}{\sqrt{(1-a^2/(x+a)^2)}}, \quad x > 0. \quad (\text{П.17})$$

Отметим, что, если разложить выражение (П.11) до второго знака по величине x/a , то получим уточнение соотношения (П.2) при нулевом угле θ , в котором $K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$:

$$\sigma_{yy} \approx \sigma \sqrt{\frac{a}{2x}} \left(1 + \frac{3x}{4a} \right) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + \frac{3x}{4a} \right) \quad (\text{П.18})$$

Максимальное вертикальное смещение в случае плоских деформаций равно $2(1-\nu^2)\sigma a/E$, соответственно, площадь раскрытия всей трещины равна $2\pi(1-\nu^2)\sigma a^2/E$, где ν - коэффициент Пуассона, E – модуль упругости. На рис. П.2 приведено распределение $\sigma_{yy}(x)$, аналитическое и полученное численно в чисто упругой постановке. Отличие

появляется вблизи вершины трещины, где КЭ разбиение недостаточно мелкое, чтобы аппроксимировать особенность. Размер этой области – 1-2 расчетных ячейки.

Определение коэффициента интенсивности напряжений (КИН)

Рассмотрим внутреннюю трещину длиной $2a=4,8\text{мм}$ в стальной полосе шириной $2b=20\text{мм}$, растягиваемой нагрузкой σ . Для определения КИН взяты два способа –

1) сравнение с аналитическим решением: зависимости (П.16)-(П.17) для $\sigma_{xx}(r)$, $\sigma_{yy}(r)$ определяются численно и подставляются в (П.18);

2) метод податливостей как вариант *энергетического метода* [П.5].

Рассмотрим расчёт по первому методу. Положим в (П.2) $\theta=0$, тогда величина КИН определяется по расчетному распределению напряжений как $\tilde{K}_1(x) = \tilde{\sigma}_{yy}(x)\sqrt{2\pi x}$, где x – расстояние от вершины трещины. Оценим размер ячеек сетки, при котором точность определения КИН приемлема. Из сравнения приближенных соотношений (П.2)-(П.3), где $\sigma_{xx} \approx \sigma_{yy}$ и формул (П.16)-(П.17) для трещины Гриффитса, где $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} - \sigma$, видно, что зависимости (П.4)–(П.3) описывают распределение напряжений в малой окрестности $|x| < x_0$, в которой $\sigma_{yy}(r) \gg \sigma$. Отсюда мы получаем, что должно быть $\sqrt{a/2} \gg \sqrt{x_0}$. К примеру, для 10%-ной точности, если $\sqrt{a/2} > 10\sqrt{x_0}$, то должно быть $a > 50x_0$. Размер ячейки должен быть еще в несколько раз меньше величины x_0 . Таким образом, если не применять специально сконструированные сингулярные элементы, прямой метод определения КИН в общем трёхмерном случае предъявляет относительно высокие требования к сетке, поскольку в расчете НДС мы должны моделировать не только окрестность вершины трещины, но и нагруженную область, содержащую трещину.

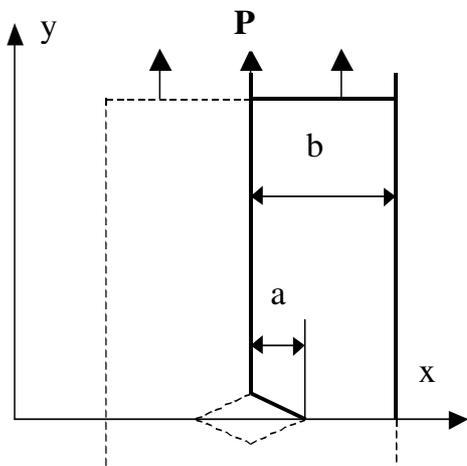


Рис. П.2. Расчетная область (правая половина трещины) при определении КИН.

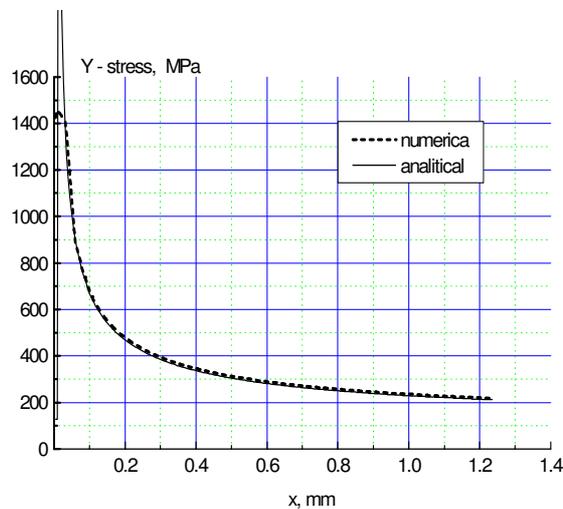


Рис. П.3. y-напряжение вдоль оси x в задаче о трещине Гриффитса, численный и аналитический расчёты.

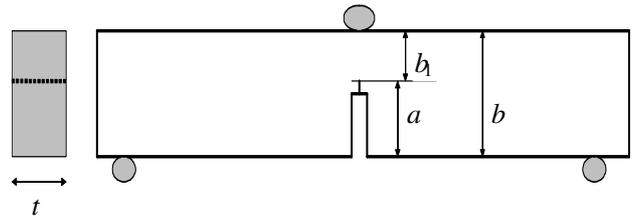
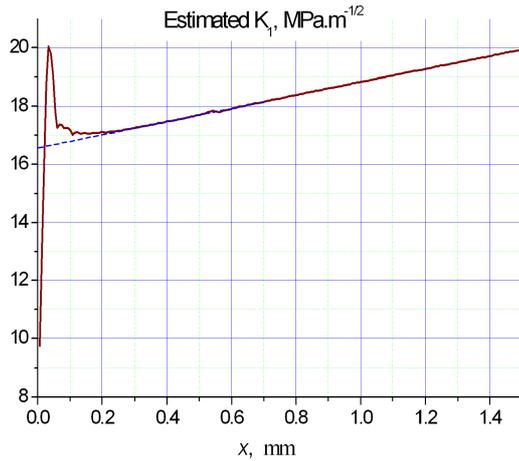


Рис. П.4. Определение КИН прямым методом Рис. П.5 Образец на трехточечный изгиб

В численном примере минимальный размер шага был $\Delta x = 0,025 \text{ мм} = a/200$. Геометрия отвечает показанной на рис.П.2. Ось Oz направлена вдоль направления трещины. Берется 1/4 поперечного сечения симметричного образца. Общий вид рассчитанной величины $\tilde{\sigma}_{yy}$ приведён на рис. П.3. На рис. П.4 дана рассчитанная численно функция $\tilde{K}_I(x) = \tilde{\sigma}_{yy}(x)\sqrt{2\pi x}$ при приложенном напряжении $\sigma = 128 \text{ МПа}$. Начальный пик кривой соответствует двум ячейкам, где нет аппроксимации. Последующий медленный рост с увеличением расстояния от вершины отвечает отклонению асимптотического представления (2) от формулы (П.17) в соответствии с оценкой (П.18). Искомую величину КИН определяется по точке пересечения касательной к прямому участку с осью ординат (показана на рис. П.4 прерывистой линией). Получим $\tilde{K}_I = 16,5 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$. С точностью 0.3% КИН вычисляется по формуле [П.4], [П.17]:

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{\cos(\pi a/2b)}},$$

из которой получаем $K_I = 16,3 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$. На более грубой сетке в этой задаче получается близкая величина КИН, но труднее оценить точность, с которой графически определяется коэффициент интенсивности.

Идея второго метода, податливости, близка идее экспериментального метода с таким же названием [П.5]. Берется образец с трещиной, который начинает растягиваться из ненагруженного состояния 0 возрастающей нагрузкой P . В некоторый момент 1 трещина начинает квазистатически подрастать, нагрузку оставляют на постоянном уровне, и в последующий момент 2 начинают квазистатически разгружать образец, в результате чего он вернется в исходное (по перемещениям) состояние 0 (рис. П.6). Однородное нормальное напряжение σ , приложенное к поверхности образца, эквивалентно силе на единицу длины (вдоль оси Oz) $P = \sigma b$, которая при малом смещении поверхности $\delta v(x)$ совершает работу:

$$\delta A = \int_0^b \sigma \delta u(x) dx = \sigma \int_0^b \delta u(x) dx = P \tilde{u}, \quad (\text{П.19})$$

где \tilde{u} – некоторое среднее перемещение. В координатах P - u мы имеем замкнутый цикл 0-1-2-0. Работа, затраченная на образование трещины, равна площади гистерезисной петли и связана с величиной энергии образования поверхностей разрыва на единицу площади

разрыва 2γ , что равно интенсивности высвобождения энергии J или трещиодвижущей силой, соотношением (П.7)

$$J = 2\gamma = \frac{\partial A}{\partial \Sigma} \approx \frac{\delta A}{\delta \Sigma} \quad (\text{П.20})$$

Величина G , которая в данном случае представляет собой механическую интерпретацию J -интеграла, связана с коэффициентом интенсивности формулой Ирвина (П.13):

$$J = \frac{K_I(1-\nu^2)}{2E} \quad (\text{П.21})$$

Здесь E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, Σ – площадь поверхности разрыва.

В численной процедуре определения G методом податливости решаются последовательно две задачи для конфигурации с трещиной. Моделирование растущей трещины может осуществляться введением линии контакта с первоначально скреплёнными узлами, идущей вдоль линии трещины по направлению вглубь. Берега трещины свободны, а узлы расчётной сетки, идущие от вершины вдоль линии контакта первоначально жёстко скреплены. Но на практике применялся другой метод.

Сначала образец из исходного состояния 0 достигает состояния 1. Затем совершается «виртуальное перемещение»: раскрепляются один, или несколько узлов у вершины, увеличивая тем самым длину трещины на величину Δa , и определяется новое равновесное состояние и совершенная работа. В упругом материале данному распределению нагрузки в данной конфигурации узлов соответствует единственное НДС, не зависящее от пути нагружения. Следовательно, не обязательно разъединять узлы в одной конфигурации, а можно ввести две конфигурации – с исходной длиной трещины, где образец из состояния 0 переходит в состояние 1, и с подросшей трещиной, где совершается переход 0 – 2, и решать, соответственно, две задачи с одинаковой историей нагружения для двух конфигураций. Разность работ, совершенных внешней силой в этих двух конфигурациях, и отвечает работе, совершаемой в расчете с разъединением узлов, в замкнутом цикле 0-1-2-0. Необратимая работа совершается против «виртуальных» сил сопротивления разъединению трещины, которые при таком способе расчета только подразумеваются.

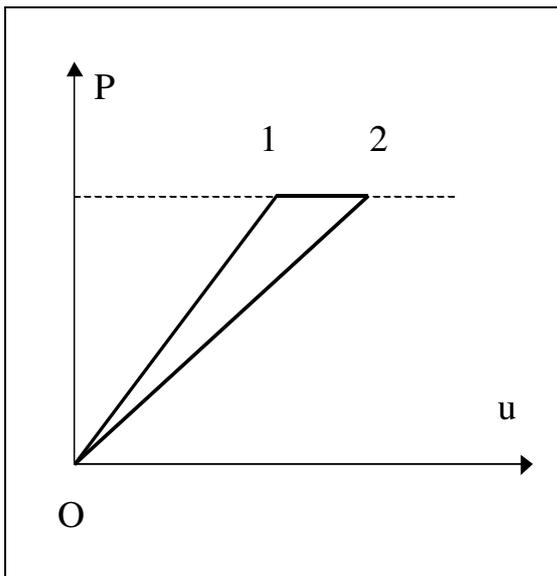


Рис. П.6. Цикл нагружения в методе податливости

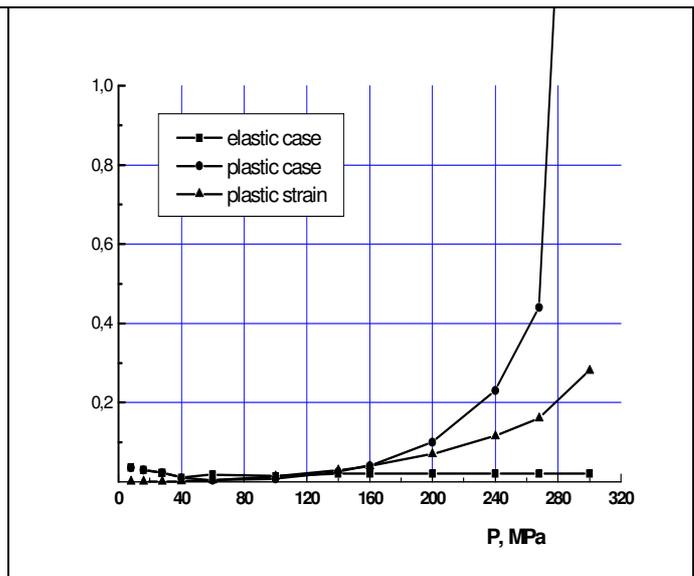


Рис. П.7. Отклонение в определении в методе податливости: отличие "упругого" и "пластического" КИН.

Этим последним способом определялся КИН для той же конфигурации рис. П.3. Работа определяется по перемещениям поверхности приложения нагрузки по (П.20). Численно из (П.20) определяется G , а затем из (П.21) величина КИН. Точность этого метода составляет 1–3%, и она существенно выше, чем у прямого, к тому же он пригоден на более грубых сетках. На рис. П.7. показана зависимость погрешности вычисления от нагрузки для случая чисто упругого материала и упруго-пластического. Там же нанесена зависимость безразмерной максимальной пластической деформации на расчетной сетке, которая здесь характеризует размер пластической области. При больших пластических деформациях “пластически” вычисленный КИН заметно отличается от “упругого”. Это связано с тем, что диссипация энергии при раскрытии трещины производится не только у ее вершины, но и в протяженной пластической зоне.

Раскрытие трещины

Раскрытие трещины (crack opening displacement: COD) представляет собой смещение берегов трещины относительно ее средней линии. Определение параметра COD обычно иллюстрируется схемой, приведенной на рис. П.8, где величина COD есть величина порядка удвоенного эффективного радиуса затупления трещины. Для идеальнопластического материала в условиях плоской деформации COD можно оценить по формуле (П.14). Уточненная формула, использующая т.н. модель Дагдейла [П.4]:

$$\delta = \frac{8a\sigma_y}{\pi E} \ln\left(\sec \frac{\pi \sigma}{2\sigma_y}\right). \quad (\text{П.22})$$

Величина COD может быть с определенной точностью измерена и служит в некоторых странах стандартным параметром трещиностойкости, хотя требует жёсткой стандартизации испытаний и вряд ли достаточно универсальна как константа материала [П.18].

В расчёте COD может быть получено численно как перемещение сетки в лагранжевой МКЭ модели, если сетка достаточно мелкая. Определение проводилось на рассмотренной выше задаче о поперечной трещине в стальной полосе. Отобразить детально при численном моделировании форму всей трещины трудно, и за COD принимается вертикальное перемещение узла, ближайшего к вершине трещины. Поскольку используемая методика предназначена для вычислений с нелинейными большими деформациями, определяемое так перемещение отвечает в некотором приближении фактической форме вершины трещины в упруго-пластическом материале, грубо представляемой двумя первыми элементами, окаймляющими разрыв. На нескольких сетках была проверена независимость так определяемой величины δ от шага сетки у вершины (вариация шага от 0,02 до 0,08мм). На рис. П.9. показана зависимость δ от приложенной нагрузки, полученная численно, и по формуле (П.22). Учитывая грубость модели COD результат вполне удовлетворителен.

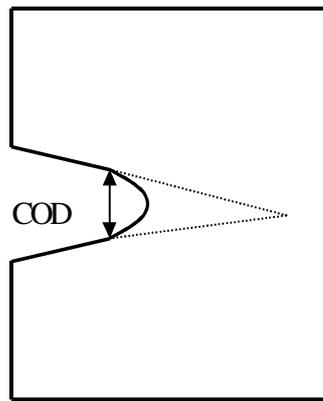


Рис. П.8. К определению раскрытия трещины

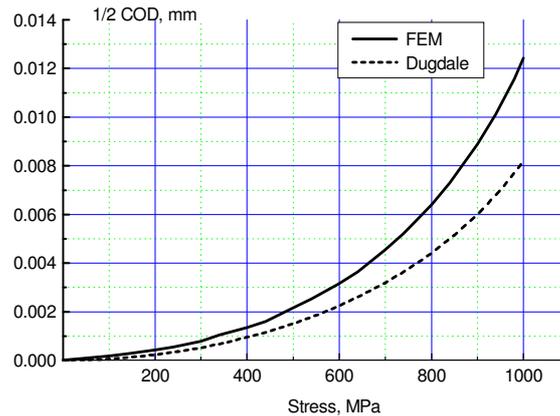


Рис. П.9. Раскрытие трещины в зависимости от приложенной нагрузки. FEM – численный расчет, Dugdale – по формуле

Форма и размеры пластической зоны

Аналитические оценки. Форма и размер пластической зоны зависят от геометрии образца и нагрузки. Экспериментальное их определение сопряжено с погрешностями. Расчетная величина зависит от принимаемой модели пластичности и точности самого расчета, поэтому точность расчётов также ограничена. Численные оценки формы и протяженности области пластического течения вблизи вершины трещины в условиях плоской деформации показывают [П.17], что она вытянута под углом 70° к оси абсцисс. Ее (максимальный) размер в этом направлении оценивается по формуле (П.15):

$$\epsilon_r = 0,15(K_1 / \sigma_f)^2, \text{ по оси } O_x : \epsilon_x = 0,03(K_1 / \sigma_f)^2.$$

В рамках рассмотренной задачи о растяжении сравнение расчета и аналитических оценок проводится при растягивающей нагрузке $P_0=128\text{МПа}$. В численном расчете граница области ненулевой пластической деформации совпадает с границей области пластического состояния, где 2-й инвариант тензора девиаторов напряжений постоянен согласно используемому условию Мизеса, которое в главных напряжениях имеет вид:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_y^2$$

В проведенном расчете предел текучести $\sigma_y=255\text{МПа}=2P_0$, модуль упрочнения $0,01\%$ от модуля упругости, т.е. материал почти идеально пластичен. Угол максимальной длины зоны оценивается в 60° с точностью до $10\text{-}15^\circ$ (рис. П.10) На рис.11 приведены распределения пластической деформации в направлениях Ox и Or . Размеры пластической зоны, оцененные по этим кривым, приведены в табл. П.1. Пластическая зона вдоль Ox имеет 4-5 ячеек. Технический предел деформации, начиная с которого она считается неупругой, составляет $0,2\%$, и, если отмерять начало пластичности от этого уровня деформации, это отвечает расчетной длине пластической зоны как раз в $0,6\text{мм}$.

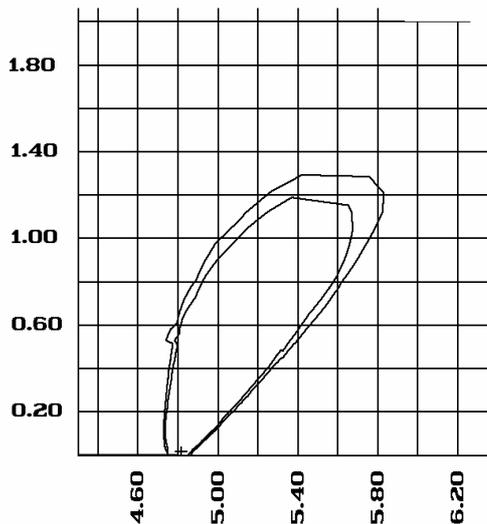


Рис. П.10. Область пластической деформации в задаче о трещине деформации по уровню $\epsilon_p = 0,01\%$

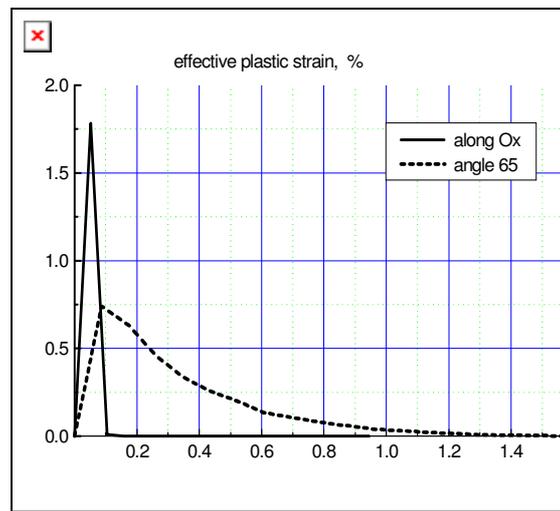


Рис. П.11. Профили пластической деформации в двух направлениях

Табл.1. Размеры пластической зоны.

	Оценка (П.15)	По уровню 0,01%	По уровню 0,2%
ϵ_x	0,12мм	0,11мм	0,1мм
ϵ_r	0,6 мм	1,2 мм	0,6 мм

П.2.3. Моделирование эксперимента

В работе [П.19] приведены экспериментальные результаты по конфигурации пластической зоны у вершины трещины в образцах из малоуглеродистой стали, испытываемых трехточечный изгиб (рис. П.5) при монотонно возрастающей нагрузке. Для сравнения взят эксперимент с образцом, имеющим форму стержня $25 \times 25 \times 200$ мм, в котором выращена поперечная трещина длиной $a=2,25$ мм. Начиная с некоторой величины нагрузки, у вершины трещины появляется пластическая деформация, которая растет с ростом нагрузки. Визуализация пластической зоны осуществлялась на поверхности специальным методом.

Эти эксперименты были воспроизведены численно. Особенности и различия условий в эксперименте и расчете следующие –

- В двумерном расчете с плоскими деформациями размер образца в направлении Oz перпендикулярно к плоскости напряжений неограничен, а в эксперименте – конечен.
- Размер пластической зоны оценивался по напряжениям на боковой поверхности образца согласно условию текучести Треска, которое в главных напряжениях записывается как

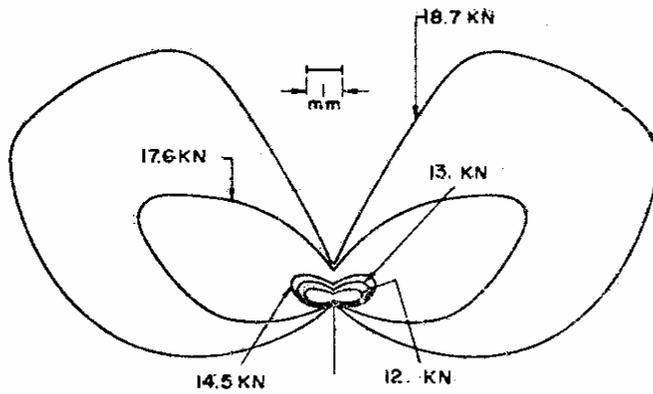
$$1/2(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \sigma_y \quad (\text{П.23})$$

- Напряжения измерялись на наружной боковой поверхности образцов методом фотоупругости. Здесь может быть отличие за счет поверхностных эффектов (расширение зоны пластичности) и точности измерений.

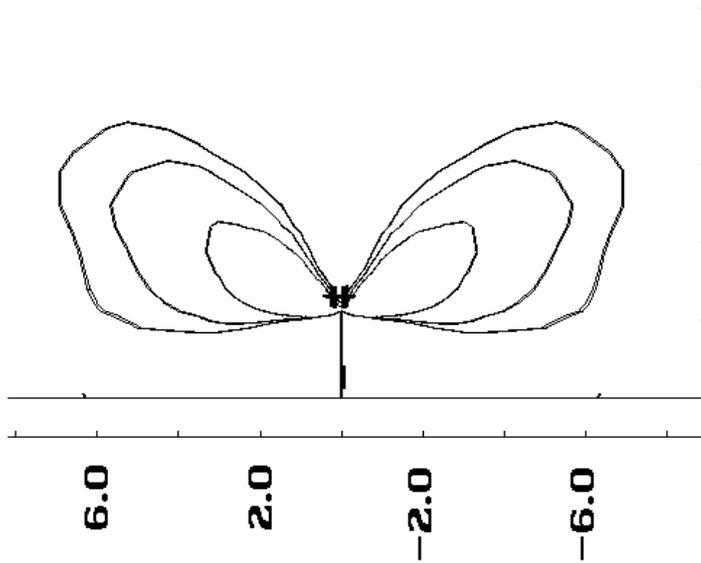
В [П.19] приводятся рисунки с последовательными положениями границы области пластической деформации при последовательном росте нагрузки. На рис. П.12

воспроизводится один из этих рисунков и аналогичные линии, построенные по результатам численных расчетов для трех последовательных нагрузок $F=14,5\text{кН}$, $17,6\text{кН}$, $18,5\text{кН}$, соответствующим линиям, приведённым на рисункам. Линий границы пластической зоны для каждой нагрузки строились, исходя из двух разных условий – условия Треска (П.23) и условия "почти-нулевой" пластической деформации, что эквивалентно началу пластичности по условию Мизеса. Масштаб приведённых картинок одинаковый. Длина трещины составляет $2,25\text{мм}$. Основное отличие расчета и эксперимента состоит в характере расширения пластической зоны – в расчете с ростом нагрузки пластическая зона растёт более плавно. Это различие может быть связано с деталями упруго-пластического поведения образца, с точностью измерений (визуальное определение), с трёхмерностью эксперимента при плоских напряжениях, моделируемого в 2–мерной постановке при плоских деформациях.

a)



b)



c)

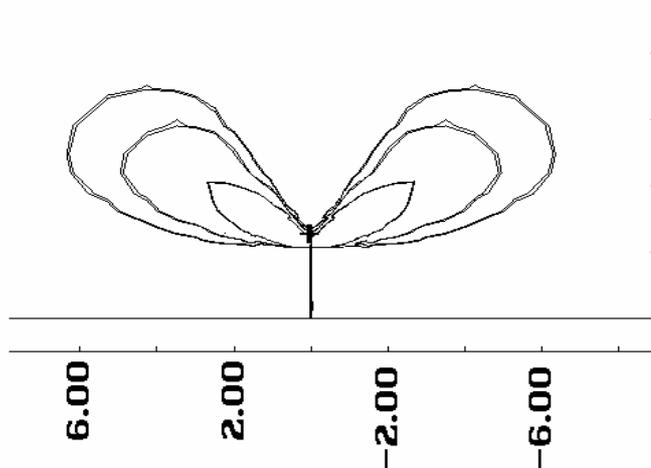


Рис. П.12. Пластическая зона при последовательных нагрузках в эксперименте и расчете: а) эксперимент; б) расчет- условие Треска; с) расчет- условие Мизеса

П.2.4. Площадь сечения трещины в главном циркуляционном трубопроводе ВВЭР-1000

При обосновании концепции "течь перед разрушением" в применении к трубопроводам первого контура водо–водяного реактора необходимо иметь проверенную методику, связывающую объём наблюдаемой утечки теплоносителя с размером предполагаемой трещины [П.20]. Один из основных этапов обоснования состоит в оценке площади трещины в трубе по её размеру. В линейной части трубы в первую очередь рассматриваются поперечные трещины, как наиболее вероятные при изгибных нагрузках.

Для расчётов площади раскрытия трещины широко применяются численные методы, а в инженерных методиках, которые должны быть по возможности быстрыми и простыми, используются интерполяционные формулы. Одно из феноменологических соотношений – это формула Пэриса–Тады [П.21], [П.22], вычисляющая площадь по формуле для эллипса (малая полуось которого оценивается по деформации) с некоторой поправкой:

$$S = \frac{\sigma}{E} \pi R^2 I(\theta). \quad (\text{П.24})$$

Здесь σ – осевое растягивающее напряжение, E – модуль упругости, R – срединный радиус трубы, θ – половинный угловой размер трещины, т.е. половина сектора 2θ , который занимает трещина на полной окружности трубы. Полиномиальная функция $I(\theta)$ описывает отклонение от идеальной трещины на плоскости.

Соотношение (П.24) получено в предположениях тонкой стенки и отсутствия пластичности. Если трещина находится в условиях плоской деформации, вместо E подставляется эффективное значение $E(1-\nu^2)$, ν – коэффициент Пуассона. Наличие пластических деформаций в вершинах трещины учитывается через пластическую поправку Ирвина, вводящую эффективную длину трещины. Приложенное осевое напряжение может быть связано с внутренним давлением, или моментной нагрузкой.

Ниже приведены некоторые результаты тестовых расчётов, в которых ставилось целью, во–1, проверить КЭ–модель, а во–2, выяснить степень отклонения расчёта от формулы (П.24), привносимого геометрическим фактором для толстой трубы.

В расчёте, проведённом в начале 2000 г., использовался код ANSYS 5.5.1. Применялись 6–гранные 8–узловые элементы. При построении КЭ–модели ставилось целью обеспечить варьирование радиуса, толщины, длины трубы и длины трещины, не меняя топологии разбиения. Конфигурация трубы с трещиной предполагалась симметричной, и в расчёте участвовала 1/4 всей трубы (половина окружности с симметричным разбиением трещины). Структура КЭ–модели видна из рис. П.13. Ось Oz направлена вдоль оси трубы. Внутренний и внешний радиусы трубы: $R_i=0,4\text{м}$, $R_o=0,45\text{м}$, угловой размер трещины варьировался.

Граничные условия по перемещениям в плоскостях боковых срезов задавались по симметрии, в торцевом срезе трубы, содержащем трещину, аналогичные г.у. задавались везде вне поверхности трещины (с полным закреплением в одном узле). На другом торце трубы прикладывалось постоянное растягивающее осевое напряжение, однородное по всей поверхности, и равное 50МПа. Для упрощения сравнения материал трубы брался упругим.

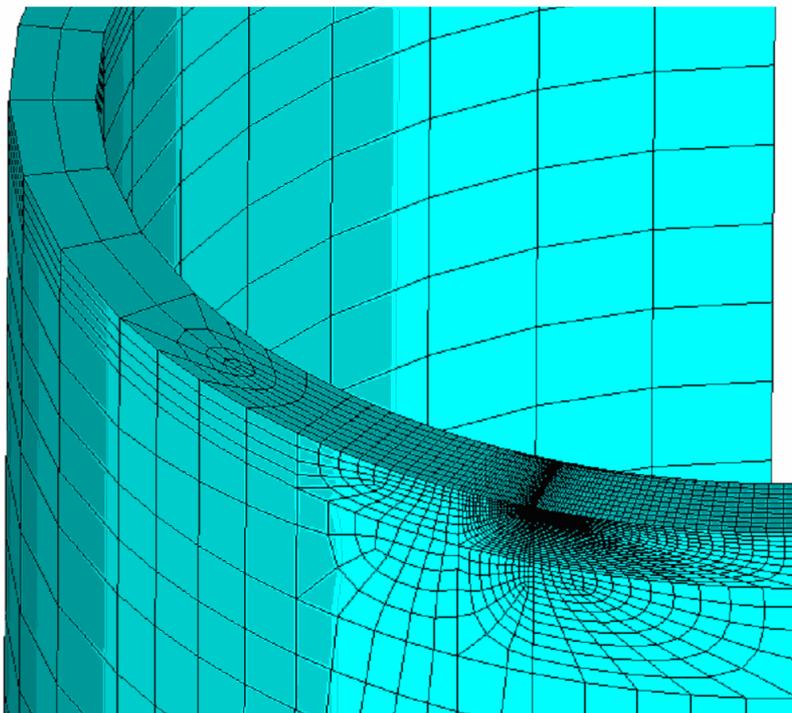


Рис. П.13. КЭ-разбиение

σ_{zz} :
 min= - 886 MPa
 max= 68 MPa

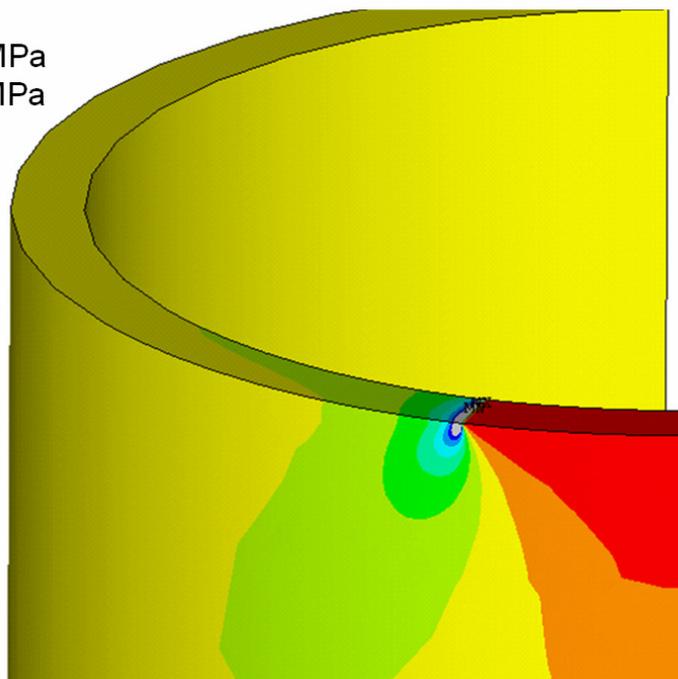


Рис. П.14. Осевое напряжение σ_{zz} (серым показана область вне цветовой шкалы)

При приложении нагрузки в окрестности вершины трещины возникает характерное распределение напряжений (рис. П.14). Контур раскрытия трещины даётся распределением $U_z(x)$ осевых перемещений её берега вдоль её полудлины (рис. П.15), которое близко к эллипсу. Осевые перемещения на рис. П.15 взяты при среднем радиусе $R_M=0,5(R_i+R_o)=0,425$ м, т.е. на срединной поверхности стенки трубы. Площадь всего сечения щели вычисляется как учетверённый интеграл от кривой рис. П.15: $S=4 \int U_z(x)dx$.

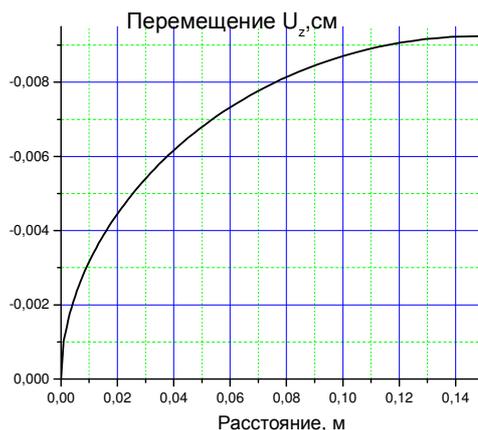


Рис. П.15. Распределение осевого перемещения (трещина с $\theta=20^\circ$)

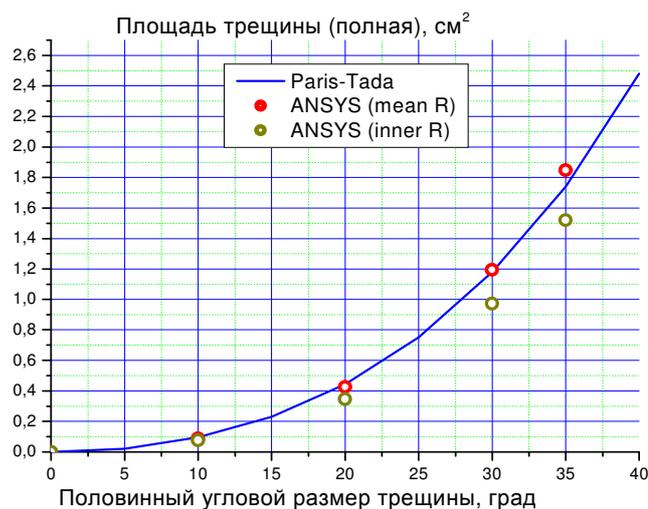


Рис. П.16. Зависимость площади трещины от углового размера. "mean R" – на срединном радиусе, "inner R" – на внутреннем радиусе трубы.

На рис. П.16 приведены зависимости вычисленной таким образом площади от длины трещины. Сравнивается зависимость, полученная по формуле Пэриса–Тады (при плоских деформациях), и полученные численно две зависимости площади: вычисленной на радиусе R_i (внутренняя граница) и на срединном радиусе R_m . Видно, что, во–1, полученная численно зависимость для срединной поверхности достаточно близка к формуле (П.24), а во–2, при взятых параметрах трубы относительное отклонение от формулы, связанное с расходимостью берегов трещины, не так велико, если сравнивать эту погрешность с той, что может появиться при переходе к реальным трещинам с нерегулярным сечением.

Литература к Приложению

1. Х.Хан. Теория упругости. М., Мир, 1990
2. E. J. Hearn. Mechanics of materials. An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials. Part 2. 3d edition. UK, 1997
3. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин.— М.: Наука. 1984.- 256 с.
4. Сиратори М. Нуёс Т. Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения. М. 1988
5. Г.П.Черепанов Механика хрупкого разрушения. М., 1974
6. IPRIG-2 Projram. Final Report. NUREG/CR-6452 BMI-2195.
7. Вычислительные методы в механике разрушения. Под ред. С.Атлури. М.,Мир, 1990г.
8. Дробышевский Н.И., Филиппов А.С. Численный анализ высокотемпературной ползучести реакторной стали. Известия РАН, Энергетика, 3, 2004, с.27–34.
9. Н.И. Дробышевский, А.Е. Киселёв, В.Ф. Стрижов, А.С. Филиппов. HEFEST-M: программное средство для расчёта высокотемпературного нелинейного деформирования. // Математическое моделирование, 22 (2), 2010, стр. 45-63
10. А.С. Филиппов, Н.И. Дробышевский, А.Е. Киселёв, В.Ф. Стрижов. Расчёт термдеформирования корпуса реактора с расплавом с помощью кода HEFEST-M. Известия РАН, Энергетика, 6, 2010 стр. 92-104

11. Филиппов А.С., Дробышевский Н.И., Киселёв А.Е., Стрижов В.Ф., Фокин А.Л. СОКРАТ/HEFEST: модели взаимодействия расплава активной зоны ВВЭР с конструкциями реактора при тяжёлой аварии. Известия РАН, Энергетика, 3, 2010, стр.4-24
12. Дробышевский Н.И., Филиппов А.С. Расчет сварочных напряжений в трубе и их снятия внешним давлением. Известия РАН, МТТ, 4, 1993.
13. Байшев Ю.П., Дробышевский Н.И., Филиппов А.С. Расчет напряжений и деформаций при ручной многопроходной сварке кожуха доменной печи. Деп. ВИНТИ. М., 1995, № 2892-В95, 33с.
14. Дробышевский Н.И., Зайцев М.А., Филиппов А.С. Моделирование напряженно-деформированного состояния защитной оболочки АЭС с ВВЭР-1000 при динамических нагрузках. Известия РАН, Энергетика, 3, 2004
15. Filippov A.S., Drobyshevsky N.I., Strizhov V.Th., Simulation of Vessel-with-melt Deformation by SOCRAT/HEFEST Code, 17th Int. Conf. on Nucl. Eng., ICONE17, July 12-16, 2009, Brussels, Belgium
16. A.S.Filippov, N.I.Drobyshevsky, D.D.Kamenskay, A.E.Kisselev, E.V.Moiseenko. End-to-end technology of modeling a melt-structure interaction during IVMR in VVER with HEFEST-URAN toolkit. Proceedings of the 22nd International Conference on Nuclear Engineering, ICONE22 July 7-11, 2014, Prague, Czech republic
17. Хеллан К. Введение в механику разрушения М.Мир 1988, 364с.
18. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела, М., Наука, 712с., 1988.
19. S.N. Bandyopadhyay, N.Singh, G.S.Murty. An experimental study of crack tip plastic flow in mild steel. Engineering fracture mechanics, 3, **14**, 1981
20. А.Ф. Гетман. Концепция безопасности «Течь перед разрушением» для сосудов и трубопроводов давления АЭС. Москва Энергоатомиздат 1999
21. К. Hasegawa et al. / Fracture margin of pipe with detectable crack / Nucl.Eng.Des. 128(1991) p.29-34
22. P.C.Paris and H.Tada. The application of fracture proof design methods using tearing instability theory to nuclear piping postulating circumferential through wall cracks. NUREG / CR-3640 (1983).