

Филиппов А.С.

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО
ТЕЛА**

Материалы к курсу лекций

Часть вторая. Численные методы и модели среды

Москва 2024

Оглавление

8. Введение в МКЭ: дискретная основа решения задач МДТТ.....	5
8.1. РАЗВИТИЕ МКЭ.....	6
8.2. ИНЖЕНЕРНЫЕ МКЭ–ПАКЕТЫ.....	8
8.2.1. Замечание относительно наименования алгоритмических расчётных средств	8
8.2.2. О выборе и работе с программными средствами	10
8.3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ. УЗЛЫ И ЭЛЕМЕНТЫ.....	11
8.3.1. Процедура дискретизации МКЭ	11
8.3.2. Геометрическая модель в дискретном представлении	12
8.3.3. Матричные обозначения.....	16
9. Сетевые модели с 0D элементами	16
9.1. ЛИНЕЙНАЯ УПРУГАЯ ПРУЖИНА.....	17
9.2. "КАРКАСНАЯ" МОДЕЛЬ СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ.....	22
9.3. СТАЦИОНАРНЫЙ АНАЛИЗ СЕТЕЙ.....	27
9.4. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ АНАЛИЗ СЕТЕЙ С НАКОПИТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ.....	29
9.4.1. Модель тепловой сети в виде сопротивлений, конденсаторов и источников	29
9.4.2. Пример полиразмерного подхода: 0D+2D модель теплового взаимодействия расплава с окружением	30
10. Многомерные задачи: метод перемещений как формализация "метода каркасов"	36
10.1. О МЕСТЕ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В МЕТОДОЛОГИИ МКЭ.....	36
10.2. 2D ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	37
10.3. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИИ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.....	37
10.3.1. Этапы процедуры дискретизации	37
10.3.2. Интерполирующие выражения. Треугольный линейный элемент	39
10.3.3. Перемещения и деформации в конечном элементе	42
10.3.4. Напряжения в элементе.....	43
10.3.5. Узловые силы и условие равновесия	44
10.3.6. Учёт объёмных, поверхностных и точечных сил	47
10.3.7. Дискретная форма полного уравнения равновесия элемента	48
10.4. ОБЩЕЕ РАВНОВЕСИЕ В КЭ–МОДЕЛИ И СБОРКА ГЛОБАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ЖЁСТКОСТИ	49
10.4.1. Свойства матрицы жёсткости, ширина диагонали	50
10.4.2. Интегрирование по элементу	51
10.4.3. Осесимметричная геометрия.....	51
10.5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЯМ.....	53
10.5.1. Способы реализации	53
10.5.2. Примеры задания условий закрепления.....	55
10.5.3. Замечание о задании условий закрепления в задачах термомеханики.....	57
11. Общие формулировки МКЭ.....	60
11.1. ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ ФОРМЫ.....	61
11.1.1. Четырёхугольный 4–узловой элемент.....	62
11.2. КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МСС	63
11.3. ПИРАМИДАЛЬНЫЕ БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ.....	65
11.4. ФОРМУЛИРОВКА МКЭ ЧЕРЕЗ ПРИНЦИП МИНИМУМА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ	68
11.5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЭЛЕМЕНТУ.....	72
11.6. МКЭ КАК МЕТОД ВЗВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК	72
11.6.1. Взвешенные невязки и финитные функции	72
11.6.2. Пример: дискретизация уравнения нестационарной теплопроводности	75

11.6.2.1. Метод взвешенных невязок как проекция обобщённой (слабой) формулировки задачи.....	76
11.6.2.2. Метод Бубнова–Галёркина.....	77
11.6.2.3. Интегрирование по времени.....	80
11.7. КРАТКОЕ РЕЗЮМЕ: ДВА ПОДХОДА К МКЭ КАК ДВА МЕТОДА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В МСС.....	81
11.7.1. МКЭ как "метод каркасов" или "метод сетей".....	82
11.7.2. МКЭ как метод взвешенных невязок.....	83
11.7.3. "Каркасы" vs. "взвешенных невязок" – не "вместо", а "вместе".....	83
12. Нелинейные задачи МДТТ.....	85
12.1. ФОРМУЛИРОВКИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ НАГРУЖЕНИЕ.....	85
12.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ: КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ.....	87
12.2.1. Компоненты тензора напряжений в системе элемента и в лабораторной системе.....	87
12.2.2. Поворот тензора напряжений.....	89
12.2.3. Производная по времени тензора напряжений.....	90
12.2.4. Обновление полного тензора напряжений. Давление и термодформации.....	91
12.3. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ.....	92
12.3.1. Процедура "радиального возврата" на поверхность текучести.....	93
12.3.2. Учёт упрочнения при деформировании.....	95
12.3.3. Нелинейное упрочнение и установившаяся ползучесть.....	98
12.3.4. К построению квазистатического алгоритма модели пластичности.....	99
13. Физически нелинейные задачи квазистатики.....	101
13.1. О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ.....	101
13.1.1. Метод последовательных приближений: терминология.....	101
13.1.2. Итерационный процесс метода Ньютона.....	102
13.1.3. Нелинейности в теории пластичности.....	103
13.1.4. Матрица определяющего соотношения в модели линейного упрочнения.....	104
13.1.5. Свойства матрицы линейной системы: погрешность и число обусловленности.....	106
13.1.6. О критериях сходимости итераций и общих проверках решения.....	108
13.2. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В КОДЕ HEFEST- M.....	109
13.3. ОБЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МДТТ.....	111
13.3.1. Вычислительный цикл решения квазистатической задачи.....	112
13.3.2. Этапы получения численного решения МДТТ-пакетом.....	113
13.3.2.1. Построение расчётной области (Preprocessing) и решение.....	114
13.3.2.2. Работа с результатами решения.....	115
13.3.3. Режимы работы с универсальным пакетом программ.....	116
13.3.3.1. Интерактивный режим.....	116
13.3.3.2. Пакетный режим.....	116
14. Неполноразмерные элементы. Балочный элемент.....	118
14.1. ОСНОВНЫЕ НЕПОЛНОРАЗМЕРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ: БАЛКА И ОБОЛОЧКА.....	118
14.2. БАЛКА (ИЗГИБНЫЙ ЭЛЕМЕНТ).....	118
14.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗГИБА.....	119
14.3.1. Точечное и распределённое нагружение.....	120
14.3.2. Энергия упругого изгиба и "сплайны".....	121
14.4. ПОСТРОЕНИЕ ИЗГИБНОГО КЭ.....	122
14.4.1. Функции формы изгибающего КЭ.....	122
14.4.2. Дискретное уравнение равновесия изгибающего КЭ.....	124
15. Динамические явления и методы их количественного описания.....	127
15.1. ВВЕДЕНИЕ: ОБЩАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.....	127
15.2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ МКЭ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.....	128
15.2.1. Система уравнений динамики твёрдого деформируемого тела.....	128
15.2.2. Пространственная дискретизация уравнений динамики ДТТ.....	131
15.2.3. Обобщённая формулировка уравнения квазиравновесия.....	131
15.2.4. Дискретизация МКЭ.....	133
15.2.5. Матрица демпфирования. Псевдовязкость.....	136

15.2.6. Сосредоточенные массы. Явное интегрирование по времени.....	137
15.2.7. Процедура интегрирования по времени	138
15.2.8. Физические особенности динамики твёрдого тела и её численной модели.....	139
16. Анализ упругих колебаний	139
16.1. ПОСТАНОВКИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ И ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ.....	139
16.2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ.....	142
16.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ.....	143
16.4. ПРОЦЕДУРЫ РАСЧЁТА ЧАСТОТНЫХ ФОРМ.....	144
Литература	145

8. Введение в МКЭ: дискретная основа решения задач МДТТ

Полученные выше уравнения статики деформируемого твёрдого тела представляют собой систему уравнений в частных производных для семейства функций, описывающих его напряжённо-деформированное состояние. Это частный случай общих уравнений механики сплошной среды (МСС). Существующие численные методы решения уравнений МСС и им аналогичных, обладают рядом общих черт. Вместе с тем, особенности моделируемой среды (жидкость, твёрдое тело) и постановки задачи определяют выбор наиболее подходящего метода. Ниже этот выбор кратко обосновывается для задач МДТТ.

Запишем решаемую систему уравнений квазистатики в общем операторном виде:

$$Au=F \quad (8.1)$$

Оператор A линейный и содержит дифференцирование, умножение на число etc. Он действует на неизвестную функцию u (набор функций $\{u_i\}$) от координат. В общем случае функции могут зависеть от времени и самих неизвестных. "Операторная" часть уравнения записывается обычно слева, в левой половине уравнения (8.1), правая же половина F содержит известные величины, задаваемые по условиям задачи. Неизвестные функции (для МДТТ это компоненты вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций) заданы на некоторой пространственной области Ω , возможно, на некотором отрезке времени: $u_i=u_i(x,t)$, $x \in \Omega$, $t_0 \leq t \leq t_n$. Они удовлетворяют краевым условиям на границе $\partial\Omega_u$: $u_i=u_i^0(x)$, $x \in \partial\Omega$, а при нестационарной постановке – начальным условиям. Требуется построить ориентированную на вычислительную машину эффективную процедуру (алгоритм) численного решения задачи. Под "эффективностью", в соответствии со сложившимися понятиями, здесь и далее понимается возможность численного метода работать в достаточно широком классе задач, давая решение с приемлемой точностью за приемлемое время.

Требование эффективности метода, таким образом, подразумевает его относительную "всеядность" по постановке задачи, что достигается только в рамках т.н. проекционно-сеточных методов (по терминологии [Марчук]), называемых также "методами сеток", в которых приближённое численное решение дифференциальной задачи вычисляется в конечном множестве точек области ("проецируется на сетку"), в остальных же точках решение находится интерполяцией. Процедуру сведения постановки непрерывной задачи (8.1) к задаче вычисления табличной (дискретной) функции $u(x_i, y_i, z_i)$, заданной в отдельных точках (x_i, y_i, z_i) , называют *дискретизацией* исходного уравнения, (8.1). Дифференциальное уравнение при этом сводится к системе (квази)линейных алгебраических уравнений, алгоритмы решения которых хорошо разработаны. В качестве исходных для проведения дискретизации уравнений МСС чаще рассматриваются их интегральные формулировки (например, принцип виртуальной работы).

Большинство применяемых в настоящее время методов дискретизации уравнений МСС могут быть отнесены к одной из двух основных разновидностей. Это (а) метод конечных разностей (МКР), в котором пространственные производные в исходном уравнении, или в его интегральной форме (метод контрольных объёмов, МКО), аппроксимируются разностными соотношениями, и (б) метод конечных элементов (МКЭ), в котором вводится пространственная аппроксимация решения и его производных более общего вида. Каждое из этих названий объединяет группу методов, близких по идеологии. Различие между методами двух групп в основном связано со способом пространственной аппроксимации решения в ячейках, и оно частично коррелирует с областью применения. МКО преимущественно используется для задач механики жидкости, хотя, например,

CFD–пакет ANSYS CFX использует также МКЭ-подход. Дискретизация по времени практически всегда строится через конечные разности, но известны и реализации пространственно-временных КЭ [Оден].

Степень точности схем аппроксимации решения уравнений МСС характеризуют порядком аппроксимации по пространству, а также по времени, если задача нестационарна. В линейных задачах, чем выше порядок, тем, в общем, выше точность решения. Если (8.1) представляет собой нелинейное уравнение (например, баланса импульса жидкости с конвективным слагаемым), эффект уточнённой пространственной аппроксимации может быть в численном методе невелик. Постановки задач МДГТ в этом отношении весьма комфортны по причине ограниченных и относительно малых деформаций. Это позволяет формулировать эволюционную задачу в лагранжевых переменных, не вводя перетоков (моделирующих конвективный перенос) массы и других величин через границы элементов, требуемых эйлеровым подходом. На малых перемещениях даже нелинейная задача будет близка к линейной, и для её решения метод конечных элементов очень удобен. Его основу составляет техника полиномиальной интерполяции решения в конечных элементах с последующим "сшиванием" кусочных "по-элементных" аппроксимаций в "глобальное" решение. Вид аппроксимирующей функции привязан к элементу, увеличение порядка и точности аппроксимации не требует выхода за его пределы, процедура "сшивания" аппроксимаций в соседних элементах регламентирована интегральным соотношением, используемым в процедуре дискретизации. При этом существует определённая свобода в выборе формы элемента. В лагранжевом подходе конечный элемент может изменяться (деформироваться) в процессе решения, и благодаря этому удаётся достигнуть необходимой точности пространственной аппроксимации на областях со сложными переменными границами, при конечных (не малых) деформациях.

В настоящее время МКЭ является основным методом решения задач МДГТ, и последующее будет посвящено изложению его основ. Известно несметное количество реализаций МКЭ, даже для задач МДГТ, использующих различные основные переменные, способы аппроксимации, формулировки интегральных принципов (есть уже, например, в книге 1970-х гг. [Стренг Фикс]). Только учебная и монографическая литература по МКЭ насчитывает сотни или даже тысячи единиц. Здесь изложена одна из наиболее простых и употребительных схем дискретизации. Приводимые перед этим некоторые факты из истории развития метода (см. также [Оден], [Стренг Фикс]) имеют целью иллюстрацию естественности его широкого распространения для решения инженерных задач.

8.1. Развитие МКЭ

Взглянем на задачу МДГТ глазами инженера докомпьютерной поры. Аналитические решения уравнений упругости построены только для простых случаев, а то, что проектируется, как правило, имеет сложную форму и нагружение. Естественный способ упрощения основан на том, что проектируемые конструкции приближённо представляются в виде набора простых элементов: пластин, стержней и др. Конструкция описывается как совокупность таких элементов. НДС в них, следовательно, будет некоторой суперпозицией решения в отдельных элементах. Простые элементы не обязательно тождественны элементам конструкции. Один из первых авторов, Хренников, в 1941г. (США), используя т.н. "ферменную аналогию", ввёл "метод каркасов" – предшественник общих дискретных методов решения задач строительной механики и применял его, представляя сплошное упругое тело в виде системы стержней.

Аналогичные подходы разрабатывались другими авторами. Разбиение области на простые части и составление уравнений равновесия и совместности для этих частей, элементов общей структуры, выполнялись на основе физических соображений. Построение более сложных структурных элементов проводилось так же; было замечено,

что при возрастании степени полиномов (φ_i), аппроксимирующих решение в элементе, значительно повышается точность, однако неизвестные коэффициенты q_i при полиномах, вычисляемые при такой дискретной аппроксимации, всегда подразумевали некий физический смысл, и процедура их вычисления не была формализована. По этой причине результат было интерпретировать легче, чем обосновать задаваемые весовые коэффициенты при аппроксимирующих полиномах.

Эта процедура приобрела математическое обоснование, когда неизвестные коэффициенты q_i в приближённом решении $u = \sum q_i \varphi_i$ были отождествлены с коэффициентами в аппроксимации приближённого метода Рунге получения решения эллиптических дифференциальных уравнений путём его разложения по базисным функциям (см. [МитчелУэйт] и др.). Получаемые при этом дискретные уравнения есть следствие условия минимума упругой потенциальной энергии. В 1954г. Аргирис и его сотрудники начали публикацию серии работ, в которых они развили некоторые обобщения линейной теории конструкций и представили методы исследования дискретных конструкций сложных конфигураций в форме, удобной для ЭВМ. Первое формальное изложение метода конечных элементов принадлежит Тэрнеру, Клафу, Мартину и Топпу (1956), которые при исследовании задач о плоском напряженном состоянии использовали для описания свойств треугольного элемента уравнения классической теории упругости. Клаф ввел термин «конечные элементы» в своей более поздней работе (1960), посвященной плоским задачам теории упругости. Поскольку при решении задач МДТТ за основные неизвестные величины обычно берутся перемещения в узлах, или эквивалентные им степени свободы узлов, этот вариант дискретизации МКЭ получил название "метода перемещений".

Связь МКЭ с задачей минимизации позволила использовать его при решении других задач, сводящихся к решению уравнения Лапласа или Пуассона (стационарная теплопроводность, электромагнитные поля, идеальная жидкость). Решение этих уравнений также может быть получено путём минимизацией некоторого функционала.

Дальнейшее расширение области применения МКЭ связано с использованием концепции обобщённого решения и применением для получения аппроксимирующих уравнений метода Бубнова–Галёркина. Это позволило применять метод для решения тех дифференциальных уравнений, которые не имеют вариационной формулировки. В итоге МКЭ из численной процедуры решения задач строительной механики превратился в общий метод численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Этот процесс шёл в 1950-е гг. параллельно развитию вычислительной техники и благодаря этому занял менее 15 лет.

Таким образом, конечные элементы были введены инженерами, метод их применения был замечен и развит математиками и достиг уровня вычислительной эффективности, которого трудно было ожидать. Снабжённый "пользовательским интерфейсом", МКЭ вернулся к инженеру в новом облике как общий метод решения многомерных задач сплошной среды, электродинамики и др. Прежние ферменные аналогии в более формализованном виде применяются к системам, основными элементами которых служат стержни (в механике) или каналы/объёмы (в теплогидравлике и теплофизике). При этом уравнения, описывающие поведение элементов сети или элементов многомерной области собираются в (квази)линейную алгебраическую систему вполне единообразно – как в случае нульмерных, так и многомерных элементов. В настоящей работе термин "метод конечных элементов" будет применяться именно в таком широком смысле. Стандартным и доступным средством решения сложных задач МДТТ в настоящее время служат пакеты программ, основанные на МКЭ, о которых здесь стоит сказать пару слов.

8.2. Инженерные МКЭ–пакеты

Количество используемых в мире инженерных пакетов решения задач МДТТ, включая только те, что могут быть найдены по ссылкам в Internet, давно уже насчитывает многие десятки наименований. Часть из них – коммерческие, т.е. предоставляется в пользование за плату и без доступа к исходным текстам. Приведём некоторые, наиболее известные. Одними из первых, начиная с 60–70–х гг., были следующие (в скобках – первоначальная область применения):

NONSAP (строительная механика) ;
NASTRAN (авиация, космос);
ANSYS (строительная механика);
MARC.

Их позднейшие версии, существенно расширенные, эксплуатируются и ныне, вместе с другими, введёнными в употребление позже. Это, в частности –

ABAQUS, ADINA, ANSYS, MARC, MSC/NASTRAN, COSMOS, SAP-7, LS-DYNA, CodeASTER (открытый код программы, Франция). Элементы механики твёрдого тела присутствуют также в открытом коде OpenFOAM. Открытым, хотя и весьма сложным является конечно-элементная платформа PHYENIX, первоначально разработанная в КТН (Швеция), предназначенная для широкого круга задач.

Особое место занимает комплекс ANSYS (Analysis of Systems), который имеет мощную поддержку и к настоящему времени превратился из просто расчётного пакета задач механики и физики сплошной среды в программную среду для проведения цикла конструкторских работ, включающего проектирование, расчёты, оптимизацию, выпуск документации и сопровождение эксплуатации изделий широкого профиля. Его функции включают расчёты МДТТ, теплопередачи, гидродинамики, электрофизики, проведение расчётов комплексных явлений, оптимизацию конструкции и др. возможности. Круг задач МСС, решаемый с помощью системы ANSYS, расширяется путём внедрения других МКЭ–пакетов, например, LS-DYNA (динамика деформируемого твёрдого тела), CFX (гидродинамика), а также контрольно–объёмный гидродинамический код FLUENT. Они используются как самостоятельные программные единицы в рамках интегральной среды.

8.2.1. Замечание относительно наименования алгоритмических расчётных средств

Для дальнейшего определимся относительно наименования расчётных средств компьютерного решения задач механики сплошной среды и аналогичных. Отечественная терминология в этой области пока устанавливается, и, несмотря на наличие нормативных документов, даже основное понятие исполняемого алгоритма расчёта в разных областях и в разные времена называлось по–разному.

На ЭВМ все исполняемые алгоритмы можно разделить на системные, относящиеся к операционной системе, и прикладные (application), предназначенные для внешних "прикладных" нужд, которые, единственно, и интересуют потребителя. С точки зрения разработчика физических моделей или пользователя расчётного средства, данное "приложение" – это нечто, дающее нужный результат и часто упоминаемое по названию: ANSYS, NASTRAN, MS Word etc. С точки зрения разработчика алгоритма – это инструкция по проведению последовательности вычислений – "программа", закодированная в виде системы обозначений, переводимых в машинные команды. Пользователю расчётного средства, не работающему с исходным алгоритмом, достаточно знать его название.

Для употребления общих именованных исполняемых алгоритмов стоит их уточнить, соотнеся термин с конкретной реализацией алгоритма. Ниже сделана попытка собрать основные применяемые термины и разобраться с их применением. Выбор и толкование

термина сделаны на основе образцов, встреченных в литературе по техническим приложениям МСС. Это словоупотребление различается у разных авторов. Русско-язычные термины и их английские эквиваленты приведены в табл. 8.1.

Исходной для ныне используемой русскоязычной терминологии послужила англоязычная. Исторически первыми, видимо, были термины "код" (code) и "программа" (program), используемые для обозначения адреса операции (число) и инструкции (алгоритма) исполнения этих операций, загружаемой в оперативную память ЭВМ. Изначально операции кодировались вручную в двоичной системе цифрами "0" и "1". Позднее появились языки высокого уровня, с помощью которых алгоритм записывался в виде текстовых символов, кодирующих типовые наборы операций. Такой текст и сейчас иногда называется "код программы", но чаще – "текст программы", или – "исходный текст", "исходник" (source code). Название "программа для ЭВМ" принято в отечественном стандарте ЕСПД – Единая система программной документации, а название "код" применялось для откомпилированной программы – "исполняемого программного модуля", который и передаётся обычно пользователю.

Табл. 8.1. Термины для обозначения расчётных средств (задачи МСС)

	Русско-язычный термин	Похожий англо-язычный
1	Программа для ЭВМ (алгоритм и исполняемый модуль); программное средство	computer program
2	Программа (текст алгоритма)	program
3	Модуль (исполняемый, расчётный, программный), библиотека	computer code, module, library
4	Пакет программ	code package
5	Код (команда), машинный код	code, computer code
6	Код (программа для ЭВМ), компьютерный код	code, computer code
7	Программное, расчётное средство	code, software

Комментарии к терминам табл. 8.1

1. Название, принятое в 1980 г. в ЕСПД для алгоритма, написанного на одном из стандартных языков программирования. Сейчас употребляется также термин "компьютерная программа".

2. Сокращение для п.1; текст работающей программы для ЭВМ.

3. Исполняемое приложение, или программа для ЭВМ, или алгоритм на языке низкого уровня, могущее быть использованным автономно (после компиляции, если программа) или в комплексе с другими модулями.

4. Набор исполняемых приложений (программ для ЭВМ), объединённых некоторой общей тематикой.

5. Управляющие инструкции при работе ЭВМ.

6. Употребляется в смыслах пп. 1, 3, а также в смысле 4.

7. Собирательное название для упомянутого в пп. 1, 3-4, 6.

Комментарии к употреблению терминов

Примеры из англоязычной терминологии: программное средство для расчёта МДТТ обычно называется "*structure code*" или "*mechanical code*". В 1980–е гг. для обозначения программных средств расчёта динамики сжимаемой среды (твёрдые тела, жидкости, газы)

был введён термин "hydrocode", используемый обычно для расчётов ударно-волновых задач, в приближении невязкой жидкости. Средства вычислительной гидродинамики часто называются просто "code". Программное средство MELCOR для моделирования тяжёлых аварий на легководных реакторах, состоящее из большого числа отдельных модулей, компилируемых вместе, и запускаемое как консольное приложение, в его описании называется просто "computer code". Изначально MELCOR входил составной частью в STCP – *Source Term Code Package* для анализа безопасности АЭС, где термин Source Term сейчас (и в 1980-е гг.) относится к продуктам радиоактивного распада реакторного топлива. Расчётный код МААР для анализа аварий на АЭС – это *Modular Accident Analysis Program software*. В анализе безопасности такие пакеты программ также называются "системный код" (system code), т.е., описывающий систему (теплогидравлическую etc.). В русско-язычной терминологии программные средства расчёта задач механики сплошной среды также называют "код", ранее – "инженерный пакет", иногда – "тяжёлый пакет", поскольку они обычно весьма громоздки.

Термин "модуль" употребляется в технике для названия отдельного устройства, могущего работать самостоятельно и встраиваемого также в некую общую систему. По аналогии "программный модуль" является блоком "пакета программ" (как, например, программные модули системного тяжёлоаварийного кода СОКРАТ, модули его аналога, кода МААР). Модуль может быть независимой откомпилированной единицей, возможно, допускающей самостоятельное выполнение, но может быть и блоком общего алгоритма, включённым в код, с функций вызова и обмена данными. Термин "библиотека" применяется вместо или вместе с термином "модуль", чаще системными программистами.

Существующий разнобой в употреблении терминологии ниже использован для дополнительной характеристики упоминаемых расчётных средств. Ниже, говоря об алгоритмизации, будет употребляться название "программа", если программа для ЭВМ имеет небольшой размер (в пределах 10 тыс. операторов) и не очень много рабочих функций. Для программ большего размера, составленных из нескольких программных единиц, будет применяться термин "пакет" или "код". Последний термин в настоящее время устоялся в разговорной речи и вытесняет другие названия. Для уточнения назначения кода для задач МДТТ будет также употребляться название "структурный код", представляющее собой транслитерацию англоязычного термина, или "инженерный пакет", также применяемое. С "модулями" как конкретными реализациями откомпилированных алгоритмов, мы здесь не будем иметь дела. Термин "программное (расчётное) средство" будет применяться как самое общее обозначение вычислительного алгоритма, реализованного в виде работающего "приложения".

8.2.2. О выборе и работе с программными средствами

Каждый инженерный пакет имеет сильные и слабые стороны. Выбор программного средства решения задач зависит от подготовленности пользователя в своей области, характера задач, доступных ресурсов ЭВМ и др. Основные критерии, помогающие сделать выбор, таковы:

- расчётный код (пакет программ ...) достаточно широко используется и развивается, что является признаком его эффективности в вышеупомянутом смысле;
- коммерчески доступен или распространяется по открытой лицензии;
- имеются достаточно новые модели существенных физических явлений, представительный набор вычислительных методов;
- имеется достаточно подробная документация;
- возможно обучение и поддержка пользователя.

Ознакомление с документацией, с описанием физических моделей кода, включая модели материалов, библиотеки элементов, численных методов дискретизации и решения алгебраических систем позволяют сделать окончательный выбор.

Благодаря коммерческой доступности инженерные пакеты в последние пару десятилетий существенно потеснили аналогичные частные разработки, служащие исследовательским и другим целям, но не вытеснили совсем. Причина сохранения таких "лабораторных кодов" ("home-made", "in-home, in-house codes") состоит в нескольких целях лабораторных и коммерческих кодов. Основная цель последних – получение устойчивого численного решения практической, часто – рутинной, задачи МСС пользователем среднего уровня подготовки. Средства получения более точных решений в них, как правило, также имеются, но способы достижения устойчивости численного решения (точнее – "робастности", т.е., надёжности и "всеядности" расчётного средства) от пользователя скрыты, т.к. код программы недоступен. В связи с этим, например, в сложных случаях исследования нового класса задач, новой среды etc., особенно, при отсутствии экспериментальных данных, желательны альтернативные подходы и расчётные коды, позволяющие отделить численные эффекты от физических. Этому может помочь работа непосредственно с исходными текстами, которые недоступны в коммерческих кодах. По этой и по другим причинам (например, высокая стоимость или недоступность даже учебной лицензии, её ограниченность или ограниченность её коммерческой применимости в рамках конкретного университетского проекта, при разработке новых численных схем etc.), разработка и доработка новых программ идёт и поныне, причём, значительная часть из них – с открытым кодом программы. Естественно, для участия в этом необходимо обладать знаниями численных методов, программирования etc.

Но даже, не работая с исходным текстом, а только для того, чтобы понимать документацию, эффективно использовать инженерные пакеты программ по МДГТ, очень полезно, и даже необходимо, знать, что из себя представляет МКЭ, хотя бы в общих чертах. Ниже метод изложен в нескольких формулировках, следуя от частного к общему, с акцентом на проявление в конкретных реализациях общих понятий и конструкций метода. Изложение в целом следует линии исторического развития. Некоторые повторения и параллели должны способствовать лучшему усвоению материала.

Следуя часто используемой схеме изложения, первичные понятия МКЭ даны для двух простейших примеров конечных элементов – упругая пружина и стержень. Затем будут рассмотрены многомерные задачи. Введение начнём с некоторых базовых понятий пространственной дискретизации МКЭ.

8.3. Дискретизация пространственной области. Узлы и элементы

8.3.1. Процедура дискретизации МКЭ

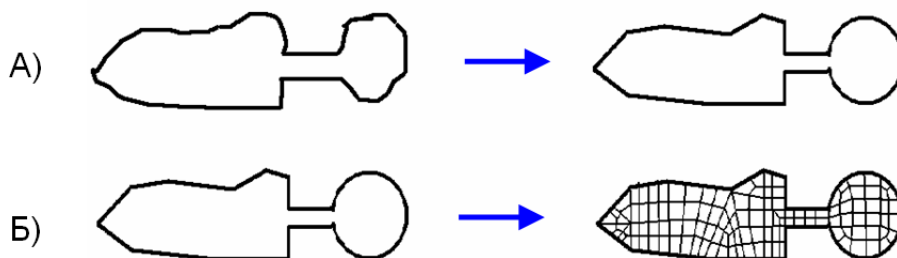


Рис. 8.1. Редукция (А) и разбиение (Б) расчётной области на КЭ

Процедура получения численного решения задачи МДТТ методом конечных элементов строится по следующей схеме, которая, после надлежащих модификаций и обобщений, может быть распространена на все задачи, решаемые МКЭ:

- Пространственная область, занимаемая исследуемой конструкцией, после необходимых упрощений и редукации (рис. 8.1) к области задания искомой функции, разбивается на малые подобласти, *конечные элементы* (КЭ); в них фиксированы узловые точки – *узлы*, в которых ищется решение. Тем самым, непрерывной модели сплошной среды сопоставляется дискретная модель, состоящая из элементов и узлов (рис. 8.2).
- Строится аппроксимация искомой функции (которая обычно – распределение компонент перемещений в узлах) на конечном элементе с помощью заданного набора *функций формы*; эта пространственная аппроксимация должна быть непрерывной на границах элементов, возможно также и с производными. Коэффициенты аппроксимации – это искомые узловые значения неизвестной функции. Дифференцируя выражения для перемещений, находят аппроксимации для деформаций и, затем, напряжений, представляющих внутренние силы, распределённые в элементах. Вследствие своей непрерывности на границах КЭ, аппроксимация неизвестной функции на всех КЭ вместе служит аппроксимацией решения на всей расчётной области.
- Строится нужный эквивалент физического условия равновесия (сформулированного в виде вариационного принципа или локальных условий равновесия для КЭ);
- Исходя из полученного формального выражения и аппроксимации через дискретные значения, строится система алгебраических уравнений: внутренние силы в отдельных элементах сопрягаются в одну связанную "глобальную" систему, для чего используется условие равновесия сил в каждом узле дискретной модели или иное эквивалентное. Вместе с внутренними силами учитываются силовые граничные условия и объёмные силы.
- После учёта граничных условий по перемещениям полученная алгебраическая система должна иметь единственное решение.
- Из решения алгебраической системы по полученным значениям основных неизвестных через функции формы могут быть определены значения в любой точке.

Перед тем, как приступить к разбору основных понятий МКЭ, остановимся подробнее на основных понятиях дискретного представления самой расчётной области, поскольку без полного усвоения этих простых вещей возможны трудности с пониманием остального.

8.3.2. Геометрическая модель в дискретном представлении

Механика сплошной среды имеет дело с трёхмерными телами. Её задача – найти пространственные распределения неизвестных функций, описывающих механическое состояние объекта. Эти функции могут быть скалярами (температура), векторами (перемещение), тензорами (напряжение). Как отмечалось в гл. 5, трёхмерные распределения могут, в пределах некоторой допустимой погрешности, полагаться однородными в одном или двух направлениях декартовой системы или линий (например, окружностей). Это позволяет вести рассмотрение только в некоторой плоскости, локально перпендикулярной направлению линии, и тогда неизвестная функция будет фактически зависеть не от трёх координат, а от двух или, даже, одной. В случаях такого рода симметрии мы говорим о двумерных или одномерных задачах, подразумевая при этом не сам объект, который обычно трёхмерный, а неизвестные функции решения. Если задача может быть сведена к одномерной, то могут быть введены линейные элементы (отрезок прямой линии), моделирующие протяжённость области и изменение неизвестной функции в данном направлении. Дискретизация в этом случае существенно упрощается. Линейные элементы могут быть объединены в сеть, что подробнее рассмотрено ниже. Далее же говорится о *многомерных* задачах, к коим причисляются 2D и 3D постановки.

Основные геометрические объекты дискретного представления в методе конечных элементов – это, собственно, **конечные элементы (КЭ, finite elements)**, представляющие собой ограниченные подобласти пространства, многогранники (3D) или многоугольники (2D), заданные своими вершинами или **узлами (nodes)**, соединёнными рёбрами или сторонами (рис. 8.2, 8.3). В элементах высокого порядка аппроксимации линии рёбер могут быть непрямыми. Узлы и элементы вместе далее называются **сеткой** или **конечноэлементным (КЭ) разбиением**. В узлах сетки ищется искомое дискретное решение задачи, которое экстраполируется на всю расчётную область. Происхождение элементов кратко обрисовано выше – изначально они были использованы в основном для расчётов оболочек и каркасов. Такие задачи обладают своей спецификой, и далее будет рассматриваться только случай, когда 2D и 3D элементы моделируют трёхмерную область, которая в 2D случае обладает симметрией. Это не будет специально оговариваться, но необходимо помнить, что, например, плоские конечные элементы многоугольники, рассматриваемые ниже, это призмы конечной длины, единичной или задаваемой пользователем в его расчёте. Эта длина фигурирует в интегральных соотношениях (она может явно не указываться). В случае осевой симметрии двумерный конечный элемент представляет кольцо соответствующего сечения в осевой плоскости.

Таким образом, 2D конечный элемент геометрически может быть один и тот же в случаях плоской и осевой симметрии, но представление тензоров напряжений и деформаций, а также процедура интегрирования будет несколько различной, как это пояснено ниже, в гл. 10. Во входных данных при вводе двумерной сетки конечных элементов требуется только указать тип симметрии задачи (плоская-осевая) и, возможно, изменить 1-2 параметра по умолчанию.

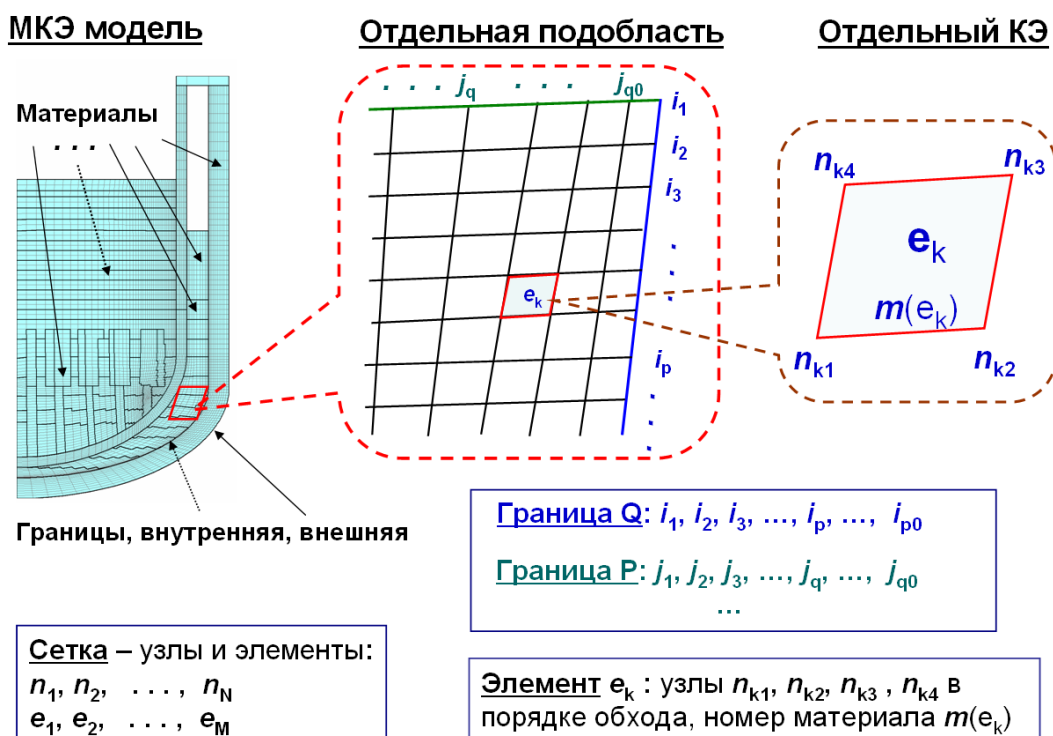
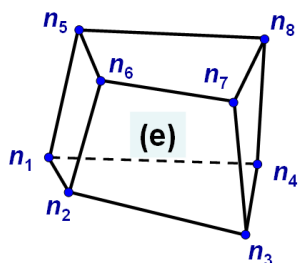


Рис. 8.2. Сеточные объекты в 2D конечноэлементной модели конструкции

Типичный КЭ в плоском случае – это 3– или 4–угольник. Узлы – это их вершины (в схемах аппроксимации МКЭ высоких порядков точности вводятся дополнительные узловые точки). Комбинации этих элементов составляют основу 2–мерных КЭ–разбиений моделируемых областей в большинстве структурных кодов. Рассмотрим некоторые

базовые понятия представления разбиения расчётной области на дискретные элементы. Цифровое представление пространственных фигур называют иногда геометрической моделью. Такая модель включает информацию о форме и размерах в некотором стандартном формате. Способы цифрового представления геометрии в САD-системах могут быть разными и не иметь прямого отношения к МКЭ, поскольку разбиение тела на КЭ нужно не для аппроксимации формы, а для аппроксимации неизвестного решения. Для расчёта необходима сетка КЭ, которая должна отображать существенные особенности формы тела. Эта сетка также задана в цифровом виде.



$(e): n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, m(e)$

Рис. 8.3. 3D гексаэдральный КЭ первого порядка

Точки тела заданы координатами в некоторой лабораторной ("глобальной") системе, обычно, декартовой прямоугольной. Для задания локальных особенностей могут быть использованы также местные (локальные) системы координат. Локальная и лабораторная системы связаны соответствующим преобразованием координат. Основной пространственный элемент объёма в декартовых координатах это параллелепипед или его топологический эквивалент – гексаэдр (рис.8.3). Частным случаем гексаэдра можно считать треугольную призму и тетраэдр, получаемые стягиванием в одну точку определённых узлов. В цифровом виде элементы указанных типов и их

вхождение в расчётную область можно задать единым набором чисел, в унифицированном формате, включающем параметры:

- V – тип элемента (треугольник, четырёхугольник, тетраэдр, призма, гексаэдр),
- $\{e\}$ – **связность** (рис. 8.2): узлы, составляющие k -й элемент объёма с n вершинами (узлами), взятые в заданном *порядке обхода*: k, i_1, \dots, i_n
- $\{X\}$ – **координаты узлов данного элемента (в общем списке)** i : x_i ,
- m – **номер подобласти (материала, если есть)**, которой принадлежит элемент.

Здесь переменная V – тип элемента, определяет для вырожденного КЭ, какие узлы пропущены в полном наборе $\{X\}$ координат, соответствующем гексаэдру, имеющему 8 узлов. Эта информация может также содержаться в наборе $\{e\}$ (повторяющиеся узлы, отрицательные номера узлов и т.п.). Набор $\{e\}$ фактически задаёт и границы взятого объёма – рёбра и построенные по ним грани – пересечения рёбер. Порядок обхода определяет ориентацию грани в пространстве, задающую знак вычисляемой площади грани, которая должна быть положительна.

Разбиение объёма на конечные элементы полностью задаёт его дискретное представление: это координаты узлов и связность элементов. Эти данные могут называться по-разному: "КЭ-разбиение", "сетка КЭ", "расчётная сетка", "finite element model" и др. Данный конечный элемент и сетка как целое могут деформироваться путём вариации координат узлов с сохранением связности элементов. На этом основаны аффинные преобразования сетки: растяжение, поворот, трансляция.

Значения координат узлов в сетке КЭ должны удовлетворять ряду условий, чтобы при вычислении решения не встречались неразрешимые ситуации, а численные погрешности аппроксимации находились в пределах допустимого. Основные из этих требований к качеству сетки следующие:

- **выпуклость КЭ**;
- часто – единая **геометрическая ориентация** (например, в 2D – это направление обхода границы КЭ, которое определяет знак вычисляемой площади);

- допустимые соотношения размеров КЭ (нет сильно вытянутых и скошенных);
- нет очень больших различий в размерах соседних элементов.

Результатом решения задачи служат "сеточные функции", значения известных и неизвестных пока функций координат в узловых точках, в механике это обычно перемещения. Распространение полученного решения на другие точки элемента осуществляется интерполяцией. Интерполяция едина для элементов данного типа, который задаёт интерполяционные формулы вычисления значений во внутренних точках, т.е. вид функций форм. С помощью интерполяции могут быть с некоторой точностью определены деформации и напряжения.

Для задания физических свойств используется упомянутый выше признак "материала", определяющий принадлежность элемента к определённой подобласти рассматриваемого объёма. В соответствии с этим признаком (часто – целое число: "номер материала") данной подобласти приписываются определённые физические свойства, отвечающие материалу этой подобласти, в частности, упругие постоянные. Эти свойства вводятся вместе с сеточными и другими данными.

На примере, изображённом на рис. 8.2, представлено задание сеточных данных, т.е. МКЭ-модели, содержащей numnp узлов, numel элементов, nummat материалов, nbc_1, ..., nbc_p наборов граничных площадок для задания краевых условий. Часть текста входного файла, отвечающая за сетку, может быть, например, такой:

Контрольная информация : numnp, numel, nummat, nbc_1, ..., nbc_p – количество узлов, элементов, материалов, количества площадок с гран. условиями разных типов

Геометрическая информация –

узлы : numnp=N строк – наборов координат узлов (в скобках: для 3D случая):

$x_{11}, x_{12}, (x_{13})$ (1-я строка)

...

$x_{N1}, x_{N2}, (x_{N3})$ (numnp-я строка)

элементы : numel=M строк: узлы 1,...,q в строках с данными элементов, с 1-го по M-й, и их номера материалов:

$k_{11}, \dots, k_{1q}, m_1$ (1-я строка)

...

$k_{M1}, \dots, k_{Mq}, m_M$ (numel-я строка)

площадки гран. условий :

{nbc_1 строк} – nbc_1 площадок с гран. условиями типа 1 (узлы, задающие грани КЭ)

...

{nbc_p строк} – nbc_p площадок с гран. условиями типа p

Вспомогательная информация

Конец ввода

Отметим, что данные в случаях 2-мерной и 3-мерной геометрии различаются только наличием 3-й координаты и формальным заданием конечных элементов и граничных площадок. Напомним также, что в статике граничные условия могут быть двух типов, по напряжениям (давление, узловые силы) и по перемещениям (рис.8.4), причём, эти условия не обязательно ставятся на внешней границе. Границы задания двух типов г.у. не пересекаются и схематически изображены на рис. 8.4А. Но в случае, например, решения уравнения теплопроводности пересечение границ задания краевых условий более, чем

одного физического типа, вполне вероятно. Эти случаи схематически представлены на рис. 8.4Б граничными условиями (г.у.) типов 1, 2 (внешние) и 3 (внутренние).

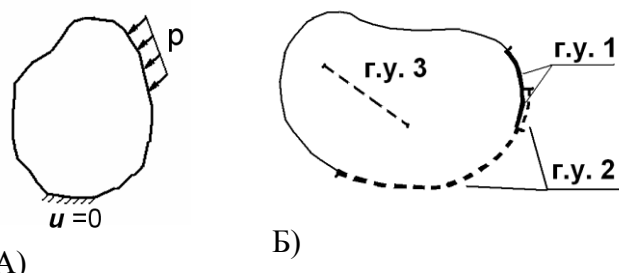


Рис. 8.4. (А) Граничные условия в задаче МДТТ;
(Б) Комбинации гран. условий

Цифровой информации, приведённой в рассмотренной выше "сеточной модели", достаточно для того, чтобы построить на данном КЭ разбиении любую вычислительную процедуру механики сплошной среды:

- есть координаты точек, образующих сетку;
- есть связность – известны элементы (контрольные объёмы);
- есть границы области – определены наборами "площадок";
- площадки – граничные элементы задаются наборами целых чисел – номеров узлов; тип граничного условия задаётся отдельными параметрами;
- все метрические соотношения заданы значениями координат узлов;
- физические свойства – связаны с номером материала или типом гран. условий.

Позже будет проведена дальнейшая классификация конечных элементов.

8.3.3. Матричные обозначения

Матричные обозначения широко применяются в формализме МКЭ. Вводимые матрицы не связаны напрямую с векторным и тензорным характером механических величин, а представляют собой лишь удобное обозначение массивов данных при вычислениях с наборами чисел. Мы будем иметь дело с прямоугольными (квадратными) матрицами и с линейными матрицами, т.е. столбцами и строками, называемыми также векторами. Матрицы, содержащие более одной строки и столбца, будем заключать в квадратные скобки: $[A]$, а квадратные матрицы будем также обозначать прописным прямым жирным шрифтом: \mathbf{A} . Матрицы–векторы (строка или столбец) будем заключать в фигурные скобки или обозначать жирным наклонным (латинский алфавит) шрифтом: $\{a\}$, \mathbf{a} , $\{U\}$, \mathbf{U} . Используется знак транспонирования "^T", отличающий, например, матрицы строки: $\{a_1, \dots, a_n\}$ и матрицы столбцы: $\{a_1, \dots, a_n\}^T$, что важно при перемножении. Предполагаются известными элементы алгебры матриц. В частности, их произведение в общем случае некоммутативно.

9. Сетевые модели с 0D элементами

Все рассмотренные в этой главе модели распределённых систем могут быть отнесены к классу сетевых, по аналогии с электрическими и гидравлическими сетями, составленными из элементов, характеризуемых двумя точками входа и выхода (что отражено во внутренней нумерации), и одним или несколькими физическими параметрами. Элементы соединены через узлы в единую сеть, по которой, в случае электричества и гидравлики циркулирует электрический ток или жидкость/газ. "Многополюсные" элементы в местах

развилки тоже возможны, но в простейшей форме "узлов-накопителей" типа конденсаторов. Условием корректности количественного описания всей сети служат уравнения сохранения, т.е. баланса прихода, расхода и накопления в узлах системы. В случае механики, с которой мы начнём, аналогия равновесия в узлах с балансом в узлах формальна, но количественное описание вполне аналогично "сетевому".

Элементы сети вполне могут быть отнесены к "конечным элементам" в смысле методов типа "метода каркасов", которые разрабатывались в 1930-е гг. и далее. Более того, сетевые коды сейчас широко используются, есть ряд важных задач, решение которых может быть получено только путём представления системы в виде 0D или 1D элементов, соединённых в сеть. Вместе с тем, способы построения основной системы (квази)линейных уравнений сети вполне аналогичны тем, что используются в "стандартном" МКЭ, но гораздо проще, что делает сети хорошим примером для начального ознакомления. Построение алгебраической системы в простейшем случае состоит из трёх шагов:

- формулировка уравнения равновесия (баланса) для отдельного элемента сети;
- формулировка условия общего ("глобального") равновесия (баланса) всей сети;
- задание краевых условий, необходимых для единственности решения.

Элементы сети названы нульмерными (0D) в том смысле, что их пространственная протяжённость является только одним из физических параметров, описывающих состояние элемента, и учитывается в схеме построения алгебраической системы просто как множитель. Причина связана с тем, что сетевые модели по своему назначению не являются методом решения дифференциальных уравнений с пространственными производными (хотя такие решения по факту получаются с некоторой погрешностью). Такая важная характеристика как пространственная аппроксимация здесь может быть введена, при необходимости, только для одномерных объектов, причём аппроксимация должна базироваться не на линейном соотношении вида закона Ома, а на некоторой процедуре дискретизации, исходящей из дифференциального уравнения задачи или его математического эквивалента. Если же такое не делается, то корректная оценка точности решения при моделировании "сплошных" многомерных объектов (порядок аппроксимации) не может быть проведена, точнее этот порядок оценивается как нулевой.

9.1. Линейная упругая пружина

Далее рассмотрены конечные элементы, пружина и стержень. Они являются идеализацией реальных элементов конструкции и применяются в расчётах. Проведённое ниже рассмотрение можно найти, например, в книгах [Hutton], [ANSYS в руках] и других.

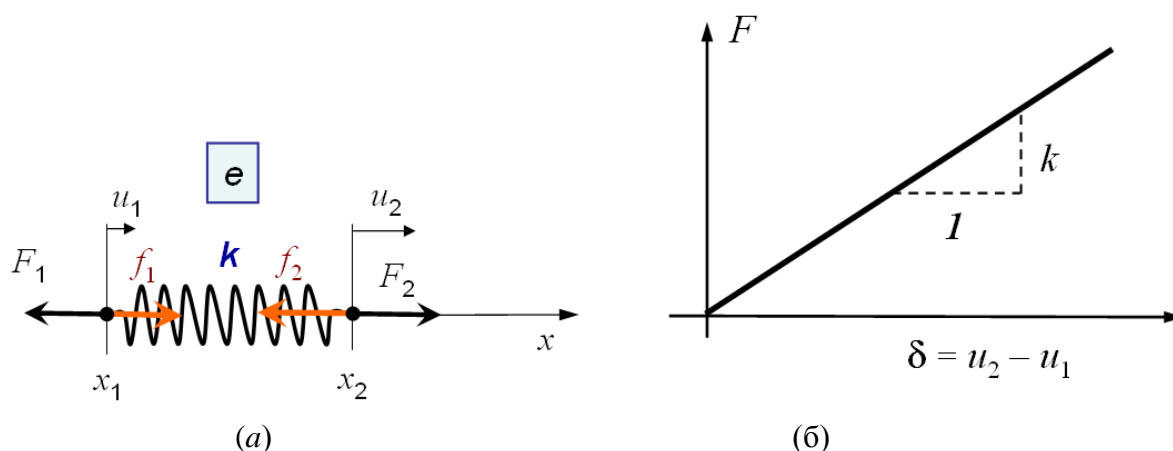


Рис.9.1. Линейная пружина: параметры элемента (а) и жесткостная характеристика (б)

Начнём с, вероятно, простейшего примера построения дискретной вычислительной модели простейшей идеализации деформируемого тела – линейной упругой пружины (рис. 9.1a). "Линейная" в данном случае означает, что пружина растягивается вдоль *прямой линии*, к тому же, нас не интересует её строение (витки стальной пружины или толщина резины в прокладке и т.п.) – состояние идеализированной пружины с данными свойствами (параметр жёсткости пружины) полностью характеризуется относительным положением двух её концов – *узлов*, или их перемещениями от начального положения вдоль линии, определяемой концами пружины:

$$\delta = x'_2 - x'_1 - (x_2 - x_1) = x'_2 - x_2 - (x'_1 - x_1) = u_2 - u_1. \quad (9.1)$$

Перемещение каждого узла вдоль линии соединения задаётся координатой – одним числом, т.е., как говорится в МКЭ, узел характеризуется одной *степеню свободы*.

Характеристика пружины "упругая" относится к определяющему закону, связывающему показатели нагрузки и деформирования. Как сказано выше, силовые нагрузки в МКЭ задаются в узлах. При получении дискретных аналогов нагрузок и условий равновесия важно разделение сил на *внутренние и внешние*. Приложенные к границам 1 и 2 внешние силы F_1, F_2 известны или связаны с условием закрепления (силы реакции в закреплённых узлах). В каждом из двух концов пружины имеет место равновесие внутренней и внешней силы. Равновесное состояние самой пружины полностью характеризуется внутренними силами в её точках, которые уравнивают друг друга и уравниваются внешними силами. В двухточечном элементе внутренние силы сведены к двум точечным силам, равным и противоположным. В общем случае внутренние узловых силы изначально неизвестны и вычисляются по решению.

При использовании пружины интересны только перемещения и усилия на её концах, и *пружина может быть задана двумя узловыми точками*. Полное условие равновесия (сумма внутренних сил поточечно равна нулю, действие внешних сил уравнивается внутренними) отображается в виде условий равновесия в узлах. Жесткостные характеристики упругой пружины характеризуются коэффициентом пропорциональности k между приложенной силой и изменением длины пружины δ , это даёт соотношение между силами и перемещениями. В каждом из двух узлов заданы внутренние силы f_1 и f_2 , вычисляемые каждая относительно другого узла (здесь они равны и противоположны):

$$f_1 = -k \delta = -k (u_1 - u_2), \quad (9.2a)$$

$$f_2 = -k (-\delta) = k (u_1 - u_2). \quad (9.2b)$$

Отметим, что эта линейная зависимость (рис. 9.1b), вообще говоря, не обязательное свойство материала, даже упругого. Подчеркнём, далее, что эта зависимость относится к деформированию пружины, взятой как целое, её размеры и механические свойства материала учитываются одним коэффициентом жёсткости k .

Учёт равновесия внешних и внутренних сил, которое требуется только в двух узлах, формально описывающих систему, даёт два уравнения – граничные условия:

$$f_j + F_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (9.3)$$

Внося сюда выражения (9.2) для внутренних сил, получим –

$$k (u_1 - u_2) = F_1, \quad (9.4)$$

$$k (u_2 - u_1) = F_2. \quad (9.5)$$

Эти уравнения формально можно написать в виде матричного соотношения :

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \equiv [K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \equiv [K] \{U\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \equiv \{F\} \quad (9.6)$$

Здесь введена матрица, называемая *матрицей упругости* $[K]$, которая в данном случае совпадает с *матрицей жёсткости* (stiffness matrix) элемента. Коэффициенты матрицы жёсткости связывают перемещения узлов с узловыми внутренними силами и содержат характеристики материала, а также, в более сложных элементах, размеры. Перемещения объединены в матрицы размером 1×2 , называемые *векторами* узловых перемещений $\{U\}$, а силы в узлах объединены в *вектор узловых сил* $\{F\}$. Это не должно вызывать путаницы с физическими векторами перемещений и сил в точках. Внешние силы на границах (силовые граничные условия) полагаются известными.

Если граничные условия по перемещениям не заданы, а заданы только узловые силы на концах, то из условия равенства нулю главной силы в состоянии равновесия следует $F_1 + F_2 = 0$. Матрица жёсткости $[K]$ симметрична и сингулярна, т.к. второе уравнение получается из первого умножением на -1 . Формально это означает бесконечное множество решений, что понятно, поскольку в общем случае равновесие сил без фиксации положения не исключает перемещений узлов на любую величину, одинаковую для всех узлов. Граничное условие по перемещениям фиксирует положение и задаёт одно из двух неизвестных перемещений. Пусть, например, в первом узле $u_1 = 0$, система примет вид:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 - ku_2 \\ 0 + ku_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \quad (9.7)$$

Из второго уравнения определено перемещение u_2 . В закреплённом узле, где $u_1 = 0$, может быть определена неизвестная внешняя *сила реакции* F_1 . Но при этом ранг матрицы системы понизится на единицу, что в общем случае неудобно. Более последовательным будет изменение матрицы с сохранением её ранга, так чтобы значение первого перемещения, отвечающее условию закрепления, получалось непосредственно из решения линейной системы. Для этого значение слагаемого с первым перемещением оставляется в первом уравнении, т.е. на диагонали, на месте, а остальные слагаемые (одно) переносятся в правую часть. Т.к. слагаемое на диагонали в первом уравнении должно быть нулевым, разность $F_1 - ku_2$ в этом уравнении должна быть положена нулевой. Первое слагаемое во втором уравнении тоже по определению будет нулевым, и его перенос в правую часть ничего не изменит. Система примет вид:

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix}. \quad (9.7a)$$

Матрица системы стала невырожденной, в первом узле $u_1 = 0$ *непосредственно из решения линейной системы*, что важно для единой структуры алгоритма. Этот приём, как мы увидим дальше, непосредственно обобщается на случай произвольного числа степеней свободы.

Далее, сетевая модель состоит из множества элементов, и следующий шаг в состоит в компоновке такой системы на основе условия их объединения. Для иллюстрации достаточно рассмотреть систему только двух пружин с разными жёсткостями (рис.9.2).

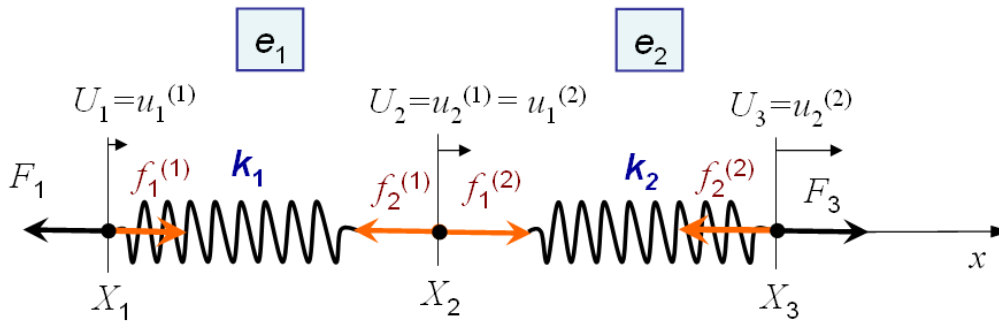


Рис.9.2. Система двух пружин с внешними узловыми силами

Для каждой из пружин записываем в матричной форме по-элементные уравнения связей внутренних сил с перемещениями:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1^{(1)} \\ -f_2^{(1)} \end{Bmatrix}. \quad (9.8)$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1^{(2)} \\ -f_2^{(2)} \end{Bmatrix}.$$

Используем условия равновесия в каждом из трёх узлов рассматриваемой системы пружин, что вместе будет условием общего, *глобального* равновесия:

$$f_1^{(1)} = -F_1, \quad f_2^{(1)} + f_2^{(2)} = -F_2, \quad f_3^{(2)} = -F_3. \quad (9.9)$$

Верхние индексы в скобках указывают номер элемента. Принципиальное отличие от предыдущего примера в наличии внутреннего узла 2: если к нему не приложена внешняя сила, формально неизвестные внутренние силы в этом узле взаимоуничтожаются. В итоге все узловые силы могут быть определены условием общего равновесия и граничными условиями. Подставляя, как и ранее, в уравнения (9.8) эти выражения, получим систему, описывающую обе пружины –

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}. \quad (9.10)$$

В этой системе уравнений вместо элементных векторов перемещений $\{u^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)}\}$ введён соответствующий вектор *глобальных* перемещений $\{U_1, U_2, U_3\}^T$, содержащий оба элементных вектора, и введён *глобальный вектор нагрузок* $\{F_1, F_2, F_3\}^T$, содержащий известные внешние силы, причём, как и ранее, в месте приложения граничных условий по перемещениям внешняя сила реакции не задаётся, она обнуляется, и может быть определена из решения. Матрица всей системы суть *глобальная матрица жёсткости* (МЖ). Коэффициенты в правой части получены из правых частей элементных уравнений.

Таким образом, коэффициенты искомой системы алгебраических уравнений определены коэффициентами элементных уравнений. Задание глобальных векторов осуществляется выстраиванием узловых переменных в порядке нумерации узлов, а получение глобальной МЖ требует суммирования соответственных членов элементных матриц, относящихся к данному узлу. В общем случае это суммирование осуществляется аналогичной процедурой, вытекающей из правил подстановки элементных уравнений (9.8) в условия равновесия в узлах (9.9). Эта процедура *сборки матрицы жёсткости*

присутствует во всех реализациях МКЭ. Рассмотрим процедуру объединения элементарных уравнений подробнее.

Во-первых, в ней предполагается, что выполнено *условие совместности* узловых перемещений, что отражено на рис. 9.2:

$$u_1^{(1)} = U_1, \quad u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = U_2, \quad u_2^{(2)} = U_3. \quad (9.11)$$

Это означает, что перемещения узлов модели конструкции как целого отождествляются с перемещениями, фигурирующими в соотношениях (9.8), выписанных для отдельных элементов – во всех элементарных уравнениях перемещения соответственных узлов полагаются одинаковыми. В данном случае это содержательно для среднего узла. Далее совместность принимается без специальной оговорки. Условие (9.11) позволяет записать элементарные равенства (9.8) в *глобальных координатах* $\{U\}$, которые в данном случае те же, что и локальные, отнесённые к конкретному элементу:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1^{(1)} \\ -f_2^{(1)} \end{Bmatrix}. \quad (9.12)$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_2^{(2)} \\ -f_3^{(2)} \end{Bmatrix}. \quad (9.13)$$

Если не отождествлять значения перемещения в срединном узле (полагая пружины развязанными), то здесь написано четыре уравнения, с четырьмя неизвестными, причём линейно независимых уравнений только два. Но т.к. перемещение в срединном узле – одно и то же (условие совместности), то неизвестных – три, и можно сложить второе уравнение с третьим.

Во-вторых, сложение этих уравнений имеет прямой механический смысл: силы в узлах взаимоуравновешены по условию (9.9), и в правой части получится вполне определённая сумма. При сложении уравнений слева складываются коэффициенты при соответственных неизвестных, справа складываются силы в среднем узле: внутренние и внешние. Если тут нет внешней силы, сумма будет нулевой, по условию равновесия. При этом результирующие три уравнения останутся линейно зависимыми (ранг матрицы=2).

Эта процедура поэлементного сложения уравнений на основании условия равновесия сил во всех узлах и условия совместности называется "сборкой" системы: собирается матрица жесткости в левой части и "вектор нагрузок" – в правой части. Пусть в условиях (9.9) нагрузка приложена к краям области, в среднем узле внешняя узловая сила $F_2=0$. Заменяя внутренние узловые силы $f_i^{(k)}$ их выражением (9.9), получаем систему уравнений, в которую входят только внешние силы и глобальные перемещения:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1^{(1)} \\ -f_2^{(1)} - f_2^{(2)} \\ -f_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix}. \quad (9.14)$$

Полученная *глобальная матрица жёсткости*

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}. \quad (9.15)$$

в которой вторая строка есть сумма первой и третьей с обратным знаком, останется сингулярной. Чтобы "снять вырождение" следует задать граничные условия по

перемещениям. Пусть опять левый край жёстко закреплён: $u_1=0$. Степени свободы, задаваемые в незакреплённых узлах, называют *активными*. Переносим опять слагаемые из левой части первого уравнения вправо, обнуляя весь первый столбец, кроме первого слагаемого, систему (9.14) можно привести к виду, аналогичному (9.7а), с невырожденной матрицей:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix}. \quad (9.16)$$

Эта система имеет единственное решение.

9.2. "Каркасная" модель стержневой конструкции

Описанная выше система элементов типа "пружина" деформируется вдоль одной прямой линии и может использоваться только как вспомогательная, например, для моделирования амортизирующих прокладок в контакте взаимодействующих подобластей. Рассмотренные далее стержневые системы могут уже служить моделью реальных каркасных конструкций, широко применяемых, в частности, в строительной механике. Целые сооружения могут быть составлены из стержней различного сечения, например, подъемный кран, ферма моста, телебашня Шухова, Эйфелева башня ... Отличие механической стержневой системы от системы линейных пружин состоит в том, что перемещения и силы в узлах напрямую связаны с пространственным расположением стержней и являются при этом не скалярами, а векторами. Уравнения равновесия составляются по каждому пространственному измерению, коль скоро каркасная конструкция – пространственный объект, форма и размеры которого должны отвечать реальности. Сходство с системой пружин в том, что уравнение равновесия каркасной конструкции, которые также сначала рассматривается для представительного элемента (стержня), является готовым соотношением сила-перемещение, не требующим рассмотрения дифференциальных уравнений равновесия. Далее, аналогично, на основе условия равновесия в каждой точке соединения стержней получается система уравнений для определения перемещений всей конструкции.

Механически, 2–узловой элемент стержень (truss) моделирует деформированное состояние прямого стержня, работающего только на сжатие–растяжение и не работающего на изгиб (изгиб может быть введён как дополнительные степени свободы). Узлы элемента – это концы стержня. Деформирование полагается однородным по длине и сечению, поэтому нет необходимости рассматривать промежуточные точки, а сечение, полагаемое однородным вдоль длины, учитывается как параметр, через его площадь. Координаты узлов могут иметь три измерения. Сам конечный элемент можно назвать 1–мерным в том смысле, что его длина влияет на результат. Но отличие от рассмотренного выше нульмерного элемента–пружины с вычислительной точки зрения не принципиально и связано только с учётом углового положения стержня в силовом уравнении. Интерполяции же решения в пределах элемента, которая потребовала бы учёта его протяжённости, в рассмотренной ниже формулировке по-прежнему не используется.

Неоднородность напряжения в узлах сочленения стержней простирается не дальше одного-нескольких сечений стержня (принцип Сен–Венана), и концы стержней часто полагают шарнирно соединёнными, даже в случае сварного соединения – при малой величине сечения стержня неучёт локального НДС в месте скрепления не даёт большой ошибки при определении перемещений и напряжений на основной длине. Для упрочнения

конструкции в месте соединения стержней вводятся утолщения и т.п. Локальное НДС в местах креплений стержней может быть рассмотрено в отдельной задаче, многомерной.

Задача статики "каркаса" может быть поставлена следующим образом:

В некоторых узлах шарнирно соединённых элементов стержневой конструкции с известными геометрическими и механическими характеристиками приложена нагрузка. Определить новое положение узлов (значения узловых перемещений) после приложения нагрузки и нормальные напряжения в сечениях стержней.

По перемещениям могут быть определены остальные механические величины. Одной из целей расчёта НДС в отдельных стержнях может быть определение запаса механической устойчивости отдельных элементов и всей системы. При тепловых деформациях может оказаться важным оценить отклонения от габаритов конструкции, которые есть результат множественных малых перемещений в узлах, и термонапряжения.

Последовательность действий по сведению задачи к алгебраической системе для узловых величин аналогична изложенной выше для системы пружин:

- задание конечных элементов, введение их геометрических характеристик;
- введение узловых перемещений и внешних/внутренних сил;
- запись элементных соотношений между внутренними силами и перемещениями;
- учёт граничных условий по внешним силам;
- преобразование локальных соотношений в глобальные (для пружин это не делалось);
- условие глобального равновесия узловых сил – объединение элементных уравнений;
- учёт граничных условий по перемещениям.

Набор параметров данного стержневого элемента (e) включает его длину L , площадь сечения A , полагаемую постоянной вдоль стержня, и жесткостную характеристику, в данном случае – модуль упругости E материала. Для упрощения записи положим, что все стержни рассматриваемой конструкции расположены в одной плоскости. Подразумевается сплошная нумерация узлов соединения всех стержней рассматриваемой конструкции от 1 до N . Приложенные к системе внешние силы (гравитация, ветровые нагрузки) должны быть сведены к узловым, поскольку условие равновесия записывается в терминах узловых перемещений и сил.

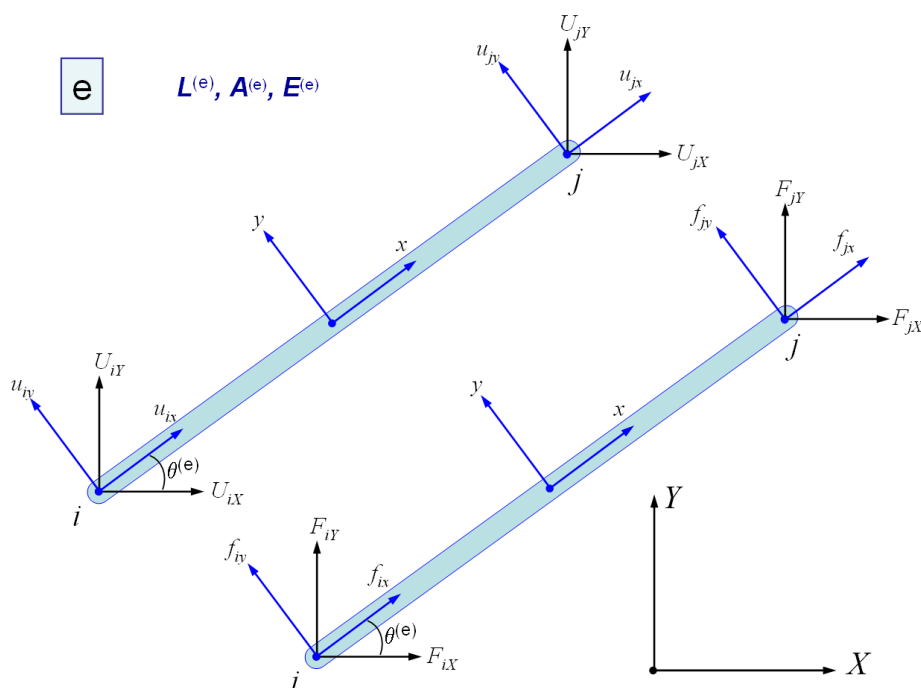


Рис.9.3. Характеристики стержневого элемента в глобальной и локальной системах координат

Перемещения точек конструкции определены движением содержащего их элемента-стержня. Условия равновесия стержня удобно сначала записать через перемещения узлов в *местной (локальной) системе координат* элемента, ось Ox которой направлена вдоль стержня, а ось Oy – перпендикулярно ему. Продольные перемещения узлов обозначим u_{ix} , u_{jx} . В системе стержня вертикальные компоненты перемещения: $u_{iy}=0$, $u_{jy}=0$. Координата любой точки и её перемещение вдоль направления стержня, в предположении однородности по длине, могут быть в местной системе выражены через узловые величины i и j как:

$$u(x) = (1 - \xi^{(e)}) u_i + \xi^{(e)} u_j, \quad \xi^{(e)} = (x_j - x) / (x_j - x_i), \quad x_i \leq x \leq x_j, \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (9.17)$$

Параметр $\xi^{(e)}$ в (9.17) играет роль безразмерной *локальной* координаты *внутренней* точки. В описываемой процедуре это выражение не используется, но в более общих случаях локальные координаты в элементе могут быть очень удобны. Нумерация узлов для локальных величин в нижеследующем рассмотрении также оставлена общей, "глобальной", но узел "номер 1" и "номер 2" нужны для корректной расстановки знаков элементных вкладов в коэффициенты при сборке матрицы жёсткости.

Перемещения всех узлов данного элемента в плоскости составляют набор из $2 \times 2 = 4$ величин. Этот набор в МКЭ представляется в виде 4×1 матрицы–столбца, которая в системе координат стержня (нет поперечных перемещений) имеет вид –

$$\{u\}^{(e)} = \{u_{ix}, u_{iy}, u_{jx}, u_{jy}\}^T = \{u_{ix}, 0, u_{jx}, 0\}^T. \quad (9.18)$$

Как и ранее, связь между перемещениями и начальными/конечными координатами узлов в местной системе:

$$x_i = a_i + u_i, \quad x_j = a_j + u_j. \quad (9.19)$$

Удлинение стержня определено разностью между прежними и новыми координатами узлов, выражаемой через перемещения:

$$x_j - x_i - (a_j - a_i) = u_j - u_i. \quad (9.20)$$

Для описания конструкции в целом используются *глобальные* координаты $\{X_i, Y_i\}$ и перемещения $\{U_i, V_i\}$ узловых точек, относительно некоторой общей лабораторной (глобальной) декартовой системы. Напомним, что индексы i и j относятся к глобальным номерам узлов элемента (e) в этой нумерации. Для каждого элемента конструкции местная система координат расположена по-своему относительно глобальной системы. Естественным образом в формализме появляется преобразование координат, это поворот. Проекция длины стержня на оси координат в местных и глобальных координатах связаны через угол $\theta^{(e)}$ наклона данного стержня относительно оси Ox глобальной системы координат соотношениями (Рис. 9.3):

$$X_j - X_i = (x_j - x_i) \cos \theta^{(e)}, \quad Y_j - Y_i = (x_j - x_i) \sin \theta^{(e)}. \quad (9.21)$$

При малых перемещениях угол $\theta^{(e)}$ практически неизменен при переходе к новому положению равновесия (отклонения могут быть заметными при большом количестве стержней, но требуют особого рассмотрения). Перемещения узлов в местной системе координат в этом предположении также можно полагать параллельными исходному положению стержня, и они в местной и глобальной системах отсчёта связаны теми же соотношениями для разностей координат:

$$U_{xi} = u_{xi} \cos \theta^{(e)}, \quad U_{yi} = u_{xi} \sin \theta^{(e)}.$$

Уравнения для сил записываются аналогично случаю пружины. Вводятся алгебраические *векторы узловых сил, внутренних и внешних*, составленные из физических компонент векторов сил в узлах:

$$\{f\} = \{f_{ix}, 0, f_{jx}, 0\}^T, \quad \{F\} = \{F_{ix}, F_{iy}, F_{jx}, F_{jy}\}^T.$$

Компоненты внешних сил заданы в глобальной системе координат.

В случае упругости внутренние силы в узлах данного элемента в системе стержня пропорциональны его удлинению. В компонентах перемещений и сил условие равновесия стержневого элемента записывается аналогично условию для пружины, но, в данном случае, для двух измерений. Удлинение выражается как разность перемещений (9.20):

$$\begin{aligned} EA/L (u_{ix} - u_{jx}) &= k (u_{ix} - u_{jx}) = f_{ix} \\ 0 &= k (0 - 0) = f_{iy} \\ -EA/L (u_{ix} - u_{jx}) &= -k (u_{ix} - u_{jx}) = f_{jx} \\ 0 &= k (0 - 0) = f_{jy} \end{aligned} \quad (9.22)$$

Величина $EA/L = k$ – коэффициент жёсткости стержня. Поперечные перемещения в местной системе координат и поперечные компоненты внутренних сил в элементных уравнениях равновесия нулевые. В глобальной системе координат обе компоненты сил и перемещений в узле, вообще говоря, ненулевые. Систему уравнений (9.22) можно переписать в матричном виде как соотношение между введённой матрицей узловых перемещений и аналогичной матрицей внутренних сил, приложенных в узлах. Для каждого элемента (e) уравнение в местных координатах –

$$[E^{(e)}] \{u^{(e)}\} = \{f^{(e)}\}. \quad (9.23)$$

Вид матрицы упругости элемента $[E^{(e)}]$ предлагается определить в качестве упражнения.

Чтобы получить уравнения равновесия для всей системы необходимо в записи элементного выражения (9.23) для внутренних сил перейти от локальных к глобальным координатам, т.к. векторы сил складываются в общей системе. Преобразование к глобальной системе перемещений координат стержня – это поворот на угол наклона $\theta^{(e)}$, свой для каждого элемента. Прямые и обратные геометрические преобразования векторов *перемещений* в двух узлах элемента имеют вид (индекс $^{(e)}$ для простоты записи опущен, использовано (9.20)):

$$\begin{aligned} U_{ix} &= u_{ix} \cos \theta - u_{iy} \sin \theta = u_{ix} \cos \theta & , & & u_{ix} &= U_{ix} \cos \theta + U_{iy} \sin \theta \\ U_{iy} &= u_{ix} \sin \theta + u_{iy} \cos \theta = u_{ix} \sin \theta & , & & u_{iy} &= -U_{ix} \sin \theta + U_{iy} \cos \theta = 0 \\ U_{jx} &= u_{jx} \cos \theta - u_{jy} \sin \theta = u_{jx} \cos \theta & , & & u_{jx} &= U_{jx} \cos \theta + U_{jy} \sin \theta \\ U_{jy} &= u_{jx} \sin \theta + u_{jy} \cos \theta = u_{jx} \sin \theta & , & & u_{jy} &= -U_{jx} \sin \theta + U_{jy} \cos \theta = 0, \end{aligned}$$

В матричном виде, для каждого элемента (e) –

$$\{U^{(e)}\} = [T^{(e)}] \{u^{(e)}\}, \quad \{u^{(e)}\} = [T^{(e)}]^{-1} \{U^{(e)}\}, \quad (9.24)$$

где матрицы (4×4) преобразований $[T^{(e)}]$ и $[T^{(e)}]^{-1}$ свои в каждом конечном элементе, и они составлены из двух блочных матриц (2×2) плоского вращения на угол $\theta^{(e)}$, расположенных на главной диагонали матрицы $[T^{(e)}]$.

Узловые внутренние силы (9.22), связанные с растяжением стержневого элемента, в местной системе направлены вдоль него, и *их компоненты в глобальной системе преобразуются по тому же закону, что перемещения* (индекс $^{(e)}$ опущен):

$$\begin{aligned} R_{ix} &= f_{ix} \cos \theta, \\ R_{iy} &= f_{iy} \sin \theta, \\ R_{jx} &= f_{jx} \cos \theta = -f_{ix} \cos \theta, \end{aligned}$$

$$R_{jy} = f_{jy} \sin \theta = -f_{iy} \sin \theta,$$

или, через введённую матрицу преобразования –

$$\{R\} = [T] \{f_{ix}, 0, f_{jx}, 0\}^T = [T] \{f\} \quad (9.25)$$

Подставив значения узловых сил f из (9.23), получим связь узловых сил и перемещений для каждого элемента в глобальных координатах, которую запишем в матричной форме –

$$[T^{(e)}] [E]^{(e)} [T^{(e)}]^{-1} \{U\}^{(e)} \equiv [k]^{(e)} \{U\}^{(e)} = [T^{(e)}] \{f^{(e)}\} \equiv \{R^{(e)}\}. \quad (9.26)$$

Здесь введена *матрица жёсткости элемента* $[k]^{(e)} = [T^{(e)}][E^{(e)}][T^{(e)}]^{-1}$. При малых упругих деформациях (в стали, например, упругие деформации не превышают ~0,1%) общие перемещения будут малы. Поэтому матрица преобразования к глобальной системе, и с ней матрица жёсткости, будет с достаточной точностью неизменна при любом деформировании элементов в пределах, допустимых условием упругости. В противном случае влияние изменений положения элементов друг на друга следует вводить в расчёт.

Мы получили уравнение равновесия отдельного элемента. Дальнейшая процедура объединения и учёта граничных условий не отличается от проведённой ранее для элемента–пружины:

- преобразованные элементные уравнения (9.26), относящиеся к данному узлу, складываются, на основе условия равновесия в этом узле, номер узла соответствует строке получаемой алгебраической системы; в левой части из расширенных элементных матриц жёсткости $[k]$ формируется матрица всей линейной системы уравнений – *глобальная матрица жёсткости*, в правой части стоит *глобальный вектор узловых сил*; внутренние силы в узлах, в которых не приложены внешние силы, уравниваются, и узловые внутренних сил не участвует в уравнениях. В тех узлах, где приложена внешняя сила, суммарная внутренняя сила, составленная из вкладов отдельных элементов (они в левой части), равна и противоположна приложенной внешней силе (идёт в правую часть). В правой части остаются только внешние силы;
- полученная система уравнений модифицируется с учётом граничных условий по перемещениям;

Процедура в целом пригодна для дискретных стержневых конструкций общего вида. В качестве примера можно указать монографию [Розин].

Таким образом, на примере одномерных, прямолинейных геометрически и линейных физически конечных элементов мы ввели ряд основных понятий МКЭ: *степени свободы, внутренние узловые силы и их связь с перемещениями в элементе и внешними узловыми силами, локальные координаты и преобразование к глобальным, сборка матрицы системы* (матрицы жёсткости). В случае многомерных пространственно-распределённых систем возникают следующие важные вопросы, которых мы пока не коснулись:

- получение силовых уравнений для элементов, связи напряжений с перемещениями – у нас сразу была формула $F = k(x - x_0)$, в общем же случае в этом соотношении участвуют неизвестные функции перемещений и напряжений, получаемые интерполяцией на основе исходных дифференциальных уравнений или их интегрального эквивалента;
- интерполяция величин перемещений в пределах элемента (по функциям формы) в общем случае необходима, а для пружин и стержней не нужна;
- в общем случае требуются соотношения связи исходной системы, описываемой дифференциальными уравнениями, и аппроксимирующей её дискретной, систем – у нас система изначально составлена из дискретных элементов-стержней;

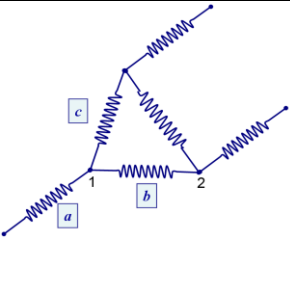
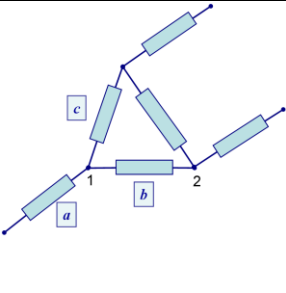
Эти вопросы встают при проведении КЭ–дискретизации для двумерной задачи статики, которую будет рассмотрена ниже. Перед этим приведём ещё несколько примеров сетевых

систем, составленных из "готовых" элементов, в которых соотношение между "силами" и "перемещениями" берется извне.

9.3. Стационарный анализ сетей

Двухузловой элемент типа пружины, описываемый уравнением вида (9.6), применим и в других задачах, где величины u могут быть другими физическими величинами. Описанный метод построения системы уравнений для узловых величин под разными названиями давно применяется для анализа систем подобных элементов: "матричный метод", "сетевой метод". Следуя [Зенкевич], [Zenkevich], рассмотрим для примера участок электрической цепи с резисторами и стержневой системы, которые изображены на рис.9.4а. Дополнительное усложнение в случае стержневой системы, связанное с учётом длин пружин и их пространственного расположения (угол наклона), непринципиально.

Стационарные разности потенциалов, приложенные на концах сопротивлений, вызывают стационарный электрический ток, связанный с напряжением законом Ома. Имея эту связь, в полной аналогии с уравнениями (9.2) и последующими, резистор можно рассматривать как 2–узловой конечный элемент в системе подобных ему элементов, описывающих распределение потенциала и электрических токов в узлах и элементах участка некоторой электросети, состоящей из источников напряжения и резисторов.

		Аналогично ...	Аналогично ...
Механика стержней	Электрическая цепь	Тепловая сеть	Гидравлическая сеть
Перемещение: u	Потенциал: φ	Температура: T	Давление: p
Сила: f	Ток в проводнике I	Поток тепла через сечение: F	Расход жидкости через сечение: q

Полное описание системы, т.е. распределение токов и потенциалов в линейной цепи, можно получить, записав закон Ома, условие баланса токов (закон сохранения заряда в ед. времени) в каждом из узлов цепи, используя условие однозначности потенциала в местах стыка элементов и граничные условия по приложенному потенциалу в отдельных узлах. Например, в узле 1, общем для элементов a , b , c , имеем условия, аналогичные условию равновесия и условию совместности, и, например, запись закона Ома в элементе b аналогична закону Гука:

$$I_a + I_b + I_c = 0, \quad V_a = V_b = V_c \equiv V_1, \quad r_b I_b = V_1 - V_2 \quad (9.27)$$

Вместо сопротивления введём электропроводность: $\kappa = \kappa_b = 1/r_b$. Выразим токи, идущие в узлы стыков 1 и 2 от данного элемента b , содержащего эти узлы. В отсутствие источников токи в узлах 1 и 2 равны по величине, а относительно границ элемента – противоположны (входящий и выходящий ток):

$$I_{1 \rightarrow 2} = -I_{2 \rightarrow 1}.$$

Локальный порядок нумерации узлов (номера 1 и 2) фиксирован при формировании сетевой модели, вход и выход в элементе определяется знаком тока. Входящий в элемент ток входит в соотношение с положительным знаком, выходящий ток – с отрицательным, т.е. они противоположны по знаку. Фактический знак токов в элементах определится после решения задачи. Токи выражаются через соответственные разности потенциалов. Выражаем ток в каждом узле данного элемента b :

$$\kappa(V_1 - V_2) = I_1 \equiv I_{1 \rightarrow 2}, \quad I_2 \equiv I_{2 \rightarrow 1} = \kappa(V_2 - V_1) \quad (9.28)$$

что записывается как матричное соотношение для элемента

$$\begin{bmatrix} \kappa & -\kappa \\ -\kappa & \kappa \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix}, \quad \text{или} \quad \{I\} = [K]\{V\} \quad (9.29)$$

Если между данными узлами имеется источник тока – "распределённая сила", задаваемый данной разностью потенциалов, должно быть учтено его внутреннее сопротивление, при этом известная разность потенциалов помещается в правую часть. Если сопротивление источника бесконечно, то потенциалы на его концах являются граничными условиями, аналогично условиям на перемещения в узлах. Условие по входному току в данный конечный элемент также может быть задано, но требует дополнительной обработки.

При алгебраическом суммировании токов в каждом узле условия сохранения заряда (отсутствие накопления – "условие равновесия") и однозначность потенциала в каждом узле ("условие совместности") дают уравнение :

$$I_i = \sum_{e(i)}^{n(i)} [K]^{(e(i))} \{V\}^{(e(i))}. \quad (9.30)$$

Здесь суммирование производится по всем элементам $e(i)$, включающим узел i . Общее количество таких элементов для данного i равно $n(i)$. i -я строка в уравнении (9.30) содержит разности вида (9.28), между потенциалами V_i и V_k в узлах с номерами i и k , в глобальной нумерации. Аналогично – для строки номер k , т.е. матрица, получаемая суммированием по (9.30), будет симметричной, если коэффициент сопротивления κ в (9.28) не зависит от направления тока, а только от его величины. Построенная в соответствии с уравнением (9.30), написанным для каждого узла, полная матрица проводимости формирует систему линейных алгебраических уравнений относительно потенциалов ("степеней свободы"), по которым определяются токи. Граничные условия "по перемещениям" – это потенциалы, приложенные в соответственных точках.

Аналогичное рассмотрение возможно для тепловых сетей (связанные тепловые сопротивления) и гидравлических сетей (элементы трубопроводов). В случае теплопереноса роль потенциала играет температура, а роль тока – поток тепла:

$$F_i^{(e)} = A^{(e)} H^{(e)} (T_1^{(e)} - T_2^{(e)}), \quad (9.31)$$

где F_i – поток тепла в узле i (в глобальной нумерации), Вт/м², $A^{(e)}$ – площадь сечения элемента, $H^{(e)}$ – коэффициент теплообмена (теплопроводностный, лучистый, конвективный etc.).

Это соотношение – просто результат решения одномерной стационарной линейной задачи теплопроводности в однородном плоском слое. Такая модель будет относительно корректной только в случае, когда конфигурация системы – это аналог контактирующих плоских пластин – "тепловых резисторов". Что касается общей многомерной постановки задачи теплопроводности в твёрдом теле, то это уже давно рутинная проблема, решаемая с помощью стандартных расчётных средств. Тем не менее, сетевые подходы могут быть полезны для балансных оценок в сложных случаях, когда теплоперенос носит сложный характер, не поддающийся прямому численному расчёту. Пример приведён ниже.

В сетевой квазистационарной гидродинамике, обычно называемой гидравликой или теплогидравликой, если учитывается зависимость от температуры и перенос тепла, определяющее соотношение (закон Дарси-Вейсбаха) связывает перепад давления Δp между входом и выходом в канал длиной L , гидравлического диаметра D , со средней по сечению канала скоростью w_m потока несжимаемой жидкости:

$$\Delta p = \lambda(\text{Re}) \frac{L}{D} \frac{\rho w_m^2}{2}, \quad (9.32)$$

где λ – т.н. коэффициент гидравлического сопротивления, зависящий от формы сечения канала и режима течения, определяющий число Рейнольдса течения в канале. Роль сохраняемой величины, т.е. "тока", играет расход жидкости через сечение канала ρw_m . В отсутствии источников/стоков жидкости сумма расходов в данном внутреннем узле должна быть нулевой. Соотношение (9.32) нелинейно по скорости, причём, коэффициент сопротивления зависит от числа Рейнольдса, т.е. от скорости потока, обычно степенным образом, с показателем, меньшим 1. Поэтому фактический показатель степени у скорости потока в (9.32) вообще говоря, отличается от 2. Линеаризованная форма в простейшем случае может быть записана, например, в виде:

$$\rho w_m = \frac{2D}{L} \frac{\xi}{w_{m0}^\beta} (p_i - p_k), \quad (9.33)$$

где w_{m0} - средняя скорость на предыдущей итерации, β - известная величина, обычно находящаяся в пределах 1,5–1,8, ξ - известный коэффициент. Задача должна решаться методом последовательных приближений. Соответственно, система сетевых уравнений будет квазилинейной. Подход может быть обобщён на многофазные течения.

Гидравлические сети играют важнейшую роль в самых разных сферах деятельности (коммунальные службы, нефте-газотранспортные системы, тепловые машины и теплоэнергетика ...), и их расчёт производится с помощью всевозможных сетевых кодов, ориентированных каждый на свой класс задач. Важно отметить, что в случае стационарных задач процедура дискретизации в модели сети может быть вполне единообразной, получаемые матрицы системы должны быть при этом симметричны, что позволяет использовать высокоэффективные методы численного решения квазилинейных алгебраических систем.

Нестационарные процессы, описываемые тепловыми, электрическими и гидравлическими сетями многообразны, часто требуют индивидуальных подходов, количество которых, вероятно, сравнимо с количеством разработанных сетевых теплогидравлических программ. Этому посвящена уже достаточно обширная литература. Но один важнейший элемент, связанный с ёмкостями, необходимо здесь упомянуть.

9.4. Нестационарный анализ сетей с накопительными элементами

9.4.1. Модель тепловой сети в виде сопротивлений, конденсаторов и источников

"Накопительный" элемент сети – это то, что накапливает заряд в электрической сети, тепло – в тепловой, или жидкость – в гидравлической сети. Соответственно, это будет конденсатор, теплоёмкость или резервуар (объём). Накопление – как правило квазистационарный процесс, в смысле отсутствия скачков "тока", требующих, в частности, в гидродинамике, вводить в расчёт учёт импульса, что является задачей совсем другого класса. Полагается, что накопление сопровождается только ростом

соответствующего потенциала: электрического, температурного напора (разность температур) или уровня жидкости в резервуаре) (при этом может потребоваться наряду с "потенциалом" количества жидкости вводить также ей гравитационный потенциал, как источник дополнительной силы).

Разность "потенциалов" в узлах вызывает "ток" между ними, и в процессе "накопления" потенциала ток, зависящий от перепада потенциалов, будет нестационарным, т.е. необходимо рассматривать последовательность состояний системы, зависящих от времени. Ниже говорится о тепловой сети. Возможность теплового резервуара накапливать тепло определяется удельной теплоёмкостью, плотностью материала и его объёмом. Фактическое количество накопленного тепла определяется степенью нагрева от начальной температуры, в полной аналогии с конденсатором в электрической цепи. Соответствующее уравнение будет содержать производную по времени:

$$\rho^i C_p^i V^i \frac{dT}{dt} = \rho^i V^i q^i(t) - \Sigma_{k(i)}. \quad (9.34)$$

Здесь в левой части множителями стоят плотность, теплоёмкость и объём узла, справа стоит источник тепла и сумма вкладов в его накопление в узле i от прилегающих элементов. Как будет видно позже, в многомерной КЭ схеме дискретизации уравнения теплопроводности все физические свойства могут приписываться конечному элементу, в частности, теплопроводность и теплоёмкость. Но в случае нульмерных тепловых элементов модель более примитивна, и большой объём теплоёмкого материала естественно связать с узлом, а элемент – это прилегающий "резистор". Задача может быть поставлена как оценка перетоков тепла между массивными узлами (масса + теплоёмкость) в присутствии сторонних источников/стоков тепла в самих этих узлах. Элементы тут просто проводники между узлами.

Вводя температуры на последовательных шагах по времени, уравнение (9.34) можно расписать в виде -

$$\rho^i C_p^i V^i \frac{T_{(n+1)}^i - T_{(n)}^i}{\tau_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n(i)} A_i^{(k)} H_{(n+1)}^{(k)} (T_{1,(n+1)}^{(k)} - T_{2,(n+1)}^{(k)}) = \rho^i V^i q^i(t) \quad (9.35)$$

Здесь n нумерует шаги по времени, (k) – примыкающие конечные элементы к узлу i (глобальным) номером i , прочие обозначения неизменны.

Данное уравнение имеет номер i в общей системе, в него входят температуры из соседствующих с ним узлов в k -х элементах, имеющих номера $j(k)$, стоящих в этом уравнении на $j(k)$ -м месте. В уравнении с номером $j(k)$, отвечающем строке номер $j(k)$, температура с индексом i находится на i -м месте, а коэффициент при ней будет тот же, что в i -м уравнении. Это означает, что матрица системы по-прежнему будет симметрична, что позволяет применять для решения системы эффективные численные процедуры. Для систем с количеством уравнений в пределах 100 эффективность численного метода не важна, но это может быть существенным в квазитрёхмерных подходах, в которых на каждом шаге может потребоваться решение тысяч подобных квазиодномерных задач.

Модель тепловой сети с 0D элементами можно применять в сопряжении с многомерными методами. Такой пример рассмотрен ниже.

9.4.2. Пример полиразмерного подхода: 0D+2D модель теплового взаимодействия расплава с окружением

Применение сетевых подходов в теплопроводности твёрдых тел обычно не имеет смысла, вследствие хорошо разработанной техники многомерного МКЭ для этих задач. Но 0D модель теплопереноса и теплообмена некоторого объекта с внешней средой может быть полезна как средство балансной численной оценки в случае, если объект проявляет физически сложное поведение, с трудом поддающееся многомерным моделям. Одним из

примеров служит моделирование теплообмена в бассейне расплава компонентов активной зоны и конструкций, образующегося в процессе гипотетической тяжёлой аварии с разрушением активной зоны ядерного реактора. Тепловыделяющий расплав при этом перемещается на днище корпуса реактора и, если корпус не охлаждается снаружи, он плавится, расплав выходит из реактора в бетонную шахту и взаимодействует с бетоном шахты. Расплав может состоять из одной или более фаз, включающих газы, пузырьки и несмешивающиеся друг с другом металлические и оксидные растворы. Объёмный источник тепла связан с остаточными продуктами радиоактивного деления. Источник тепла индуцирует конвективные процессы. Тепло отдаётся во внешнее окружение, включая твёрдые стенки, в которые заключён расплав. Это могут быть днище корпуса реактора, устройство локализации расплава или бетонные стены и пол шахты реактора.

Практически во всех расчётных средствах моделирования тяжёлых аварий, используемых во всём мире для обоснования безопасности АЭС при тяжёлых авариях с плавлением активной зоны и выходом расплава из корпуса реактора, применяются 0D подходы, типа описанного выше, но более сложно устроенные. При этом желание иметь однородный численный метод приводит к тому, что стенки бассейна расплава, которые им прогреваются на некоторую глубину, также моделируются с помощью подхода тепловой сети, состоящей из 0D элементов, или ещё более простым способом (см., например, описания в [WGAMA_MCCI]). Это, вкупе с ограничениями на пространственное разрешение, катастрофически снижает точность численного метода оценок тепловых полей в твёрдом теле и связанных с этим явлений. В частности, оценка механической прочности стенок, ограничивающих расплав – это камень преткновения таких подходов.

Одно из немногочисленных исключений в моделировании бассейна расплава представляет собой модуль HEFEST [HEFEST], [диск] (ИБРАЭ РАН), одна из версий которого входит, в частности, в отечественный пакет моделирования тяжёлых аварий СОКРАТ [СОКРАТ] (ИБРАЭ РАН). Во всех версиях модуля HEFEST стенки бассейна и сам расплав представлены 2D расчётной областью, моделируемой с помощью МКЭ как двумерная (плоская или осесимметричная) система, что позволяет достичь корректного пространственного разрешения, нивелирующего проблемы пространственной аппроксимации. Этот подход тоже численно однородный, в том смысле, что расплав также представлен 2D областью. Однако процессы взаимодействия расплава с конструкциями выходят далеко за рамки просто теплопроводности и вряд ли вообще могут быть сейчас смоделированы с приемлемой точностью "из первых принципов" каким-либо, пусть многомерным, расчётным средством. Не останавливаясь на деталях моделей HEFESTa, заметим, что фактически подход к моделированию теплообмена и других процессов в расплаве сводится там к модели, вполне аналогичной нульмерной, хотя и несколько более общей, коль скоро протяжённость границ расплава учитывается непосредственно. При этом алгоритмы разработанных моделей расплава в заданных границах в целом оказываются относительно громоздкими, что затрудняет дальнейшее развитие и снижает скорость единичного расчёта. Поэтому, наряду с общим подходом, для упрощения подхода в случаях простых конфигураций расплава используется также 0D модель расплава.

Основное преимущество сетевого 0D подхода – простота реализации, прозрачность и гибкость моделей, сводящихся к чисто балансным. Для "расплавных" задач была разработана нульмерная модель тепловой сети с целью внедрения в качестве дополнения в код HEFEST_URAN [2014], предназначенный для задач внутрикорпусного удержания расплава, а вместе с ней – в программу MCCI_4 (ИБРАЭ), разработанную изначально для расчёта взаимодействия расплава с бетоном в шахте реактора.

Расчётная методика взаимодействия расплава с конструкциями после формирования компактного бассейна в таком подходе является "полиразмерной" и содержит 0D сетевую модель расплава и 2D модель окружающего его материала. Отметим, что продвижение

границы расплава по мере эрозии стенок во всех версиях HEFESTA моделируется непосредственно, как расширение подобласти расплава за счёт уменьшения подобласти твёрдого материала. В 2D подходе вся расчётная область фиксирована, и граница расплава движется "по сетке" пока не достигнет некоторой естественной границы, которой может быть, в частности, граница расчётной области. Но в случае взаимодействия расплав-бетон размеры области стен могут достигать 2-3 м, при том, что ширина же зоны прогрева бетона сначала составляет порядка 1 см. Толщина элемента везде должна быть в пределах нескольких миллиметров. Это ставит очень жёсткие ограничения быстродействию.

Но, учитывая то, что большая часть бетона в процессе продвижения зоны прогрева не участвует в теплообмене, расчёт взаимодействия расплав-бетон можно сильно ускорить, если использовать подвижную перестраиваемую сетку в бетоне, размер которой при очередной перестройке определяется текущим температурным полем. Взаимодействие 0D подобласти расплава с 2D границей бетона происходит посредством потока тепла, профиль которого вдоль границы взаимодействия перерассчитывается по мере движения границы.

Пример расчёта модельной задачи о расплаве в бетонной шахте дан ниже. Изначально подобласть шахты представляет собой цилиндрический "стакан" со стенками толщиной около 2 см и сеточным разбиением на 2D конечные элементы толщиной 2 мм (рис. 9.5). Расплав из разрушенного реактора поступает в шахту порциями и взаимодействует с бетоном. Его уровень определяется, исходя из плотности, рассчитываемой по составу и температуре. На рис. 9.5-9.6 представлены конфигурация области шахты, начальная и в некоторый момент времени после поступления расплава, когда его нижняя подобласть уже распространилась вширь и вглубь. На рисунке 9.7 представлена сетевая 0D модель расплава, использованная в этом расчёте. Изначально расчётная область весьма проста, и её границы вместе с сеткой и связностью в элементах генерируются в программе (т.е. внешний сеточный генератор тут не используется), по вводимым нескольким параметрам.

Представление о сеточном разбиении даёт вынесенный фрагмент сетки (рис. 9.5). Начальная толщина области задаётся в начале расчёта, после чего она адаптируется под текущее поле температуры. Область расплава отображается схематически, только как занимаемый им объём, размерные характеристики которого учитываются при расчёте теплообмена. На рис. 9.5 расплава ещё нет, он появляется позже, в соответствии с условием задачи. На рис. 9.6 представлен момент развитого плавления бетона расплавом (около 2 ч времени задачи). Область прогрева в бетоне на уровне расплава существенно продвинулась вбок и вниз (масштабы на рис. 9.5-9.6 несколько различны).

На рис. 9.6 показано поле температуры в бетоне, в области термического влияния (где перегрев над начальным фоном превышает 2 градуса). Видно, что эта область – зона прогрева, ещё довольно тонкая, т.к. источник тепла ещё довольно мощный. Ширина зоны прогрева определяется потоком тепла от расплава – поток вбок заметно больше, чем поток вниз. Локальные искривления зоны прогрева связаны с неравномерным поступлением больших масс расплава в шахту, что приводит к неравномерному началу плавления и скорости плавления бетона. Изображённая на рис. 9.6. область самого расплава всего лишь повторяет границу бетона. Отметим, что "щербатая" форма границы бетона на рис. 9.6 слабо влияет на аппроксимацию, что является одним из преимуществ МКЭ – интерполяция численного решения проводится только внутри конечного элемента и не задействует внешние узлы. Это позволяет реализовывать модели подвижной сетки, используя фиксированное сеточное разбиение, что очень сильно упрощает алгоритм и делает численное решение весьма робастным.

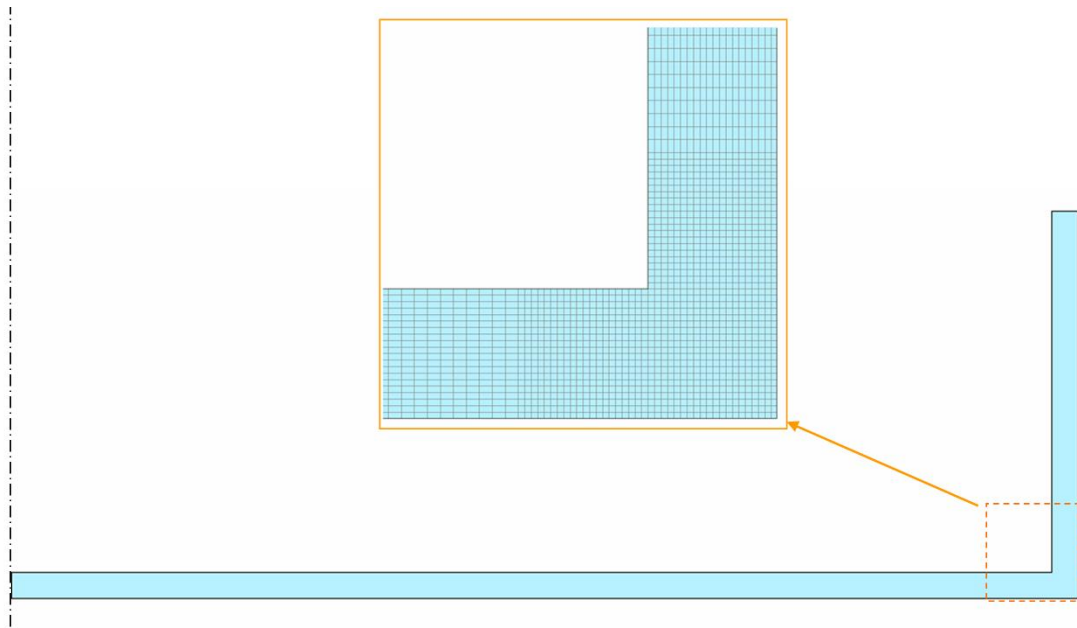


Рис. 9.5. Исходная расчётная область в сопряжённом 0D=2D расчёте, в котором расплав рассчитывается по 0D модели, бетон – по 2D модели: вертикальное сечение осесимметричной шахты

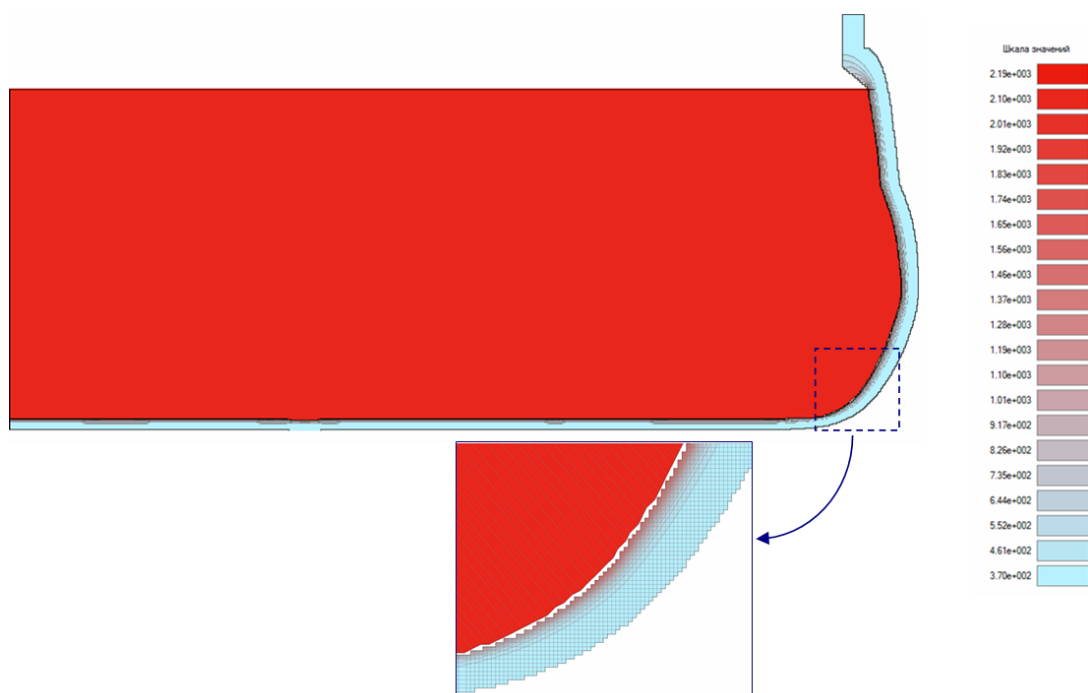


Рис. 9.6 Расчётная конфигурация и температура на промежуточной стадии процесса

Conf_22-23
(melt_ini.for)

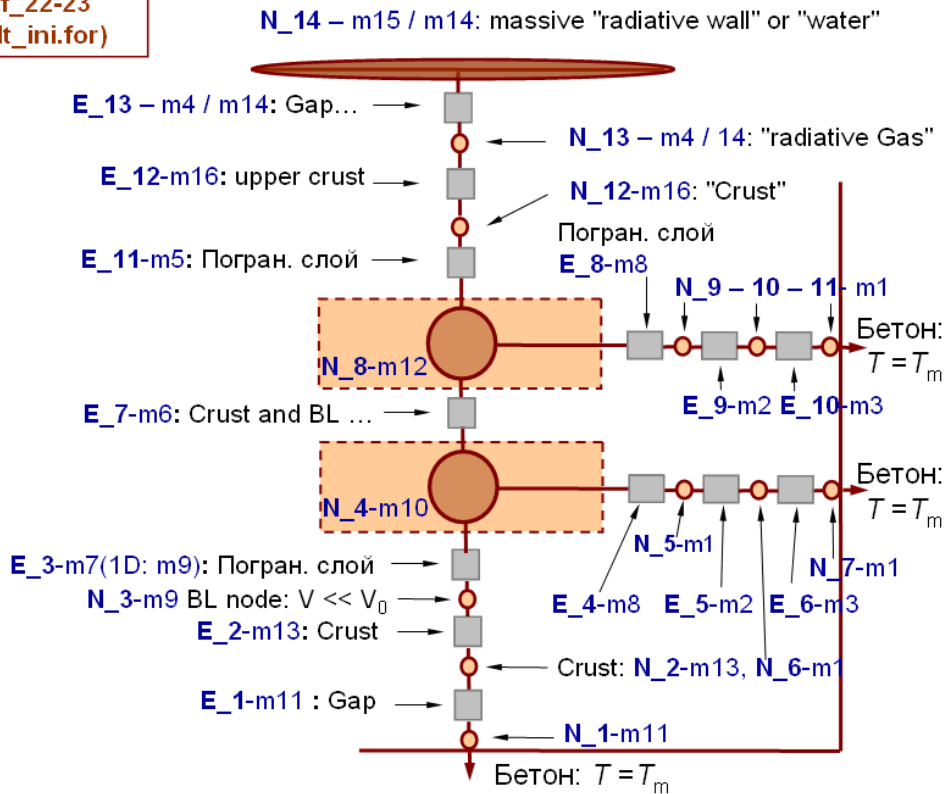


Рис. 9.7. Сетевая модель расплава с 0D элементами (ёмкости и сопротивления отображены кругами и серыми прямоугольниками, соответственно)

0D модель расплава, представленная на рис. 9.7, представляет собой тепловую сеть, рассчитывающую на основе балансных соотношений следующие особенности строения расплава и физические явления:

- Расслоённый расплав, состоящий из двух фаз расплава (N_4 , N_8 с источниками тепла различной мощности, переменного состава, массы, плотности, занимаемыми объёмами и межфазной границе. Фазы моделируются как теплоёмкости/источники (узлы);

- Граничные слои, обладающие конечными тепловыми сопротивлениями, связанными конвективным теплообменом (включая пузырьковое течение, вычисляются по корреляционным соотношениям), твёрдыми корками и пустотами. Моделируются элементами с вычисляемыми тепловыми сопротивлениями, задаваемые по свойствам материала, размерам элементов и эмпирическим зависимостям, учитывающим конвекцию, двухфазность и др. Теплоёмкости и источники учитываются узлами между элементами. Обозначены как E_4 - E_6 , E_8 - E_{10} и N_5 - N_7 , N_9 - N_{11} , соответственно;

- Межфазная граница (между слоями) – моделируется как тепловое сопротивление E_7 . Включает также сопротивления примыкающих пограничных слоёв расплава;

- Верхний пограничный слой – тепловое сопротивление и теплоёмкость, E_{11} и N_{12} ;
- Верхняя корка застывшего материала – тепловое сопротивление и теплоёмкость E_{12} и N_{13} ;

- Верхняя полость, при отсутствии залива, или газовая плёнка, при заливе водой, моделируемая как тепловое сопротивление E_{13} , рассчитываемое как лучистое (сухая полость с радиационным теплообменом) или газовая плёнка (залив водой);

- Верхние конструкции (сухая шахта) или слой воды (при заливе), моделируемые как массивные один, N_{14} , или несколько объёмов, принадлежащих вышележащим

конструкциям или слою воды над расплавом – учитывают теплоёмкость и температуру вышележащего материала.

Остальные границы представлены 2D моделью бетона, сопряжённой с 0D моделью расплава по потоку тепла. На границе, которая медленно перемещается, происходит теплообмен, моделируемый через поток тепла, вычисляемый по перепаду температуры, по корреляционным зависимостям. Левая граница – это вертикальная плоскость симметрии, на которой не задано никаких условий, кроме симметрии.

Как видно, нульмерная модель расплава содержит всего 13 элементов и 14 узлов, и затраты на расчёт по ней пренебрежимо малы по сравнению с общими. Если бы это моделировалось по многомерной модели, с учётом сложной физики происходящего, то потребовались бы многотысячные сетки, а основное время тратилось бы на модель расплава. При этом вряд ли можно было бы гарантировать заметно более достоверное описание процесса, поскольку основная проблема моделирования тяжёлых аварий – это существенные неопределённости входных данных и сложность процессов, что нивелирует точность пространственной аппроксимации в подходах многомерных моделей.

Сказанное иллюстрирует простой тезис – численная модель должна строиться в рамках точности описания, допускаемой: а) численным методом и б) исходными данными. Пп. а) и б) должны соответствовать друг другу, иначе, либо погрешность расчёта будет больше возможной, либо расходы на расчёт – неоправданно велики.

Наконец, стоит отметить также, что расчёты, подобные вышеописанному, проводились десятками серий, в каждой около 100 расчётов, с псевдослучайной вариацией входных данных и последующей статистической обработкой результатов (анализ неопределённостей и чувствительности к входным данным). Полное отсутствие сбоев и вполне интерпретируемые результаты (наряду с балансными проверками, проводимыми автоматически) показали высокую надёжность такого рода методики, основанной на двух разновидностях МКЭ, упомянутых выше: сетевые и многомерные модели

10. Многомерные задачи: метод перемещений как формализация "метода каркасов"

10.1. О месте метода перемещений в методологии МКЭ

Далее рассмотрен один из способов сведения задачи расчёта статики *непрерывной* многомерной механической системы к дискретной путём разбиения пространственной области на конечные элементы. Результатом служит алгебраическая система уравнений равновесия, отнесённая к этим взаимодействующим элементам. Уравнения статики используются при этом только косвенно, через принцип виртуальной работы, при формулировке условия эквивалентности непрерывной и дискретной систем. Этот метод перемещений, с одной стороны, нагляден и, в общем, достаточно корректен. С другой стороны, он имеет дело только с механикой, и как метод решения дифференциальных уравнений не может быть обобщён напрямую. Фактически, метод перемещений можно рассматривать как вариант обоснования моделирования "методом каркасов" непрерывных систем, не стержневых. В указанном смысле метод перемещений является развитием механики стержневых систем и является одним из вариантов МКЭ. Но дальнейшие продвижения в направлениях моделирования сплошной среды связаны с развитием МКЭ как универсального численного метода решения систем квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных, основанного, в самой общей формулировке, на понятиях теории обобщённых функций. Схема такого подхода к дискретизации под названием "метод взвешенных невязок" кратко обрисована чуть позже.

Отметим, что подобное двойственное понимание МКЭ как варианта сугубо прикладного "метода каркасов" и как проекционно-сеточного метода (проекция бесконечно-мерного пространства собственных функций дифференциального оператора на некоторое конечно-мерное пространство финитных базисных функций) насчитывает уже много лет и, вероятно, сформировалось уже в процессе становления МКЭ. Для примера приведём мнение из монографии [Розин] по стержневым системам: "... метод конечных элементов можно рассматривать либо как вариационно-разностный метод решения континуальных задач, либо как прием построения и исследования системы фиксированных элементов с конечным числом степеней свободы."

Возвращаясь к методу перемещений в применении к "сплошной" механической системе, которая требует не дискретного, а непрерывного описания, оперирующего системой уравнений статики или её математическим эквивалентом, отметим, что его изложение тут приведено по следующим причинам. Во-первых, вводится ряд объектов и понятий МКЭ, которые используются далее и в математически продвинутых обоснованиях МКЭ как метода решений уравнений сплошной среды. Во-вторых, большая часть шагов процедуры дискретизации метода перемещений, взятой в последовательности в основном соответствует построению алгоритма расчёта в программе для ЭВМ и не зависит от формулировки МКЭ. Сказанное позволяет рассматривать метод перемещений как введение в общие формулировки МКЭ. Добавим также, что именно так построено введение в МКЭ в классическом труде [Зенкевич], сохранившееся на протяжении более 40 лет регулярных переизданий. Следуя [Зенкевич], метод перемещения рассмотрен здесь в двумерной формулировке. Отличие 2-мерного и 3-мерного случаев в дискретизации МКЭ непринципиально, но двумерный случай обладает преимуществом лучшей обзорности иллюстраций и несколько менее громоздкими выкладками.

10.2. 2D задачи теории упругости

Основным примером служит плоская двумерная задача теории упругости, которая, как мы выяснили ранее, в зависимости от конкретных условий, может быть сформулирована в двух видах: случай плоских напряжений и случай плоских деформаций. Для трёхмерного тела в декартовой системе $Oxyz$ случай *плоских* (в плоскости Oxy) *деформаций* отвечает тождественно нулевым zz -компонентам тензора деформаций (неизменность в процессе деформирования z -координаты в плоскости Oxy), при этом zz -напряжение выражается через остальные. В случае *плоских напряжений* существует ненулевая деформация в z -направлении, но zz -компоненты тензора напряжения нулевые.

Для разбора процедуры метода перемещения взят случай плоских напряжений. Соотношения для существенных компонент напряжений и деформаций (закон Гука) имеют вид (5.4)

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xy} \quad (10.1)$$

Аналогичное выражение между тремя компонентами тензоров напряжений и деформаций нетрудно выписать в случае плоских деформаций. Напомним, что решается статическая задача: определить новое положение равновесия системы относительно исходного (вектор перемещений) в результате приложения внешней силы или иного воздействия, нарушающего общее механическое равновесие системы. Распространение на случаи плоских деформаций и осевой симметрии проводятся непосредственно.

10.3. Пространственная дискретизация метода перемещений

10.3.1. Этапы процедуры дискретизации

Построение приближённого численного решения уравнений равновесия методом перемещений в целом следует ранее сформулированной схеме, заключающей в себе основную идею МКЭ, давшую ему название – построение дискретного решения системы дифференциальных уравнений, следуя от аппроксимации решения в элементе к общему решению, определённому на всей системе. Выше в гл. 8 были охарактеризованы этапы получения численного решения методом конечных элементов, которые в применении к методу перемещений следующие:

- A. *Выбор типа используемых конечных элементов и способа аппроксимации.* Строится КЭ-разбиение расчётной области (*сетка, КЭ-модель*) и, в соответствии с геометрией КЭ и моделируемой системой, выбирается вид интерполяции перемещений в любой точке области: *функции формы*, которые суть функции координат точек. Искомые узловые перемещения – неизвестные пока коэффициенты этой интерполяции.
- B. *Аппроксимация кинематических уравнений и напряжений – внутренних сил.* Дифференцированием интерполяционных выражений по координатам находятся выражения для деформаций через узловые величины. С помощью закона Гука или его обобщения напряжения в каждой точке элемента связываются с полученными деформациями, выраженными, в свою очередь, через перемещения узлов элемента.
- C. *Введение узловых сил.* Вводятся векторы сил, приложенных в узлах. Внешние нагрузки (силовые граничные условия и объёмные силы) также будут сведены к узловым силам. Внутренние узловые силы неизвестны, но, т.к. они взаимоуравновешены, знать их заранее не нужно, они вводятся только для формулировки условия равновесия.

- D. *Связь распределённых сил в элементе с узловыми силами, в том числе, на границах.* Сплошной среде сопоставлена система дискретных узлов и узловых сил, которая постулируется статически эквивалентной распределённой системе. Статическая эквивалентность в данном случае определена как равенство работ, совершённых на малых перемещениях: (а) распределёнными силами в элементе и (б) узловыми силами в узлах – на малых перемещениях, совместимых со связями (гран. условиями по перемещениям). Далее работа идёт в узловых переменных дискретной системы.
- E. *Условие общего равновесия.* Используя условие полного механического равновесия сил в каждом узле дискретной системы (нулевая сумма узловых сил), элементные уравнения равновесия путём сложения уравнений, в которые входят силы в данном узле, объединяются в систему алгебраических уравнений для перемещений.
- F. *Фиксация пространственного положения дискретной системы.* В алгебраической системе учитываются внешние связи, т.е. граничные условия по перемещениям.
- G. *Решение и пост-обработка.* Алгебраические уравнения решаются: находятся перемещения, затем – остальные механические величины.

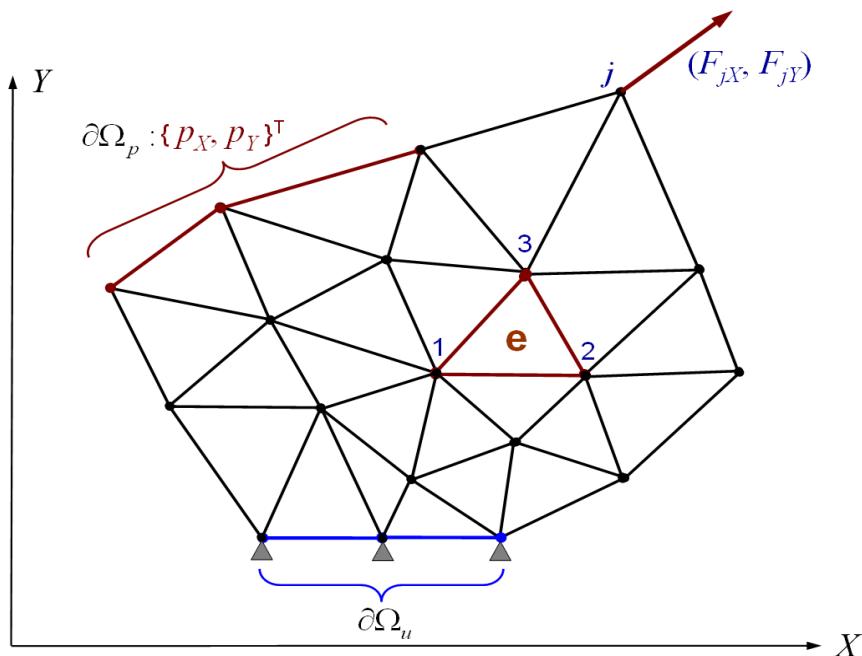


Рис.10.1. Треугольная сетка и задание граничных условий на ней

Переход от сплошной среды с распределёнными силами к дискретной модели с взаимодействием в отдельных точках на основе постулирования равенства малых работ узловых и распределённых сил является ключевым этапом процедуры дискретизации. Основания для применения условия физически вполне естественны: если две системы сил совершают одинаковую работу, то и распределение сил в них в среднем (в масштабе размера конечного элемента) должно быть одинаково.

Для дальнейших обобщений будет полезным провести параллель между приведёнными выше этапами процедуры дискретизации задачи статики и самим "объектом дискретизации", т.е., с системой (4.1) уравнений равновесия деформируемого твёрдого тела. Соответствие уравнений и этапов процедуры дискретизации приведено в таблице 1.

Таблица 1. Параллель между непрерывной и дискретной моделями МДГТ

Уравнение непрерывной модели	Процедура дискретной модели
------------------------------	-----------------------------

<p>Определение области задания неизвестных функций, формулировка уравнений среды.</p>	<p>А. <i>Выбор типа используемых конечных элементов и способа аппроксимации (включая построение сетки)</i></p>
<p>Определение деформаций (малая): $\varepsilon_{ik} = 1/2(u_{i, k} + u_{k, i})$ и уравнения среды (упругая): $\sigma_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk})$</p>	<p>В. <i>Аппроксимация кинематических уравнений и напряжений.</i></p>
<p>Уравнение равновесия: $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0$ и граничное условие $p_i = \sigma_{ik} n_k$</p>	<p>Пп. С, D, Е. <i>Введение узловых сил.</i> <i>Связь распределённых сил в элементе с узловыми, в том числе, на границах.</i> <i>Условие общего равновесия.</i></p>
<p>Граничное условие по перемещениям (закрепление степеней свободы)</p>	<p>Ф. <i>Фиксация пространственного положения дискретной системы.</i></p>

Этап подготовки А общий при численном решении любой системы уравнений сплошной среды. Последующие этапы отчасти специфичны для МДТТ и МКЭ, но имеют свои аналоги и в процедурах дискретизации в CFD и др. Этапы В и С фактически уменьшают полное количество неизвестных сеточных функций – всё выражается через перемещения, и эти этапы служат для упрощения итогового интегрального соотношения. Этапы С, D и Е – центральные, здесь появляется искомая система алгебраических уравнений. Этап F завершает формирование дискретной модели – системы алгебраических уравнений, решение которой с заданной точностью аппроксимирует решение исходной дифференциальной задачи.

В случае решения уравнения, например, диффузии, этап В может отсутствовать, но этап, эквивалентный С, D и Е, присутствует всегда, причём, условие, аналогичное условию равновесия, всегда записывается в интегральной форме. Интегральная формулировка, вместе с аппроксимацией искомой функции в конечном элементе через узловые значения, являются общими для всех реализаций МКЭ, включая и метод перемещений в МДТТ. Формальное изложение этой процедуры может быть разным, иметь разную степень общности. В форме метода перемещений процедура сначала будет приведена в простейшей двумерной формулировке, на примере треугольных элементов. Этот подход изложен, например, в книгах [Зенкевич], [Zenkevich] и ряде других.

10.3.2. Интерполирующие выражения. Треугольный линейный элемент

Важный этап построения дискретной модели в МКЭ – введение аппроксимирующих выражений через узловые величины для вычисления перемещений в любой точке, по которым затем можно выразить деформации и напряжения в КЭ. Общее представление для функции $u = u(x, y)$ в точке (x, y) , принадлежащей элементу, в МКЭ записывается в виде

$$u(x, y) \approx u^*(x, y) = \sum_{k=1}^n u(x_k, y_k) \varphi_k(x, y) \equiv \sum_{k=1}^n u_k \varphi_k(x, y), \quad (10.2)$$

где $\varphi_k(x, y)$ – функции формы (shape functions), обычно полиномы, n – число узлов элемента, индекс k нумерует точки, в которых ищется численное решение – узлы элемента. Здесь звёздочкой обозначено приближённое интерполирующее выражение, u_k – искомые узловые значения, которые по условию совпадают со своей интерполяцией

$u(x,y)$. Координаты (x,y) могут быть глобальными (в лабораторной системе) или локальными (в локальной системе) координатами точки элемента. Для линейного элемента узловые точки совпадают с вершинами соответствующего многоугольника или многогранника. Если порядок полиномов $\varphi_k(x,y)$ выше первого, для определения их коэффициентов необходимы дополнительные узлы.

Для иллюстрации построения интерполирующих выражений рассмотрим простейший плоский элемент – треугольный линейный (в алгебраическом смысле). В треугольнике с вершинами $\{(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)\}$ задаются три линейные аппроксимирующие функции *глобальных* координат, имеющие вид:

$$\varphi_k(x,y) = a_k x + b_k y + c_k, \quad k=1, 2, 3. \quad (10.3)$$

Требуется определить коэффициенты (a_k, b_k, c_k) этого выражения, которые для данного конечного элемента могут зависеть только от координат узлов *данного элемента*. определённого этими узлами. С помощью таких функций две компоненты перемещения (u,v) в любой точке (x,y) треугольного элемента приближённо выражаются через значения перемещений в узлах $(u_k), (v_k)$ в виде (10.2):

$$u(x,y) \approx u^*(x,y) = \sum_{i=1}^3 u_i \varphi_i(x,y) = u_1 \varphi_1(x,y) + u_2 \varphi_2(x,y) + u_3 \varphi_3(x,y) \quad (10.4)$$

$$v(x,y) \approx v^*(x,y) = \sum_{i=1}^3 v_i \varphi_i(x,y) = v_1 \varphi_1(x,y) + v_2 \varphi_2(x,y) + v_3 \varphi_3(x,y).$$

Отметим, что в рассматриваемой формулировке МКЭ координаты узлов не зависят от вычисленных перемещений, т.е. геометрический смысл компонент перемещений не играет роли. Аналогичное предположение было сделано выше при анализе системы стержней. Приводимые здесь соотношения следует рассматривать просто как интерполяцию пары функций, заданных в пределах данного конечного элемента при условии фиксированных (но пока неизвестных) значений в узлах элемента. Это допустимо, когда вычисляемые перемещения малы. Более общие формулировки рассмотрены для задачи квазистатики, в которой малость перемещений необязательна.

Далее для упрощения записи неизвестная функция на конечном элементе будет отождествляться с её выражением через интерполянты: $u(x,y) = u^*(x,y)$, и звёздочка будет опускаться. Девять коэффициентов (a_k, b_k, c_k) линейных функций $\varphi_i(x,y)$: по три коэффициента на каждую из трёх функций, находятся методом неопределённых коэффициентов, исходя из условия (10.2) совпадения перемещений в узлах со своими интерполяционными выражениями. Рассмотрим три различных набора коэффициентов интерполяции компоненты u перемещений в каждом из трёх узлов. Значения функции $u(x,y)$ для этих целей могут браться любыми. Варьируя эти значения удобным образом, можно последовательно написать девять уравнений (три группы по три), из которых и определяются коэффициенты линейных функций. Например, пусть два из узловых значений – нулевые, и перемещение u первого узла отлично от нуля. Координаты этого узла x_1, y_1 известны, как и остальных. По условию должно выполняться –

$$u_1(x_1,y_1) = \varphi_1(x_1,y_1) u_1 + \varphi_2(x_1,y_1) \cdot 0 + \varphi_3(x_1,y_1) \cdot 0 = \varphi_1(x_1,y_1) u_1,$$

откуда –

$$\varphi_1(x_1,y_1) = 1. \quad (10.5)$$

Аналогичным образом можно расписать нулевые значения в двух других узловых точках (x_2,y_2) и (x_3,y_3) –

$$u_2(x_2,y_2) = 0 = \varphi_1(x_2,y_2) u_1 + \varphi_2(x_2,y_2) \cdot 0 + \varphi_3(x_2,y_2) \cdot 0 = \varphi_1(x_2,y_2) u_1,$$

$$u_3(x_3, y_3) = 0 = \varphi_1(x_3, y_3)u_1 + \varphi_2(x_3, y_3) \cdot 0 + \varphi_3(x_3, y_3) \cdot 0 = \varphi_1(x_3, y_3)u_1 .$$

Отсюда следует, в силу произвольности значения u_1 , что в других узлах -

$$\varphi_1(x_2, y_2) = \varphi_1(x_3, y_3) = 0 . \quad (10.6)$$

Это приводит к трём уравнениям для трёх коэффициентов a_1, b_1, c_1 первой функции:

$$1 = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 ,$$

$$0 = a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 ,$$

$$0 = a_1x_3 + b_1y_3 + c_1 .$$

Обращая эти соотношения, выражаем коэффициенты 1-й функции формы. Далее, по аналогии, находим выражения для двух других функций через координаты узлов конечного элемента. В итоге искомые выражения имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= 1/A_{123}(\zeta_{23} + \eta_{23}x - \xi_{23}y) , \\ \varphi_2(x, y) &= 1/A_{123}(\zeta_{31} + \eta_{31}x - \xi_{31}y) , \\ \varphi_3(x, y) &= 1/A_{123}(\zeta_{12} + \eta_{12}x - \xi_{12}y) , \end{aligned} \quad (10.7)$$

где $A_{123} = x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)$ - удвоенная площадь треугольника, всегда ненулевая для невырожденного элемента, и обозначено

$$\zeta_{ik} = x_i y_k - x_k y_i ,$$

$$\eta_{ik} = x_i - x_k ,$$

$$\xi_{ik} = y_i - y_k , \quad i, j = 1, 2, 3 .$$

Из (10.3)–(10.4), (10.7) следует, что перемещения внутри элемента с помощью введённой интерполяции выражаются через перемещения узлов *однозначно*. Кроме того, обеспечена *непрерывность интерполяции перемещений на границах* элементов. Чтобы это увидеть, возьмём два узла 1 и 2 на общей границе двух элементов и рассмотрим, каким станет выражение (10.4) для $u(x)$ в промежуточной точке на линии, соединяющей узлы. Координаты любой точки (x, y) на линии, соединяющей узлы, могут быть представлены через координаты узлов $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ как

$$x = \xi x_1 + (1 - \xi) x_2 , \quad (10.8)$$

$$y = \xi y_1 + (1 - \xi) y_2 , \quad (10.9)$$

где $0 \leq \xi \leq 1$. Значения функций формы (10.3) могут быть выражены через координаты узлов 1 и 2 и параметр ξ :

$$\varphi_k(x, y) = \xi \varphi_k(x_1, y_1) + (1 - \xi) \varphi_k(x_2, y_2) , \quad k = 1, 2, 3 . \quad (10.10)$$

В силу условий (10.5)–(10.6) в интерполирующем выражении (10.4) для перемещения в промежуточной точке между узлами 1 и 2 останется только два слагаемых, соответствующих ненулевым значениям $\varphi_1(x_1, y_1), \varphi_2(x_2, y_2)$, а коэффициенты этих функций выражаются с помощью (10.7) через координаты узлов 1 и 2, т.е. коэффициенты интерполирующего выражения будут зависеть только от координат узлов 1 и 2. Поскольку эти узлы у соседствующих элементов общие, одинаковыми будут и значения интерполирующих выражений, построенных в каждом из двух элементов для точек на их общей границе, что и означает непрерывность интерполяции на границе.

Далее, т.к. согласно (10.5)–(10.6) значения функций формы в узлах равны 1 или 0, то, используя (10.10), линейную интерполяцию вдоль границы можно записать через значения только в граничных узлах 1 и 2 и параметр ξ , линейно зависящий только от расстояния до одного из двух узлов:

$$u(x) = \xi u_1 + (1-\xi) u_2,$$

т.е. для координат узлов на общей границе выполнены соотношения (10.8)–(10.9), с тем же коэффициентом ξ . Таким образом, координаты граничных точек наших элементов выражаются по тем же формулам через координаты узлов, что и перемещения в этих точках через узловые перемещения. Это свойство *изопараметричности* рассматриваемого конечного элемента несложно продемонстрировать и для любой внутренней точки треугольного элемента, разбив его на два треугольника линией, проходящей через эту точку, и повторив рассуждения.

Непрерывность на границах имеет простую геометрическую интерпретацию: две линейные интерполирующие функции (10.3), построенные для каждого из двух соседних элементов, можно изобразить двумя участками плоскостей, линейных функций координат, определённых каждая на своём конечном элементе. Линия пересечения этих плоскостей должна лежать над границей этих двух соседних элементов.

Производные же по координатам для рассматриваемых линейных функций формы постоянны в пределах элемента и уже не обязаны быть непрерывными на границе, поскольку коэффициенты линейных функций (10.3) в каждом элементе свои. Следовательно, вычисляемые дифференцированием (10.4) деформации, а с ними и напряжения в элементах, также будут только *кусочно–постоянными и разрывными на границах элементов*. Это означает, что на границах этих элементов нельзя записать условие равновесия для напряжений в терминах интерполирующих зависимостей. В данном случае полагается, что в дискретной модели среды равновесие достижимо для узловых сил в дискретной модели среды. Интегральное условие равновесия для распределённых внутренних сил эквивалентно дискретному условию в среднем.

Выбрав интерполирующие функции перемещений второго порядка или выше можно добиться и непрерывности их производных. Соответствующие конечные элементы могут быть построены, хотя численная процедура оказывается более сложной. Отметим, что при решении упругих задач, в целях достижения более высокой точности и экономичности численной схемы, обычно рекомендуют 4–угольные элементы, которые мы рассмотрим позже, и использование функций формы более высокого порядка, чем первый.

10.3.3. Перемещения и деформации в конечном элементе

Вернёмся к нашей расчётной области, которая полагается разбитой на треугольные КЭ (рис.10.1). Введём, как и для рассмотренного выше стержня, матрицу–вектор перемещений в точках элемента, функций координат (столбец размером 2×1):

$$\{u\} = \{u(x,y), v(x,y)\}^T. \quad (10.11)$$

Введём матрицу–вектор искомых узловых перемещений в элементе (размером 6×1):

$$\{d\}^{(e)} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}^T. \quad (10.12)$$

Алгебраический вектор $\{d\}^{(e)}$ перемещений узлов элемента (e) содержит все компоненты физических векторов перемещений всех его узлов. Как отмечалось выше, принадлежность узлов данному элементу задаётся его *связностью* – например, в алгоритме расчёта – 2–мерным массивом $k(i,e)$, в котором для каждого элемента с номером e прописаны номера $k(i,e)$ составляющих его узлов. Здесь $i=1, 2, 3$ – порядок следования узлов.

Введём *матрицу функций форм* $[\phi]^{(e)} = [\phi(x,y)]^{(e)}$ (далее индекс (e) принадлежности к элементу часто будем опускать), имеющую размер 2×6 для данного элемента:

$$[\phi] = \begin{Bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{Bmatrix}. \quad (10.13)$$

Соотношение (10.4) для вектора $\{u\}$ (10.11) может быть записано через вектор узловых перемещений (10.12) с помощью введённой матрицы функций форм:

$$\{u\} = [\Phi]\{d\}, \quad \{u\}^T = \{d\}^T[\Phi]^T. \quad (10.14)$$

В случае плоских напряжений есть три существенные компоненты у тензоров напряжений и деформаций. Аппроксимирующие функции для существенных компонент тензора деформаций получаются дифференцированием перемещений (10.4), выраженных через интерполирующие функции. В матричном виде компоненты деформации $\{\varepsilon\}$ записываются как вектор 3×1 . Для недиагональных компонент используемого здесь тензора малых деформаций в технике часто используются удвоенные значения, равные изменению углов при повороте (см. (2.16)), и вектор деформаций, приводимый, например, в [Зенкевич], будет иметь вид:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{1x}u_1 + \varphi_{2x}u_2 + \varphi_{3x}u_3 \\ \varphi_{1y}v_1 + \varphi_{2y}v_2 + \varphi_{3y}u_3 \\ \varphi_{1x}u_1 + \varphi_{1y}v_1 + \varphi_{2x}u_2 + \varphi_{2y}v_2 + \varphi_{3x}u_3 + \varphi_{3y}u_3 \end{Bmatrix} \quad (10.15)$$

или –

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}]\{d\}, \quad (10.16)$$

Здесь второй индекс у функций форм обозначает дифференцирование по соответственной координате и введена (3×6) –матрица

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (10.17)$$

называемая *матрицей деформаций*.

Напомним, что в рассматриваемом далее случае плоских напряжений компонента тензора напряжений в направлении, перпендикулярном Oxy , отсутствует, а деформация в этом направлении может быть вычислена по деформациям в плоскости. Случай плоских деформаций аналогичен – при плоских деформациях компонента тензора *деформаций* в направлении, перпендикулярном Oxy , отсутствует, *напряжение* же в этом направлении определено напряжениями в плоскости. Различие двух случаев проявляется только в законе Гука, как отмечено в гл. 5.

10.3.4. Напряжения в элементе.

Представим существенные компоненты тензора напряжений в виде матрицы-столбца, как и деформации:

$$\{\sigma\} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})^T, \quad \text{где } \tau_{xy} \equiv \sigma_{xy}. \quad (10.18)$$

Напряжения выражаются через деформации из закона Гука (10.1), который мы запишем через введённые матрицы-векторы:

$$\{\sigma\} = [\mathbf{E}]\{\varepsilon\}. \quad (10.19)$$

Напомним, что $\{\sigma\}$ и $\{\varepsilon\}$ – векторы только в алгебраическом понимании, соответственно, матрица $[E]$ – просто таблица коэффициентов. Вид этой *матрицы упругости*, отвечающий выражению (10.15) для алгебраического вектора деформаций (см. (5.4a)):

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (10.20)$$

С помощью (10.16)–(10.19) выражаем напряжения в элементе через перемещения узлов

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = [E][B]\{d\} \equiv [S]\{d\}, \quad (10.21)$$

где $[S]$ – *матрица напряжений*, которая в общем случае зависит от координат точки, если функции формы (ср. (10.17)) нелинейны. В случае плоских деформаций строятся аналогичные выражения с несколько другой матрицей упругости, отвечающей формулировке закона Гука в этом случае.

Упражнение. Определить матрицу упругости для случая плоских деформаций.

10.3.5. Узловые силы и условие равновесия

Теперь необходимо сформулировать условие равновесия внутренних сил, с тем, чтобы получить соотношения для неизвестных узловых перемещений в построенной дискретной модели сплошного тела. Для этого у нас есть исходные уравнения равновесия (4.1a), в которые можно формально подставить полученные аппроксимации напряжений через узловые перемещения и попытаться получить соотношения между узловыми величинами, в принципе, для любой точки расчётной области, включая узловые. Выражая узловые величины через координаты узлов, упругие постоянные и коэффициенты функций форм, можно далее попытаться получить алгебраическую систему для узловых величин перемещений из уравнения равновесия.

Но подобная реализация схемы дискретизации неизвестна и в общем случае невозможна, в первую очередь потому, что, как мы видели, для элементов первого порядка прямая подстановка ступенчатых функций (10.16), (10.19) для деформаций и напряжений в дифференциальные уравнения равновесия даст разрывы на границах конечных элементов и формально непригодна. Регулярный способ добиться удовлетворения уравнений равновесия "в среднем" и получения из них алгебраических уравнений основан на интегрировании. Как отмечалось, оно присутствует во всех формулировках МКЭ как формальный и математически корректный способ получения дискретного решения путём рассмотрения т.н. обобщённых или "слабых" решений, удовлетворяющих исходной системе уравнений не точно, а в пределах некоторой оцениваемой погрешности (см. ниже). В частности, интегрирование будет использовано для определения работы сил на виртуальном перемещении. Как отмечалось выше, стационарность интеграла работы сил на виртуальном перемещении может быть эквивалентом условия равновесия системы, т.е., уравновешенности сил в любой точке тела. Аналогично, равенство работ двух систем сил на любых виртуальных перемещениях может быть использовано как условие их локальной эквивалентности в среднем. Изложенная ниже процедура по своей алгоритмизации принципиально не отличается от более общих формулировок, приводимых далее, но основана на непосредственном использовании условий механического равновесия и потому более наглядна.

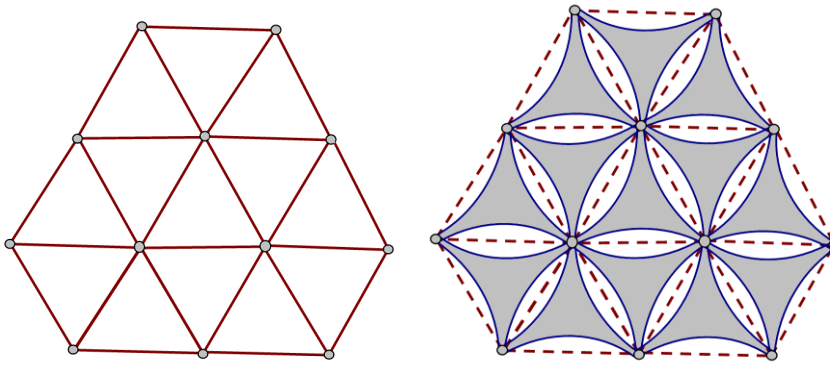


Рис.10.2. "Ферменная аналогия" (справа) сплошных треугольных конечных элементов, взаимодействующих только в узлах (слева)

Для формулировки условий равновесия в узлах введём *дискретные узловые силы*, служащие силовым эквивалентом распределённых напряжений, аппроксимация которых приведена выше. Эти силы необходимы для представления внешних силовых нагрузок, но, как и в стержневых системах, следует ввести также компенсирующие их внутренние узловые силы – следуя, например, [Zenkevich] можно полагать на основе "ферменной аналогии", что дискретные элементы модели взаимодействуют только в узлах, а не через непрерывную границу, как на рис. 10.2. Количество физических компонент узловых сил равно количеству компонент перемещений в узле (в нашем случае =2), они раскладываются по тем же направлениям осей (т.е. Ox и Oy) и записываются так же, т.е. в виде вектора $\{F\}$ – матрицы 6×1 :

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \end{Bmatrix} \quad (i=1,2,3), \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \{F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{x3}, F_{y3}\}^T. \quad (10.22)$$

Суммарная сила в данном узле складывается из внутренних и внешних сил – сосредоточенных, объёмных и поверхностных. В состоянии равновесия полная узловая сила равна нулю. Но внешние и внутренние силы в элементах, взаимодействующих через границы, не узловые, а распределённые. Рассмотрим подробнее энергетический критерий, задающий связь между дискретным и непрерывным представлениями сил, т.е., сопоставляющий узловые силы распределённым силам в элементах.

Пусть физическое тело, описываемое как объёмная (не стержневая) конструкция, аппроксимированная КЭ–разбиением, в начальный момент свободно от нагрузок. При приложении нагрузки конструкция деформируется и приходит в новое равновесное состояние. Узлы данного конечного элемента испытывают при этом перемещения, задаваемые *узловым* вектором $\{d\}$, подлежащим определению. Вектору $\{d\}$ отвечают функции компонент перемещений точек элемента, задаваемые двухкомпонентным *физическим* вектором $\{u(x,y)\}$. Пусть элемент, находящийся в состоянии равновесия, испытывает дополнительно малое отклонение от нового равновесного положения. Это дополнительное *виртуальное* перемещение в узлах описывается как дискретное некоторым узловым алгебраическим вектором $\{\Delta\}$ и как непрерывное – компонентами физического вектора перемещений, заданного на всём элементе:

$$\{\Delta\}^{(e)} = \{\delta u_1, \delta v_1, \delta u_2, \delta v_2, \delta u_3, \delta v_3\}^T, \\ \{\delta(x,y)\} = \{\delta_x(x,y), \delta_y(x,y)\}^T.$$

Полагается, что в дискретной системе, в которой элементы взаимодействуют только в узлах, через узловые силы ("каркас"), узловые перемещения совпадают с перемещениями

узлов непрерывной системы. Конкретные величины узловых сил неинтересны, коль скоро они взаимоуравновешены, интерес представляют перемещения и вычисленные по ним деформации и напряжения в элементе. Полагается, что эквивалентность системы распределённых сил в элементе системе дискретных узловых сил в "каркасе" в состоянии равновесия при виртуальном отклонении от положения равновесия достигается при выполнении следующих условий.

- Условие равенства узловых перемещений, определяемых в данном узле для всех конечных элементов, содержащих данный узел – *условие совместности*;
- Условие равенства работы узловых сил на любом виртуальном узловом перемещении, задаваемом вектором $\{\Delta\}$, работе внутренних сил в элементе на соответственных распределённых перемещениях $\{\delta(x,y)\} = \{\delta_x, \delta_y\}^T = [\phi]\{\Delta\}$ внутренних точек элемента. Это можно трактовать как интегральное условие *статической эквивалентности* двух систем сил в двух моделях, представляющих одну физическую систему.

Узловым векторам $\{d\}$ и $\{d\} + \{\Delta\}$ отвечают, вместе с распределениями перемещений в элементе, также распределения деформаций в элементе: вместе с векторами $\{u(x,y)\}$ и $\{u^*(x,y)\} = \{u(x,y)\} + \{\delta(x,y)\}$ могут быть введены $\{\varepsilon(x,y)\}$ и $\{\varepsilon^*(x,y)\} = \{\varepsilon(x,y)\} + \{\delta\varepsilon(x,y)\}$. Звёздочкой обозначены возмущённые значения. Полагаем виртуальное перемещение малым: $\|\Delta\| \ll \|d\|$. Запишем условие равенства работ на виртуальном перемещении в непрерывной и дискретной моделях среды, пока только для внутренних сил (внешние будут добавлены позже):

$$\begin{aligned} \{F\}_{in}^T \{\Delta\} &= \int_{V_e} \{\sigma^*\}^T \{\delta\varepsilon\} dV, \quad \text{или} - \\ \{\Delta\}^T \{F\}_{in} &= \int_{V_e} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma^*\} dV. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Слева работа узловых сил записана как сумма слагаемых вида "сила – на перемещение узла", а слева использовано выражение (3.2) для работы упругих сил, проинтегрированное по сплошному элементу. Используя (10.19) преобразуем подынтегральное выражение:

$$\{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma^*\} = \{\delta\varepsilon\}^T (\{\sigma\} + \{\delta\sigma\}) = \{\delta\varepsilon\}^T [E] (\{\varepsilon\} + \{\delta\varepsilon\}) \approx \{\delta\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} = \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\}.$$

Здесь опущены слагаемые второго порядка малости по деформациям. Используя выражение (10.16) для алгебраического вектора деформаций: $\{\varepsilon\} = [B]\{\Delta\}$, применяя свойства операции транспонирования, получим:

$$\{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} = ([B]\{\Delta\})^T [E] \{\varepsilon\} = \{\Delta\}^T [B]^T [E] [B] \{d\}.$$

Внося это в (10.23), с учётом произвольности виртуального перемещения $\{\Delta\}$, получим равенство:

$$\int_{V_e} [B]^T [E] [B] \{d\} dV = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV \{d\} \equiv [k] \{d\} = \{F\}_{in}, \quad (10.24)$$

где введён по определению набор известных (вычисляемых) величин

$$[k] = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV, \quad (10.25)$$

называемый *матрицей жёсткости элемента* (element stiffness matrix). Как видно, она симметрична, её размерность в данном случае – 6×6. Матрица жесткости задаёт связь неизвестного вектора перемещений КЭ и вектора узловых сил в КЭ, тоже неизвестного, но который также можно затем исключить. (10.24) служит фрагментом формируемой общей системы алгебраических уравнений для узловых перемещений. Исторически сложившееся название "матрица жёсткости" перекочевало затем и в другие приложения МКЭ.

Таким образом, пользуясь произвольностью виртуального перемещения, мы из общего скалярного уравнения для виртуальной работы выделили шесть частных соотношений для составляющих алгебраического вектора узловых сил, по две компоненты физического вектора силы в каждом из трёх узлов данного "каркасного" конечного элемента. Выражение (10.24) позволяет для данного узла вычислить вклад введённой *внутренней* узловой силы $\{F_{xi}, F_{yi}\}^{(e)}$ в общий баланс сил в данном узле i от любого элемента $e(i)$, содержащего этот i -й узел (вклады от элементов, не содержащих данный узел, очевидно, будут нулевыми). Оно показывает также, что величина вклада внутренних узловых сил данного элемента определяется только его параметрами и перемещениями его узлов.

10.3.6. Учёт объёмных, поверхностных и точечных сил

Рассмотрим далее процедуру сведения к узловым силам внешних нагрузок. Нагрузки могут быть представлены сосредоточенными силами, приложенными в узлах, распределёнными поверхностными силами, задаваемыми на ед. площади (давление, трение), и объёмными силами. Эти сосредоточенные силы должны войти непосредственно в дискретное уравнение равновесия сил (10.24). Напомним, что внешние узловые силы могут быть приложены в любом узле, не обязательно граничном.

Рассмотрим поверхностные нагрузки, в частности, нормальное давление. Используем то же условие равенства работ поверхностной нагрузки в непрерывной и дискретной моделях среды на виртуальном перемещении, но заданное не на КЭ, а на границе приложения силовых краевых условий $\{\delta(x,y)\}=[\phi]\{\Delta\}$:

$$\int_{\partial\Omega_p} \{\delta(x,y)\}^T \{p(x,y)\} dA = \{\Delta\}^T \{F\}_b. \quad (10.26)$$

Здесь мы имеем дело с системой, состоящей из граничных поверхностей, и проводим интегрирование по заданному участку $\partial\Omega_p$ этой поверхности. В 2–мерном случае это линия контура границы. Отметим, что вид интерполяции *на границах* конечных элементов отличен от интерполяции в самом элементе, поскольку размерность границы на единицу меньше, но может быть получен редукцией функций форм на область границы. (Вопрос – какова размерность вектора $\{\Delta\}$ при рассмотрении границ в плоском случае?) Используя опять произвольность виртуального узлового перемещения $\{\Delta\}$, получим выражение для узловой силы при поверхностном нагружении:

$$\int_{\partial\Omega_p} [\phi]^T \{p(x,y)\} dA = \{F\}_b. \quad (10.27)$$

Приложенная внешняя распределённая сила раскладывается на нормальную к поверхности (давление) и касательную компоненты, причём касательные часто отсутствуют, что упрощает выражение (10.27). Если внешняя нагрузка может быть выражена как функция координат, то эта функция вдоль границы может быть интерполирована через функции формы граничных элементов и узловые значения: $\{p\}=[\phi]\{q\}$, и (10.27) приобретёт вид:

$$\int_{\partial\Omega_p} [\phi]^T [\phi] \{q\} dA = \left(\int_{\partial\Omega_p} [\phi]^T [\phi] dA \right) \{q\} = \{F\}_b. \quad (10.28)$$

Рассмотрим объёмные силы, которые в исходном уравнении равновесия (4.1a), представляют собой распределённую нагрузку, заданную полем некоторого физического вектора $f(x,y)$. Его компоненты часто могут быть записаны через "плотность" и "напряжённость поля": $f_x = \rho g_x$, $f_y = \rho g_y$. Для этих величин, если напряжённость зависит только от координат, а плотность постоянна, может быть сформулировано условие,

аналогичное (10.23), постулирующее равенство работы распределённых объёмных сил в элементе на виртуальном перемещении $\{\delta_i(x,y)\}$:

$$W_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho g_i \delta_i(x,y) d\Omega \quad (10.29)$$

её дискретному аналогу – работе соответствующих узловых векторов $\{F\}_{\Omega}$. В матричной форме для конечного элемента:

$$W_{\Omega} = \int_{\Omega} \{\delta\}^T \{\rho g\} d\Omega = \rho \int_{\Omega} \{\Delta\}^T [\varphi]^T \{g\} d\Omega = \{\Delta\}^T \left(\rho \int_{\Omega} [\varphi]^T \{g\} d\Omega \right) = \{\Delta\}^T \{F\}_{\Omega}. \quad (10.30)$$

Здесь виртуальное перемещение записано в стандартной форме (10.15) с помощью узлового вектора $\{\Delta\}$, $\{\delta\} = [\varphi]\{\Delta\}$ и введён вектор компонент поля объёмной силы размером 2×1 – $\{g(x,y)\} = \{g_x, g_y\}^T$. Отсюда выражение для вклада объёмных сил в общее равновесие узловых сил в КЭ:

$$\rho \int_{\Omega} [\varphi]^T \{g\} d\Omega = \{F\}_{\Omega}. \quad (10.31)$$

Часто объёмные силы потенциальны, как, например, сила тяготения, и зависимость потенциала от координат локально сводится к линейной, что записывается в форме, аналогичной (10.15), через узловые значения потенциала, задаваемые в 3-угольных линейных элементах матрицей–вектором $\{b\}$ размером 6×1 :

$$\{g\} = [\varphi]\{b\}.$$

Выражение (10.31) в этом случае разделяется на "геометрический" и "полевой" множители:

$$\rho \int_{\Omega} [\varphi]^T [\varphi] \{b\} d\Omega = \left(\rho \int_{\Omega} [\varphi]^T [\varphi] d\Omega \right) \{b\} = \{F\}_{\Omega}, \quad (10.32)$$

где $\int_{\Omega} [\varphi]^T [\varphi] d\Omega$ – это 6×6 матрица, образованная умножением матриц 6×2 и 2×6 .

10.3.7. Дискретная форма полного уравнения равновесия элемента

Теперь для всех видов нагрузок, точечной, поверхностной и объёмной, мы можем записать дискретный аналог общего условия равновесия конечного элемента. На распределённом виртуальном перемещении $\{\delta(x,y)\}$ внутренние силы в элементе совершают работу против внутренних сил со стороны соседних элементов, против объёмных полевых сил, против граничных и точечных сил, если они есть. Последние мы явно не выписываем, поскольку это просто дополнительные узловые силы. Собирая с соответствующими знаками слагаемые уравнений (10.24), (10.27), (10.31), получим уравнение полного равновесия сил в элементе, содержащее редуцированные к узловым вклады внутренних и внешних объёмных/поверхностных/точечных сил:

$$\left(\int_{\Omega_e} [B]^T [E] [B] d\Omega \right) \{d\} - \int_{\partial\Omega_p} [\varphi]^T \{p(x,y)\} dA - \rho \int_{\Omega} [\varphi]^T \{g\} d\Omega = \{F\}_{in} - \{F\}_{\Omega} - \{F\}_b \quad (10.33)$$

Введя, в соответствии с (10.25), элементную матрицу жёсткости $[k]$, уравнение, связывающее перемещения с узловыми силами, можно записать в виде

$$[k]\{d\} - \int_{\partial\Omega_p} [\varphi]^T \{p(x,y)\} dA - \rho \int_{\Omega} [\varphi]^T \{g\} d\Omega = \{F\}_{in} - \{F\}_{\Omega} - \{F\}_b. \quad (10.34)$$

Эта матричная запись содержит $6=2 \times 3$ уравнений, для 2-х компонент сил в каждом из 3-х узлов данного элемента.

В состоянии равновесия сумма сил, приложенных к каждому узлу, нулевая, и при суммировании узловых сил неизвестные слагаемые $\{F\}_{in} - \{F\}_{\Omega} - \{F\}_b$, им отвечающие, взаимоуничтожатся, и правая часть (10.33) при сложении станет нулевой. В результате операции суммирования вкладов от содержащих данный узел элементов, проведённой для каждого из n узлов и для каждой из двух компонент перемещений, мы получим $2n$ алгебраических уравнений с $2n$ неизвестными компонентами перемещений и известными коэффициентами. Эта операция «сборки матрицы жёсткости и правой части» рассмотрена в следующем параграфе.

10.4. Общее равновесие в КЭ–модели и сборка глобальной матрицы жёсткости

Условие общего равновесия всей конечно–элементной модели сводится к условию равновесия в отдельных узлах. Оно используется так же, как было рассмотрено ранее для стержневых КЭ, и оно реализуется путём суммирования строк всех отдельных элементных уравнений (10.33) или (10.34), относящихся к данному узлу. При построении конечно–элементной сетки узлы нумеруются непрерывным образом, и перемещения всех узловых точек при формировании общей системы алгебраических уравнений располагаются по порядку нумерации в одном глобальном векторе перемещений $\{U\}$ – матрице–столбце, аналогично элементному вектору перемещений:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{Bmatrix}, \quad d_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_{2i-1} \\ u_{2i} \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10.35)$$

Размерность этой глобальной матрицы–вектора перемещений в нашем случае равна $2n$. Число $2n$ будет числом степеней свободы всей КЭ–модели. В 3–мерном случае для объёмных элементов оно составляет $3n$.

Внешние нагрузки, которые с помощью (10.28) и (10.32) сведены к узловым, в глобальной дискретной модели описываются матрицей–столбцом – глобальным вектором внешних узловых сил:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ G_n \end{Bmatrix}, \quad G_i = \begin{Bmatrix} G_{xi} \\ G_{yi} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} G_{2i-1} \\ G_{2i} \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.36)$$

Условие равновесия всей КЭ–модели – это условие нулевой полной силы в каждом из n узлов модели. Это условие даёт два набора по n уравнений, записанных в каждом i –ом узле для каждой из двух компонент узловых сил:

$$\sum_{e(i)}^{N_e(i)} (\{F\}_{in} - \{F\}_{\Omega} - \{F\}_b)^{(e(i))} = \sum_{e(i)}^{N_e(i)} \left([k]\{d\} - \int_{\partial\Omega_p} [\phi]^T \{p(x, y)\} dA - \rho \int_{\Omega} [\phi]^T \{g\} d\Omega \right)^{(e(i))} = 0 \quad (10.37)$$

или –

$$\sum_{e(i)} ([k]\{d\})^{(e(i))} = \sum_{e(i)} \left(\int_{\partial\Omega_p} [\phi]^T \{p(x, y)\} dA + \rho \int_{\Omega} [\phi]^T \{g\} d\Omega \right)^{(e(i))} \equiv \sum_{e(i)} \{G\}^{(e(i))}, \quad (10.38)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, и для данного узла i , т.е. в i -ой паре уравнений, суммирование идёт по параметру $e(i)$, т.е. по строкам элементных матричных уравнений (10.34), отвечающих элементам с номерами $e(i)$, содержащих данный узел i . Уравнения располагаются в порядке возрастания номеров узлов, для каждого узла есть два уравнения, отвечающих, соответственно, за x - и y -компоненты узловых сил. В правой части (10.38) собраны известные (вычисляемые) внешние узловые силы.

Итак, в результате суммирования вкладов коэффициентов отдельных элементных уравнений при неизвестных узловых перемещениях и суммирования приложенных в узлах внешних сил, из совокупности (10.34) получается $2n$ уравнений относительно узловых перемещений, отвечающих условию глобального равновесия:

$$[K]\{U\} = \{G\}, \quad (10.39)$$

где $[K]$ – глобальная матрица жёсткости, или просто матрица жёсткости системы, $\{G\}$ – глобальный вектор нагрузки. Данная процедура сборки матрицы жёсткости вполне аналогична подробно рассмотренной выше процедуре для двух пружин. Сборка вектора правой части (здесь – суммирование вкладов давления и объёмной силы) могла появиться и в случае пружины, если бы в узле 3 были приложены две внешние силы.

Процедура составления глобальной матрицы жёсткости и вектора нагрузки из элементных матриц и векторов в расчётном алгоритме следует уравнению (10.38), т.е., она проводится в цикле по всем элементам. В этом цикле в каждом элементе вычисляются компоненты элементной матрицы жёсткости $a_{ij}(e) \in [k(e)]$, которые суть коэффициенты при узловых переменных. Вклады в эти коэффициенты от отдельных элементов накапливаются для каждого узла: добавляются к соответствующим компонентам глобальной матрицы $[K]$. К моменту завершения цикла по элементам, суммирующего узловые вклады, глобальная матрица $[K]$ готова. В этом же цикле по элементам вычисляется глобальный вектор нагрузки $\{G\}$ – правая часть системы уравнений (10.39).

Величины коэффициентов матрицы могут зависеть от параметров механических свойств, которые переменны в случае физически нелинейного определяющего соотношения, а также от матрицы деформаций, которая зависит от координат (тип элемента, естественно, остаётся постоянным в процессе вычисления). В этих случаях, при последовательном нагружении с изменением конфигурации и свойств материала, вообще говоря, требуется перестроить матрицу жёсткости. Изменение нагрузки не требует перестройки матрицы, а только вектора нагрузки в правой части.

Построение алгоритмов дискретизации МКЭ изложено в ряде книг, см., например, [Zenkevich], [Hughes], [Smith Progr.], в которой приведены и тексты алгоритмов учебных программ.

10.4.1. Свойства матрицы жёсткости, ширина диагонали

Каждое уравнение в системе (10.39) отвечает одной из двух компонент условия равновесия определенного узла, и порядок записи уравнений, т.е. левый индекс i (номер строки) элемента k_{ij} матрицы системы номинально отвечает нумерации степеней свободы КЭ-модели. Это – компоненты узловых перемещений, расположенные в порядке

возрастания номеров узлов (ср. (10.35) и (10.36)). Для двумерных плоских элементов порядковые номера двух уравнений, отвечающих двум компонентам перемещений в n -м узле, связаны с номером узла соотношениями:

$$i=2n, \quad i+1=2n+1.$$

Правый индекс j ненулевых коэффициентов МЖ в данной строке (i -е уравнение) отвечает, аналогичным образом, значениям номеров других узлов, с которыми соседствует данный узел i через общий конечный элемент, например, с m -м узлом:

$$j=2m, \quad j+1=2m+1.$$

Это можно видеть из уравнения (10.38), выражающего условия равновесия в узле и вытекающей из него процедуры сборки матрицы. Количество ненулевых слагаемых в i -м уравнении определяется количеством узлов в конечных элементах, содержащих узел i , или взаимодействующих с ним иным образом. При достаточно большом общем количестве КЭ (1000 и более) количество КЭ, содержащих любой данный узел, которое не превышает некоторого фиксированного значения, будет очень малым, и на практике матрица жёсткости всегда сильно разрежена. В определённых случаях она может быть близкой к диагональной, но, чем больше различие между значениями номеров соседствующих узлов m и n , тем дальше друг от друга в матрице расположены соответствующие ненулевые слагаемые, и тем шире диагональ. Величина ширины диагонали играет определяющую роль для быстродействия алгоритма решения алгебраической системы, поскольку она определяет полное количество матричных элементов, с которыми производятся операции при решении системы. Для уменьшения этой ширины (bandwidth) применяют специальную процедуру перенумерации узлов, т.е. порядка расположения строк матрицы системы (bandwidth minimization), в результате которой ненулевые элементы матрицы с новыми номерами становятся ближе к диагонали.

10.4.2. Интегрирование по элементу

Элементные матрицы жёсткости (10.25) вычисляются интегрированием. У линейного 3-угольного элемента матрица $[\mathbf{B}]$ постоянна по элементу, что следует из её вида (10.17), матрица упругости (10.20) также постоянна. Пусть площадь элемента равна A , его толщина равна t , тогда элементы матрицы жёсткости элемента получаются умножением подинтегрального выражения в (10.24) на объём элемента:

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] V^{(e)} = At [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}]. \quad (10.40)$$

В случае рассмотренных ниже билинейных функций форм в 4-угольном элементе и в нелинейных задачах провести прямое интегрирование не удаётся, или оно оказывается громоздким. В этом случае применяются процедуры численного интегрирования.

Толщина t обычно берётся по умолчанию равной 1 в единицах измерения задачи. В коммерческих пакетах эта величина, которая в итоговой алгебраической системе не присутствует и влияет только на объёмные интегралы (энергии, массы и др.), иногда может быть выбрана пользователем.

10.4.3. Осесимметричная геометрия

Напомним, что в осесимметричной постановке мы не учитываем кручение. Как сказано в гл. 5, в этом случае в цилиндрической системе координат соотношения упругого закона между компонентами те же, что в декартовой системе. Треугольный конечный элемент представляет собой не призму, а кольцо с треугольным сечением. Интерполяционное соотношение (10.2), записанное для радиальных и осевых перемещений в плоскости осевого сечения, не изменится, окружные перемещения вычисляются.

Приведённая выше процедура дискретизации методом перемещений формально может быть полностью воспроизведена и для двумерного осесимметричного случая, но с двумя

особенностями, легко учитываемыми. Во-первых, хотя количество существенных геометрических координат и компонент перемещений по-прежнему равно двум, у тензоров напряжений и деформаций относительно плоского случая имеется, как отмечалось в гл. 5, ещё одна существенная, т.е., не выражаемая через остальные, *окружная* компонента: $\sigma_{\theta\theta}$ и $\varepsilon_{\theta\theta}$. Соответственно, увеличатся на единицу размеры элементных матриц деформаций, напряжений, упругости и жёсткости. Во-вторых, деформации и соответствующая матрица вычисляются по формулам осевой геометрии (см. гл. 5). В третьих, вид элемента объёма при интегрировании будет другой, для кольца.

Вид вектора деформаций следует из (5.14), вид матрицы упругости определяется ненулевыми компонентами тензоров напряжений и деформаций и законом Гука:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{u}{x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = [E]\{\varepsilon\}, \quad (10.41)$$

Здесь названия осей сохранены от плоского случая, радиальное отвечает оси Ox , добавлено направление θ вдоль окружности. Радиальное перемещение – это u , осевое – это v . Как и ранее, выражаем вектор деформаций через вектор перемещений в виде

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\}, \quad (10.42)$$

где матрица деформаций, отвечающая определению (10.41), имеет размер (4x6):

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \\ \frac{\varphi_1}{x} & 0 & \frac{\varphi_2}{x} & 0 & \frac{\varphi_3}{x} & 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (10.43)$$

Матрица упругости задана определяющим соотношением (5.15) и в случае осевой симметрии имеет вид (показать):

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (10.44)$$

Объёмное интегрирование в (10.25) проводится по кольцу с поперечным сечением, отвечающим 2D конечному элементу, обычно по полной окружности, и элемент объёма при интегрировании имеет вид $2\pi x dx dy$. Иногда можно встретить интегрирование по углу в один радиан, тогда интегралы массы и др. будут меньше в 2π раз.

Может возникнуть вопрос, почему не используется запись уравнения равновесия в цилиндрических координатах (см. гл. 5) при формулировке дискретизации МКЭ? Ответ состоит в том, что уравнение равновесия *в дифференциальной форме* вообще не используется – это уравнение фигурирует в эквивалентной *интегральной* формулировке (см. (10.23) и последующие аналогичные соотношения). В представленной ниже формулировке МКЭ через функционал упругой энергии и обобщении в методе взвешенных невязок также фигурирует, в качестве основного соотношения, интеграл работы, при вычислении которого в осесимметричном случае можно ввести локальную декартову систему и, пользуясь круговой симметрией, отнести криволинейность в пространственный элемент интегрирования. Аналогичное замечание относится к уравнению теплопроводности (см. ниже), которое есть частный случай закона сохранения энергии, записываемого при дискретизации МКЭ в эквивалентной интегральной форме.

Явный вид дифференциальных операторов в криволинейных координатах в процедурах дискретизации встречается в следующих случаях:

- в методе конечных разностей с аппроксимацией производных непосредственно через разностные соотношения – это не используется в МКЭ;
- при аппроксимации метрических соотношений, в частности, деформаций – именно это и учитывается в соотношениях (10.41), (10.43).

10.5. Граничные условия по перемещениям

10.5.1. Способы реализации

Как и ранее, построенная по-элементно матрица жёсткости системы плоских элементов будет вырожденной, и определитель матрицы полученной системы линейных алгебраических уравнений (10.39) должен обращаться в нуль, т.к. система должна иметь бесконечное множество решений. Эти решения отвечают перемещению конструкции как целого – в наших рассуждениях мы нигде не ввели на это запрет. Для исключения таких решений следует задать граничные условия для перемещений – условия *наложения связей*, или *закрепления (защемления)*. Без этого ранг матрицы жёсткости системы (10.39) должен быть равным не N , количеству степеней свободы, а $N-k$, где k – минимальное количество степеней свободы, которое надо закрепить, чтобы исключить свободное (без деформаций) перемещение под действием статической нагрузки: поступательное или вращательное. В трёхмерном случае объёмных элементов в односвязной области достаточно полностью закрепить один узел, чтобы исключить поступательное движение, и частично закрепить два других, чтобы исключить вращение. Узлы должны занимать "общее положение", т.е., не находиться на одной линии. Примеры рассмотрены ниже. Отметим, что при закреплении в точках могут возникнуть сосредоточенные силы реакции, не соответствующие реальности, и вопрос об условиях закрепления должен соотноситься с формулировкой задачи.

Граничные условия по перемещениям в статической задаче – это условия 1-го рода:

$$u(x)|_{x \in \partial\Omega_u} = u_b, \quad v(x)|_{x \in \partial\Omega_v} = v_b, \quad (10.45)$$

что в дискретной модели отвечает заданию фиксированных значений соответствующих компонент глобального вектора перемещений для некоторых степеней свободы j общим числом k : $j=j_1, \dots, j_k$:

$$u^{(j)} = a^{(j)}.$$

В статике эти условия обычно имеют характер закрепления, т.е. величины $a^{(i)}$ – нулевые. Если рассматриваются последовательные состояния равновесия с перемещаемой границей (квазистатика), $a^{(i)}$ могут изменяться от шага к шагу.

При фиксации узловых перемещений матрица жесткости и вектор нагрузки должны быть модифицированы. Учёт кинематических граничных условий желательно произвести, не меняя размерность матрицы, а модифицируя левую и правую части алгебраической системы. Из системы уравнений с модифицированной матрицей при решении её стандартным методом должны получиться для закреплённых узлов ровно те значения, что стоят в граничном условии, например, $u_1 = a(1)$ и т.д.

Возможны два способа, с помощью которых, оставаясь в рамках этих требований, можно удовлетворить граничным условиям по перемещениям. Пусть построена система линейных уравнений МКЭ:

$$\begin{aligned} k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + \dots + k_{1n}u_n &= F_1 \\ k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + \dots + k_{2n}u_n &= F_2 \\ &\dots \\ k_{n1}u_1 + k_{n2}u_2 + \dots + k_{nn}u_n &= F_n \end{aligned} \quad (10.46)$$

и из граничных условий следует, что, скажем, $u_1 = a$. Это означает, что во все уравнения можно подставить вместо u_1 значение $u_1 = a$. Фактическое число неизвестных уменьшится на 1, причём, формально количество уравнений сохранится. Образовавшуюся свободу действий используют для модификации системы уравнений. В соответствии с первым способом, уравнение, отвечающее условию равновесия для первой переменной, у которого коэффициент на диагонали матрицы ненулевой, заменяется уравнением $u_1 = a$. Аналогично, в случае граничного условия для k -й переменной, то же делается для k -го уравнения: $u_k = a$. Подставим значение $u_1 = a$ в остальные уравнения и перенесём известные величины в правую часть. Вектор правой части примет вид:

$$F_i \rightarrow F_i - k_{i1}a \quad (i = 2, n), \quad F_1 = a.$$

С точки зрения механики, замена уравнения для k -го узла, полученного как условие равновесия в k -м узле, фактическим равновесием в этом узле: $u_k = a$, представляется очевидной. С точки зрения линейной алгебры операция явного задания одной степени свободы может увеличить ранг матрицы вырожденной системы на 1. Получаемая система уравнений:

$$\begin{aligned} 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n &= a \\ 0 \cdot u_1 + k_{22}u_2 + \dots + k_{2n}u_n &= F_2 - k_{21}a \\ &\dots \\ 0 \cdot u_1 + k_{n2}u_2 + \dots + k_{nn}u_n &= F_n - k_{n1}a. \end{aligned} \quad (10.47)$$

В частном, но частом случае, когда $a = 0$ (неподвижная граница), преобразуется матрица системы, вектор же нагрузки, очевидно, неизменен во всех уравнениях, кроме первого (k -го). Получаемая матрица системы, очевидно, остаётся симметричной. Нетрудно видеть, что система (10.47) представляет собой общую форму уравнения (9.16), полученного для системы с тремя степенями свободы.

Второй способ учёта граничных условий по перемещениям состоит в том, чтобы просто ввести сильное диагональное преобладание в уравнениях, отвечающих равновесию закреплённых узлов. В правой части соответствующий коэффициент нагрузки, а в левой части – соответствующий диагональный элемент матрицы умножаются на некоторое большое число, скажем, 10^{20} . В рассматриваемом случае мы получили бы новые коэффициенты:

$$k'_{11} = k_{11} \cdot 10^{20} \quad , \quad F'_1 = k_{11} \cdot 10^{20} \cdot a;$$

$$k'_{ij} = k_{ij} \quad (\text{кроме случая } i = 1, j=1), \quad F'_i = F_i \quad (i \neq 1).$$

Если затем поделить всё уравнение, в которое входит величина с множителем 10^{20} , на этот множитель, то все остальные коэффициенты уменьшатся в 10^{20} раз и станет видно, что данный способ фактически соответствует первому. В полученном решении u_i будет с высокой точностью равно a . Этот способ проще в реализации, но он менее точен, т.к., вообще говоря, приводит к погрешностям округления и вносит искажения в решение.

10.5.2. Примеры задания условий закрепления

При задании граничных условий по перемещениям (способов закрепления) важно ставить ровно те ограничения, которые есть в задаче. Избыточные закрепления могут исказить решение, т.е. будет получено решение другой задачи. При недостаточном закреплении матрица системы останется сингулярной. В итерационных вычислительных процедурах решения линейных алгебраических систем часто принимаются специальные меры для улучшения сходимости итераций, и даже при плохих граничных условиях решение системы (неправильное) может быть получено, хотя при этом вероятны большие отклонения в ходе вычислений. Например, плохая сходимость итераций может быть признаком ошибки в задании граничных условий по перемещениям.

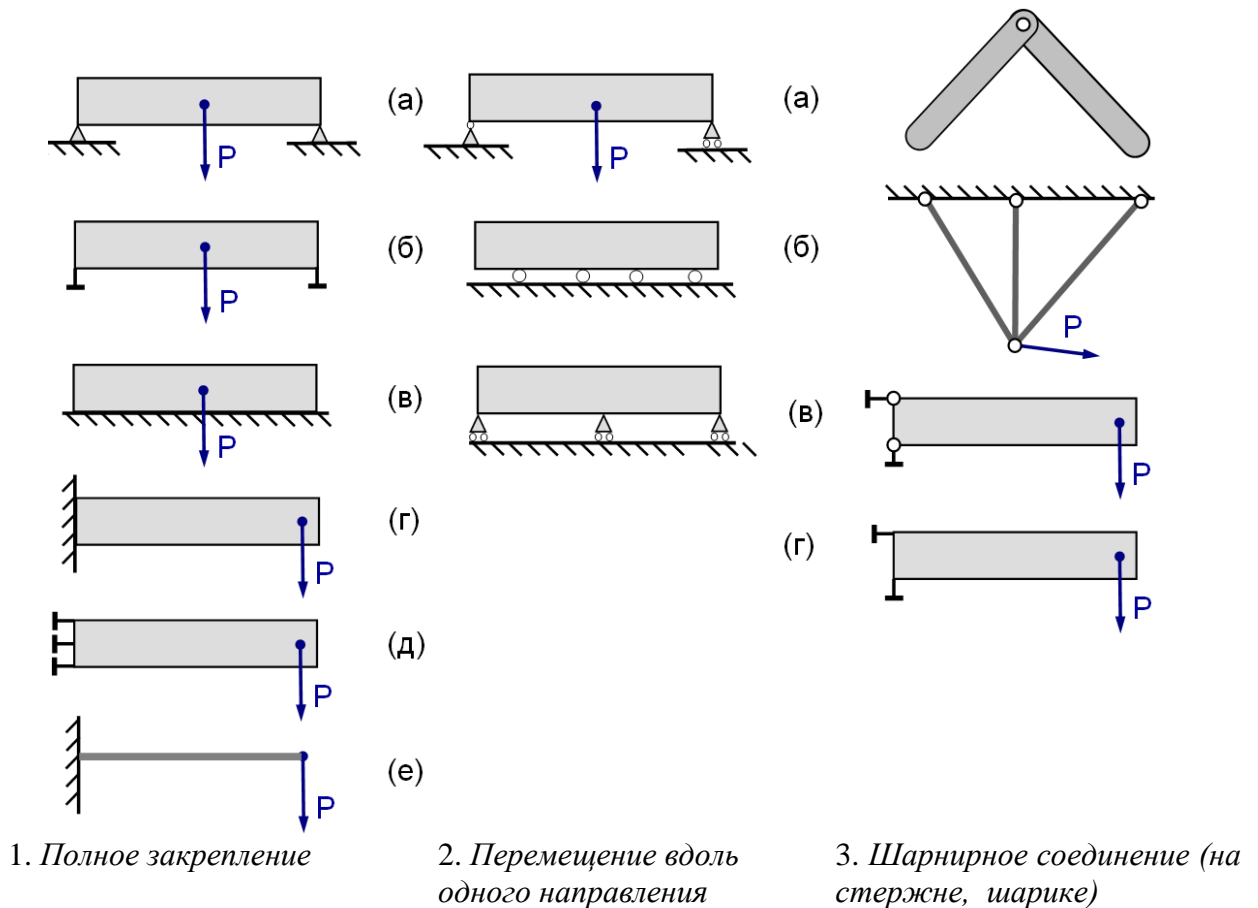


Рис.10.3. Обозначения способов закрепления

При постановке задачи и построении области часто можно использовать наличие симметрии конфигурации – по форме и приложенной нагрузке, что существенно уменьшает объём вычислений. На оси или плоскости симметрии при этом должны задаваться соответственные условия на перемещения.

В технике существует большое количество способов сочленения узлов конструкций, по различным кинематическим схемам, отвечающим всевозможным ограничениям движения. Они каталогизированы, в частности, в ЕСКД и их обозначения могут быть найдены в справочной литературе, например, в [Общетех]. В литературе по МДТТ и в руководствах пользователя расчётных кодов обычно применяются гораздо более простые обозначения, причём они несколько различаются в разных источниках для одинаковых случаев. Обозначения способов закрепления, встречающиеся в учебной и др. литературе по решению задач МДТТ, частично собраны на рис. 10.3 в виде примеров. Общим у них является следующее: для указания неподвижности любого звена часть его контура покрывают штриховкой, шарнирное соединение обозначают маленьким кружком, стержни – сплошной толстой линией. напомним, что в МКЭ соединение в одном узле нескольких стержней отвечает их шарнирному соединению.

Прокомментируем простейшие ситуации, изображённые на рис. 10.3. Случаи 1а и 1б эквивалентны. Наличие точечного закрепления (нет перемещения, возможно вращение) на конце малого треугольника не всегда обозначается кружком, но этот маленький кружок показывает отсутствие размыкания точечного или прямолинейного контакта. Случаи 1г, 1д и 1е также аналогичны – это жёсткое закрепление торца (но в случаях 1г, 1д не видно, что изображённая там консоль – это тонкий стержень). Случаи 3в и 3г эквивалентны, но не тождественны случаям 1г, 1д в случае толстого стержня. Далее, случаи 2б и 2в обозначают одно и то же, но не совпадают со случаем 2а, где одно закрепление – шарнирное. Ситуация в случае 1в не тождественна ситуации, обозначенной схемами 1а и 1б, причём, 1в может также означать не жёсткое закрепление, а возможность скольжения с *трением*. Возможность размыкания контакта может не обозначаться, но подразумеваться в условиях. При ознакомлении с кинематической схемой следует также внимательно ознакомиться с условиями задачи.

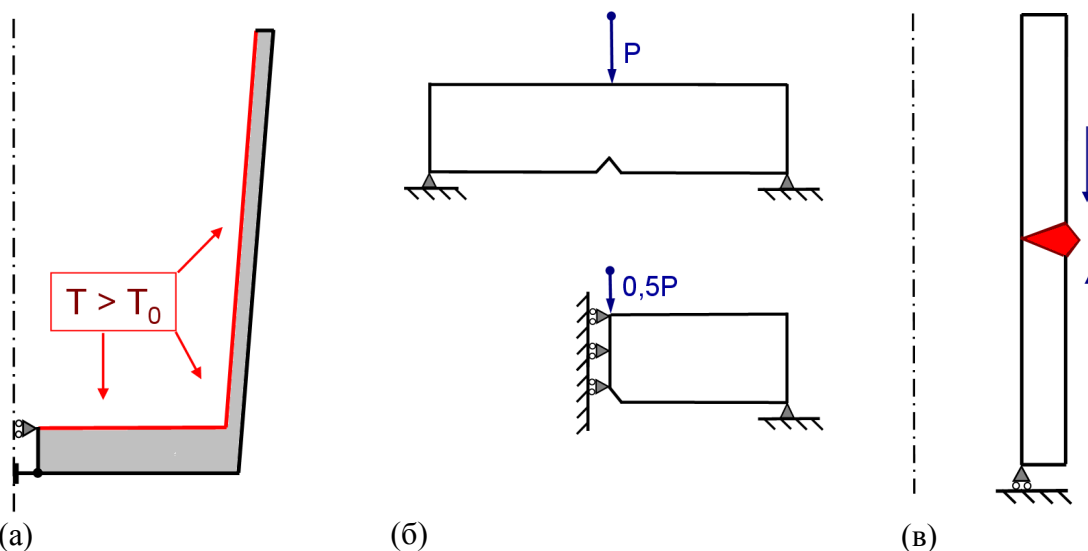


Рис.10.4. Примеры постановки граничных условий :

- а) осесимметричная задача о тепловом расширении при нагреве стакана изнутри;
- б) раскрытие трещины в двухконсольной балке (образец на трёхточечный изгиб) – полная и половинная симметричная постановки плоской задачи;
- в) к определению остаточных напряжений при стыковой сварке труб в предположении одновременного наложения шва по всей окружности.

Рассмотрим другие примеры задания граничных условий (рис. 10.4):

- (а) Задача о внезапном (однородном по границе) нагреве изнутри сосуда вращения: осевая симметрия вдоль направления Oy – полное закрепление в одной точке на оси

симметрии и условие $u(x)|_{x=0}=0$ в остальных точках оси. Тепловое расширение изнутри приводит к радиальной и осевой деформации во всей области, точки на оси перемещаются только по вертикали, в одной точке задана фиксация стакана как целого;

- (б) Задача о 3–точечном изгибе. Плоская конфигурация, симметричная также относительно вертикальной центральной плоскости P , перпендикулярной оси Ox , здесь $u(x)|_{x \in P}=0$. В двух точках заданы точечные (шарнирные) закрепления, фиксирующие образец как целое. В отдалении от выемки напряжённое состояние относительно однородно (принцип Сен-Венана) и не оказывает влияния на концентрацию напряжений в вершине угла, которая служит предметом исследования. Точечное закрепление на нижней границе в действительности означает закрепление вдоль прямой линии, перпендикулярной плоскости рисунка, и в 2D расчёте надо указать ещё постановку задачи – здесь по характеру испытания более правдоподобны плоские напряжения. Аналогичное замечание относится к условию симметрии;
- (в) Одновременное наложение кольцевого сварного шва по всей окружности при стыковой сварке труб (нагрев и остывание металла в пределах разделки кромок стыка труб) – осесимметричная постановка задачи об определении остаточных напряжений после остывания трубы, с учётом упруго-пластического НДС. Стрелки показывают направление общей деформации (усадки) после остывания. Закрепление по радиусу обеспечено осевой симметрией, и здесь достаточно дозакрепить трубу как целое по осевому перемещению в одной точке $v(x, y)|_{x=a, y=y_0}=0$. Труба должна браться достаточно длинной, чтобы была смоделирована общая изгибная деформация в окрестности сварного шва. В случае несвободных дальних концов труб следует учесть фактические ограничения на перемещения.

Другие примеры постановки граничных условий можно найти в существующей многочисленной литературе и пособиях (см., например [ANSYS book], [ANSYS Басов], [ANSYS в руках], [Беляев]).

10.5.3. Замечание о задании условий закрепления в задачах термомеханики

Как отмечалось в гл. 5 при обсуждении задачи термоупругости, термонапряжения можно интерпретировать как некое тепловое давление, что имеет вполне ясный физический смысл. Давление является внутренней силой, действующей в данной точке одинаково во все стороны. Если при моделировании термонапряжённого состояния расчётная область отвечает всей конструкции, то и граничные условия можно ввести в полном соответствии с постановкой задачи. Если приходится ограничиться частью конструкции, условия на границах взаимодействия рассматриваемой подконструкции с остальной частью должны ставиться так, чтобы не вносить возмущений в кинематику перемещений. В задачах термомеханики тут возможны проблемы, связанные с пространственной неоднородностью распределения "теплового давления", связанного с неоднородностью температуры или свойств материала.

Для примера рассмотрим задачу о длинной толстостенной трубе, нагреваемой изнутри, т.е. с отрицательным температурным градиентом. Толстостенность означает, что требуется учитывать распределение напряжений по толщине трубы. Если труба длинная (например, оболочка твэла длиной около 4 м, диаметром около 0,01 м), то естественно рассматривать её короткий участок, длина которого определяется масштабом неоднородности температуры вдоль оболочки. Пусть азимутальная неоднородность температуры незначительна. На рис. 10.5 приведены результаты расчётов (HEFEST+HEFEST_M) термонапряжений в упругой трубе различной длины при различных граничных условиях закрепления (по вертикальным перемещениям). Внутренний диаметр трубы 10 см, толщина – 1 см. на всех рисунках толщина трубы одинакова, масштаб изображения в случае короткой трубы более подробный.

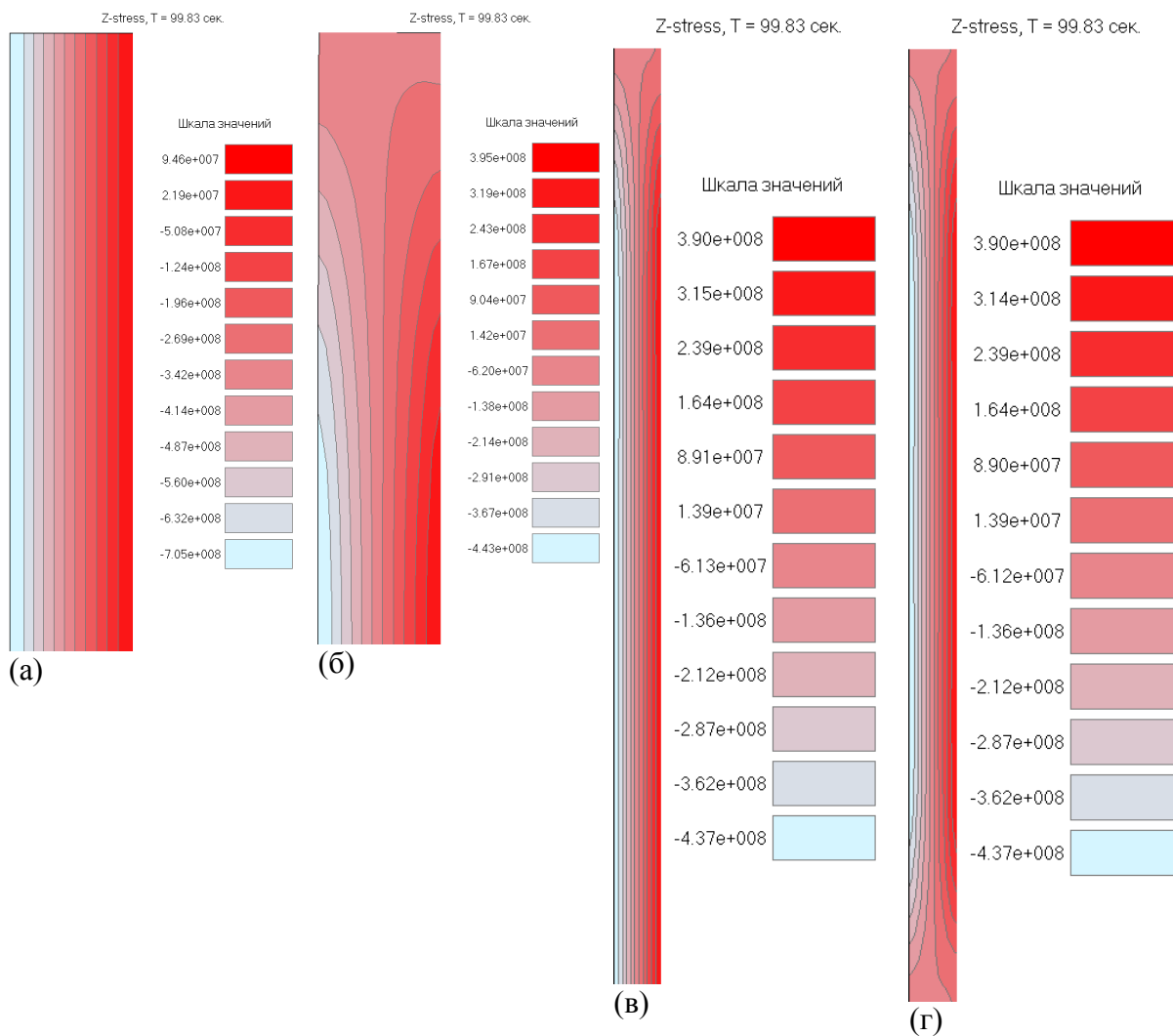


Рис.10.5. Термонапряжения в участке трубы, нагреваемой изнутри, при различных граничных условиях:

- а) закрепление сверху и снизу, длина 5 см;
- б) закрепление только снизу, длина 5 см;
- в) случай б), длинная труба.
- г) случай в), закрепление вдоль горизонтальной центральной линии;

Неоднородность в окрестности незакрепленного конца связана с неоднородным тепловым расширением вдоль осевого направления в этом месте. Можно видеть, что максимальные и минимальные значения, отвечающие напряжениям в области однородности, на удалении от незакрепленного конца, близки на рис. б)-г). В случае а) накладываются напряжения общего сжатия, связанного с введённым концевым закреплением. Случай закрепления обоих концов трубы рассчитывается независимо от длины взятого участка при условии однородности температуры вдоль длины.

В случае свободных концов возникает вопрос – какой из приведённых вариантов более корректный, если мы не хотим моделировать всё трубу? Для ответа заметим, что закрепление или стеснение материала при неоднородной внутренней силе связано не только с внешними границами, но и, очевидно, с самим материалом: менее нагретые участки деформируются меньше, чем более нагретые, тем самым стесняя их расширение. Вследствие этого по толщине трубы возникают области со сжимающими (отрицательными) и растягивающими (положительными) напряжениями.

В случае плоского листа его неравномерный по толщине нагрев приведёт к короблению, т.е. изгибу. В случае трубы это невозможно при наличии осевой симметрии нагрузки и конфигурации. Возникают термонапряжения, которые на незакреплённой границе нулевые, а в глубине конечны. Следовательно, коробление в случае свободных концов возможно только на краях трубы, где материалу есть куда расширяться вдоль оси. В случае очень длинной трубы эффект краёв будет почти нулевой, и почти везде осевая деформация будет однородной по толщине и равной средней тепловой деформации, определяемой по среднему осевому напряжению, рассчитанному для случая закреплённых концов.

Сказанное позволяет в случае нагрева длинной незакреплённой трубы внутренним осесимметричным источником ставить задачу так:

- аккуратно задать распределение начальной температуры;
- рассчитать температурное поле, которое подаётся в (несвязанный) расчёт термомеханики;
- в упругом случае – поставить условия закрепления вдоль оси на верхней и нижней кромках, как в случае (а), и при анализе результатов учесть продольное удлинение, создающее продольную деформацию, когда концы по факту не закреплены.

Если условия задачи позволяют работать с достаточно длинной трубой, то можно ограничиться закреплением, указанным на рис. 10.4в. Область краевых эффектов при этом можно не принимать во внимание при анализе результатов (принцип Сен-Венана). Представление о протяжённости области концевой неоднородности дают приведённые графики. Если решаемая задача нелинейна (пластичность), то такого рода расчёт с незакреплённым концом (случай б)) и достаточно длинной трубой будет более корректным.

11. Общие формулировки МКЭ

В построенной выше конечно–элементной модели можно учесть все существенные особенности постановки исходной статической задачи МДТТ (4.1), в том числе, физическую нелинейность. Существующий "дуализм" численного описания – введение, наряду с узловыми перемещениями и интерполяцией по КЭ, также дискретных узловых сил, необходим для формулировки условия равновесия системы в терминах узловых величин. Линейные по координатам функции формы дают непрерывную аппроксимацию перемещений, но не позволяют обеспечить непрерывность аппроксимации тензора деформаций и внутренних сил на границах КЭ. Но равновесие сил в узлах формулируется в полной аналогии со стержневыми системами. В рассмотренном методе перемещений связь непрерывной аппроксимации сил (10.21) с дискретной моделью узловых сил осуществляется на основании условия (10.23) равенства малых работ введённых узловых сил и "реально существующих" распределённых сил в элементах на виртуальном перемещении. Это, а также условие совместности узловых перемещений, определённых в разных элементах, позволяет сформулировать условие общего равновесия в терминах узловых величин. При этом узловые внутренние силы не входят в конечную систему уравнений, соотношение между ними заменяется построенными аппроксимирующими выражениями в конечных элементах. Построенная схема дискретизации последовательна, но мы существенно использовали механический смысл решаемого уравнения равновесия.

Далее мы будем двигаться в сторону большей универсализации подхода МКЭ, с целью его применения к другим уравнениям. Физическая/механическая интерпретация возможна, но не необходима для построения процедуры. Первый путь обобщений с математической переформулировкой задачи – рассмотрен пример построения схемы МКЭ для МДТТ, исходя из вариационного принципа минимума потенциальной энергии, и механика доставляет удобный для понимания пример.

Ранее говорилось, что задачу равновесия упругого тела можно сформулировать как задачу минимизации его упругой потенциальной энергии. Эта энергия суть функционал от перемещений, который в дискретной модели среды может быть сведён к функции многих переменных – узловых перемещений. Далее можно использовать аналог того, что принималось выше для установления эквивалентности распределённых внутренних сил и узловых – говорится, что условие экстремума *функционала* энергии исходной системы эквивалентно условию экстремума *функции* узловых величин дискретной системы. Это основная идея известного *метода Рунца* решения задачи минимизации [Стренг Фикс] и одно из проявлений упомянутого выше "дискретно-непрерывного дуализма" численного описания, происходящего из "проеекционно-сеточного" подхода.

Из условия экстремума функции (нулевые частные производные) могут быть получены уравнения для перемещений в конечном множестве узловых точек, ровно те же, что уравнения равновесия в узлах по методу перемещений. Процедура дискретизации МКЭ, основанная на минимизации потенциальной энергии всей системы, формулируется на всей расчётной области. Минимум потенциальной энергии является базовым физическим принципом, и метод перемещений в сравнении с методом минимизации функционала энергии служат примерами "силового" и "энергетического" подходов к решению задач МДТТ, которые можно проследить в разных её разделах. Однако механическая энергия деформирования не сохраняется при пластичности, и формулировки на основе вариационного принципа – не самые общие. Дальнейшие продвижения МКЭ в этом направлении основаны на распространении условия экстремума функционала энергии (работы) непосредственно на конечно-мерную аппроксимацию решения. При этом вместо вариационного принципа используется некоторое более общее условие. Это составляет

содержание т.н. метода взвешенных невязок, являющегося одной из наиболее общих формулировок для построения метода численного решения.

Перед тем как излагать способы аппроксимации решения задачи "в целом", на всей области задания, следует обобщить понятие интерполирующих функций, которые также должны быть формально определены на всей области. Они строятся из функций форм. В качестве дальнейших примеров рассмотрим функции формы на четырёхугольниках и гексаэдрах.

11.1. Полилинейные функции формы

При использовании элементных функций форм часто удобно ввести внутренние координаты в каждом элементе и через них строить интерполяцию внутри КЭ. При формулировке же условия полного равновесия, суммировании и т.п. нужны глобальные координаты. Для рассмотренных выше 3-угольных элементов введение локальных координат было необязательным, но часто интерполяционные выражения через глобальные координаты приводят к громоздким выкладкам. Тогда проще иметь дело с локальными координатами, применяя при сборке матрицы жёсткости соответствующие функции преобразования (точнее, их производные), аналогично процедуре для стержневых элементов.

Для интерполяции в плоских 4-угольных и объёмных 6-гранных элементах 1-го порядка точности часто используются т.н. билинейные и трилинейные функции формы, устроенные одинаково в 2-мерном и 3-мерном случаях. Для начала приведём их аналог для 1-мерного случая 2-узлового элемента-стержня. Пусть непрерывная функция $U(x)$ задана на некотором отрезке $[a,b]$. Выражение для линейной интерполяции значения $U(x)$ в некоторой точке $a \leq x \leq b$ через значения в точках $x = a$ и $x = b$ записывают во "взвешенной" форме как

$$U(x) = \xi U(a) + (1-\xi)U(b) \quad (11.1)$$

Параметр ξ можно рассматривать как локальную координату точки отрезка, изменяющуюся вдоль отрезка на интервале $[0,1]$. Функция $x: \xi \rightarrow x(\xi)$ задаёт преобразование координат от локальных на отрезке $[0,1]$ к глобальным $[a,b]$. Для функции координат точки $U(x)=x$ интерполяционное выражение (11.1) будет точным. Положив область изменения $\xi \in [-1,1]$, значение функции $U(x)$ в точке $a \leq x \leq b$ можно представить в более симметричном виде

$$U(x(\xi)) = 1/2 (1-\xi) U(a) + 1/2 (1+\xi) U(b) . \quad (11.2)$$

Связь локальной координаты ξ , заданной на отрезке $[-1, 1]$, с глобальной координатой x даётся тем же соотношением

$$x = 1/2 (1-\xi)a + 1/2 (1+\xi)b . \quad (11.3)$$

Введём на отрезке $[-1,1]$ по определению две линейные функции формы :

$$\varphi_1(\xi) = 0,5(1-\xi) , \quad \varphi_2(\xi) = 0,5(1+\xi), \quad (11.4)$$

принимающие значения от 0 до 1 включительно. С ними соотношение (11.2) примет вид общей аппроксимации МКЭ (10.2):

$$U(x(\xi)) = U^*(\xi) = U(a) \varphi_1(\xi) + U(b) \varphi_2(\xi) .$$

Легко видеть, что сумма базисных функций $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ равна 1: свойство нормировки. Мы также можем сказать, что отрезок $[a,b]$ исходной области задания функции $U(x)$ непрерывно отображается на отрезок $[-1, 1]$ области задания функции $U^*(\xi)$.

11.1.1. Четырёхугольный 4–узловой элемент

Аналогично одномерному случаю, интерполирующие выражения могут быть получены для 4–угольного элемента на плоскости как результат некоторого отображения его на 2×2 квадрат вида, как на рис.11.1. Граница и внутренние точки произвольного выпуклого четырёхугольника преобразуются в точки квадрата: $(x,y) \rightarrow (\xi,\eta)$. При этом ставится требование того, чтобы, аналогично (11.3), глобальные координаты точек 4–угольника при отображении выражались через его глобальные узловые координаты по общей форме интерполяции МКЭ (10.2) :

$$x = x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(\xi, \eta) y_i. \quad (11.5)$$

Величины $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ служат *локальными координатами* точек в 4–угольном элементе, и (11.5) можно трактовать как запись обратного отображения $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$.

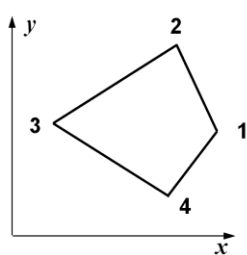


Рис.11.1. 4-угольный конечный элемент.

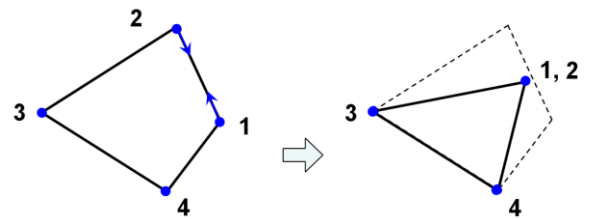
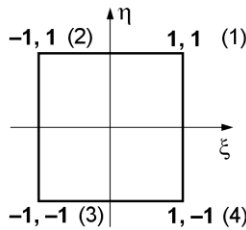


Рис.11.2. Вырожденный 4-угольный КЭ

Вид функций форм $\varphi_i(\xi, \eta)$ может быть разным. Т.к. значение во внутренней точке КЭ интерполируется по значениям не в 3–х, а в 4–х узловых точках, требование (11.5) несовместимо с требованием линейности по обеим координатам. Один из простых вариантов для 4–угольного элемента это т.н. "билинейные" функции формы (bilinear shape functions, см. [МитчелУэйт], [Hughes] и др.):

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi, \eta) &= 1/4(1 - \xi)(1 - \eta), & \varphi_2(\xi, \eta) &= 1/4(1 + \xi)(1 - \eta), \\ \varphi_3(\xi, \eta) &= 1/4(1 + \xi)(1 + \eta), & \varphi_4(\xi, \eta) &= 1/4(1 - \xi)(1 + \eta), \end{aligned} \quad -1 \leq \xi, \eta \leq 1. \quad (11.6)$$

Постулировав, что для глобальных координат точки соотношение (11.5) выполняется тождественно, можно получить непосредственно алгебраическое выражение для преобразования координат от локальных к глобальным. Например, нетрудно убедиться в том, что функции (11.6) при подстановке в (11.5) дают соответствие координатных линий локальных координат, т.е. линий $\xi=\text{const}$, $\eta=\text{const}$, прямым линиям в исходном 4–угольнике, соединяющим точки его противоположных сторон (т.е. – тоже координатным линиям). Это проверяется подстановкой: раскрывая после подстановки скобки и приводя подобные члены, (11.6) можно представить в виде

$$x = x(\xi, \eta) = X_0 + X_1\xi + X_2\eta + X_3\xi\eta, \quad y = y(\xi, \eta) = Y_0 + Y_1\xi + Y_2\eta + Y_3\xi\eta, \quad (11.5a)$$

где X_i , Y_i – суммы определённых узловых координат. Фиксируем одну из локальных координат, пусть $\xi = \xi_0 = \text{const}$. Тогда x и y будут линейными функциями координаты η , исключая которую, получим линейную взаимосвязь глобальных координат x и y , т.е., прямую линию, которая задана параметрическими зависимостями (11.6): $x = x(\xi_0, \eta)$, $y = y(\xi_0, \eta)$ от η при постоянном $\xi = \xi_0$. При $\xi_0 = 0$ отрезок прямой $x = x(0, \eta)$, $y = y(0, \eta)$, $-1 \leq \eta \leq 1$ соединяет в 4–угольном элементе середины противоположных сторон.

Отметим, что при обращении преобразования (11.5), т.е. при нахождении локальных координат через глобальные, для нахождения коэффициентов обратного преобразования в каждом элементе приходится решать квадратное уравнение, а в 3–мерном случае аналогичное уравнение будет кубическим.

Для интерполяции функций на КЭ часто (но не всегда) используется *изопараметрическая аппроксимация*, упомянутая ранее: в любой точке 4–узлового конечного элемента значение функции $U(x,y)$ находится через четыре узловые значения с помощью того же интерполяционного выражения (11.5) по четырём функциям формы элемента, что и глобальные координаты точки:

$$U(x, y) = \bar{U}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(\xi, \eta) U_i . \quad (11.7)$$

Совместность значений, вычисленных на границе элементов (непрерывность аппроксимации), проверяется непосредственно. Так же проверяется, что частные производные по локальным координатам, которые будут зависеть от всех четырёх узловых значений в каждом из элементов, по-прежнему будут разрывны на их границе.

Отметим, что в (11.5) присутствуют произведения координат, и как преобразование оно нелинейно, *произвольная* прямая в координатах (ξ, η) , например, диагональ $\xi=\eta$, может переходить в непрямоую линию в глобальных координатах, и наоборот. Это видно, хотя бы, из того, что в произвольном 4–угольнике точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, не всегда лежит на диагоналях, в то время как в локальных координатах (ξ, η) соответствующая точка $(\xi=0, \eta=0)$ совпадает с точкой пересечения диагоналей квадрата, отвечающего в локальных координатах этому 4–угольнику. Но значения вдоль линий $\xi=const$ или $\eta=const$ в локальных координатах будут переходить в значения вдоль прямых в глобальных координатах, и линейная функция локальной координаты будет линейной функцией вдоль соответствующей прямой линии в конечном элементе.

В 3–мерном случае 8–узловые 6–гранные изопараметрические трилинейные (trilinear) элементы строятся аналогично – как отображение гексаэдра на куб размером $2 \times 2 \times 2$. Функции формы имеют в локальных координатах вид –

$$\varphi(\xi, \eta, \theta) = 1/8(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)(1 \pm \theta) , \quad -1 \leq \xi, \eta, \theta \leq 1. \quad (11.8)$$

Упражнение. Найти сумму билинейных функций формы в 8–узловом элементе.

Стягиванием одной из сторон (рёбер) элемента в точку можно получить треугольные (которые остаются 4–узловыми) элементы в 2–мерном случае (рис.11.2) и, соответственно, призматические и тетраэдральные элементы – в 3–мерном случае (которые остаются 8–узловыми). Количество узлов не меняется, но часть из них совмещена друг с другом в пространстве. Такой приём используется для единообразия расчётной схемы (однотипные элементы), хотя точность аппроксимации при этом ухудшается. Аналоги полилинейных функций для треугольников и тетраэдров приведены, например, в [ANSYS в руках].

Описанный конечный элемент является простейшим примером т.н. серендиповых элементов ("аккуратных", "красивых" - см. [Зенкевич] и Интернет), узлы которых расположены преимущественно на сторонах (для 1–го и 2–го порядка – только на сторонах). Дальнейшую информацию о построении функций форм КЭ разного типа можно найти в [Hughes], [Стренг Фикс], [ANSYS в руках] и др. учебниках и монографиях.

11.2. Конечные элементы для решения задач МСС

Основные типы элементов, обычно используемые в задачах механики сплошной среды, приведены на рис.11.3–4. Геометрически они сводятся к рассмотренным ранее

треугольникам, четырёхугольникам, тетраэдрам, призмам, гексаэдрам и элементам поверхности, топологически эквивалентным треугольникам и четырёхугольникам. В литературе могут встретиться другие геометрические типы элементов, но перечисленные есть в любом коммерческом "структурном коде". Общая классификация элементов для задач механики может быть следующей:

- "Полноразмерные" – моделирующие 3–мерный объём тем или иным способом (например, в 2–мерном плоском или осесимметричном приближении);
- "Неполноразмерные" – моделирующие многомерные тела, один или более размеров которых малы – оболочка и балка, работающие на изгиб, стержень, работающий на сжатие–растяжение, пружина или элемент сети, которые как отдельный элемент нульмерны. Для построения КЭ, моделирующих балки и оболочки, используются соответствующие механические теории – теория оболочек и теория изгиба. Для неполноразмерных КЭ, работающих на изгиб, применяется интерполяция порядка выше второго по причинам, которые будут ясны в гл. 14, где рассмотрен изгибный элемент;

Дальнейшая классификация конечных элементов возможна –

- по форме:
 - 1–мерные – пружины, стержни (растяжение вдоль), балки (изгиб и растяжение);
 - 2–мерные – 3– и 4–угольные;
 - 3–мерные – сплошные – тетраэдры, 3–угольные призмы, 6–гранники;
 - 3–мерные;
- по порядку аппроксимирующих полиномов :
 - линейные;
 - квадратичные;
 - кубические и более;
- по физике моделируемых процессов :
 - только механика деформируемого тела, либо только теплопроводность и т.п.;
 - "мультифизика" – учёт механики и температуры, электромагнитных полей и др. в рамках одного геометрического КЭ-разбиения расчётной области.

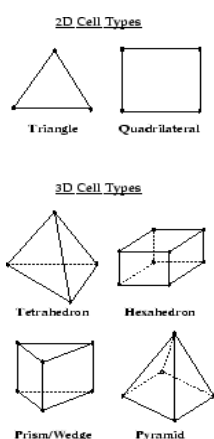


Рис.11.3. Полноразмерные КЭ первого порядка

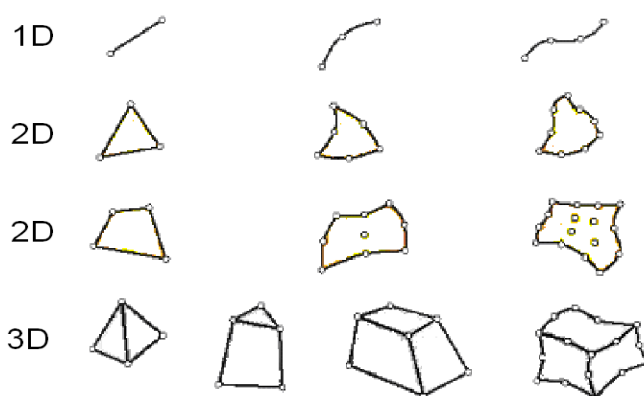


Рис.11.4. КЭ 1-3 порядков для МДТТ, включая неполноразмерные – стержни, балки, оболочки

Для того чтобы задать квадратичную аппроксимацию в элементе, недостаточно вершинных узлов, и элементы 2–го порядка имеют дополнительные узлы, расположенные вне вершин. Перемещение смежных точек таких КЭ не обязано быть линейной функцией расстояния вдоль границы, граница соседствующих, например, плоских элементов будет кривой 2–го порядка, т.е. криволинейна, и необходимо обеспечить их совместность. В лагранжевом описании элементы с дополнительными узлами это более сложные фигуры.

Выбор аппроксимирующей функции (обычно это полиномы, иногда – тригонометрические функции) определяется рядом обстоятельств, связанных с общей аппроксимацией решения и характером матрицы алгебраической системы. Например, в упруго-пластических расчётах требуется избежать т.н. эффекта запираания – пониженной деформируемости элемента искусственного происхождения – это может достигаться введением дополнительных узлов, в которых могут дополнительно определяться не перемещения, а напряжения. Для этого могут использоваться также разные типы интерполирующих функций, дополнительные узлы которых могут находиться на рёбрах, на гранях или в объёмах. В механике жидкости возникают аналогичные проблемы, связанные с несжимаемостью. Упомянутое выше свойство изопараметричности, когда в элементе аппроксимация координат и определяемых величин одинакова, может отсутствовать в "мультифизических" элементах. Всё это определило большое количество разнообразных видов КЭ в рамках ограниченного количества их геометрических конфигураций, приведённых на рис. 11.3 и 11.4. При выборе типа КЭ из семейства предлагаемых, например, в меню коммерческого кода, следует ознакомиться с его свойствами.

11.3. Пирамидальные базисные функции

Функции формы, заданные на совокупности элементов КЭ–модели, могут быть сгруппированы вокруг узлов для формирования *базисных функций* (global shape functions [Hughes]), отвечающих узлам конечно-элементного разбиения, которые определяются уже на всей области. С их помощью КЭ–методика математически формулируется в компактной и весьма общей форме. Для начала опять рассмотрим 1–мерный случай.

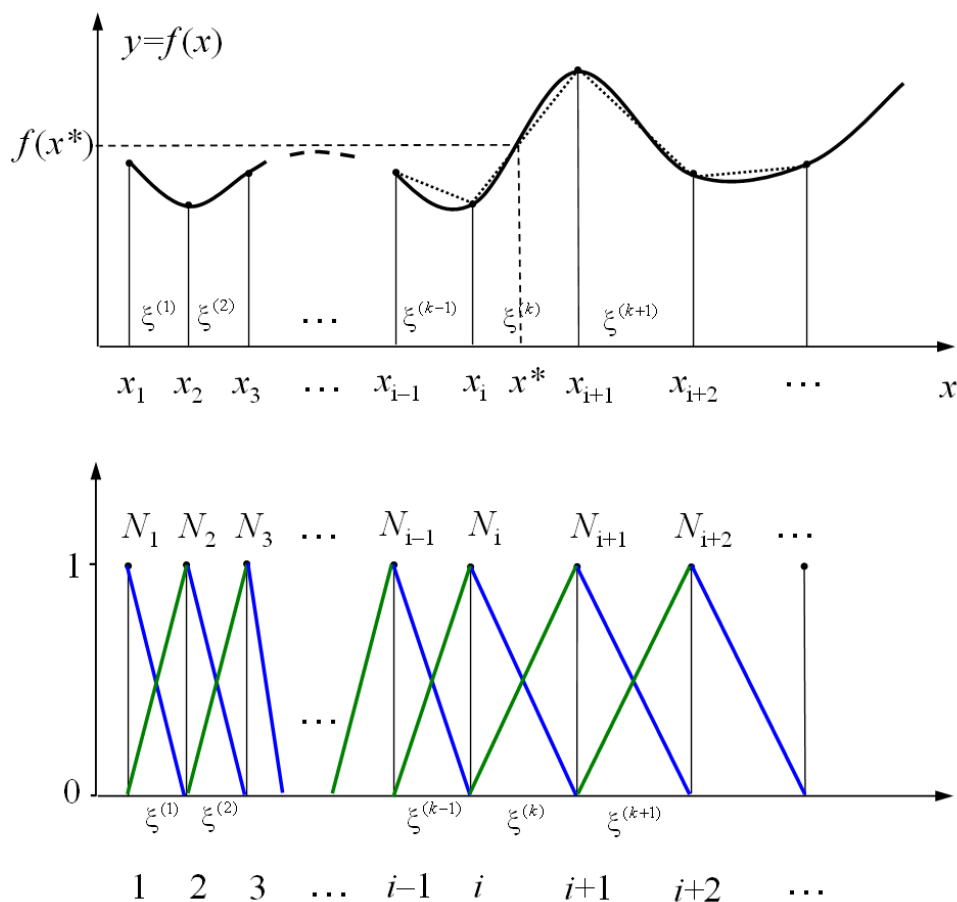


Рис.11.5. Линейная аппроксимация на отрезках – линейных КЭ, и базисные

функции, составленные из "однолинейных" функций форм (11.4)

Пусть область задания Ω_U функции $U(x)$ (отрезок) разбита на n отрезков (одномерных конечных элементов), $1 \leq k \leq n$, на каждом из которых задана своя локальная координата $\xi^{(k)}$, изменяющаяся от -1 до 1 при возрастании x . В окрестности каждого внутреннего узла с номером $i = k+1$, $1 < i < n+1$, можно ввести базисную функцию $N_i(x)$ как комбинацию рассмотренных выше линейных функций форм на отрезках:

$$N_i(x) = 1/2 (1 + \xi^{(k)}) = \varphi_2(\xi^{(k)}), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}. \quad (11.9)$$

$$N_i(x) = 1/2 (1 - \xi^{(k+1)}) = \varphi_1(\xi^{(k+1)}), \quad x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2}$$

Она имеет вид треугольника (рис.11.5). Точка стыка x_{i+1} отрезков "k" и "k+1" принадлежит им обоим, и функция $N_{i+1}(x)$ непрерывна в этой точке. В граничных элементах базисная функция совпадает с одной из двух функций форм. В остальной области эта функция равна нулю. Базисные функции (11.9) образуют *линейный базис* приближений $U^*(x)$ на всей области Ω_U , аппроксимирующих функции на Ω_U внутри элементов данного конечно-элементного разбиения прямой линией. А именно, такая кусочно-линейная аппроксимация любой функции $U(x)$ может быть представлена как линейная комбинация базисных функций. В этом смысле семейство базисных функций $\{N_j(x)\}$ обладает *полнотой*. Постулировав изопараметричность КЭ, это свойство "базисности", т.е. полноты линейной системы аппроксимирующих функций, приписывается и базисным функциям, скомпонованным из функций формы на КЭ высших размерностей. Свойство полноты относительной заданных требований к аппроксимации позволяет ограничиться конечным, вполне определённым количеством алгебраических уравнений в общей процедуре дискретизации.

В случае интерполяции системой полиномов степени n свойство полноты системы можно определить как требование точного отображения любого полинома n -й степени. (Это определяет степень гладкости аппроксимации – см. [Стренг Фикс]). В рассмотренных выше треугольных элементах это очевидно. В случае полилинейных функций формы интерполяция имеет первый порядок точности в следующем смысле: линейная функция вдоль "координатных направлений" в конечном элементе точно отображается интерполирующим выражением (11.5) с функциями вида (11.6).

Ещё одно очень важное свойство, которым обладают все "хорошие" базисные функции, состоит в их ортогональности – равенство нулю попарных произведений несовпадающих элементов базиса. Определив обычным образом произведение базисных функций семейства $\{N_j(x)\}$ как интеграл от их произведения, легко увидеть, что полученный базис, хотя и не полностью, но "локально" ортогонален: ненулевыми будут только произведения базисных функций, приписанных к несовпадающим соседствующим узлам.

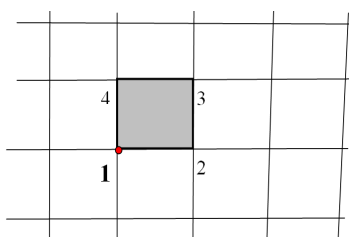


Рис.11.6.

Базисная функция в 2-мерном случае устроена аналогично одномерному случаю и имеет пирамидальную форму. Рассмотрим некоторую точку $A \in (e)$ элемента (e) , характеризуемого узлами 1, 2, 3, 4 (рис.11.6). Пусть функция $T(x, y)$ задана на всей расчётной области, разбитой на билинейные конечные элементы, введённые выше. Аппроксимация $T(x, y)$ в точках, принадлежащих некоторому элементу, записывается через функции формы (11.6), заданные на конечном элементе ("shape functions"), в виде (11.5). Группируя таким образом все функции формы, в которых и значение в узле 1 равно единице, мы построим базисную функцию 1. Вне элементов, содержащих узел 1, эта функция равна нулю.

Далее можно ввести базисные функции, отвечающие прочим узлам КЭ-разбиения. В полной аналогии с одномерным случаем (11.9) – базисная функция номер k – это совокупность функций форм, заданных на элементах, содержащих узел k , принимающих в нём значение 1. Базисная функция данного узла полагается *заданной на всей области* ("global shape function"), за пределами элементов, сгруппированных вокруг этого узла, она равна нулю. Например, в каждом из четырёх узлов 1, 2, 3, 4 данного элемента (рис.11.7) задана базисная функция номер 1, 2, 3, 4, соответственно. Сужение каждой из этих базисных функций N_1, N_2, N_3, N_4 на элемент (e) (график одной из них показан на рис. (11.7)) даёт одну из четырёх функций форм, заданных на элементе, ту, которая равна 1 в данном узле.

Каждая из четырёх функций форм данного элемента может быть приписана к узлу, в котором она принимает значение 1 (в остальных узлах она равна 0). Следовательно, все функции формы задействованы в своих базисных функциях, по одному разу. Обратное, элемент (e) будет общим пересечением областей задания базисных функций, построенных в узлах 1, 2, 3, 4. Поэтому, вместо интерполяции вида (11.7) по функциям формы, заданным в конечном элементе, можно формально говорить об *интерполяции по базисным функциям*, заданным в любой точке области.

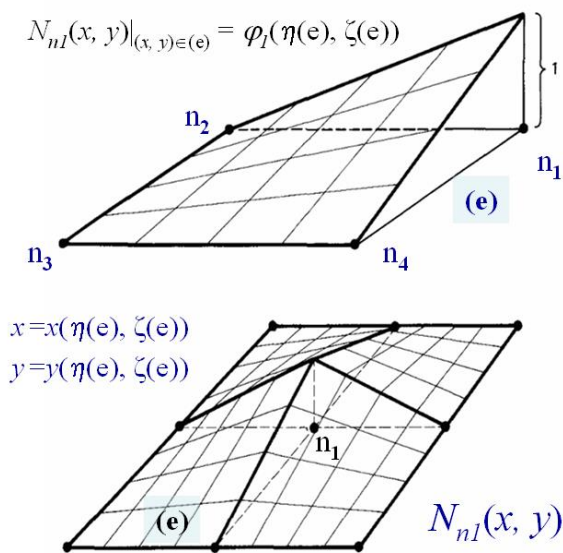


Рис.11.7. Базисная функция (2D) и её сужение на КЭ

Итак, введённые функции формы на элементах, содержащих данный узел, взятые в определённых совокупностях, образуют *финитную базисную функцию*, определённую в окрестности данного узла, равную 1 в этом узле. Напомним, что финитной называется функция, заданная во всей рассматриваемой области, но равная нулю за пределами конечной подобласти. Название "базисная" говорит о том, что взятых в совокупности этих функций достаточно для аппроксимации с определённой точностью любой непрерывной функции заданной степени гладкости на расчётной области: они образуют базис в пространстве функций данного вида. (В этом смысле русскоязычное название "базисная функция" отличается от англоязычного термина "global shape function", вместе же они

содержат информацию о строении и назначении функции.) На рис.11.5 иллюстрируется строение финитной базисной функции для 1-мерного случая, а на рис.11.7 – для 2-мерного.

В общих формулировках МКЭ искомое приближённое решение во всей области Ω представляется в виде разложения по базисным функциям $N_i(x)$ из некоторого набора $\{N_i\}$, $i = 1, \dots, n$. Каждой базисной функции сопоставлен определённый узел разбиения i , а коэффициенты разложения $\{u_i\}$ – это неизвестные значения искомой функции в узлах разбиения. С помощью финитных базисных функций $N_i(x)$ интерполяционные соотношения вида (10.2), (10.4) формально записываются сразу на всей области Ω :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_i(t), \\
 v(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n N_i(x, y) v_i(t), \quad (x, y) \in \Omega.
 \end{aligned}
 \tag{11.10}$$

Элементные функции формы по-прежнему обозначаются как $\varphi^{(e)}(x)$ – это сужения $N_{i(e)}(x)$ на элемент (e) : $\varphi^{(e)}(x) = \{N_{i(e)}(x) \mid x \in (e)\}$, где $i(e)$ – номера узлов элемента e . Разложение (11.10) – одна из форм записи аппроксимации непрерывной функции через её значения в дискретных точках *на всей* области задания. Для получения дискретной формы исходных уравнений *на всей* области (сейчас это уравнения механического равновесия) используем интегральные формулировки.

11.4. Формулировка МКЭ через принцип минимума потенциальной энергии

Рассмотрим ту же двумерную плоскую задачу статики: определить положение равновесия деформируемого тела под действием приложенной нагрузки. Приведённый ниже формализм непосредственно обобщается на осесимметричный или трёхмерный случай. Задано разбиение расчётной области на конечные элементы. Узлы общим количеством n занумерованы сплошным образом, и для каждого элемента задана связность, т.е. узлы, которые его образуют, а также материал, свойства которого, входящие в матрицу упругости, известны. Заданы границы, поставлены краевые условия. Дискретизация проводится аналогично рассмотренному выше в методе перемещений.

- Вводятся *глобальные* векторы обобщённых перемещений – в данном случае это матрицы размером $2n \times 1$, где n – общее количество узлов; согласно с типом КЭ строятся интерполяционные соотношения для обобщённых перемещений и других переменных задачи;
- Строятся соответствующие матрицы деформаций и напряжений, заданные *на всей области*;
- В качестве исходной математической формулировки условия равновесия используется вариационный принцип минимума функционала потенциальной энергии. В функционал подставляются аппроксимации деформаций и напряжений с использованием конечного набора неизвестных узловых перемещений. Условие экстремума исходного функционала полагается эквивалентным условию экстремума полученной функции многих переменных, т.е. узловых перемещений. Из этого условия получают искомые алгебраические соотношения между введёнными дискретными величинами.

Напомним, что ранее из уравнений равновесия был получен принцип стационарности полной возможной работы всех сил, приложенных в системе. В данном случае используется обратное утверждение – если потенциальная энергия стационарна, то состояние системы – равновесное. Вопросов проверки устойчивости равновесия, мы не касаемся. Ключевым предположением процедуры дискретизации служит эквивалентность условия экстремума функционала упругой энергии условию экстремума интерполирующей его функции узловых перемещений.

Запишем выражения для интерполяции функций, заданных на области Ω , в общей форме (11.10) через базисные функции. Полагается, что область разбита на 4-угольные билинейные элементы, но это непринципиально. Пусть $\{d\}$ – матрица-вектор перемещений всех узлов. Соотношение (11.9) для перемещений в точке области записывается в символическом виде для 2×1 матрицы $\{u\} = \{u(x, y), v(x, y)\}^T$ аналогично элементному выражению (10.15), но оно определено на всей области:

$$\{u\}=[N]\{U\}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (11.11)$$

где зависящая от координат матрица базисных функций $[N]=[N(x,y)]$, имеющая в 2-мерном случае размер $2 \times 2n$, составлена нулями и базисными функциями $N_i(x,y)$:

$$[N]=\begin{Bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{Bmatrix}. \quad (11.12)$$

Проверим выполнение соотношения (11.10) в общем случае. Пусть некоторая точка области находится в пределах элемента e , образованного узлами $n_{e1}, n_{e2}, n_{e3}, n_{e4}$, которым соответствуют базисные функции $N_{e1}, N_{e2}, N_{e3}, N_{e4}$. Для u -компоненты перемещений в этой точке в сумме (11.10) останутся слагаемые:

$$u(x) = N_{e1}(x)u_{e1} + N_{e2}(x)u_{e2} + N_{e3}(x)u_{e3} + N_{e4}(x)u_{e4},$$

вследствие того, что функции $N_{ei}(x)$ ненулевые только в элементах, содержащих i -й узел. Здесь $u_{e1}, u_{e2}, u_{e3}, u_{e4}$ – узловые значения компоненты перемещений. Сужение N_{ei} на конечный элемент даёт функцию формы, принимающую значение 1 в узле n_{ei} , и можно видеть, что формальное выражение (11.11) для перемещений в точке, принадлежащей данному конечному элементу, совпадает с соотношением (10.5), т.е. значения глобального вектора $\{u\}$ в данном элементе совпадают со значениями элементного вектора $\{u^{(e)}\}$. Этот вектор может быть выражен через вектор $\{d^{(e)}\}$ узловых перемещений в элементе с помощью матрицы функций форм $[\phi^{(e)}]$ этого элемента:

$$\{u^{(e)}\} = [\phi^{(e)}]\{d^{(e)}\}, \quad \{u^{(e)}\}^T = \{d^{(e)}\}^T [\phi^{(e)}]^T.$$

Эквивалентность общей записи интерполяции в КЭ в виде (11.11) выражению для интерполяции в конечном элементе (10.4) приводит в итоге к тем же коэффициентам матрицы жёсткости алгебраической системы, что в рассмотренном методе перемещений.

Далее, на основании (11.11) с помощью кинематических и определяющих соотношений вида (10.14)–(10.17) записываются соотношения между глобальным вектором перемещений $\{d\}$ и глобальными векторами (3×1) деформаций и напряжений:

$$\{\varepsilon\}=[B]\{U\}, \quad \{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\}=[E][B]\{U\}. \quad (11.13)$$

Здесь матрица деформаций $[B]$ размером $3 \times 2n$ составлена из нулей и пространственных производных базисных функций. Как и выше, эти производные сводятся к частным производным функций форм по координатам и в совокупности включают выражения, вычисленные поэлементно.

Функции формы (11.6) в выражении для матрицы деформаций $[B]$ необходимо дифференцировать по глобальным координатам, введены же они через локальные координаты. Формально функции формы, заданные на данном элементе (e), могут быть выражены как через локальные, так и через глобальные координаты точки x –

$$\tilde{\varphi}_i(x, y) = \tilde{\varphi}_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \varphi_i(\xi(x, y), \eta(x, y)). \quad (11.14)$$

Функции $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ известны, и алгебраические уравнения (11.14) могут быть решены. Но нам нужны только производные $\tilde{\varphi}'_{ix} = \partial \tilde{\varphi} / \partial x$, $\tilde{\varphi}'_{iy} = \partial \tilde{\varphi} / \partial y$, и их можно получить проще, воспользовавшись соотношением "правила цепочки", следующим из (11.13) (φ обозначает любую из четырёх функций формы):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

Вводя обозначения для производных –

$$\varphi'_{\xi} = \tilde{\varphi}'_x x'_{\xi} + \tilde{\varphi}'_y y'_{\xi}$$

$$\varphi'_{\eta} = \tilde{\varphi}'_x x'_{\eta} + \tilde{\varphi}'_y y'_{\eta},$$

из этих уравнений выражаем производные функций форм по глобальным координатам через известные функции, собранные в матрицу:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\varphi}'_x \\ \tilde{\varphi}'_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\|J\|} \begin{Bmatrix} y'_{\xi} & -y'_{\eta} \\ -x'_{\xi} & x'_{\eta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi'_{\eta} \\ \varphi'_{\xi} \end{Bmatrix}, \quad \|J\| = x'_{\eta} y'_{\xi} - x'_{\xi} y'_{\eta}. \quad (11.15)$$

Определитель $\|J\|$ – якобиан преобразования к локальным координатам, всегда отличен от нуля для невырожденных элементов. Он естественным образом появляется в выкладках в случае использования локальных координат. Матрица преобразования от локальных к глобальным координатам уже встречалась нам при построении расчётной схемы для стержневых систем (см. (9.23)). Ниже в формальных выкладках считается, что преобразование координат уже учтено в матрице деформаций.

Механическая потенциальная энергия системы складывается из: потенциальной упругой энергии, обусловленной деформацией $\{\varepsilon_{ik}(x)\}$ и выраженной по формуле Клапейрона (3.4), из потенциальной энергии, накопленной на перемещении $\{u_i(x)\}$ в поле сил, задаваемых вектором $\{f_i(x)\}$, и из работы граничных внешних сил $\{p_i(x)\}$ на перемещении $\{u_i(x)\}$, которые мы также полагаем потенциальными (что допустимо в отсутствие диссипации). Функционал полной потенциальной энергии имеет вид:

$$\Pi(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sigma_{ik} \varepsilon_{ik} - \rho f_i u_i \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} p_i u_i dA. \quad (11.16)$$

Здесь индексами обозначены физические компоненты векторов и тензоров. Аппроксимируя перемещения, деформации и напряжения с помощью соотношений (11.11)-(11.13), получим:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega - \{U\}^T \{R\}, \quad (11.17)$$

где вектор нагрузки, как и ранее (см. (10.33)), связан с внешними объёмными и поверхностными силами:

$$\{R\} = \int_{\Omega} [N]^T [\rho f] d\Omega - \int_{\partial\Omega_p} [N]^T \{p(x, y)\} dA. \quad (11.18)$$

В (11.18) подынтегральные выражения формально представлены с помощью соотношений вида (10.27) и (10.31) через узловые значения перемещений и входят в узловые силы, описываемые глобальным вектором $\{R\}$, аналогично тому, как это делалось в методе перемещений. Интегрирование распространяется на всю расчётную область и проводится по-элементно. В подынтегральное выражение входят только первые производные от перемещений, и для билинейных функций форм элементов оно определено почти всюду, хотя и разрывно на границах элементов.

Векторы $\{\varepsilon\}^T$ и $\{\sigma\}$ выражаются через неизвестный вектор перемещений $\{d\}$. Внесём в (11.17) интерполяционные выражения для деформаций и напряжений через узловые величины и выразим наш функционал от неизвестных функций координат $u(x, y)$, $v(x, y)$ как квадратичную функцию конечного числа переменных $\{u_i, v_i\}$ – неизвестных компонент перемещений в узлах:

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{U\}^T [B]^T [E] [B] \{U\} d\Omega - \{U\}^T \{R\} = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} - \{U\}^T \{R\}. \quad (11.19)$$

Здесь введена глобальная матрица жёсткости размером $2n \times 2n$ –

$$[K] \equiv \int_{\Omega} [B]^T [E] [B] d\Omega, \quad (11.20)$$

и, поскольку зависимыми от координат могут быть только коэффициенты матрицы $[B]$ и вектора $\{R\}$, узловые перемещения могут быть вынесены из–под соответствующих интегралов. В подынтегральные функции входят только параметры сетки и материалов, интегралы вычисляются независимо. Потенциальная энергия стала квадратичной функцией только неизвестных узловых перемещений.

Интеграл (11.20), взятый по всей области, составлен суммой $4n^2$ слагаемых, отвечающих попарным произведениям производных по координатам базисных функций, фигурирующих в записи (11.10). Большая часть этих вкладов – нулевая, поскольку базисные функции ненулевые только в элементной окрестности узлов.

В индексных обозначениях квадратичная форма (11.19) может быть записана как

$$\Pi(r_1, \dots, r_{2n}) = \sum_{i,j} \frac{1}{2} k_{ij} r_i r_j - \sum_i f_i r_i, \quad (11.21)$$

где r_i обозначает узловые значения компонент перемещений системы общим числом $2n$.

Применим необходимое условие экстремума по узловым компонентам перемещений к полученной функции многих переменных. Вычисляя $2n$ частных производных функции (11.21) по узловым перемещениям и приравнявая производные нулю –

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial r_{2n}} = 0,$$

учитывая, что коэффициенты не зависят от узловых величин и квадратичная форма симметрична –

$$\frac{\partial (k_{ij} r_i r_j + k_{ji} r_j r_i)}{\partial r_i} = 2k_{ij} r_j,$$

получаем $2n$ линейных уравнений, которые образуют искомую линейную систему уравнений для всей КЭ–модели:

$$\sum_{i,j} k_{ij} r_i = \sum_i f_i, \text{ или } - [K] \{U\} = \{R\}. \quad (11.22)$$

При вычислении компонент матриц интегралы по объёму вычисляются разбиением объёма всей области Ω на объёмы конечных элементов и суммированием итоговых выражений. Организация цикла вычислений в КЭ–программе не отличается от той, что была выше описана для метода перемещений – в цикле по элементам происходит вычисление коэффициентов элементных матриц жёсткости и узловых нагрузок с суммированием элементных коэффициентов в глобальные узловые значения с учётом граничных условий и объёмных сил.

Пользуясь техникой МКЭ можно и в других областях физики, при наличии вариационной формулировки задачи, построить процедуру численного решения [МитчелУэйт].

11.5. Численное интегрирование по элементу

Интеграл (11.20) в общем случае вычисляется численно. В формулах численного интегрирования составляется сумма значений подынтегральной функции в заданных точках области ("точки квадратуры") с некоторыми весовыми множителями. Подобные "квадратурные формулы типа Гаусса" (см., например, [Никифоров]) в случае интегралов по 1–мерной области (отрезок) имеют вид

$$\int_a^b f(\xi)\rho(\xi)d\xi \approx \sum_{k=1}^m c_k f(\xi_k). \quad (11.23)$$

Точки квадратуры отвечают корням ξ_k полинома степени n из некоторой системы полиномов, ортогональных на отрезке $[a,b]$ с весом $\rho(\xi)$. Коэффициенты в правой части таковы, что формула точна для полиномов степени $2n-1$, которыми может быть аппроксимирована функция $f(x)$ на отрезке. В МКЭ используется гауссова квадратура, которая в одномерном случае сводится к –

$$\int_{-1}^1 f(\xi)d\xi = \sum_{k=1}^m c_k f(\xi_k) \quad c_k = \frac{2}{(1-\xi_k^2)(P_k'(\xi_k))^2}, \quad m=1, 2, \dots$$

где m значений аргумента ξ_k суть корни полинома Лежандра $P_n(\xi)$. Эти полиномы ортогональны с весом 1.

При 1–мерном интегрировании на отрезке можно взять две точки вычисления функции, в этом случае говорят о *двухточечном* интегрировании. Может применяться также одноточечное интегрирование – т.е. по формуле трапеций. В многомерном случае разбиение по точкам интегрирования берётся вдоль каждого измерения, например, в случае 2–мерного 4–угольного элемента обычно используется (2×2) интегрирование, по 2 точки на измерение. В нелинейном случае интеграл вида (13.7) (см. ниже) в процессе решения преобразуется к выражению вида (11.23), аппроксимируемому суммой

$$\{\mathbf{F}\} = \sum_{i=1}^{2n} \omega_i [\mathbf{B}(\xi_i, \eta_i)]^T \{\sigma(\xi_i, \eta_i)\} u(\xi_i, \eta_i) \|\mathbf{J}(\xi_i, \eta_i)\|,$$

где весовые коэффициенты $\omega_i = 1$, \mathbf{J} – якобиан преобразования к локальным координатам $(x,y) \rightarrow (\zeta,\eta)$, а суммирование проводится по значениям локальных координат в 4–х точках элемента, $i=1, \dots, 2n$, n – размерность задачи. В 2–мерном случае точки интегрирования:

$$(\xi_i, \eta_i) : (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}); (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}); (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \quad (11.24)$$

11.6. МКЭ как метод взвешенных невязок

11.6.1. Взвешенные невязки и финитные функции

На пути формального обобщения приведённых выше двух способов дискретизации уравнений равновесия может быть построена строгая процедура МКЭ-дискретизации *непосредственно из дифференциальных уравнений задачи*. Очевидные преимущества относительно рассмотренного метода минимизации функционала состоят в том, что:

а) исчезает необходимость в явной формулировке эквивалентной задачи минимизации функционала или физического принципа (в МДТТ – функционал потенциальной энергии или условие равновесия) и поэтому –

б) метод может быть формально распространён на решение уравнений, для которых такой функционал или принцип не существует.

Для аппроксимации решения вне дискретных точек используются введённые выше базисные функции.

Рассмотрим общую задачу приближенного решения системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, которым должна удовлетворять неизвестная функция или набор функций u (компоненты вектора) в области Ω . Линейность существенна для формулировки метода в замкнутой форме. Запишем уравнения в символическом виде (9.1) как

$$A(u)=0, \quad x \in \Omega,$$

где A – линейный оператор, содержащий также правую часть уравнения (9.1). Приближённое решение $u^*(x)$ ищется в дискретных узлах некоторого разбиения области на "элементы", удовлетворяет краевым условиям на границе $\partial\Omega$ и путём интерполяции в элементах распространяется на всю область Ω . Запишем решение в общей форме (11.10) как разложение системы функций $u(x)$ искомого решения по некоторой системе аппроксимирующих функций $N(x)$ с неизвестными пока коэффициентами, в полной аналогии с разложением системы двух функций перемещений в 2D задаче:

$$u(x) \approx u^*(x) = [N(x)]\{d\}. \quad (11.25)$$

Ход рассуждений следующий. Не зная точного решения, мы не можем определить погрешность приближения $\|u^* - u\|$, и наилучшим приближённым решением полагается то, которое даёт во всех точках области Ω наименьшую норму *невязки* $R(u^*)$, т.е. величину отклонения по результату действия оператора A на искомую функцию и её приближение:

$$\|R(u^*)\| = \|A(u^*) - A(u)\| = \|A(u^*)\|.$$

Это допустимо, если существует непрерывная зависимость решения от аргументов. Если функция невязки $R(u^*(x))$ тождественно равна нулю всюду в области Ω , то очевидно также, что будут нулевыми и скалярные произведения

$$\int_{\Omega} \omega(x)R(u^*(x))d\Omega = \int_{\Omega} \omega(x)A(u^*(x))d\Omega = 0, \quad (11.26)$$

где $\omega(x)$ – некоторая функция координат. Это соотношение можно использовать для построения приближённого решения по причине справедливости, при определённых условиях, обратного утверждения, родственного основной лемме вариационного исчисления: если для семейства непрерывных функций $\omega(x)$, удовлетворяющих определённому условию, выполнено (11.26), то непрерывная функция $R(u^*(x))=0$ на области Ω , т.е. $u^*(x)$ будет решением исходного уравнения. Здесь равенство нулю понимается в приближённом смысле, поскольку количество базисных функций в разложении (11.25) для получения приближённого решения с формально сколь угодно высокой точностью в большинстве практически важных случаев было бы сколь угодно большим. Отметим, что системы функций $\omega(x)$ и $N(x)$ вообще говоря разные, но должны удовлетворять некоторым требованиям.

В линейном пространстве функций, образующих решение линейного уравнения (9.1), приближённое решение можно толковать как конечномерный образ, *проекцию* решения исходного дифференциального уравнения при отображении этого бесконечно-мерного пространства на конечномерное пространство аппроксимирующих функций, натянутое на некоторый конечный базис. Наиболее удобными для аппроксимации оказываются полиномиальные функции. Как отмечалось ранее, методы типа МКЭ или МКО, в которых с сеточным разбиением можно связать конечномерное пространство аппроксимирующих

функций, называются в отечественной литературе также проекционно-сеточными [Марчук].

Если аппроксимирующие (базисные) функции (11.25) в соотношении (11.26) совпадают с семейством функций $\omega(x)$: $\omega_i = N_i$, то (11.26) можно интерпретировать как ортогональность вектора невязки аппроксимирующему пространству – с точки зрения аппроксимации решения в конечном подпространстве с данным базисом вектор невязки не должен иметь в нём существенной компоненты. Подробнее о вычислительно-математических основах МКЭ можно прочитать, например, в [Митчел-Уэйт], [Стрэнг Фикс], [Оден] и ряде других книг.

Пусть число неизвестных величин (размер) вектора $\{d\}$ равно n , тогда, построив базис из n линейно независимых аппроксимирующих функций ω_i , можно им аппроксимировать искомое решение в виде (11.25). Далее, можно записать n независимых равенств вида (11.26) для каждой функции базиса ω_i . После подстановки в (11.26) аппроксимации (11.25) получим систему n (и не более) независимых алгебраических уравнений

$$\int_{\Omega} \omega(x) R(u^*(x)) d\Omega = \int_{\Omega} \omega_i A(u^*(x)) d\Omega = \int_{\Omega} \omega_i A([N]\{d\}) d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11.27)$$

из которой может быть найдена дискретная функция $\{d\}$. Т.к. оператор A – линейный, то $A([N(x)]\{d\}) = [A]\{d\} - \{F\}$, и система алгебраических уравнений будет линейной:

$$\int_{\Omega} \omega_i A([N]\{d\}) d\Omega = \left(\int_{\Omega} \{\omega_i\} [A] d\Omega \right) \{d\} - \int_{\Omega} \{\omega_i\} \{F\} d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.28)$$

Здесь в квадратные скобки – матрица $[A]$, состоящая из известных (непосредственно вычисляемых) величин. В случае линейного оператора A алгебраические соотношения для получения коэффициентов в уравнении (11.27) будут аналогичны рассмотренным выше для задач механики.

Нетрудно видеть, что описанные формальные манипуляции весьма похожи на те, что проводились при формулировке принципа виртуальных перемещений. Уравнению (11.26) в случае механики может быть придан физический смысл – это соотношение (4.15), т.е. виртуальная работа приложенных сил. После интегрирования по частям, в упругом случае, может быть также получен полный аналог уравнения (11.22), дискретного аналога принципа минимума потенциальной энергии. В неупругом случае уравнение (11.28) и принцип виртуальной работы сохраняют силу, в отличие от принципа минимума потенциальной энергии. Соотношение вида (11.26) будет использовано при получении схемы пространственной аппроксимации уравнений динамики деформируемого тела.

Рассмотренный общий метод называется *методом взвешенных невязок*, если функции ω_i интерпретировать как весовые функции. Выбор различных весовых функций приводит к различным методам приближённого решения (см. [Митчел Уэйт] и др.). В частности, когда $\omega_i = N_i$, т. е. в качестве весовой функции выбирается определённая базисная функция МКЭ, с помощью которой аппроксимируется решение, получим широко распространённый *метод Бубнова-Галеркина*, к которому сводятся вышеприведённые процедуры дискретизации МКЭ для МДТТ.

При использовании соотношений (11.27), задающих процедуру пространственной дискретизации, видны основные, уже знакомые, особенности процедуры метода.

Во-1 (в предположении, что границы между элементами (ячейками сетки) не дают никакого вклада), интегралы могут быть вычислены для каждого элемента независимо с последующим их независимым суммированием (процедура построения матрицы алгебраической системы).

Во-2, в случае финитных аппроксимирующих функций, в частности, пирамидальных базисных функций, описанных выше, результирующая система уравнений будет иметь очень разреженную матрицу, так как влияние каждой узловой переменной распространяется только на элементы, примыкающие к данной узловой точке.

Продолжением достоинств служат, как известно, недостатки. В данном случае недостаток универсального метода взвешенных невязок состоит в том, что дифференциальный оператор A и отвечающий ему интеграл в (11.28) могут содержать производные более высоких порядков, чем функционал вида рассмотренной выше механической работы. Поэтому в общем случае при получении матрицы системы может оказаться необходимым обеспечить выполнение условий непрерывности градиентов и применять функции формы второго порядка, т.е. нелинейные. Это обстоятельство существенно, так как оно ограничивает выбор функций формы и тем самым может вызвать формальные и вычислительные трудности. Один из способов понижения максимального порядка производной состоит в проведении в интеграле (11.28) интегрирования по частям, как в примере, рассмотренном ниже. Это позволяет, например, для уравнений второго порядка строить расчётную схему, используя линейные или полилинейные конечные элементы.

11.6.2. Пример: дискретизация уравнения нестационарной теплопроводности

Для иллюстрации общих формулировок рассмотрим их применение к нестационарному квазилинейному уравнению теплопроводности. В таком виде процедура реализована в двумерном коде HEFEST [HEFEST] и его трёхмерном аналоге коде POLYFEM, разработанных в ИБРАЭ РАН. Различие между 2-мерным и 3-мерным случаями не принципиально и прокомментировано ниже. Рассмотрим 3-мерный случай.

В декартовой системе Охуз уравнение имеет вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} + Q(x, y, z, t), \quad x \equiv (x, y, z) \in \Omega. \quad (11.29)$$

Заданы граничные условия:

$$T(x, y, z, t) = T_b(x, y, z), \quad x \in \Omega_T, \quad (11.30)$$

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial n_x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial n_y} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial n_z} + a(x, y, z, t)T = b(x, y, z, t), \quad x \in \Omega_C \quad (11.31)$$

и начальные условия при $t = 0$:

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z), \quad x \in \Omega_i. \quad (11.32)$$

Здесь n_x, n_y, n_z – компоненты единичного вектора внешней нормали к границе, ρ – плотность, c – теплоемкость, $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ – коэффициенты теплопроводности по направлениям осей координат для ортотропного материала, $Q(x, y, z)$ – мощность тепловыделения, a, b – параметры. Теплофизические коэффициенты могут зависеть от температуры, от координат и от времени. Если на данной граничной площадке не поставлены условия типа (11.30) или (11.31), то на ней автоматически выполнены адиабатические граничные условия, соответствующие соотношению (11.31), в котором $a=b=0$. Частные случаи граничных условий (11.31):

– условие по потоку (2-го рода):

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \equiv \lambda_x \frac{\partial T}{\partial n_x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial n_y} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial n_z} = F, \quad (11.33)$$

– условие конвективного теплообмена с внешней средой температуры T_b (3-го рода):

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = H_b(T - T_b) \quad , \quad (11.34)$$

где $H=H(T,t)$ – коэффициент теплообмена,

– аналогично: условие радиационного теплообмена со средой температуры T_b :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \varepsilon \sigma_0 (T^4 - T_b^4) = \varepsilon \sigma_0 [(T + T_b)(T^2 + T_b^2)] (T - T_b) \equiv H_r(T)(T - T_b) \quad , \quad (11.35)$$

где ε – излучательная способность, σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана. Линеаризованное радиационное г.у. может рассматриваться как температурно-зависимое условие 3-го рода.

При задании внешнего потока тепла следует выбирать правильный знак: входящий поток тепла всегда положителен. Это следует из того, что входящий поток тепла – это фактически двумерный источник, и этот источник должен нагревать, т.е. увеличивать температуру в окрестности данного участка границы. Соответственно, выходящий поток тепла отрицателен – он выносит тепло через границу и охлаждает.

Отметим, что взятое для примера уравнения нестационарно, в отличие от всего, рассмотренного выше. Важнейшая особенность процедуры дискретизации нестационарных уравнений состоит в том, что зависимость от времени, как правило, учитывается *независимо* от пространственной аппроксимации, т.е. в результате пространственной дискретизации мы придём не к алгебраической системе, а к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Её интегрирование по времени осуществляется через конечные разности, на 1–мерной сетке дискретного времени $[t_0, t_1, \dots, t_p]$ с шагом $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $k=1, \dots, p$.

Ещё одна очевидная особенность эволюционных (нестационарных) задач состоит в том, что рассматривается *эволюция* системы – последовательные состояния, в которых каждое новое определяется предыдущим. Очевидно, что такой расчёт не может быть параллелизован по времени – задача должна решаться последовательно. В случае теплопроводности неоднородность алгоритма решения нестационарного уравнения – отсутствие "пространственно-временного конечного элемента" имеет математическую причину – характеристики уравнения теплопроводности комплексные. В случае динамики (волновые движения упругой среды) попытки построить такую схему известны (см. ссылки в [Стрэнг-Фикс]), но они не привели к эффективному методу решения, и здесь используются другие методы.

11.6.2.1. Метод взвешенных невязок как проекция обобщённой (слабой) формулировки задачи

Для уравнения теплопроводности с произвольными температурно–зависимыми коэффициентами отсутствует потенциальная функция, но для конечно-элементной дискретизации метод взвешенных невязок вполне применим. В процедуре дискретизации исходного дифференциального уравнения этот метод может трактоваться также как конечномерная реализация расширения решения уравнения в более общий класс функций, называемых *обобщёнными функциями* (в зарубежной литературе: "слабое решение", weak solution). Функцию, которая удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению в форме (8.1)

$$Au = F \quad (u = u(x), x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2) \quad , \quad (11.36)$$

называют *классическим* решением, в отличие от *обобщенного (слабого)* решения [МитчУэйт], [Hughes] для которого полагается выполненным только соотношение вида (11.28)

$$(Au, \omega) = (F, \omega) \quad (u = u(x), x \in \mathbb{R}^2) \quad , \quad (11.37)$$

где функция $\omega \in X$ принадлежит некоторому семейству допустимых функций, и обращается в нуль на границе области Ω . Здесь скалярное произведение (11.37) определяется как интеграл по области Ω :

$$(F, \omega) = \int_{\Omega} F(x, y, z) \omega(x, y, z) d\Omega.$$

В соответствии с этим определением, обобщённым решением уравнения (11.29) будет функция $T(x, y, z)$, такая, что для любой функции $\omega(x, y, z) \in X$ из некоторого пространства пробных функций X выполнено равенство:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \omega(x, y, z) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} + Q(x, y, z, t) \right) \omega(x, y, z) d\Omega \quad (11.38)$$

Функции $\omega(x, y, z) = 0$ на границах с условиями первого рода. Они удовлетворяют определённым требованиям гладкости и не зависят от времени.

Как отмечалось выше, с вычислительной точки зрения наиболее полезная обобщённая форма задачи получается после интегрирования (11.38) по частям, что позволяет снизить требования к дифференцируемости функций. В нашей задаче тогда потребуется существование только первых производных.

Переход к приближенному решению преобразованного уравнения (11.38), как и в задаче статики, осуществляется разложением $T(x, y, z)$ по конечному набору функций $N_i = N_i(x, y, z)$ из некоторого пространства финитных базисных функций $\{N_i\}$, $i = 1, \dots, n$, заданных каждая в окрестности одной точки из некоторого конечного множества n точек – узлов разбиения. Носители этих функций (совокупности конечных элементов, приписанные к определённым узлам) покрывают всю расчётную область. Условие (11.37) для данного конечного набора функций $\{N_i\}$ выполняется в пределах некоторой точности аппроксимации. Функции N_i строятся такими, что выполнено соотношение вида (11.10) :

$$T(x, y, z, t) \approx \tilde{T}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) T_i(t) \equiv \mathbf{N} \mathbf{T} \equiv \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{T}\}, \quad (11.39)$$

где введена матрица–вектор базисных функций и вектор температур в узлах, независимых переменных задачи:

$$\mathbf{N} = \{N_i(x, y, z)\}, \quad \mathbf{T} = \{T_i(t)\}.$$

Т.к. температура – скаляр, размерность вектора узловых значений (количество степеней свободы) $= n$ – количеству узлов.

11.6.2.2. Метод Бубнова–Галёркина

Рассмотрим процедуру дискретизации. Интегрирование по частям для интеграла по области Ω с границей $\partial\Omega$ основано на формуле производной произведения функций. Частные производные по координатам объединяются в вектор градиента скалярной функции с помощью оператора набла. Интегрирование по объёму и применение формулы Гаусса–Остроградского даёт соотношения:

$$\int_{\Omega} (\nabla \psi) \varphi d\Omega + \int_{\Omega} \psi (\nabla \varphi) d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla \varphi \psi) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\varphi \psi)_n dA,$$

откуда –

$$\int_{\Omega} \psi (\nabla \varphi) d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla \psi) \varphi d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\varphi \psi)_n dA. \quad (11.40)$$

Применяя это к уравнению (11.38), обозначим $\omega(x, y, z) = \psi(x, y, z)$, вторая скалярная функция ω – это одна из компонент потока тепла. Имеем:

$$\begin{aligned}\omega \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (\omega \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}) - \frac{\partial \omega}{\partial x} \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x} (\omega F_x) - \frac{\partial \omega}{\partial x} F_x, \\ \omega \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} (\omega \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}) - \frac{\partial \omega}{\partial y} \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial y} (\omega F_y) - \frac{\partial \omega}{\partial y} F_y, \\ \omega \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} (\omega \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}) - \frac{\partial \omega}{\partial z} \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial z} (\omega F_z) - \frac{\partial \omega}{\partial z} F_z.\end{aligned}\quad (11.41)$$

Здесь в правом уравнении введены обозначения для компонент потока тепла F_x, F_y, F_z . Сумму этих уравнений можно с помощью оператора ∇ записать как:

$$\omega \nabla \mathbf{F} = \nabla(\omega \mathbf{F}) - (\nabla \omega) \mathbf{F}.$$

Интегрируя это уравнение по объёму, аналогично (11.40) и заменяя объёмный интеграл поверхностным, получим искомую подстановку для правой части уравнения (11.38):

$$\int_{\Omega} \omega \nabla \mathbf{F} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla(\omega \mathbf{F}) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \omega \nabla \mathbf{F} d\Omega = - \int_{\Omega} (\nabla \omega) \mathbf{F} d\Omega + \int_{\partial \Omega} \omega \mathbf{F} d\mathbf{A}.$$

Внося сюда определения компонент потока тепла по тождествам (11.41), можно уравнение (11.38) записать в виде:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \omega d\Omega &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \omega d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} Q(x, y, z) \omega d\Omega + \int_{\partial \Omega} \omega \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial n_x} dA_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial n_y} dA_y + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial n_z} dA_z \right)\end{aligned}\quad (11.42)$$

Здесь скалярное произведение потока тепла на элемент поверхности интегрирования заменено на его формальное выражение, которое при интегрировании по поверхности не используется, т.к. выражается через граничное условие вида (11.31) с нормальной компонентой потока тепла, которая умножается просто на площадь:

$$\int_{\partial \Omega} \omega \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial n_x} dA_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial n_y} dA_y + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial n_z} dA_z \right) = \int_{\partial \Omega} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \omega dA = \int_{\partial \Omega_F} H_b(T - T_b) \omega ds + \int_{\partial \Omega_C} F_b \omega dA \quad (11.43)$$

Символ dA обозначает элемент поверхности, а поверхность задания граничных условий разбита на две части (возможно, пересекающиеся), задаваемые, соответственно, на участках границы $\partial \Omega_C$ и $\partial \Omega_F$, отвечающих потоковым и температурно-зависимым конвективным г.у., в число которых включены радиационные:

$$\partial \Omega = \partial \Omega_C \cup \partial \Omega_F.$$

Замечание относительно двумерных задач. Запись интеграла (11.42) для плоской задачи теплопроводности формально отличается только отсутствием слагаемых с производными вдоль z -направления. В случае осесимметричной постановки задачи, наряду с декартовой вводится система цилиндрических координат с осью, проходящей через нулевую точку декартовой системы. Координаты в двух этих системах связаны соотношением (5.8), в котором обозначения координат в декартовой системе – цифровые. Для случая изотропного коэффициента теплопроводности нетрудно убедиться, например, применяя соотношения для производных вида (11.15), отнесённые к преобразованию вида (5.8), либо переходя в каждой точке цилиндрической координатной системы к местной декартовой системе координат, что интеграл (11.42) сведётся для системы

цилиндрических координат (r, z) с отсутствующей зависимостью от угла к выражению вида

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \omega d\Omega = -\lambda \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \omega(r, z) 2\pi r dr,$$

т.е. переход к цилиндрической геометрии интегрирования с учётом только радиальной и осевой зависимостей изменит только элемент интегрирования, оставив подинтегральное выражение таким же, как в 2D плоском случае.

Отметим, что в данном случае введённая декартова, как и цилиндрическая, системы координат – глобальные, и используются не для записи дифференциального уравнения, а только для вычисления интеграла, пользуясь трансляционной симметрией – вдоль третьего измерения в плоском случае, или вдоль окружности – в случае осевой симметрии. Подинтегральное выражение в изотропном случае формально не меняется при переходе к зависимости от радиуса вместо декартовых координат на плоскости, меняется только элементарный объём интегрирования. При последующей дискретизации, в которой вводятся базисные функции, построенные на конечных элементах, по которым фактически, с помощью квадратурных формул, вычисляются интегралы, элементы следует представлять в виде колец четырёхугольного (треугольного) сечения. Их сечения не отличаются от сечения в плоской задаче. Объём кольца равен произведению площади сечения на окружность, описанную центром тяжести сечения (теорема Кёнига), он отличается от объёма плоского КЭ, но соотношения вида (11.5) между локальными и глобальными координатами, аппроксимация (11.7) и соотношения (11.15) между производными по глобальным и локальным координатам в конечном элементе формально не изменятся в случае описываемых здесь простейших четырёхугольных изопараметрических КЭ первого порядка. Эти выражения аналогичны и отчасти иллюстрируют сделанное ранее замечание относительно очень небольших формальных отличий двумерного плоского и осесимметричного случаев при вычислении интеграла (10.23) работ внутренних сил.

Вернёмся к методу Бубнова-Галеркина, в котором пробными функциями в функционале (11.42) взяты базисные функции N_i , по которым производится разложение решения. Примером служат пирамидальные функции, рассмотренные выше. Они линейно независимы и образуют базис в пространстве "кусочно-3-линейных" функций, заданных на Ω , т.е. интерполяций через 3-линейные функции форм вида (11.8). Подставим вместо искомой функции её приближённое выражение в виде разложения вида (11.10)-(11.11). Условие (11.37), сформулированное для любой функции из пространства пробных функций N_i , даёт при последовательной подстановке $\omega(x, y, z) = N_i(x, y, z)$, $i=1, \dots, n$, n линейно независимых соотношений соответственно количеству функций базиса. Учитывая (11.43), получим n уравнений:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_k \rho c \{N\} \frac{\partial \{T\}}{\partial t} \omega d\Omega = & - \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_k}{\partial x} \lambda_x \frac{\partial \{N\}}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial y} \lambda_y \frac{\partial \{N\}}{\partial y} + \frac{\partial N_k}{\partial z} \lambda_z \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right) d\Omega \right\} \{T\} + \\ & + \int_{\Omega} N_k Q d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} N_k f_n dA - \int_{\partial\Omega_c} N_k H T_b dA - \left\{ \int_{\partial\Omega_c} N_k H_b \{N\} dA \right\} \{T\}, \end{aligned} \quad (11.44)$$

где f_n – проекция потока тепла на нормаль к элементу границы $\partial\Omega_f$ потоковых граничных условий.

Введём матрицы: проводимости \mathbf{H} , теплоемкости \mathbf{C} и вектор тепловых нагрузок \mathbf{F} :

$$\mathbf{H} \equiv [\mathbf{H}] = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_k}{\partial x} \lambda_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial y} \lambda_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial N_k}{\partial z} \lambda_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega_c} N_k H_b N_i ds \quad (11.45)$$

$$\mathbf{C} \equiv [\mathbf{C}] = \left[\int_{\Omega} N_k \rho c N_i dx \right], \quad (11.46)$$

$$\mathbf{F} \equiv \{F_k\} = \left\{ \int_{\Omega} N_k Q dx - \int_{\partial\Omega_f} N_k f_n dA - \int_{\partial\Omega_c} N_k H_b T_b dA \right\} \quad (11.47)$$

Система n дифференциальных уравнений первого порядка для вектора $\mathbf{T} = \{T(t)\}$ температур в узлах расчетной сетки запишется в виде

$$[\mathbf{C}] \frac{d\{\mathbf{T}\}}{dt} + [\mathbf{H}]\{\mathbf{T}\} = \{\mathbf{F}\}. \quad (11.48)$$

Матрицы и объемные интегралы (11.46)–(11.47), как и в описанных ранее процедурах, строятся и вычисляются сначала для каждого элемента с помощью элементных формул типа (11.22) и затем суммируются. Интегрирование по элементам производится с помощью квадратурных формул Гаусса (11.22) по восьми точкам $2 \times 2 \times 2$ для 3–мерных элементов и по 4–м точкам 2×2 в 2–мерном случае. Температурные зависимости свойств берутся по интерполированному значению температуры в гауссовских точках интегрирования. Обратив матрицу теплоёмкости, уравнение можно проинтегрировать по явной схеме, при соблюдении соответствующего ограничения на шаг по времени.

Вследствие квадратичной зависимости условия устойчивости явной схемы от шага по пространству, уравнение теплопроводности практически всегда интегрируется неявно. Для улучшения сходимости итерационного процесса в случае нелинейных задач часто используется матрица теплоёмкости, в которой значения её элементов полагаются приписанными к одному узлу – для данной строки m матрицы значения в узлах, отличных от узла номер m , суммируются, сумма приписывается узлу m , а прочие значения обнуляются (lumped matrix). В случае плавной зависимости от температуры это практически не оказывает влияния на вычисляемое нестационарное поле температуры. В задачах с фазовыми переходами (первого рода), которые часто решаются введением эффективной теплоёмкости большой величины на малом температурном интервале, расчёт с сосредоточенной узловой теплоёмкостью требует внимания при задании сетки и интервала превращения. Это замечание, в принципе может быть отнесено и к расчётам с фазовыми превращениями второго рода, где скачок теплоёмкости (лямбда-точка) свойственен самой системе (хотя здесь перепады обычно гораздо меньше).

11.6.2.3. Интегрирование по времени

При расчете нестационарной температуры система уравнений (11.48) численно интегрируется по времени с некоторым шагом. Дискретизация по времени приводит к совокупности стационарных задач для функции $T(x, y, z, t_{k+1})$ с известным предыдущим состоянием $T(x, y, z, t_k)$ и нагрузками и граничными условиями, заданными во все моменты $[t_0, t_1, \dots, t_p]$. Температуры в узлах на $j+1$ -м шаге находятся по двухслойной однопараметрической схеме с весом α , безусловно устойчивой при $\alpha > 1/2$:

$$\mathbf{C}_{j+\alpha} (\mathbf{T}_{j+1} - \mathbf{T}_j) / \tau_{j+1} + \mathbf{H}_{j+\alpha} \mathbf{T}_{j+\alpha} = \mathbf{F}_{j+\alpha}$$

где для некоторого α из интервала $[0, 1]$ по определению –

$$t_{j+\alpha} = t_j + \alpha \tau_j, \quad \mathbf{T}_{j+\alpha} = (1 - \alpha) \mathbf{T}_j + \alpha \mathbf{T}_{j+1}, \quad (11.49)$$

$$\mathbf{C}_{j+\alpha} = \mathbf{C}_{j+\alpha} (\mathbf{T}_{j+\alpha}, t_{j+\alpha}), \quad \mathbf{H}_{j+\alpha} = \mathbf{H}_{j+\alpha} (\mathbf{T}_{j+\alpha}, t_{j+\alpha})$$

В случае чисто неявной схемы $\alpha = 1$. Вводя в этом случае температуру на следующем шаге, получим систему уравнений в виде

$$\mathbf{K}^* \mathbf{T}_{j+1} \equiv (1/\tau_j \mathbf{C}_{j+1} + \mathbf{H}_{j+1}) \mathbf{T}_{j+1} = \mathbf{F}_{j+1} + (\mathbf{C}_{j+1}/\tau_{j+1}) \mathbf{T}_j \equiv \mathbf{F}^* \quad (11.50)$$

В линейном случае матрицы \mathbf{K}^* , \mathbf{F}^* не зависят от температуры и формальное решение –

$$\mathbf{T}_{j+1} = (\mathbf{K}^*)^{-1} \mathbf{F}^*$$

Решение нестационарной задачи теплопроводности сводится к решению системы (11.50) в последовательные моменты времени.

Приращение температуры на шаге обычно на два-три порядка меньше, чем значение самой температуры, что означает соответствующую потерю точности аппроксимации за счёт погрешностей округления при вычислении собственно температуры. Для снижения их влияния уравнение (11.48), как правило, записывается для приращения на шаге:

$$[C(T^{(n+\alpha)})] \frac{\Delta T^{(n+1)}}{\Delta t^{(n+1)}} + [\mathbf{H}] \{\Delta T^{(n+1)}\} = \{F(T^{(n+\alpha)})\} - [\mathbf{H}] \{T^{(n)}\}. \quad (11.51)$$

где искомое приращение относится к вычисленным узловым температурам на предыдущем шаге (функции узла i) -

$$\Delta T^{(n+1)}(i) = T^{(n+1)}(i) - T^{(n)}(i), \quad (11.52)$$

а температурно-зависимые коэффициенты вычисляются для экстраполированной температуры $T^{(n+\alpha)}$. Аналогичная процедура используется и при решении квазистатических задач механики, в которых явная зависимость от времени в уравнении отсутствует, но значения нагрузок изменяются от шага к шагу.

11.7. Краткое резюме: два подхода к МКЭ как два метода численного моделирования в МСС

В предыдущих главах метод конечных элементов как процедура перехода от уравнений в частных производных к системе алгебраических уравнений был изложен с двух позиций, различающихся подходом к моделированию исходного объекта, состояние которого описывается уравнениями сплошной среды: механика, тепло- и массоперенос и др. Исторически первыми были способы разложения самого объекта на подобъекты, допускающие простую линейную модель – метод каркасов, сетевые методы. Подобное описание включает, во-1, (квази)линейные соотношения между условно "кинематическими" и условно "силовыми" переменными, описывающими состояние подобъекта (перемещения, скорости, температура, ток, напряжение, давление, энтальпия ...), во-2 – процедуру объединения соотношений, описывающих подобъекты, в общую алгебраическую систему. Формулировка процедуры объединения основана на балансных соотношениях (законах сохранения) в общих узлах соединения подсистем. Если структура объекта позволяет уверенно выделить его простые составляющие (стержневая конструкция, гидравлическая сеть, электрическая сеть ...), то основная задача такого " сетевого " описания в том, чтобы подобрать подходящие определяющие соотношения для подобъектов, обычно эмпирические.

С точки зрения построения расчётной схемы сетевые методы вполне можно охарактеризовать как инженерные, поскольку основное их содержимое – это (полу)эмпирические определяющие соотношения для элементов-подобъектов, которые берутся готовыми. Процедура объединения соотношений для подсистем в общую алгебраическую систему уравнений вполне элементарна, возможные проблемы с решением алгебраической системы связаны только с её матрицей, формирование которой полностью определяется структурой объекта и использованными определяющими соотношениями. Подчеркнём, что успех описания по сетевой модели напрямую зависит от того, в какой степени моделируемый объект похож на "сеть" или "каркас" (если исключить подгонки под заранее известный результат).

Непосредственное приложение таких сетевых методов к дискретизации непрерывных объектов, не сводящихся к "сетям" и "каркасам", как неоднократно отмечалось выше, в общем случае некорректно. В первую очередь – потому, что результат расчёта такой "сети", вообще говоря, зависит от способа разбиения на подобъекты и приписываемых значений коэффициентов. Дальнейшие разработки корректного численного метода описания непрерывных систем шли, вероятно, параллельно осознанию того, что основной целью тут должна быть не модель определённой системы, (термо)механической или (тепло)гидравлической, а решение уравнений в частных производных, описывающих поведение сплошной среды. Конечным итогом явился метод взвешенных невязок, кратко охарактеризованный выше.

Ключевую роль в формировании метода взвешенных невязок сыграло понятие обобщённого решения, приведённое выше. Оно формулируется через некоторый интеграл, и вполне соответствует основной идее математического описания в терминах моделей сплошной среды, основанных на интегральных законах сохранения/баланса. Требование же повсеместной непрерывной дифференцируемости искомых функций в ряде случаев оказывается избыточным. И, хотя дифференциальные уравнения на взгляд понятнее, в построении современных численных методов основную роль играют интегральные формулировки и поиск решения как поиск минимума соответствующего функционала, т.е. вариационные постановки задачи, что ранее было отмечено.

Некоторые основные особенности обоих подходов суммированы ниже, с тем, чтобы отметить общие черты построения их вычислительных алгоритмов, дающие основание применять название "метод конечных элементов" в обоих случаях. При этом подчеркивается, что сферы применения этих подходов различны, хотя иногда могут пересекаться.

11.7.1. МКЭ как "метод каркасов" или "метод сетей"

Сетевой подход правомерен, если моделируемый объект состоит из подобъектов - элементов, взаимодействующих в некоторых локальных местах соединения – "в узловых точках", причём возмущения среды, исходящие из этих узловых точек (узлов), влияют на состояние присоединённых к ним элементов вполне определённым образом, поддающимся количественному описанию. Например, в стержневой системе это деформация и напряжение в стержне, в элементе трубопровода – это скорость и давление в потоке и т.п., подчиняющиеся известным законам.

В литературе встречаются сетевые модели также и многомерных распределённых систем, в частности, в задачах теплопереноса, но очевидно, что сетевые модели по построению нульмерные, иногда – одномерные (например, элементы трубопроводов в нестационарных задачах), в том смысле, что они не включают такие математические конструкции как вектор или тензор, отражающими физическую суть. Возможности сетевых моделей пространственно аппроксимировать решения напрямую связаны с параметрами, приписываемыми индивидуально каждому элементу, требующими правил соответствия, зависящих от конкретной конфигурации (ср. рис. 10.2). По этой причине "каркасные"/сетевые модели *распределённых* систем априори нельзя назвать корректными.

В рассмотренном выше методе перемещений в МДТТ относительно корректный ввод соответствия "каркасных" элементов их распределённым "двойникам" (рис. 10.2) основан на принципе равенства виртуальных работ на заданном узловом перемещении, общем в обеих моделях среды. Причём, это соответствие потребовалось только для того, чтобы перейти от распределённых внутренних сил к узловым. Исходная пространственная модель конструкции – это конечный элемент с заданными правилами интерполяции узловых величин на всём элементе с помощью функций формы. Очевидный недостаток

метода перемещений – привязка к модели механической системы, т.е. МКЭ в форме метода перемещений существенно использует механические трактовки вводимых величин. В общем случае использования сетевых моделей для пространственной дискретизации многомерных задач сплошной среды требуется аналогичная процедура соответствия сетевой и распределённой моделей объекта. В этом, однако, нет необходимости, при наличии метода взвешенных невязок и его реализаций в виде МКЭ и метода контрольных объёмов.

Таким образом, "идейные" основы метода перемещений ограничены. Но в этом методе уже применена технология интерполяции в конечном элементе по системе функций форм, использующая хорошо разработанный аппарат полиномиальных функций, которая вполне универсальна. Процедура конечно-элементного объединения математически вполне аналогична переходу от функций форм в отдельных элементах к пирамидальным базисным функциям в узлах, а сам алгоритм построения матрицы жёсткости, основанный на последовательном переборе конечных элементов, не зависит от используемой формулировки МКЭ. Это позволяет строить аппроксимацию искомой распределённой функции нужной степени гладкости в универсальных 1-2-3-мерных конечных элементах стандартной формы и достичь нужной степени точности аппроксимации решения, варьируя мелкость разбиения и вид функций формы.

В итоге, метод перемещений даёт простую интерпретацию алгебраического аппарата МКЭ. Для построения же математически корректной расчётной процедуры многомерного МКЭ "каркасная"/сетевая аналогия не нужна – вместо этого вводится семейство финитных базисных функций в узлах, а метод их использования (метод взвешенных невязок) формулируется для любой системы (квази)линейных уравнений в частных производных, описывающих сплошную среду.

11.7.2. МКЭ как метод взвешенных невязок

Проблема корректной редукции распределённой системы, описываемой уравнениями сплошной среды, к дискретной решается в общих подходах метода взвешенных невязок, основные черты которого следующие.

- Исходная формулировка – (квази)линейное дифференциальное уравнение (система) в частных производных.

- Используемая эквивалентная (в одну сторону) формулировка – обобщённая, в виде интегралов, взятых от исходного уравнения, умножаемого поочерёдно на финитные функции из семейства, образующего базис в некотором пространстве функций, достаточном для аппроксимации численного решения – пространстве пробных функций.

- Способ дискретизации: разложение искомым функций по некоторому семейству базисных функций, которые в методе Бубнова-Галёркина берутся как базис в пространстве пробных функций. Используется алгебраический аппарат аппроксимации функциями формы в КЭ. Разложение подставляется в функционал обобщённой формулировки. Численное решение – это сеточная функция (функции), доставляющая минимум этому функционалу-интегралу.

- В МКЭ разложение по конечной системе функций следует вполне определённой технике, изложенной выше, составляющей основу процедуры дискретизации. Коэффициенты разложения служат искомыми сеточными функциями, подлежащими определению. Распространение решения на всю расчётную область – путём интерполяции по конечным элементам.

11.7.3. "Каркасы" vs. "взвешенных невязок" – не "вместо", а "вместе"

Процедура взвешенных невязок может быть сформулирована для 1D-3D конфигураций. Случаи сочленения более чем двух 1D элементов являются сопряжённой задачей и

требуют дополнительного рассмотрения, которое, собственно и проводится в рамках сетевых моделей на основе условий баланса, в конкретных типах физических задач. Математически, у метода сетей и метода взвешенных невязок мало общего, но алгоритмическая основа метода сетей является простым частным случаем общей процедуры в МКЭ, а соотношения в двухузловых элементах, сводимые к 2×2 матрицам, вполне аналогичны таковым в методе взвешенных невязок. Поскольку объект исследования в этих подходах один и тот же, сплошная среда, имеет смысл причислить к МКЭ и сетевые модели. Применяемые на практике реализации сетевых моделей могут отличаться от стандартных алгоритмов МКЭ (в частности, процедура КЭ объединения), и "сетевая модель, реализованная по МКЭ" означает вполне определённый алгоритм составления алгебраической системы.

В качестве заключения можно повторить, что сетевая теплогидравлика и метод "каркасов" пригодны для описания сетей и "каркасов", но в случае приложения к распределённым системам могут быть корректными только при наличии априорной информации о решении, что сильно сужает область применения этих подходов. С другой стороны, многомерное моделирование стержневых конструкций и сетей, отдельные элементы которых тогда будут представлены многими конечными элементами, может потребовать нереально больших ресурсов при достаточно больших размерах сети. Поэтому оба подхода нужны. Наконец, очевидно, что трактовка обоих упомянутых подходов к дискретизации уравнений в частных производных укладывается в рамки определения "проекционно-сеточный" – по сути, в этом и состоит процедура "дискретизации".

На этом закончено ознакомление с МКЭ как численной процедурой дискретизации. Далее будут рассмотрены особенности применения МКЭ в важнейших для практики ситуациях, связанных с нелинейным поведением системы.

12. Нелинейные задачи МДТТ

В рассмотренной выше процедуре КЭ–дискретизации алгебраические уравнения относительно узловых перемещений линейны, т.к. линейными были исходные уравнения и все промежуточные соотношения. Нелинейность в исходной постановке задачи возникает вследствие конечности деформации, вычисляемой по перемещениям, и нелинейности определяющего закона. Далее рассмотрены подходы к численному решению таких задач.

12.1. Формулировки для нелинейных задач. Последовательное нагружение

Все схемы численного решения задач МДТТ, основанные на перемещениях, требуют дискретного выражения деформаций и напряжений через перемещения. В использованных выше способах неявно предполагалось:

- а) процедура вычисления компонент тензоров деформаций и напряжений не зависит от достигаемого состояния равновесия (от перемещения относительно исходного состояния);
- б) определяющее соотношение – закон линейной упругости (Гука).

Оба этих предположения могут быть в общем случае нарушены: а) получаемые перемещения могут быть настолько велики, что уже нельзя не учитывать вращение тела при выражении внутренних сил через деформации (и затем – через перемещения), и условие малости конечной деформации, необходимое для использования тензора малых деформаций Коши, может не выполняться; б) линейная упругость обычно имеет место только при очень малых деформациях.

Линейность играет принципиальную роль в единственно существующем вычислительном аппарате сведения уравнений в частных производных к алгебраическим уравнениям. В процедурах численного решения алгебраических систем линеаризация тоже имеет принципиальное значение. Поэтому излагаемые ниже примеры подходов к решению нелинейных задач МДТТ фактически являются способами линеаризации исходных нелинейных соотношений. Эта линеаризация осуществляется по-разному в случаях геометрической и физической нелинейности и будет рассмотрена по-отдельности. Пока предположим, что можно использовать тензор малых деформаций, что будет продемонстрировано позже. Тогда можно ввести матрицу деформаций в том виде, как она приведена выше или аналогичном при других функциях формы.

Метод минимизации потенциальной энергии не может применяться в общем случае физически нелинейной задачи, т.е. при неупругом деформировании (зависящем от пути нагружения). В процедурах же методов перемещений и взвешенных невязок в случае неупругости соотношения для возможной работы (уравнение (10.23) и общая форма (11.27)) не зависят от определяющего соотношения. В методе перемещений условие равенства работ узловых и распределённых сил в КЭ можно представить в виде:

$$\{\Delta^{(e)}\}^T \{F\}_{in}^{(e)} = \int_{V_e} \{\delta \varepsilon^{(e)}\}^T \{\sigma^{(e)*}\} dV = \int_{V_e} \{\Delta^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T \{\sigma^{(e)}\} dV = \{\Delta^{(e)}\}^T \int_{V_e} [B^{(e)}]^T \{\sigma^{(e)}\} dV \quad (12.1)$$

Виртуальные перемещения и деформации по-прежнему можно считать достаточно малыми. Как и ранее, отсюда получается элементное уравнение, связывающее внутренние узловые силы и перемещения:

$$\int_{V_e} [B^{(e)}(u)]^T \{\sigma^{(e)}(\varepsilon(u))\} dV = \{F\}_{in}^{(e)}, \quad (12.2)$$

где тензор напряжений может зависеть от деформации достаточно общим образом.

Условие глобального равновесия и требование совместности узловых перемещений остаются без изменений. После процедуры поэлементного объединения и формирования глобальных матриц получается система алгебраических уравнений относительно узловых перемещений, которая будет нелинейной:

$$\int_{\Omega} [B(U)]^T \{\sigma(\varepsilon(U))\} d\Omega = \{R\} \quad (12.3)$$

Это же соотношение получается применением метода взвешенных невязок. Здесь введены глобальные вектор перемещений, матрица деформаций, вектор узловых сил. В символической форме –

$$\Sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{R} \quad \text{или} \quad \Sigma(\mathbf{u}) - \mathbf{R} = 0 \quad (12.4)$$

Если функции $B(u)$ и $\sigma(\varepsilon(u))$ известны, решение получаемой системы нелинейных алгебраических уравнений можно провести методом последовательных приближений. Основная трудность состоит в приведении системы уравнений (12.3) при заданном нелинейном поведении системы к виду, допускающему решение стандартными методами вычислительной линейной алгебры. При физической нелинейности явная зависимость напряжения от достигнутой деформации $\sigma(\varepsilon(u))$ в форме закона нелинейной упругости далеко не всегда существует – например, в обычно применяемой инкрементальной теории пластичности определяющее соотношение связывает не абсолютные величины тензоров, а их приращения, что требует соответствующей переформулировки уравнения (12.3). Специфика физически нелинейного деформирования определяет подход к решению задачи, который ниже изложен на примере "базовой" нелинейности – модели упруго-пластически деформируемого тела, в котором при вычислении напряжений по деформациям на шаге используется аналог закона Гука, получаемый путём линеаризации неупругого закона.

При конечных деформациях неточны используемые выше простые формы тензоров деформаций и напряжений. Использование более общих определений сопряжено с рядом дополнительных трудностей [Malvern], [Коробейников]. Здесь линеаризация связана со сведением процесса деформирования, трактуемого как геометрическое преобразование, к кусочно-линейному. Как упоминалось ранее, статическая задача, если она нелинейная, может решаться поэтапно: процесс нагружения при вычислениях разбивается на последовательные шаги $n=1, \dots, n_m$, на которых состояние меняется мало. Вводится изменяющийся дискретно параметр нагружения, обычно, имеющий размерность времени: $t_m = t_0 + \Delta t_1 + \dots + \Delta t_m$. На каждом из шагов деформирование должно быть мало с точки зрения некоторых критериев, с тем чтобы быстро и надёжно получать решение алгебраической системы на каждом шаге. Статическая задача решается как квазистатическая.

В случае более чем одного шага по времени (по нагружению) на последующих шагах после первого нагрузка будет прикладываться к уже нагруженной конструкции, что учитывается в системе уравнений (12.3) на уровне основного соотношения (11.27) метода взвешенных невязок. На $n+1$ -ом шаге в каждом узле будут приложены: силы $\{F^n(X^n)\}$ с n -го шага, вычисленные на конфигурации $\{X^n\}$, приращение внутренних сил, отвечающее неизвестным перемещениям на новом шаге $\{U^{n+1}\}$, и уравновешивающие их внешние силы $\{R\}^{n+1}$ при новом значении параметра нагружения:

$$\{F^n(X^n)\} + \int_{\Omega} [B(X^n)]^T \{\sigma^{n+1}(\varepsilon(U^{n+1}))\} dV = \{R\}^{n+1} \quad (12.5)$$

Отметим, что внутренние силы с предыдущего шага по нагружению, которые взаимоуравновешены к началу следующего шага, играют роль преднапряжений,

связанных с предысторией. Примерами такой предыстории могут служить натяжка канатов защитной оболочке реактора, неравномерный нагрев и многое другое.

Зависимость напряжений и деформаций в уравнении (12.5) от решения $u(x)$ может быть связана: (а) с заметным изменением геометрии при последовательном деформировании, что должно быть учтено при построении матрицы деформации и в тензоре напряжений; (б) с определяющим законом, связывающим компоненты тензоров напряжений и деформаций. С определённой точностью геометрические и физические факторы (а) и (б) могут быть введены в расчёт в рамках используемого приближения малых деформаций, причём, соответствующие алгоритмы могут строиться независимо. Далее рассмотрен сначала способ учёта геометрической нелинейности, затем – физической, на примере упруго-пластического материала.

12.2. Геометрическая нелинейность: конечные деформации

Под конечными деформациями в механике деформируемого тела понимаются такие движения, для количественного описания которых при одношаговом расчёте состояния равновесия под приложенной нагрузкой следует привлекать общий нелинейный тензор деформаций. Но изменение конфигурации на малом шаге относительно исходной системы может быть учтено в пошаговом процессе вычислений последовательных НДС путём соответствующего преобразования исходной системы отсчёта на следующем шаге по нагружению, т.е. расчётной сетки. Это позволяет упростить расчётную схему в целом – вместе с сеткой преобразуются и заданные на ней величины, тогда изменения, связанные с геометрией, будут на каждом малом шаге последовательного расчёта относительно малыми, и могут учитываться в приближении малых деформаций. Изменение метрических соотношений в конечном элементе учитывается в матрице деформаций при вычислении пространственных производных на текущем шаге по времени. Наряду с деформацией, процесс изменения конфигурации данного объёма часто сопровождается также его поворотом, который может быть не малым, например, при упругом изгибе. В этом случае компоненты общего тензора деформационного градиента (см. гл. 2) могут быть большими. Но в вычислениях метода конечных элементов участвует только тензор деформаций, вычисляемый в системе координат элемента. Очевидно, что в глобальной системе координат, при сборке матрицы, вращение также должно учитываться в вычислениях на каждом шаге. При малых вращениях это делается путём суммирования.

В англоязычной литературе подобный способ описания называется "updated Lagrangian" ("текущий лагранжев"). Ниже описывается простой способ его реализации в численном расчёте. Обзор геометрических понятий и определений, связанных с описанием кинематики геометрически нелинейного деформирования, имеется, например, в книгах [Malvern], [Коробейников], [Поздеев].

12.2.1. Компоненты тензора напряжений в системе элемента и в лабораторной системе

На каждом лагранжевом шаге расчёта методом последовательных нагружений определяются – *обновляются*, координаты узлов по перемещениям, вычисленным непосредственно из решения построенной алгебраической системы:

$$\{X^{(n)}\} \rightarrow \{X^{(n+1)}\} = \{X^{(n)}\} + \{U^{(n+1)}\}. \quad (12.6)$$

По перемещениям с помощью матрицы деформаций определяются приращения тензоров деформаций, по которым находятся приращения тензоров напряжений $\Delta\sigma_{ik}^{(n+1)}$ и новые значения тензора напряжений (обновление тензора напряжений):

$$\sigma_{ik}^{(n+1)} = \sigma_{ik}^{(n)} + \Delta\sigma_{ik}^{(n+1)}. \quad (12.7)$$

Определение приращений тензоров напряжений базируется на некотором определяющем соотношении (или некоторой их совокупности), составляющих основу *модели материала*. Простейшая модель – линейно-упругая, рассмотренная выше, основанная на соотношениях закона Гука. В ней приращения напряжений в конечном элементе выражаются через приращения деформаций через соответствующую *матрицу упругости*. В случае физически нелинейного поведения материала такая матрица может быть построена путём соответствующей линеаризации, на основе соотношений модели материала. Этот вопрос рассмотрен ниже по тексту. Здесь предполагается, что приращения напряжений некоторым образом определены.

После того, как на $n+1$ -м шаге определён новый тензор напряжений, задающий внутренние силы, и с ним – узловые силы на данном шаге, можно начинать следующий шаг по нагружению, т.е. обновлять нагрузки и строить новую матрицу жёсткости (если это предусмотрено на данном шаге). Рассмотрим подробнее процедуры обновления тензоров напряжений с точки зрения переменной геометрии конечного элемента.

Помимо деформирования конечный элемент может переместиться как целое и повернуться относительно неподвижной системы координат. Вместе с элементом должны "повернуться" и "деформироваться" компоненты тензора напряжений $\sigma_{ik}^{(n)}$, который вычислен на предыдущих шагах, безотносительно определяющего соотношения. Строго говоря, при больших деформациях следует использовать определение тензора напряжений в форме Пиолы-Кирхгофа (см. гл. 4). При малых деформациях поправки, связанные с преобразованием деформирования, часто малы относительно приращений компонент тензора напряжений, связанных с физикой (с определяющим соотношением), поскольку первые имеют порядок $\sigma_3 \varepsilon_3$, а вторые – порядок $E \varepsilon_3$, где E в упругом случае – модуль упругости, а при пластическом течении – модуль упрочнения. Максимальное главное напряжение σ_3 при пластическом течении имеет порядок предела текучести. Поэтому при упругих и малых пластических деформациях геометрическим эффектом деформации в изменении тензора напряжений можно, например, для металлов, пренебречь. Повороты же должны учитываться.

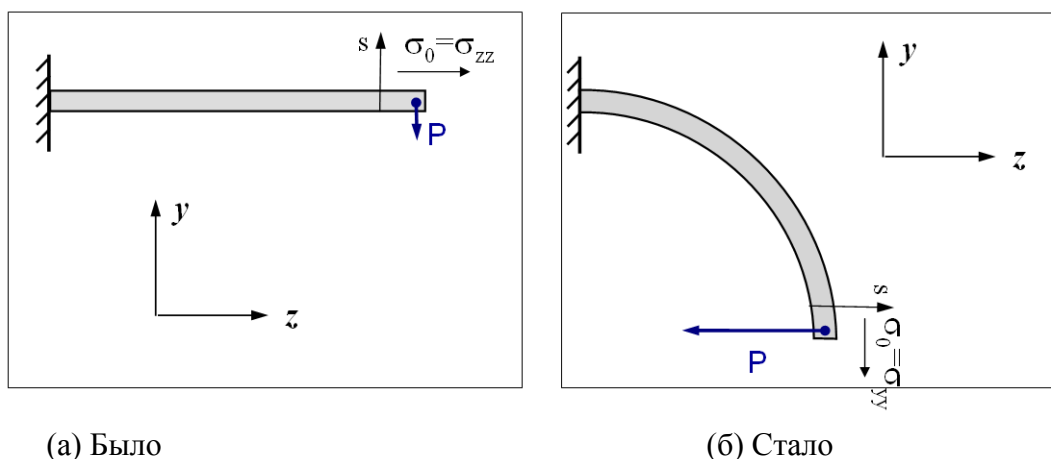


Рис. 12.1. Поворот локального напряжённого состояния вместе с элементом

Влияние вращения на вычисляемые в лабораторной системе координат компоненты тензора напряжений иллюстрирует рис.12.1. Пусть гибкая линейка (консоль) последовательно нагружается приложенной на конце возрастающей сосредоточенной силой. Рассматриваются нормальные напряжения при изгибе.

В начальный момент (рис.12.1а) линия изгиба горизонтальна и параллельна оси Ox лабораторной системы координат, и только вдоль этой оси имеется существенная

компонента деформации $\varepsilon_{zz} = \partial u_{zz} / \partial z$ (касательные напряжения при изгибе не рассматриваются). Ненулевая компонента тензора напряжений: $\sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz} = \sigma_0$. Если элемент конструкции повернётся при деформировании, то его НДС повернётся вместе с ним. В случае поворота относительно оси Oz на 90° компоненты тензора напряжений *относительно лабораторной системы* изменятся (рис.12.1б): единственной ненулевой компонентой напряжений после поворота станет $\sigma'_{yy} = \sigma_0$.

Таким образом, даже при физически малых деформациях повороты могут оказаться не малыми, как, например, в упругих тонких стержнях, оболочках и т.п. Для уменьшения поворота до малой величины шаг по времени можно разделить на ещё более мелкие. Ниже рассмотрен случай, когда малы как повороты, так и деформации на шаге вычислений. В этом случае преобразования конфигурации линейны: как мы помним, существенное для вычисления компонент тензоров напряжений и деформаций движение элемента складывается из вращения и деформации. При этом, как следует из (2.31), малые изменения компонент тензора за счёт вращения и деформации могут учитываться независимо. На каждом малом шаге вычисляются (малые) деформации и повороты относительно предыдущего положения. Разделение процесса нагружения/деформирования на малые шаги позволяет учитывать при вычислениях изменения конфигурации, оставаясь в рамках линейного подхода. Этот простой способ представления конечного деформирования в численной модели очень удобен, хотя точность вычисления, вообще говоря, ухудшается по мере деформирования.

12.2.2. Поворот тензора напряжений

Напомним соотношения между поворотом и деформацией малого отрезка, задаваемого компонентами $\{dx_i\}$, при малом движении материального тела. Две близкие точки с координатами $\{x_i\}$ и $\{x_i + dx_i\}$ при малом движении переходят в точки $\{x_i^*\}$ и $\{x_i^* + dx_i^*\}$, где $x_i^* = x_i + u_i$. Поле вектора малых перемещений $\{u_i\}$ задаёт геометрическое преобразование исходной конфигурации в деформированную и изменение дифференциала координат, задаваемого точками $\{x_i, x_i + dx_i\}$. Изменение в первом приближении линейно:

$$dx_i^* - dx_i = du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \equiv B_{ik} dx_k .$$

Матрица градиентов деформаций B_{ik} описывает малую вариацию относительного положения точек и представим в виде суммы матриц малых преобразований:

$$B_{ik} = 1/2(u_{i,k} + u_{k,i}) + 1/2(u_{i,k} - u_{k,i}) \equiv \varepsilon_{ik} + \omega_{ik} ,$$

$$\varepsilon_{ik} \equiv 1/2(u_{i,k} + u_{k,i}) \quad - \text{матрица малых деформаций,}$$

$$\omega_{ik} \equiv 1/2(u_{i,k} - u_{k,i}) \quad - \text{матрица малых поворотов.}$$

Малый поворот, описываемый матрицей ω_{ik} , задаёт соответствующее преобразование векторных и тензорных величин в данной окрестности (данном КЭ). Для получения компонент тензора напряжений в конечном элементе относительно неподвижной системы координат следует повернуть, т.е. преобразовать тензор напряжений вместе с элементом. Формула преобразования компонент вектора (тензора первого ранга) при малом повороте элемента с точностью до первого порядка по изменениям координат имеет вид:

$$X^*_k = X_k + \omega_{ki} X_i = (\delta_{ki} + \omega_{ki}) X_i .$$

Преобразование компонент тензора второго ранга:

$$\begin{aligned} \sigma^*_{kp} &= (\delta_{ki} + \omega_{ki}) (\delta_{pj} + \omega_{pj}) \sigma_{ij} = (\delta_{ki} + \omega_{ki}) (\delta_{pj} \sigma_{ij} + \omega_{pj} \sigma_{ij}) = \\ &= (\delta_{ki} + \omega_{ki}) (\sigma_{pi} + \omega_{pj} \sigma_{ji}) = \sigma_{kp} + \omega_{ki} \sigma_{ip} + \omega_{pj} \sigma_{jk} + \omega_{ki} \omega_{pj} \sigma_{ji} \approx \\ &\approx \sigma_{kp} + \omega_{ki} \sigma_{ip} + \omega_{pj} \sigma_{jk} . \end{aligned} \tag{12.8}$$

Здесь опущено слагаемое второго порядка малости. Изменение компонент тензора при малом повороте равно $\omega_{ki}\sigma_{ip} + \omega_{pj}\sigma_{jk}$. Компоненты ω_{pj} вычисляются по перемещениям узлов элемента на шаге вычислений, так же как компоненты тензора деформаций.

Полное изменение компонент тензора напряжений относительно лабораторной системы на малом шаге по нагружению приближённо представимо в виде суммы изменений, связанных с деформированием (d), и связанных с поворотом (ω): $\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^{(d)} + \Delta\sigma_{ij}^{(\omega)}$. Изменения, связанные с деформированием, учитываются только с точки зрения физического закона (определяющего соотношения). В линеаризованной форме для малых приращений $\Delta\sigma_{ij}^{(d)} = C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}$, и полное изменение –

$$\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^{(d)} + \Delta\sigma_{ij}^{(\omega)} = C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} + \omega_{jk}\sigma_{ki} + \omega_{ik}\sigma_{kj}. \quad (12.9)$$

Условие применимости этих соотношений, т.е., условие малости вращения на шаге по нагружению, есть условие малости полного угла поворота φ : $\varphi \ll 1$. Это условие может быть связано не столько с погрешностью учёта поворота в (12.9), сколько с влиянием квадратичного слагаемого в общем определении тензора деформаций (2.12) – погрешности, связанные с его учётом в тензоре деформаций Коши, вычисляемом на "повёрнутой" конфигурации, накапливаются при последовательном нагружении с поворотом, и даже в упругом случае (например, при изгибе: малые деформации, большие повороты) могут приводить к нефизичным результатам, т.к. в вычислениях невозможно отделить эффекты модели от физических эффектов. Более точные модели рассматриваются в рекомендованной литературе.

12.2.3. Производная по времени тензора напряжений

Для дальнейшего введём понятия скорости деформаций и "чисто деформационную" производную тензора по времени, которая в англоязычной литературе называется *коротационной* (corotational) – сопутствующей вращению. Определим массовую скорость \dot{u}_i в точке и скорость деформации $\dot{\varepsilon}_{ik}$ относительно лабораторной системы во времени задачи простейшими соотношениями (см. обсуждение определений дифференцирования тензоров по времени в [Malvern], [Коробейников]):

$$\dot{u}_i = du_i / dt, \quad \dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2}(\partial\dot{u}_i / \partial x_k + \partial\dot{u}_k / \partial x_i). \quad (12.10)$$

Эти выражения пригодны и в случае динамического нагружения, когда массовые ускорения существенны. Элементарный объём может деформироваться по разному в разных направлениях, следовательно, главные оси тензоров деформации и скорости деформации, вообще говоря, разные. В лагранжевой системе отсчёта элемента изменение величины в нём, описываемое материальной (полной) производной по времени, включает физическое изменение (для тензора напряжений – это изменение за счёт нагружения) и изменение за счёт движения элемента, в нашем случае учитывается только изменение из-за вращения. Коротационная производная тензора напряжений по времени задачи исключает вращение, и она связана с полной производной соотношением

$$\sigma_{ij}^J = \frac{D\sigma_{ij}}{Dt} - \Omega_{jk}\sigma_{ki} - \Omega_{ik}\sigma_{kj}, \quad (12.11)$$

где Ω_{ij} – тензор угловой скорости, выражаемый через компоненты массовой скорости \dot{u}_i :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial\dot{u}_j}{\partial x_i}\right). \quad (12.12)$$

Величина σ_{ij}^J называется также *яумановой (Jaumann) производной* тензора напряжений σ_{ij} по времени (см. [Коробейников]). Фактически, это то изменение тензора за ед. времени, что связано с деформированием, и оно вычисляется по деформациям с помощью определяющего соотношения. Для обозначения производной тензора напряжений по Яуманну используют символы $\overset{\nabla}{\sigma}^J$ и $\overset{\nabla}{\sigma}^J : \sigma^J \equiv \sigma^J$.

12.2.4. Обновление полного тензора напряжений. Давление и термдеформации

Приращение некоторой величины S на $n+1$ -м шаге Δt_{n+1} по времени (по нагружению) может быть записано через скорость её изменения:

$$\Delta S = \dot{S} \Delta t_{n+1} = S_{n+1} - S_n. \quad (12.13)$$

При квазистатическом нагружении производная по времени удобна для представления приращения на новом шаге. Скорость изменения тензора напряжений выражается в конечном элементе, преобразованном на шаге по нагружению, через скорости деформации с помощью определяющих соотношений. В упругом случае или в линеаризованной форме для случая неупругости –

$$\sigma_{ij}^J = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}. \quad (12.12)$$

Здесь C_{ijkl} – тензор модулей упругости или его аналог, $\dot{\varepsilon}_{ik}$ – тензор скоростей деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right). \quad (12.14)$$

Тензоры скоростей деформаций и вращений, $\dot{\varepsilon}_{kl}$ и Ω_{ij} , вычисляются, используя элементы матрицы деформаций $[B]$, вид которой аналогичен приведённому в (10.17). В 4-узловом билинейном элементе компоненты градиента массовой скорости \dot{u}_i могут быть получены дифференцированием по времени, а затем по пространственным координатам соотношения (11.7) для перемещений. Тензор скоростей деформаций будет связан с узловыми величинами массовой скорости соотношением вида (11.11). Алгебраическая матрица *скоростей* деформаций будет состоять из производных функций форм и формально не будет отличаться от матрицы деформаций в статическом случае, поскольку выражения для градиентов перемещений и массовых скоростей полностью аналогичны:

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \dot{u}_i^{(k)},$$

Новый тензор напряжений вычисляется на каждом шаге по времени непосредственно по величине σ_{ij}^J (12.12) и "поворачивается" (напомним, что деформационная составляющая учитывается только в определяющих соотношениях):

$$\sigma_{ij}(t + \Delta t) = \sigma_{ij}(t) + C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} + \omega_{jk} \sigma_{ki}(t) + \omega_{ik} \sigma_{kj}(t). \quad (12.15)$$

При вычислении напряжений девиаторная и шаровая составляющие тензоров напряжений и деформаций связаны каждая своими соотношениями. Имеем по определению:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3\varepsilon, \quad p = -1/3\sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}. \quad (12.16)$$

В упругом случае связь между шаровыми и девиаторными составляющими тензоров:

$$p^J = -K\varepsilon^J, \quad s_{ij}^J = 2Ge^J_{ij},$$

где K и G – объемный модуль и модуль сдвига. В случае нелинейного поведения материала определяющее соотношение на каждом шаге приводится к аналогичному виду,

но с переменными коэффициентами. В приближении линейной упругости прирост давления вычисляется через приращение объемной деформации ε как:

$$\Delta p^{n+1} = -K\Delta\varepsilon^{n+1}$$

При больших объёмных деформациях давление как функция объёма может быть вычисляться уравнению состояния через степень сжатия ("давление холодного сжатия"):

$$p^{n+1} = p(V^{(n+1)}/V^{(0)})$$

Если в рассчитываемом процессе существенно тепловое расширение, приращения термодформаций учитываются на каждом шаге по известному полю температуры в узлах. Новое НДС, включающее возможные термонапряжения, будет рассчитываться, исходя из полной деформации, как это рассмотрено в гл. 5.

Учёт теплового деформирования в квазилинейном приближении производится аддитивно, через термодформации (5.34), добавляемые при вычислении напряжений к механическим деформациям на шаге. Эти деформации в общем случае учитываются через уравнение состояния. Температура может также входить как фактор изменения коэффициентов определяющих соотношений материалов.

Итак, разбивая процесс деформирования на малые шаги, можно, с некоторой степенью точности, решать геометрически нелинейные задачи. В технических расчётах упругих задач поворот элемента часто не учитывается, т.к. полная упругая деформация на совокупности шагов для обычных ("гипоэластических") материалов типа металлов всегда мала геометрически, мала и поправка на поворот. Исключение могут составить "длинные" или тонкостенные конструкции, где при малой деформации в точках полный поворот относительно исходного состояния локально может быть значительным. В инженерных пакетах расчёт при больших перемещениях и поворотах обычно требует задания отдельной опции, подключающей соответствующую процедуру вычислений.

В задачах деформирования, возникающих при анализе аварий и подобных ситуаций, деформации как правило велики, могут быть велики и повороты. Постановки задач геометрически и физически нелинейны. Для учёта физических нелинейностей, связанных с неупругостью материала, необходимо использовать нелинейные модели материала.

12.3. Численная модель пластического поведения

Рассмотрим нелинейную модель пластического деформирования. Основные положения теории пластичности изложены в гл. 7. Основной объект её приложения – металлы, но по аналогии с пластической моделью построены и более сложные модели, описывающие неупругое поведение разных материалов. Достаточно универсальный и распространённый способ решения задач пластического деформирования состоит в применении инкрементальной теории пластичности с упрочнением, которое может быть линейным и более сложным. Она позволяет алгоритмически просто учесть упругую разгрузку и явление упрочнения при немонотонном нагружении.

Как отмечалось выше, процедура дискретизации в общем случае физически нелинейного деформирования базируется на линеаризации определяющего соотношения, причём результатом этой линеаризации служит *матрица определяющего соотношения*, аналогичная матрице упругости вида (10.20) или (10.44) в случае упругого материала. "Вычислительно-механические" основы процедуры построения этой матрицы легче понять на более простом алгоритме, изначально разработанном для расчётов динамики по явной схеме, когда каждый узел расчётной модели обсчитывается отдельно и нет необходимости матрицы вводить. Ниже приведена простая форма такой процедуры для случая идеальной пластичности – алгоритм "возврата на поверхность текучести" [Уилкинс], и его расширение на случай упрочняющегося пластического тела. Случай квазистатики будет рассмотрен в следующей главе.

12.3.1. Процедура "радиального возврата" на поверхность текучести

Вычисленные на очередной итерации перемещения могут отвечать как упругому, так и пластическому деформированию, в том смысле, что напряжения, вычисляемые по перемещениям, могут удовлетворять, либо не удовлетворять критерию упругости деформации на шаге (в нашем случае – критерию текучести Мизеса). В неупругом случае, при монотонном нагружении деформация на части шага по нагружению может быть упругой, затем – пластической (напомним, что разгрузка всегда идёт упруго). Это должно учитываться при вычислении новых напряжений на шаге по времени (итерации). Приращение давление рассчитывается отдельно, с помощью уравнения состояния, и в пластичности участвуют только тензоры девиаторы.

При обновлении напряжений в данном КЭ новые значения приращений компонент девиатора напряжений на шаге нагружения вычисляются сперва упругим образом. Пусть $(s_{ij})^{(e)n+1}$ – девиаторные напряжения на $n+1$ -м шаге, вычисленные по упругим формулам по полным приращениям девиаторных деформаций на шаге:

$$(s_{ij})^{(e)n+1} = (s_{ij})^n + 2G\Delta e_{ij}. \quad (12.17)$$

Используем функцию текучести, основанную на критерии Мизеса (7.10):

$$F(I_2, \sigma_y) \equiv I_2 - \sigma_y^2/3 = s_{ij}s_{ij}/2 - \sigma_y^2/3, \quad (12.18)$$

где предел текучести определён по порогу текучести при одноосном растяжении σ_{02} :

$$\sigma_y^2/3 = \sigma_{02}^2. \quad (12.19)$$

Если функция текучести (12.18) отрицательна, пластическое состояние в данном элементе не достигается. Положительность "упруго" вычисленной функции текучести означает, что в данном элементе должно быть пластическое состояние (отметим, что при более чем одной точке интегрирования в элементе возможна ситуация, в которой только часть КЭ охвачена пластическим течением). В предположении идеальной пластичности вычисленные компоненты девиаторов напряжений должны удовлетворять критерию текучести – функция текучести должна быть нулевой, и компоненты следует уменьшить так, чтобы вернуть их на поверхность текучести. Поверхность в пространстве компонент напряжений представляет собой гиперсферу (см. гл. 7), в главных осях она будет трёхмерной, условие нулевого следа тензора девиатора даёт окружность в сечении соответствующей плоскостью. Отсюда происходит англоязычное название процедуры – radial return algorithm [Уилкинс].

Для возврата состояния в данном КЭ на поверхность текучести уменьшается длина вектора, представляющего в пространстве компонент напряжённое состояние в данной точке: вычисленные значения девиаторов умножаются на нормирующий множитель q :

$$(s_{ij})^{n+1} = (s_{ij})^{(e)n+1} q, \quad q = \frac{\sigma_y^{n+1}}{S_e}, \quad S_e = \sqrt{\frac{3}{2} (s_{ij}^{(e)})^{n+1} (s_{ij}^{(e)})^{n+1}}}. \quad (12.20)$$

Здесь $\sigma_{y,n+1}$ – новый предел текучести, если учитывается упрочнение. Механическая интерпретация связана с условием текучести Мизеса: при монотонном нагружении приращение деформаций на шаге по времени идёт сначала упруго, и величина S_e возрастает, а затем – пластически, и тогда S_e не должно возрастать, если предел текучести постоянен. С точки зрения геометрии поверхности текучести интерпретация процедуры в том, что в пластическом состоянии вектор напряжённого состояния находится на окружности текучести (в случае произвольного расположения главных осей относительно системы координат – на "гиперсфере текучести"), что следует непосредственно из

уравнений пластического течения. Запишем уравнения Прандтля-Рейсса (7.28)-(7.30) через производные по времени от приращений:

$$2G(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_{ii}) = 2G\dot{e}_{ij} = \dot{s}_{ij}^{(e)} = \dot{s}_{ij} + 2Gs_{ij}\dot{\lambda}, \quad (12.21)$$

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{ii}^J, \quad \dot{\lambda} = \frac{\dot{Q}}{2\sigma_y^2} = \frac{3s_{ij}\dot{e}_{ij}}{2\sigma_y^2} = \frac{3\dot{S}}{2\sigma_y E_t}. \quad (12.22)$$

$$\dot{\lambda}=0 \quad \text{при } S < \sigma_y \text{ и при разгрузке, } s_{ij}\dot{e}_{ij} < 0. \quad (12.23)$$

Множитель $\dot{\lambda}$ равен нулю при значении интенсивности напряжения в пределах поверхности текучести и при разгрузке, когда материал в процессе формоизменения разгружается (упруго), производя работу, так что приращение энергии (мощность) формоизменения отрицательна: $s_{ij}\dot{e}_{ij} < 0$. При нулевом множителе $\dot{\lambda}$ скорость изменения тензора девиатора напряжений, вычисленная по упругому закону, совпадает с истинным её изменением. В определении $\dot{\lambda}$ первые два равенства описывают общий случай, включая идеальную пластичность, последнее равенство относится к случаю линейного упрочнения, с линейным изменением предела текучести в зависимости от приращения (скорости) девиатора деформации. Величина \dot{S} в данном случае – это скорость изменения интенсивности напряжений $S=(3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$, или эффективное напряжение. Работа внутренних сил при пластическом течении может быть также записана в виде

$$\dot{Q}^{(p)} = s_{ij}\dot{e}_{ij} = \sigma_y \dot{e}^{(p)} = S\dot{e}^{(p)}, \quad (12.24)$$

поскольку вследствие критерия текучести Мизеса $\sigma_y = S$. Само наличие соотношения с множителем $\dot{\lambda}$ связано с ассоциированным законом текучести (см. (7.7) и (7.9)), следующим из принятых постулатов теории пластичности.

Свернём равенство (12.21) с тензором девиатором истинных напряжений и воспользуемся условием текучести Мизеса:

$$2Gs_{ij}\dot{e}_{ij} = s_{ij}\dot{s}_{ij} + 2Gs_{ij}s_{ij}\dot{\lambda} = s_{ij}\dot{s}_{ij} + 2Gs_{ij}s_{ij}\frac{3s_{ij}\dot{e}_{ij}}{2\sigma_y^2} = s_{ij}\dot{s}_{ij} + 2Gs_{ij}\dot{e}_{ij},$$

откуда получим, что $s_{ij}\dot{s}_{ij} = 0$, т.е. скорость изменения девиатора истинных напряжений лежит в касательной плоскости к поверхности текучести, и модуль вектора девиаторов напряжений (в пространстве компонент) не изменяется, что соответствует условию текучести. Сказанное иллюстрируется рисунком 12.2.

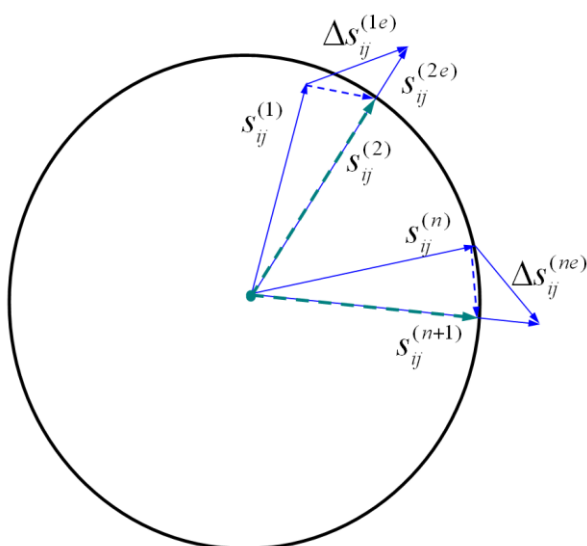


Рис.12.2. Уруго-пластическая коррекция тензора девиатора напряжений

С помощью (12.21), (12.24) и (7.23) нетрудно выразить пластическую часть деформации, используемую в модели упрочнения. Уравнение (12.21) можно записать как

$$\frac{\dot{s}_{ij}^{(e)}}{2G} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + s_{ij} \frac{3\dot{\epsilon}^{(p)}}{2\sigma_y} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \dot{\epsilon}^{(p)}. \quad (12.25)$$

Для приращения пластической деформации на $n+1$ -м шаге получим –

$$\Delta e_{ij}^{(p)} = \frac{(s_{ij})^{(e)n+1} - (s_{ij})^{n+1}}{2G} = \frac{1-q}{2G} (s_{ij})^{(e)n+1} = \frac{1-q}{2Gq} (s_{ij})^{n+1}. \quad (12.26)$$

Оценим величину нагрева за счёт работы внутренних сил при пластическом деформировании. Её можно вычислить при помощи соотношения (7.22):

$$dW^p = \sigma_y de^{(p)}.$$

Если сюда подставить предел текучести стали (низкосортной) $\sigma_y \sim 7 \cdot 10^8$ Па, плотность $\rho = 7200$ кг/м³ и пластическую деформацию $de^p = 0,002$ ($=0,2\%$), то удельная пластическая работа по деформированию до такой величины составит

$$\frac{1}{\rho} dW^p = \frac{\sigma_y}{\rho} de^p = \sim 7 \cdot 10^8 \text{ Па} \cdot 0,002 / 7200 \text{ кг/м}^3 \approx 200 \text{ Дж/кг},$$

что отвечает нагреву стали на $\sim 0,3$ К. Отсюда видно, что при численном решении квазистатической задачи, где деформация на шаге изменяется на доли процента, влиянием тепла пластической работы в металле, имеющим высокую теплопроводность часто можно пренебречь. При циклическом нагружении и ограниченном теплоотводе оно может быть заметно (пример: ломание проволоки попеременным сгибанием – разогрев места изгиба).

12.3.2. Учёт упрочнения при деформировании

Описанная процедура моделирует идеальную пластичность, при которой предел текучести не возрастает при пластическом деформировании (см. рис. 7.7Б). Сопротивление несущего сечения образца не растёт при возрастании приложенного напряжения, что физически должно приводить к деформированию с возрастающей скоростью, лимитируемой только инерцией материала и увеличением нагрузки на

оставшуюся упругую область несущего сечения. В качестве примеров укажем продольно растягиваемый стержень и трубу (или полый шар) под внутренним давлением (рис.12.2). В первом случае всё поперечное сечение, начиная с некоторого момента, попадает в область пластического течения. Во втором случае при росте нагрузки пластическое течение начинается с внешней границы и постепенно распространяется на всю толщину. В обоих случаях деформируемая конструкция при росте нагрузки превращается, начиная с некоторого значения, в "механизм с одной степенью свободы" (см. у Ю.Л.Работнова [РаботновМДТТ]), который разрушается за конечное небольшое время. Квазистатическое рассмотрение с моделью идеальной пластичности в первом случае возможно до достижения предела текучести в сечении, а во втором – до момента распространения пластичности на всё сечение трубы.

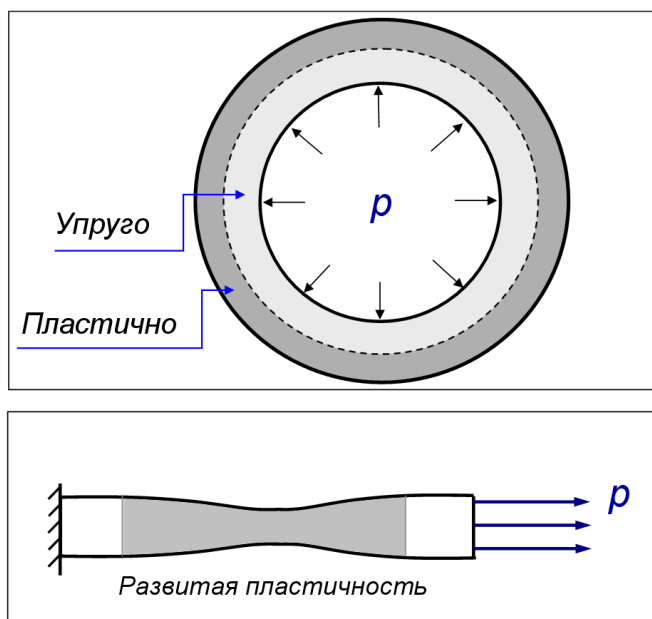


Рис.12.3. Пластическая область при нагружении трубы внутренним давлением и стержня растяжением

Физически, многие металлы упрочняются при деформировании – предел текучести повышается при пластическом деформировании, и это необходимо ввести в модель пластичности. Причина явления упрочнения в поликристалле упомянута в гл.7 – исчерпание возможности сдвигового деформирования кристаллических зёрен, наиболее податливых ("стопорение дислокаций"), и вовлечение в процесс деформирования других зёрен поликристалла более "жёстко" ориентированных относительно направления сдвига. Требуемая внутренняя сила и нагрузка растут. Процесс формально аналогичен упругому нагружению: рост деформации приводит к росту сил сопротивления. Отличие в том, что пластическая деформация необратима, и разгрузка происходит по другому пути, всегда соответствующему упругому состоянию. При этом достигнутому состоянию равновесия отвечает новый предел текучести – при повторении нагружения после разгрузки упругое состояние будет сохраняться приблизительно до достижения этого нового предела текучести, который может быть зависимым от знака нагрузки – растяжение или сжатие, что упоминалось в гл. 7 как эффект Бушингера.

Наиболее проста модель линейного упрочнения: зависимость напряжений от пластической деформации (зависимость между вторыми инвариантами девиаторов скоростей деформации и напряжений) имеет вид прямой линии. В её обоснование можно сказать, что характеристики упрочнения известны обычно с гораздо меньшей точностью, чем упругие величины, поскольку первые определяются кристаллическим строением

(решёткой), а вторые – деталями поликристаллической структуры. Эта структура, к тому же, существенно зависит от состава металла, термообработки и прочей предыстории.

Возвращаясь к численным методам отметим, что упрочнение как параметр модели материала в расчётах весьма полезно, т.к его введение в квазистатике улучшает сходимость процедуры последовательных приближений. Но для соответствия реальности необходимо знать фактические параметры моделируемого материала. Т.к. эти параметры часто неизвестны и могут зависеть от партии металла etc., эффективный модуль *линейного* упрочнения в расчёте часто неопределённый параметр, влияние которого следует изучить.

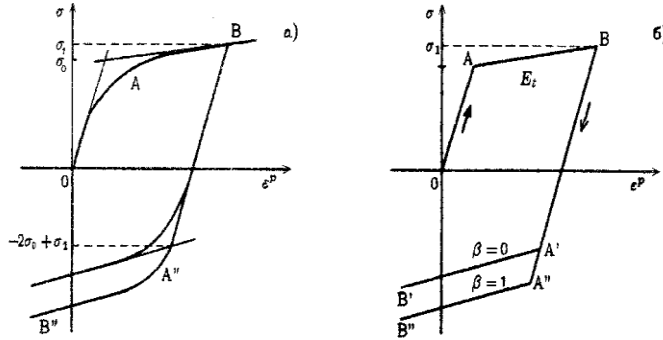


Рис. 12.4. Изотропное и трансляционное упрочнение при знакопеременном нагружении

Параметр модели упрочнения, задающий изменение предела текучести при пластическом деформировании, это обычно накопленная пластическая деформация (7.27):

$$\varepsilon^{(p)}(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{e}_{ij}^{(p)} \dot{e}_{ji}^{(p)}} dt. \quad (12.27)$$

Зависимость эффективного напряжения σ_y от $\varepsilon^{(p)}$ при нагружении подобна кривой ОАВ, изображенной на рис. 12.3а. В модели линейного упрочнения её схематизируют зависимостью, состоящей из двух отрезков прямых (рис.12.3б). Закон упрочнения строится в полной аналогии со случаем одномерного растяжения, по инвариантам.

Рассмотрим модель изотропного упрочнения. В ней центр поверхности текучести в пространстве девиаторов фиксирован, радиус же её зависит от пластической деформации, что соответствует процессу ОАВА"В" на рис.12.3а. Новый радиус поверхности текучести:

$$\sigma_y^{(n+1)} = \sigma_y^{(n)} + E_t \varepsilon^{(p)}. \quad (12.28)$$

Здесь величина E_t – модуль упрочнения (касательный модуль). В процедуре радиального возврата следует учесть это изменение поверхности текучести на шаге.

Один из известных алгоритмов, учитывающих изотропное и кинематическое упрочнение, был реализован в работе [Krieg & Key]. Рассмотрим, в частности, изотропное упрочнение. Выразим приращение эффективной пластической деформации (12.26), $\Delta e^{(p)}$:

$$\begin{aligned} (\Delta e^{(p)})^2 &= \frac{2}{3} \Delta e_{ij}^{(p)} \Delta e_{ij}^{(p)} = \frac{2}{3} \left(\frac{1-q}{2G} \right)^2 \frac{3}{2} s_{ij}^{(e)n+1} s_{ij}^{(e)n+1} = \left(\frac{1-q}{3G} \right)^2 S_e^2, \\ \Delta e^{(p)} &= \frac{1-q}{3G} S_e = \frac{S_e - \sigma_y^{n+1}}{3G} \end{aligned} \quad (12.29)$$

Исключая из равенств (12.28) и (12.29) величину σ_y^{n+1} , получим

$$\Delta e^p = \frac{S_e - \sigma_y^n}{3G + E_t}.$$

Для множителя q (12.20) в процедуре радиального возврата получим выражение

$$q = \frac{\sigma_y^{n+1}}{S_e} = \frac{\sigma_y^n + E_t \Delta e^p}{S_e} = 1 - \frac{3G(S_e - \sigma_y^n)}{S_e(3G + E_t)} \equiv 1 - r$$

Новые девиаторы напряжений находятся как

$$s_{ij}^{n+1} = q s_{ij}^{(e)n+1} = s_{ij}^{(e)n+1} - r s_{ij}^{(e)n+1}. \quad (12.30)$$

12.3.3. Нелинейное упрочнение и установившаяся ползучесть

Нелинейный закон упрочнения можно ввести в численный расчёт, обобщая разными способами линейные зависимости типа (12.28), например, как:

$$\sigma_y^{(+1)}(\sigma, \dots) = \sigma_y^{(0)}(T) + E_t(T, \sigma, \dots) \varepsilon^{(p)} + F(T, \sigma, \dots). \quad (12.31)$$

Здесь σ означает компоненты тензора напряжений, T – температура, $\varepsilon^{(p)} = \varepsilon$ – эффективная пластическая деформация. В пошаговой итерационной процедуре можно задавать зависимость σ_y не только от напряжений или деформаций, но и от других параметров, в частности, от скорости деформаций, что позволяет строить квазистатические модели ползучести (см. гл. 7). При практической реализации здесь возникают проблемы, связанные с одновременным учётом зависимости от температуры, напряжённого состояния (упрочнение) и, в моделях ползучести и аналогичных реологических явлений, также от времени. Экспериментальные данные по деформированию, даже, если они имеются, как правило, относятся к узкому диапазону режимов, и за пределами диапазона приходится прибегать к экстраполяции. Поэтому, реально работающие модели обычно довольно просты. Рассмотрим одну из них: применение для моделирования высокотемпературной ползучести степенной зависимости скорости эффективной пластической деформации $\dot{\varepsilon}$ от эффективного напряжения. При 1–осном растяжении она известна как закон Нортона, упоминаемый в гл. 7:

$$\dot{\varepsilon} = A(T) \sigma_{eff}^{m(T)}. \quad (12.32)$$

Напряжённое состояние будет нестационарным, когда зависимость скорости деформации от напряжённого состояния ненулевая.

При пластическом течении эффективное напряжение, или интенсивность напряжений, равно пределу текучести, $\sigma_{eff} = \sigma_y$, который может зависеть от температуры, от эффективной деформации и от интенсивности скорости пластической деформации, что представляется в виде

$$\sigma_y(T, \varepsilon^{(p)}) = \sigma_y^{(0)}(T) + E_t(T) \varepsilon^{(p)} + f(\varepsilon^{(p)}, T) = \sigma_e. \quad (12.33)$$

Зависимости от температуры в рассмотренных корпусных сталях можно выбрать таким образом, чтобы при низких температурах основной вклад в предел текучести вносил обычный предел текучести (т.е. пластическая часть), а при высоких температурах – последнее слагаемое (т.е. вязкая часть), зависимое от скорости деформации. Зависимость $f(\varepsilon)$, где при пластическом течении $\varepsilon^{(p)} = \varepsilon$, отвечает (12.32):

$$f(\varepsilon) = B(T) \dot{\varepsilon}^{\beta(T)}. \quad (12.34)$$

В случае достаточно высокой температуры можно положить $\sigma_y^{(0)}(T) \approx 0$ и $E_t = 0$. Обращая соотношения (12.33), (12.34) относительно $\dot{\epsilon}$ приходим к выражению для скорости эффективной пластической деформации, зависящей от эффективного напряжения в данной точке аналогично закону Нортона для скорости деформации ползучести. Роль температурно-зависимого коэффициента при степенной зависимости играет комбинация предела текучести и множителя $B(T)$ –

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{\sigma_e}{B(T)} \right)^{1/\beta(T)} \equiv A(T) \sigma_e^{m(T)} \quad (12.35)$$

Показатель степени $\beta(T)=0.25$ отвечает показателю степени $m=4$ в законе Нортона (12.32).

При нулевой скорости деформирования эффективный предел текучести при отсутствии "настоящей" мгновенной пластичности – нулевой. Когда материал начинает деформироваться, скорость деформации конечна, предел текучести становится конечным, уменьшая скорость деформации. При проведении итерационных вычислений эффективный предел текучести таким образом автоматически подстраивается под скорость деформации, и принимаемый σ – ϵ деформирования (12.33) удовлетворяется. Изменение предела текучести на шаге по закону "упрочнения" в форме (12.28) при этом также формально удовлетворяется, и, если правильно выбрать коэффициенты матрицы определяющего соотношения (см. ниже) метод работает и в квазистатическом режиме. Такая нелинейная пластическая модель внедрена в код HEFEST-M [MMod]. Она позволяет проводить устойчивые расчёты деформирования ползучести в квазистатическом режиме вплоть до развития пластической неустойчивости с деформациями $\sim 10 \div 100\%$. Теории ползучести, основанные на соотношении между скоростью деформации и приложенным напряжением, в механике так и называются: "теория упрочнения" (см. [Малинин 1975]), "time hardening model".

12.3.4. К построению квазистатического алгоритма модели пластичности

В квазистатике целью вычислений на текущем шаге по нагружению служит получение равновесного НДС, соответствующего новому значению нагрузки, при данном определяющем законе материала. В упругом случае при подстановке в уравнение (12.5) линейного определяющего закона получается линейная алгебраическая система. Единственность положения равновесия определяет единственность решения. Точность решения в основном определяется запасом механической устойчивости искомого положения равновесия, аппроксимационной точностью используемых КЭ и точностью алгебраической процедуры.

В случае неупругости вычисляемое положение равновесия может зависеть от пути нагружения, поскольку получаемая нелинейная алгебраическая система уравнений решается методом последовательных приближений. Близость численного решения к фактическому результату может зависеть от того, насколько близок путь нагружения в численном расчёте к моделируемому механическому процессу. Например, завышение упрочнения (фактического предела текучести) на итерации может сильно исказить итоговое распределение НДС. Это показывает важность выбора модели пластичности и её параметров. Реализация численного алгоритма также имеет первостепенную важность.

Построение численной процедуры решения квазистатической упруго-пластической задачи имеет два аспекта:

- получить эффективный (быстро и надёжно сходящийся) алгоритм численного решения уравнения (12.5);
- дать критерии сходимости и оценки численной погрешности.

К настоящему времени достаточно разработаны итерационные методы решения нелинейных алгебраических уравнений. Ближайшая задача – показать, как из формальной записи (12.5) с использованием рассмотренных выше моделей получается линейная алгебраическая система, аналогичная системе (10.39), решаемая стандартным способом.

При наличии упрочнения пластичность при монотонном нагружении можно рассматривать как нелинейную упругость, при которой существует в КЭ однозначная зависимость $\sigma(\varepsilon)$, хотя и нелинейная. После подстановки этой зависимости в уравнение (12.5) и линеаризации полученную алгебраическую систему можно решать одним из методов последовательных приближений. Существенное отличие от линейного случая (10.24ы) на шаге по нагружению связано с резким переходом от упругости к пластичности - в нелинейном уравнении (12.5) зависимости $\sigma(\varepsilon)$ в соседствующих элементах, находящихся в упругом и пластичном состояниях, могут сильно различаться на шаге, что можно охарактеризовать как "локальную" нелинейность, часто не позволяющую получить решение в одну итерацию. Для учёта локального состояния КЭ в каждом из них строится своя матрица определяющего соотношения, приближённо описывающая его нагружение как квазиупругое, что может отвечать, как нагружению, так и разгрузке. На основе таких элементных матриц жёсткости собирается общая матрица жёсткости упруго-пластической системы.

13. Физически нелинейные задачи квазистатики

Ниже рассмотрены некоторые общие понятия, связанные с методом последовательных приближений, и специфические для механики особенности. Решение больших *линейных* алгебраических систем, получаемых после линеаризации, представляет собой относительно решённую проблему, которая здесь не затрагивается. Отметим только, что существующие методы их решения разделяются на *прямые* и *итерационные*. В первом случае на каждом шаге строится обратная матрица получаемой линейной системы или её аналог, во втором случае линейная система решается итерационным методом. Всё излагаемое ниже по итерационным процессам etc., относится только к решению нелинейной алгебраической системы. Требуется свести её к линейной системе, решаемой стандартным способом.

13.1. О решении нелинейных алгебраических уравнений теории пластичности

Система алгебраических уравнений (12.4), полученная в результате дискретизации МКЭ, может быть записана в виде:

$$\{F(u)\}=0 . \quad (13.1)$$

Здесь вектор $\{F(u)\}$ обозначает набор функций $\{f_1(u), \dots, f_n(u)\}^T$ от компонент неизвестного вектора $\{u_1, \dots, u_n\}^T$. Все рассматриваемые ниже понятия основаны на линеаризации этой системы с последовательным решением линеаризованного уравнения. Напомним некоторые термины.

13.1.1. Метод последовательных приближений: терминология

Рассматриваемый здесь метод последовательных приближений является одношаговым, т.е., новое $(n+1)$ -е приближение к искомому решению вычисляется, используя найденное предшествующее n -е :

$$\{u_{n+1}\}=S(\{u_n\}), \quad (13.2)$$

где S обозначает оператор построенной численной процедуры, действующий на алгебраический вектор численного решения в узлах. Последовательные приближения должны образовывать сходящуюся последовательность. Для количественной оценки разности векторов и формулировки критериев сходимости вводится *норма* – положительная скалярная функция – "длина" вектора. Она должна быть линейна по умножению вектора на число и удовлетворять неравенству треугольника – для двух узловых векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} –

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|. \quad (13.3)$$

Норма матрицы может быть введена из нормы для вектора $\{x\}$ как *подчинённая норма* на основании соотношения $\|A\| = \max \|\mathbf{Ax}\|, \|\mathbf{x}\|=1$, при этом удовлетворяется неравенство

$$\|\mathbf{Ax}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\| \quad (13.4)$$

Норму для матриц можно ввести также как независимую, аналогично векторной норме. Для того чтобы эта норма была *согласованной*, должно выполняться неравенство (13.3).

После введения нормы векторы и матрицы образуют линейное нормированное пространство. Условие *монотонной* сходимости по данной норме записывается как

$$\|\{u_{n+1}\}\| < \|\{u_n\}\|. \quad (13.5)$$

13.1.2. Итерационный процесс метода Ньютона

Наипростейшую демонстрацию сходящегося процесса и условий сходимости можно провести на примере линейного алгебраического уравнения:

$$ax=b, \text{ или } F(x)=ax-b=0. \quad (13.6)$$

Для осуществления операции деления, обратной к умножению, требуется найти алгоритм приближённого решения через умножение и сложение, аналогичный процедуре деления "в столбик". Возьмём начальное приближение $x = x_0$. Невязка: $\delta = F(x_0) = ax_0 - b$. Выпишем последующие приближения как одношаговую схему (13.2):

$$x_1 = x_0 - \tau F(x_0) = x_0 - \tau(ax_0 - b), \quad x_2 = x_1 - \tau(ax_1 - b).$$

Рассмотрим постоянное τ . Процесс будет сходящимся при условии

$$|x_2 - x_1| < |x_1 - x_0|,$$

что даёт: $|\tau(ax_1 - b)| < |\tau(ax_0 - b)|$, или $|ax_1 - b| < |ax_0 - b|$. Внесём сюда выражение для $x_1 -$

$$|a(x_0 - \tau(ax_0 - b)) - b| = |ax_0 - b - a\tau(ax_0 - b)| = |ax_0 - b| |1 - a\tau| < |ax_0 - b|,$$

откуда получаем условие на τ : $|1 - a\tau| < 1$, или $0 < a\tau < 2$. Таким образом, сходимости имеется в довольно широком диапазоне параметра τ . При $0 < a$ имеем условие $\tau < 2/a$. Графически процесс при $0,5a < 1/\tau < a$ и при $a < 1/\tau$ изображён на рис.12.4а. При $a = 1/\tau$ мы бы получили точное решение на первом шаге. Метод продолжения по секущей, как известно, называется *метод секущих*, а по касательной – метод касательных, или *метод Ньютона*.

Формула приближённого решения уравнения общего вида $f(x)=0$ получается как продолжение по касательной в окрестности точки текущего приближения $x=x_c$:

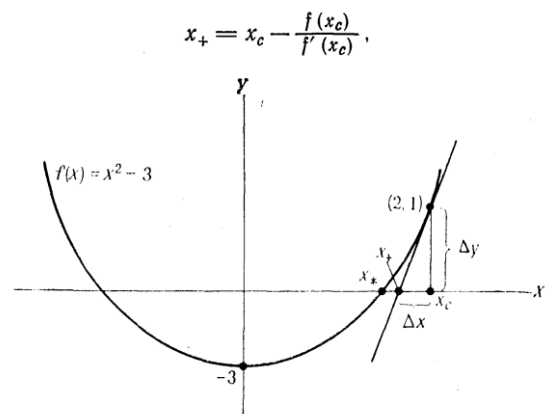
$$y(x) \approx y(x)^+ = f(x_c) + f'(x_c)(x - x_c) \quad (13.7)$$

Новое приближение получается из условия равенства нулю приближённой функции $y(x)^+ = 0$, откуда алгоритм итераций:

$$x_+ = x_c - f(x_c)/f'(x_c).$$

Графически процесс изображён на рис.12.4б.

а)



б)

Итерация метода Ньютона для $f(x) = x^2 - 3$
(в искаженных масштабах).

Рис. 12.4. Метод секущих (а) и метод касательных (б).

Чтобы не вычислять часто производную $f'(x_c)$ и её обратную величину применяется *модифицированный метод Ньютона*, в котором производная вычисляется не на каждой итерации, т.е. представляющий собой комбинацию метода касательных и секущих ("метод

хорд и касательных"). Метод Ньютона имеет хорошую сходимость, если начальное приближение взято достаточно близко к решению. Чтобы попасть в эту окрестность быстрой сходимости, т.е. получить хорошее начальное приближение, в комбинации с методом Ньютона применяют более медленные, но "всеядные" итерационные методы, например, метод деления отрезка пополам.

Процедура естественным образом обобщается на системы алгебраических уравнений вида (13.1):

$$\{F(\mathbf{X})\} = 0,$$

где $\{F(\mathbf{X})\} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \{F_1(\mathbf{X}), \dots, F_n(\mathbf{X})\}^T$ – это матрица–вектор n функций от компонент неизвестного вектора $\mathbf{X} = \{X\}$, решения системы. Задаёмся начальной точкой $\mathbf{X}^c = \{X^c\}$ из предполагаемой окрестности решения. Раскладывая функции $F_1(\mathbf{X}), \dots, F_n(\mathbf{X})$ в ряд Тейлора в окрестности начальной точки $\mathbf{X}^c = \{X^c\}$, приближённое выражение для $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ записываем в виде, аналогичном (13.7):

$$\{F(\mathbf{X})\} \approx \{F\}^{+1} = \{F\}^c + [T^{(c)}](\{X\}^{+1} - \{X\}^c) = 0 \quad (13.8)$$

Здесь обозначено $\{F\}^c = \{F(X^{(c)})\}$, а матрица $[T^{(c)}]$ играет роль *касательной* матрицы, т.к. она задаёт касательную плоскость к векторной функции $\{F_i(\mathbf{X})\}$ и составлена из частных производных по компонентам неизвестного вектора:

$$T_{ik}^{(c)} = \frac{\partial F_i^{(c)}}{\partial X_k}. \quad (13.9)$$

Схема итераций имеет вид, аналогичный одномерному случаю – новое приближенное значение $\{X\}$ находится как:

$$\{X\}^{+1} = \{X\}^c - [T^{(c)}]^{-1}(\{F\})^c \quad (13.10)$$

Итерационный процесс завершается, когда погрешность решения, вычисляемая определённым образом, уменьшается до заданной малой величины. Напомним, что здесь итерационный процесс строится для решения нелинейной алгебраической системы, полученной в результате процесса дискретизации исходной системы уравнений механики. В вычислительной гидродинамике для этого употребляется термин "внешние итерации". Получающаяся в результате линеаризованная система алгебраических уравнений может решаться на внешней итерации также итерационно – это будут "внутренние итерации".

13.1.3. Нелинейности в теории пластичности

Вернёмся к нелинейным упруго-пластическим задачам. Все описанные ранее процедуры построения матрицы жёсткости (т.е. матрицы линейной алгебраической системы, из которой получают узловые перемещения) основаны на введении матрицы упругости, что и позволяет ввести квазилинейную алгебраическую систему и вычислять её коэффициенты. Линеаризация строится на основе соответствующих уравнений, в частности, Прандтля-Рейсса, задающих определяющий закон пластического течения – в рамках инкрементальной модели пластического течения с упрочнением. Ниже рассмотрена процедура построения матрицы определяющего соотношения для закона линейного упрочнения (12.28). Процедура аналогична той, что описана выше для алгоритма радиального возврата и вполне ей аналогична:

– если элемент находится в упругом состоянии, то новые напряжения вычисляются по закону линейной упругости как –

$$\sigma_{ij}^{i+1} = \sigma_{ij}^i + C_{ijkl}^{(e)} \dot{\epsilon}_{kl}^{(p)} dt. \quad (13.11)$$

– если при нагружении элемент находится в пластическом состоянии, то новые напряжения вычисляются по линеаризованному определяющему соотношению через некоторую *матрицу определяющего соотношения* при пластическом состоянии $C_{ijkl}^{(t)}$:

$$\sigma_{ij}^{i+1} = \sigma_{ij}^i + C_{ijkl}^{(t)} \dot{\varepsilon}_{kl}^{(p)} dt. \quad (13.12)$$

При выборе способа вычисления напряжений (13.11)–(13.12) состояние элемента по-прежнему идентифицируется по функции текучести (12.18), в зависимости от её знака.

Текущие коэффициенты элементных матриц жёсткости при этом определяются в соответствии с (10.25), т.е. элементных матриц линеаризованного закона деформирования, но этот закон в каждом элементе свой. Он может задаваться матрицей упругости типа (10.20), единой при упругом деформировании элемента данного материала, либо, в случае упруго-пластичности, заменяться некоторой "касательной" матрицей упругости $C_{ijkl}^{(t)}$, вычисляемой в каждом элементе и использующей модуль упрочнения для определения нового локального радиуса поверхности текучести. Отметим, что здесь слово "касательный" в задании локального аналога элементной матрицы упругости следует отнести к "касательному модулю" в линеаризованной модели пластического деформирования. В монографии [Коробейников] для общего случая введён термин "матрица определяющего соотношения", который ниже также будет использоваться.

13.1.4. Матрица определяющего соотношения в модели линейного упрочнения

Определим вид матрицы определяющего соотношения (МОС) для рассмотренной выше модели линейного упрочнения. Изложение основано на [Беличко 2001]. Вместо приращений полного тензора напряжений на шаге по нагружению в деформируемом КЭ, используются производные по времени в форме (12.11). Эквивалент соотношений (13.11)–(13.12) для производной напряжений по времени –

$$\sigma_{ij}^J = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}, \dot{\varepsilon}_{kl}, E_t) \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (13.13)$$

где вид матрицы зависит от характера деформирования. Для единообразия обозначений признак ямановой производной будем в приводимых ниже выкладках опускать и обозначать дифференцирование напряжений по времени точкой, подразумевая, что вращение КЭ учтено. Коэффициенты определяющего закона могут зависеть от деформации, скорости деформации в данном КЭ, температуры и параметров материала.

Вид элементной матрицы упругости для двумерных задач плоских напряжений и осесимметричного нагружения был приведён выше. Для применения этой единообразной записи в неупругом случае в расчёте следует уметь определять коэффициенты матрицы C_{ijkl} , исходя из конкретного вида определяющего закона (13.13) в данном элементе. Эффективность решения получаемой квазилинейной алгебраической системы уравнений зависит в значительной степени от того, насколько точно адекватно построена её матрица жесткости, вычисляемая с помощью элементных касательных матриц упругости. Здесь термин "упругость" подчеркивает линеаризацию исходного нелинейного определяющего соотношения.

Для элемента, в котором присутствуют пластические деформации, функция текучести (12.18) равна нулю:

$$F(I_2(s_{ij}), \sigma_y) = 1/2 s_{ij} s_{ij} - \sigma_y^2 / 3 = 0. \quad (13.14)$$

Рассмотрим случай изотропного упрочнения, $\sigma_y = \sigma_y^0 + E_t e^p$. В модели с переменным касательным модулем E_t , представляющим собой некоторую функцию текущего

состояния, величина σ_y^0 будет соответствовать пределу текучести на предыдущем шаге. Дифференцируя (13.14) по времени можно написать:

$$s_{ij}\dot{s}_{ij} - 2/3\sigma_y\dot{\sigma}_y = 0 . \quad (13.15)$$

Из уравнений (12.24) и (7.8) следует, что в состоянии пластичности

$$\dot{\sigma}_y = E_t\dot{\varepsilon}^{(p)} = 2/3E_t\dot{\lambda}\sigma_y . \quad (13.16)$$

Внося это в предыдущее уравнение, исключаем производную $\dot{\sigma}_y$ –

$$s_{ij}\dot{s}_{ij} - 4/9E_t\sigma_y^2\dot{\lambda} = 0 .$$

Используя тождества $\dot{\sigma}_{ij} = \dot{s}_{ij} - \dot{p}\delta_{ij}$ и $s_{ij}\delta_{ij} = 0$, запишем это соотношение в виде

$$s_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - 4/9E_t\sigma_y^2\dot{\lambda} = 0 \quad (13.17)$$

На внутренней стороне поверхности текучести напряжения удовлетворяют упругому соотношению $\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{(e)}\dot{\varepsilon}_{kl}^{(e)}$. С учётом равенств

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^{(e)} = \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^{(p)} = \dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{\varepsilon}\delta_{kl} - \dot{\lambda}s_{kl}$$

преобразуем (13.17):

$$0 = s_{ij}\dot{\sigma}_{ij} - 4/9E_t\sigma_y^2\dot{\lambda} = s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}\dot{\varepsilon}_{kl}^{(e)} - 4/9E_t\sigma_y^2\dot{\lambda} = s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda}s_{kl}) + s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}\dot{\varepsilon}\delta_{kl} - 4/9E_t\sigma_y^2\dot{\lambda} \quad (13.18)$$

откуда выражаем множитель $\dot{\lambda}$ (13.10):

$$\dot{\lambda} = \frac{s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}(\dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{\varepsilon}\delta_{kl})}{s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}s_{kl} + 4/9E_t\sigma_y^2} = \frac{s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}\dot{\varepsilon}_{kl}}{s_{ij}C_{ijkl}^{(e)}s_{kl} + 4E_t\sigma_y^2/9} . \quad (13.19)$$

Для определения МОС воспользуемся тождеством

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(p)} = \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} = C_{ijkl}^{(t)}\dot{\varepsilon}_{kl} = C_{ijkl}^{(e)}\dot{\varepsilon}_{kl}^{(e)} = C_{ijkl}^{(e)}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^{(p)}) = C_{ijkl}^{(e)}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda}s_{kl}), \quad (13.20)$$

это следует из определения линейного упрочнения и иллюстрируется рис. 13.1. Внесём в (13.20) выражение (13.19) для $\dot{\lambda}$:

$$C_{ijkl}^{(t)}\dot{\varepsilon}_{kl} = C_{ijkl}^{(e)}\dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{C_{ijpq}^{(e)}s_{pq}s_{mn}C_{mnkl}^{(e)}\dot{\varepsilon}_{kl}}{s_{mn}C_{mnkl}^{(e)}s_{kl} + 4E_t\sigma_y^2/9} = \left(C_{ijkl}^{(e)} - \frac{C_{ijpq}^{(e)}s_{pq}s_{mn}C_{mnkl}^{(e)}}{s_{mn}C_{mnkl}^{(e)}s_{kl} + 4E_t\sigma_y^2/9} \right) \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (13.21)$$

Напомним, что дифференцирование по времени здесь служит только обозначением приращений $d\sigma_{ij}$, $d\varepsilon_{kl}$ etc. напряжений и деформаций на шаге по нагружению в локальной системе конечного элемента. Учитывая произвольность величины $\dot{\varepsilon}_{kl}$ в равенстве (13.21), получаем искомое соотношение для построения МОС в элементе при пластическом течении с законом упрочнения, задаваемым касательным модулем E_t :

$$C_{ijkl}^t = C_{ijkl}^e - \frac{C_{ijpq}^e s_{pq} s_{rs} C_{rskl}^e}{s_{ij} C_{ijkl}^e s_{kl} + 4E_t \sigma_y^2 / 9} . \quad (13.22)$$

Упруго-пластическое деформирование изотропно, и из уравнений Прандтля-Рейсса (13.10) следует, что построение матрицы определяющего соотношения, т.е., линейного соотношения, связывающего алгебраические векторы деформаций и напряжений в

элементе, полностью аналогично случаю упругой изотропии, рассмотренному ранее. Для этого используются компоненты полученного тензора "модулей псевдоупругости" C_{ijkl}^t .

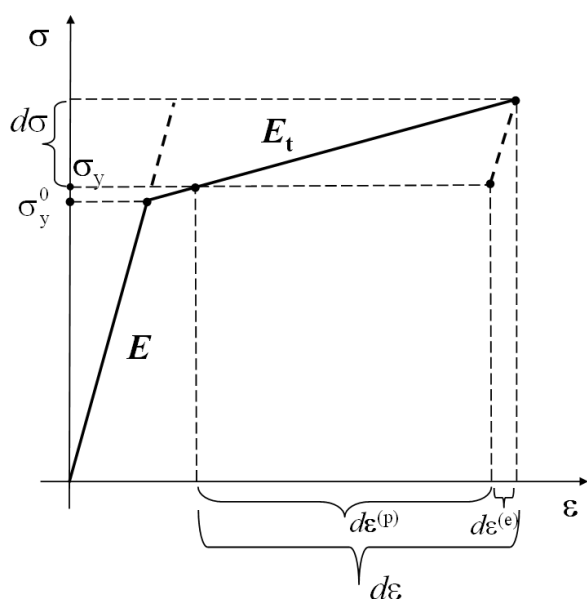


Рис. 13.1 Полная, упругая, пластическая (остаточная) деформация при одномерном растяжении

Делая величину E_t зависимой от различных физических параметров, можно получать численные модели различных законов упрочнения, в том числе, зависящих от скорости деформации (2-я стадия ползучести), как это описано выше. Матрица жёсткости строится по найденной МОС как в упругом случае, используя матрицу деформаций. В итоге нелинейное уравнение (12.4) будет линеаризовано на данном шаге по нагружению, т.е. оно может быть приведено к виду (13.8), т.е. к линейной алгебраической системе. На следующем шаге НДС меняется, и, вследствие нелинейности, меняются коэффициенты МОС, они должны

быть найдены заново, т.е. касательная матрица в соотношении (13.8) должна быть построена заново и заново найдена обратная матрица в (13.10). Это наиболее затратная часть всей процедуры численного решения. Если изменения не велики, то матрицу можно не перестраивать – это несколько увеличит количество итераций, но сэкономит время на обращении матрицы – как отмечалось, для сходимости итераций в методе Ньютона необязательно использовать точно касательную матрицу. При этом, погрешности могут быть связаны не только с неточностями линеаризации, но и с ошибками округления. Имеющаяся некоторая свобода в коэффициентах касательной матрицы может быть использована для улучшения её качества и ускорения расчёта. Рассмотрим пример такого показателя качества.

13.1.5. Свойства матрицы линейной системы: погрешность и число обусловленности

Описанная нелинейная процедура – итерационная, она требует многократного решения некоторой линейной алгебраической системы уравнений вида

$$[K]\{u\}=\{R\} . \quad (13.23)$$

Фактическая ошибка, т.е. различие n -го приближения и точного решения $\{u\}$ по определению – это:

$$\|\{\delta u\}^n\|=\|\{u\}-\{u\}^n\| . \quad (13.24)$$

В процессе решения производятся многие миллиарды арифметических действий. Для того, чтобы ошибка решения не нарастала при вычислениях из-за округлений, матрица системы должна обладать свойством, называемым хорошей обусловленностью. Плохая обусловленность может сделать получение решения невозможным. Рассмотрим вопрос о влиянии на решение малых изменений (возмущений) правой части и левой части, т.е. элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений (13.23). Пусть правая часть ("нагрузка") известна неточно:

$$[\mathbf{K}]u = \mathbf{R} + \delta\mathbf{R} .$$

Формальное решение: $u = [\mathbf{K}]^{-1}\mathbf{R}$. Точным решением системы с возмущенной правой частью $\mathbf{R} + \delta\mathbf{R}$ будет некоторый вектор $u + \delta u$, удовлетворяющий равенству

$$[\mathbf{K}] (u + \delta u) = \mathbf{R} + \delta\mathbf{R}. \quad (13.25)$$

Соответственно –

$$u + \delta u = [\mathbf{K}]^{-1} (\mathbf{R} + \delta\mathbf{R}) ,$$

а, так как $u = [\mathbf{K}]^{-1} \mathbf{R}$, то

$$\delta u = [\mathbf{K}]^{-1} \delta\mathbf{R}. \quad (13.26)$$

Для измерения δu воспользуемся парой совместимых векторной и матричной норм. Это приведет к оценке

$$\|\delta u\| \leq \| [\mathbf{K}]^{-1} \| \|\delta\mathbf{R}\| , \quad (13.27)$$

где при некотором $\delta\mathbf{R}$ возможно равенство. Таким образом, возмущение точного решения может превосходить возмущение правой части не более, чем в $\| [\mathbf{K}]^{-1} \|$ раз.

Для определения *относительного* эффекта того же самого возмущения заметим, что

$$\|\mathbf{R}\| \leq \|\mathbf{K}\| \|u\| .$$

Поделив (13.27) на $\|[\mathbf{K}]u\| = \|\mathbf{R}\|$, получим такую оценку для "коэффициента усиления" возмущения правой части:

$$\frac{\delta u}{u} \leq \| \mathbf{K} \| \| \mathbf{K}^{-1} \| \frac{\delta\mathbf{R}}{\mathbf{R}} \quad (13.28)$$

Предположим теперь, что *матрица* системы изменилась на $\delta\mathbf{K}$. Тогда возмущенное решение $u + \delta u$ будет обеспечивать равенство $(\mathbf{K} + \delta\mathbf{K})(u + \delta u) = \mathbf{R}$, откуда следует, что

$$\delta u = - \mathbf{K}^{-1} \delta\mathbf{K} (u + \delta u)$$

и, соответственно, для норм –

$$\|\delta u\| \leq \| \mathbf{K}^{-1} \| \| \delta\mathbf{K} \| \| u + \delta u \| ,$$

или, что то же самое,

$$\|\delta u\| / \| u + \delta u \| \leq \| \mathbf{K}^{-1} \| \| \delta\mathbf{K} \| .$$

Умножив и разделив правую часть на $\|\mathbf{K}\|$, получим неравенство в относительных величинах:

$$\frac{\|\delta u\|}{\| u + \delta u \|} \leq \| \mathbf{K} \| \| \mathbf{K}^{-1} \| \frac{\|\delta\mathbf{K}\|}{\|\mathbf{K}\|} \quad (13.29)$$

Как в этом выражении, так и в (13.28), верхней границей относительного изменения точного решения служит произведение порождающего его относительного возмущения данных (правой части, или матрицы) на одно и то же число $\|\mathbf{K}^{-1}\| \|\mathbf{K}\|$. Это число называют *числом обусловленности матрицы* \mathbf{K} в процедуре решения линейной системы (указание на процедуру обычно опускается) и обозначают как $\text{cond}(\mathbf{K})$.

Т.к. для любой подчиненной матричной нормы выполняется равенство $\|\mathbf{I}\| = 1$, и по определению $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{I}$, \mathbf{I} – единичная матрица, то справедлива оценка

$$1 = \|\mathbf{I}\| = \|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}\| \leq \|\mathbf{K}^{-1}\| \|\mathbf{K}\| , \quad (13.30)$$

так что $\text{cond}(\mathbf{K}) \geq 1$ для любой матрицы \mathbf{K} .

Число обусловленности матрицы \mathbf{K} характеризует максимальный эффект от возмущений в \mathbf{K} и \mathbf{R} при решении линейной системы. Из оценок (13.28) и (13.29) следует, что при большой величине $\text{cond}(\mathbf{K})$ точное решение системы может существенно изменяться даже при малом изменении данных. Матрицы \mathbf{K} с "большими" $\text{cond}(\mathbf{K})$ принято называть плохо обусловленными, а с "малыми" $\text{cond}(\mathbf{K})$ – хорошо обусловленными.

Оценку числа обусловленности матрицы, как можно показать, даёт отношение максимального и минимального собственных чисел. Если собственные числа расположены "кучно", обусловленность – хорошая, если нет – плохая. В пределе, когда модуль минимального собственного значения стремится к нулю, матрица вырождается в особенную.

Геометрическая интерпретация. Если матрицу \mathbf{K} отождествлять с линейным преобразованием, то плохо обусловленная матрица переводит компактную область в сильно растянутую, погрешности вычислений сильно изменяют вид преобразованной области и ограничивают точность восстановления её первоначальной формы.

Число обусловленности уже построенной матрицы можно уменьшать, производя независимую её коррекцию. При этом сходимость может несколько ухудшиться за счёт отклонения от "правильной" матрицы, но выигрыш за счёт уменьшения влияния ошибок округления может перевешивать проигрыш в сходимости.

13.1.6. О критериях сходимости итераций и общих проверках решения

Полученное на данной итерации НДС проверяется на соответствие критериям близости к решению – *критериям сходимости*. Критерии сходимости итераций используют функционалы невязки (см. гл. 11), построенные так, чтобы они стремились к нулю при наличии сходимости к некоторому решению (как правило, всё же, искомому). С точки зрения механики эти функционалы могут быть следующими:

- квадрат или модуль приращения средней деформации на итерации;
- энергетический критерий: работа сил на малом перемещении на данной итерации.

Примеры соответствующих выражений приведены ниже. Пороговые значения этих критериев, нужные для завершения итераций оцениваются и затем уточняются из опыта. Использование невязки естественно, т.к. предел последовательных приближений заранее неизвестен. Применяемые критерии сходимости аналогичны критерию Коши сходимости числовых последовательностей $\{x_n\}$, где роль разности $|x_{n+1} - x_n|$ выполняют некоторые функционалы, связанные с перемещениями на итерации.

Для контроля желательны также общие проверки достижения нужного результата:

- в случае достигнутой сходимости – того, что достигнутое состояние действительно равносуще (существование решения), а также единственно при данной нагрузке;
- в случае отсутствия сходимости итераций следует оценить достижимость состояния механического равновесия при данных условиях, т.е., существование решения исходных уравнений.

Единственность решения в методе последовательных нагружений может быть проверена измельчением шагов по нагружению – при устойчивом деформировании, т.е., отсутствии бифуркаций состояния системы (что также требует дополнительного анализа), и применении корректной процедуры решения единственность обычно гарантируется хорошей сходимостью итераций при таких проверках. Достижение состояния равновесия, если оно существует, контролируется надлежащим образом построенными функционалами невязок и величиной погрешности. Если не удастся сделать критерии сходимости достаточно малыми, это означает недостаточную устойчивость численной процедуры, что может иметь как численную, так и физическую природу. Полное

отсутствие сходимости итераций тоже может иметь физическую природу – например, пластическая неустойчивость, приводящая к разрушению. Эти случаи могут быть в некоторых случаях идентифицированы по ходу деформирования – оно ускоряется вблизи неустойчивости. Возможность неединственности получаемого численного решения на малых шагах по нагружению может быть связана с погрешностями численной процедуры или граничных условий, приводящих к плохой обусловленности. Здесь проверка возможна по степени монотонности поведения рассчитанного НДС – заметные немонотонные изменения НДС на фоне больших невязок могут указывать на некорректность вычисляемого решения.

13.2. Решение нелинейной системы в коде HEFEST- M

В качестве примера итерационной процедуры решения нелинейной системы рассмотрим решение системы алгебраических уравнений МКЭ в коде HEFEST-M, разработанном в ИБРАЭ РАН [HEFEST-M], предназначенного для расчёта нелинейного деформирования при больших деформациях и высокой температуре, обуславливающей сильную физическую нелинейность. Аналогичная процедура используется в модуле HEFEST [HEFEST], в котором решается нелинейная задача теплопроводности, конечно-элементная процедура дискретизации которого описана выше. Итерационный процесс решения нелинейной задачи в обоих модулях сходен. Ниже кратко описано построение и оптимизация процедуры решения системы нелинейных алгебраических уравнений квазистатики, обеспечивающие сходимость и устойчивость.

В исходной алгебраической системе уравнений (12.4) зависимость от решения можно формально представлять как через узловые перемещения U , так и через текущие координаты узлов X . Следуя (13.8), разложим левую часть этого векторного уравнения в ряд Тэйлора относительно точки начального приближения $X^c = X^{(c)}$:

$$\Sigma(X) \approx \Sigma(X^{(c)}) + \Sigma'(X^{(c)})(X - X^{(c)}) \approx R(X) . \quad (13.31)$$

В статической задаче надо найти новое равновесное состояние при приложенной нагрузке. Перепишем это в виде :

$$[\Sigma'(X^{(c)})]({X} - {X}^{(c)}) = [T(X)]\{U\} = \{Q(X^{(c)})\} \equiv \{R(X)\} - \{\Sigma(X^{(c)})\} , \quad (13.32)$$

где $\{X\}^{(c)}$ – вектор текущей конфигурации узлов, $\{U\} = \{X\} - \{X\}^{(c)}$ – неизвестный вектор перемещений относительно конфигурации $\{X\}^{(c)}$. Матрица жёсткости построена на основе элементных матрицы деформаций и матрицы определяющего соотношения (МОС). В упругом случае получим линейное уравнение для новой конфигурации:

$$[K(X)]({X} - {X}^{(c)}) = [K(X)]\{U\} = \{R(X)\} , \quad (13.33)$$

где матрица жёсткости системы $[K(X)] = K(X)$ строится, исходя из элементных матриц упругости в соответствии с общим выражением (10.25), и в упругом случае при малых деформациях и поворотах зависимости матрицы жёсткости от конфигурации нет.

В общем случае последовательного нагружения вектор $X^{(c)}$ – это положение равновесия на предыдущем шаге n по нагрузке, для которого вычислены напряжения и узловые силы $\Sigma(X^{(c)})$. При $X = X^{(c)} = X^n$ тело уравновешено, $\{U\} = 0$, $\Sigma(X^{(n)}) = R^{(n)}$. Шаги по нагружению идут во времени задачи. Поскольку ускорения не учитываются, явная зависимость от времени в (13.33) будет только в функциональных зависимостях нагрузок:

$$[K(X(t_n))]\{U_{n+1}\} = \{Q(t_{n+1}, X(t_n))\} = \{R(X(t_n), t_{n+1})\} - \{\Sigma(X(t_n))\} \quad (13.34)$$

Новая конфигурация нам неизвестна, и величины, зависящие от $\{X\}$, вычисляются по предыдущей конфигурации, экстраполяцией.

Решение квазистатической задачи (13.34) сводится к решению уравнений равновесия для последовательных моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ и пересчёту координат, т.е. к переходу к новой конфигурации, отвечающей новому положению равновесия. В уравнении (13.34) вектор внешней нагрузки, который может зависеть от времени и от конфигурации, задан по конфигурации $\mathbf{X}(t_n)$ в момент $t = t_n$, но для нового шага по нагружению с номером $n+1$.

В случае линейной упругости $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ не зависит от напряжённого состояния, изменение конфигурации учитывается преобразованием локальной системы координат, и система алгебраических уравнений (13.34) на каждом шаге будет линейной:

$$[\mathbf{K}]\{U_{n+1}\} = \{Q(t_{n+1})\} - \{\Sigma(\mathbf{X}(t_n))\} = \{Q(t_{n+1})\} - \{Q(t_n)\}. \quad (13.35)$$

В HEFEST-M используется прямой метод решения алгебраических систем, причём, матрица жёсткости обновляется раз в несколько итераций или шагов по времени. Решив один раз систему (13.35) линейных алгебраических уравнений, решения на последующих шагах $t = t_n$ находятся умножением на найденную обратную матрицу $[\mathbf{K}]^{-1}$, пока матрица $[\mathbf{K}]$ не перестроена. Значения узловых координат $\{X_{n+1}\}$ на $n+1$ -ом слое:

$$\{X_{n+1}\} = \{X_n\} + \{U_{n+1}\},$$

В физически нелинейной постановке задачи на каждом шаге ищется итерационным путём решение полученного линеаризованного уравнения. На каждой итерации решается система

$$[\mathbf{K}(X^{(i)}(t_n))]\{U_{n+1}^{(i+1)}\} = \{Q(t_{n+1}, X^{(i)}(t_n))\} = \{R(X^{(i)}(t_n), t_{n+1})\} - \{\Sigma(X^{(i)}(t_n))\}, \quad (13.36)$$

где i – номер предыдущей итерации. Её решение формально сводится к умножению вектора правой части на обратную матрицу $[\mathbf{K}(X(t_n))]^{-1}$.

Решение линейной системы (13.36) прямым методом основано на факторизации Холецкого [23]. (Отметим, что в инженерных пакетах решение линейных алгебраических систем может проводиться и итерационно, что неизбежно, если число степеней свободы велико). В процессе решения производится контроль и коррекция матрицы с тем, чтобы не допустить нарастания погрешности, о чём сказано выше. Для этого, в случае, если минимальное собственное значение матрицы станет меньше заданного числа, проводится модификация соответствующей строки матрицы разложения Холецкого.

После каждой итерации проводится проверка сходимости. Сходимость оценивается относительно значений, полученных на нулевой итерации, и считается достигнутой, если относительные изменения на итерации становятся малыми:

$$\| \{U^{(i+1)}\}_{n+1} \| / U_{max} \leq \varepsilon_d \quad \text{и} \quad \| \{U^{(i)}\}^T \{R^{(i)}\} \| / \| \{U^{(0)}\}^T \{R^{(0)}\} \| \leq \varepsilon \quad (13.37)$$

Здесь U_{max} – максимальное значение узловых перемещений на итерации, $\varepsilon_d, \varepsilon_e$ – заданные значения относительных погрешностей. Физический смысл величины $\{U^{(i)}\}^T \{R^{(i)}\}$ в критерии (13.37) – это работа узловых сил на перемещении $\{U^{(i)}\}$ при i -ой итерации. Таким образом, в итерационном процессе нахождения нового положения равновесия на $n+1$ -ом шаге по нагружению мы переходим от одной конфигурации к другой, более близкой к искомой, а критериями приближения служат прекращение изменения узловых координат и изменения механической энергии.

Если сходимость не была достигнута, обновление конфигурации, т.е. пересчет перемещений в узлах производится по формуле (12.6) с параметром s_i ($0 < s_i < 1$):

$$\{X^{(i+1)}_{n+1}\} = \{X^{(i)}_{n+1}\} + \alpha_i \{U^{(i)}\}, \quad (13.38)$$

где α_i определяется в процедуре т.н. *линейного поиска*, оптимизирующей сходимость метода. Этот параметр отражает разрешённую степень продвижения в направлении построения нелинейного решения. В сильно-нелинейных задачах задаётся ограничение

$$\alpha_i < 0,1 \div 0,2.$$

В итерационной процедуре программы HEFEST проводится дополнительный анализ получаемого решения, позволяющий избежать тупиков сходимости и ускорить её (*метод BFGS: Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno [BFGS]*). При использовании для решения системы нелинейных уравнений метода BFGS на каждой итерации между глобальными перестройками матрицы проводится ее корректировка по формуле

$$[K]^{-1}_i = [I + \{W\}_i \{V\}_i^T] [K]^{-1}_{i-1} [I + \{V\}_i \{W\}_i^T],$$

где $\{V\}_i$, $\{W\}_i$ - некоторые векторы. В процедуре линейного поиска ищутся оптимальные значения параметра α_i в уравнении (13.38), таких, чтобы произведение $(\{\Delta U^i\}^T \{R^i\})$ достаточно быстро уменьшалось от итерации к итерации и стремилось к нулю. Формулы для вычисления векторов $\{V\}_i$, $\{W\}_i$ и детальное обсуждение организации вычислительного процесса метода BFGS и линейного поиска приведены в [ДеннисШнабель], [ГиллМюррей].

Перестройка матрицы K производится не только через заданное количество итераций, или шагов по времени, но и, если параметр s_i достигнет минимально допустимого значения, или, если появляется расхождение решения, определяемое как рост нормы матрицы правой части:

$$\|R_{n+1}^{(i)}\| \leq \|R_{n+1}^{(i+1)}\|.$$

При перестройке матрицы и вычислении коэффициентов с помощью определяющих соотношений в случае пластического течения следует, как отмечалось, применять разные соотношения при нагружении и разгрузке материала, проверка этого производится в каждой точке интегрирования КЭ, поскольку именно в них определяются значения тензоров.

Таким образом, процедура решения нелинейной системы построена из итерационных циклов, и действия в процессе итерирования следующие:

- нахождение нового приближения решения линейной системы (13.36);
- проверка сходимости (13.37);
- коррекция и перестройка матрицы при необходимости;
- пересчёт узловых координат (13.38);
- перестройка матрицы в заданные моменты процедуры.

Эти этапы, циклы и действия достаточно общие для процедур численного решения, поскольку сами процедуры и методы, которые они реализуют, устроены в целом одинаково и преследуют одну цель – численное решение системы уравнений МСС. Ниже приведен общее описание алгоритма такого рода.

13.3. Общая последовательность численного решения задачи

МДТТ

Процедура численного решения здесь понимается в двух аспектах: 1) это последовательность шагов алгоритма численного решения (схема алгоритма) или 2) последовательность действий пользователя стандартного инженерного пакета. Для понимания того, что происходит в результате действий пользователя (второй аспект), в частности, выдаваемой расчётным кодом диагностики, полезно иметь общее представление об организации вычислений, т.е. о первом аспекте.

Следует отметить, что, в зависимости от целей и функционала расчётного средства, алгоритмическая реализация и внутренняя организация расчётного кода могут быть разными, к тому же, в коммерческих пакетах они часто известны только в общих чертах. Что касается порядка действий пользователя инженерного пакета, то это – один из

основных вопросов, которому уделяется внимание при обучении, разного рода тренингах, в руководствах пользователя и специальной литературе (в том числе, на русском языке, см. например, [Ансис в руках ...]). Последовательность численного решения, кратко очерченная ниже в упомянутых двух аспектах, имеет основной целью подведение краткого итога всему вышесказанному:

1. Констатация того, что описанные модели и алгоритмы могут быть сведены в универсальную численную схему (программу для ЭВМ), выбор отдельных составляющих которой обладает определённой свободой, определяемой решаемой задачей, и –

2. Замечания о том, что последовательность действий с таким расчётным средством также подчинена некоторой рутине. При этом, с одной стороны, значительная часть этапов работы по факту может быть регламентирована, либо должна удовлетворять определённым требованиям. С другой стороны, существует определённая свобода в выборе расчётных средств, способов работы с ним и процедур численного решения в рамках данного расчётного средства. Они выбираются, исходя из конкретных требований и приоритетов пользователя расчётного кода, но при этом не следует забывать об общих требованиях контроля процесса решения и получаемых результатов.

13.3.1. Вычислительный цикл решения квазистатической задачи

Ниже схематически перечислены основные действия, совершаемые при получении численного решения внутри КЭ–программы.

Ввод данных – чтение из файла или интерактивный ввод с построением области

Инициализация – представление введённых данных в нужной форме; расчёт вспомогательных величин

Начальное вычисление матрицы жёсткости K и вектора нагрузок

(1) Цикл по времени

если нелинейная задача – при необходимости – **перевычисление матрицы K**

(2) Цикл по итерациям

линейная задача – решение линейной системы – обращение матрицы K (один раз)

$$\{U\}=[K]^{-1}\{R\} \quad (13.39)$$

Решение линейной системы (14.1) часто также проводится итерационными методами, что вводит дополнительный цикл.

линейная задача – решение системы (14.1) получено;

нелинейная задача – проверка сходимости нелинейного решения;

обновление конфигурации в случае успешной итерации (невязка уменьшилась) – задание данных для новой итерации

– пересчёт координат по вычисленным перемещениям

$$\{X\}^*=\{X\}+\{U\}$$

– вычисление деформаций на новом шаге

$$\{\varepsilon\}=[B]\{U\}$$

– вычисление напряжений по деформациям ("обновление") – линейное соотношение:

$$\{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\};$$

в случае нелинейного соотношения – линеаризация для вычисления $\{\sigma\}$

- вычисление новых узловых сил по вычисленным напряжениям
 - вычисление новых нагрузок (правая часть алгебраической системы (12.3))
- линейная задача – выход из цикла (2)

нелинейная задача – выход из цикла или – при необходимости – коррекция и перестройка матрицы системы, её обращение или эквивалентная процедура;

(2) завершение шага по итерациям; переход на начало цикла

Фиксация результатов данного шага по времени; задание данных для нового шага нагружения:

- увеличение или уменьшение шага по времени, исходя из оценки сходимости итераций или физически [параметров];
- проверки физических критериев (разрушения и др.);
- модификация нагрузок и матрицы при наличии разрушенных элементов;
- (в случае термомеханики) – подготовка температурных данных (чтение или интерполяция по времени);
- другие процедуры, задаваемые физикой задачи.

Периодически: выдача в файлы для обработки результатов.

Проверка на окончание расчёта и выход из цикла 1 при удовлетворении критерия

- по заданному времени (по количеству шагов);
- по критерию (кроме нештатных ситуаций) .

(1) завершение шага по времени; переход на начало цикла 1

Выход из решения. Проведение заключительных процедур (запись данных, выдача сообщений).

Рассмотрим второй из упомянутых выше аспектов численного решения.

13.3.2. Этапы получения численного решения МДТТ-пакетом

Во введении упоминались стандартные средства подготовки и проведения решения задач МДТТ. Ниже рассмотрены основные этапы этой работы, которые являются общими для большинства задач механики сплошной среды (см., например, [Ансис в руках]).

Расчёт по численной процедуре МКЭ идёт после того, как задача подготовлена к решению, т.е. построена "КЭ–модель", заданы свойства материалов, нагрузки, граничные условия, параметры процедуры решения и выдачи. Это делается на стадии ввода данных в программу и *инициализации* – представления данных в удобном для вычислений виде. Рассмотрим процесс получения численного решения задачи МДТТ с точки зрения расчётчика. Процесс решения начинается с постановки проблемы и оканчивается "защитой результата".

Этапы решения представлены на схеме рис.13.2, взятой из [Ансис в руках]:

- 1) идентификация проблемы; работа с документацией по конструкции, определение нагрузок
- 2) создание геометрии модели конструкции, предназначенной для численного решения
- 3) разбиение геометрической модели на конечные элементы ("генерация сетки"), выбор аппроксимирующих КЭ;
- 4) задание свойств материала, отвечающих предполагаемым физическим процессам;

- 5) приложение граничных условий и нагрузок в КЭ–модели (закрепление, движение на границе; объёмные и поверхностные силы и др.);
- 6) численное решение системы алгебраических уравнений, анализ диагностических сообщений;
- 7) визуализация, анализ, оформление результатов.

Этапы 1, 2, 3, 4 условно можно отнести к "препроцессорной" стадии подготовки данных, этапы 5, 6 – к рабочей стадии, этап 7 – к "постпроцессорной" стадии обработки и анализа результатов.

Обычно наиболее трудоёмкая стадия решения – это создание конечно-элементной модели, т.к. автоматическое построение сетки элементов не гарантирует от появления ошибок. Задание нагрузок и граничных условий также требует опыта и аккуратности.

6–й из перечисленных выше этапов (численное решение системы уравнений) выполняется автоматически и, как правило, особых трудностей не вызывает, за исключением случаев, когда матрица системы оказывается по тем или иным причинам плохо обусловленной.

7–ой этап (анализ результатов) существенно облегчается средствами графической визуализации.

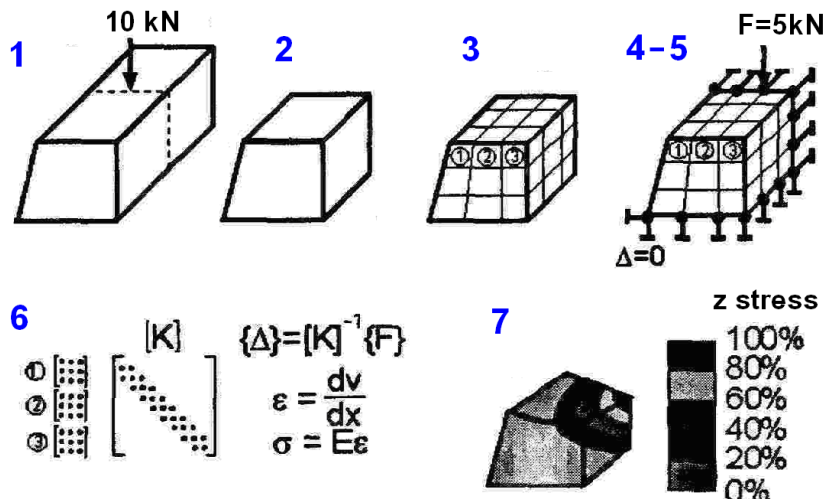


Рис.13.2. Схема решения задачи МДТТ (по [АНСИС в руках инженера])

Прокомментируем некоторые шаги вышеуказанной последовательности

13.3.2.1. Построение расчётной области (Preprocessing) и решение

Для построения конечно–элементной модели используется специальная программа, часто интегрированная в используемый пакет программ, называемая *препроцессор* (например, коммерческие ANSYS Prep7, ANSYS ICEM CFD, открытый препроцессор GMesh и другие). Этапы построения КЭ-разбиения:

- задание областей, поверхностей границ – построение геометрии;
- задание подобластей (материалов); выбор типов КЭ для каждой из подобластей;
- разбиение границ подобластей для постановки граничных условий;
- разбиение области на элементы – задаётся глобальная нумерация узлов и связность элементов.

В сложных "реальных" случаях геометрия объекта часто строится специальными программами (САПР–пакетами: AutoCAD, SolidWorks etc.) и затем передаётся в одном из стандартных форматов в пакет–решатель, где строится сетка. Сетка "импортируется" в пакет–решатель (построение сетки и импорт сетки могут быть соединены). Отметим, что в

2–мерных задачах с пластическим деформированием 4–угольные элементы предпочтительны 3–угольным, поскольку в последних сильнее проявляется эффект т.н. "запирания" КЭ – появление в КЭ при определённых условиях избыточной жёсткости численного происхождения. В пластических задачах эффективная жёсткость конструкции меньше, а деформации – гораздо больше, чем в упругих, что способствует проявлению этого эффекта.

Дальнейшие действия относятся к процедуре решения:

- задание требуемых физических моделей (теплопроводность, пластичность, ползучесть, трещиностойкость, внешние поля etc.);
- задание свойств материалов подобластей: выбор модели и задание её параметров;
- задание краевых условий на границах и других нагрузок (зависимости от координат, времени, температуры и др.);
- выбор схемы дискретизации ("решателя") и задание параметров итерационной процедуры для нелинейных задач;
- задание начальных данных, задание параметров выдачи результатов;
- сборка матрицы системы квазилинейных алгебраических уравнений и решение системы (автоматически)

При решении возможны два основных случая

- Линейные задачи – матрица системы постоянна, решение на шаге по нагружению сводится к решению линейной алгебраической системы; это решение осуществляется прямым методом (до $\sim 10^5$ - 10^6 уравнений) или итерационным;
- Нелинейные задачи – геометрически, или – физически; например, задачи с пластичностью, где вычисление тензора напряжений может осуществляться по–разному, в зависимости от достигнутого НДС; здесь физическую модель нелинейного явления надо задавать, исходя из условий задачи (обычно имеется выбор), а решение нелинейной задачи проводится итерационным путём (не путать с итерационным решением линейных систем).

В результате получается массив узловых перемещений (или иных величин, в зависимости от задачи и численного метода решения), по которому, с использованием аппроксимаций, описанных выше, строятся распределения остальных физических величин.

13.3.2.2. Работа с результатами решения

Чтобы представить результаты в обозримой форме, в виде картинок, графиков и т.п. используется специальная программа – *постпроцессор*. Она читает данные, записанные в процессе решения, обрабатывает их нужным образом, строит графические изображения – карты (изолинии, "изо–подобласти"), распределения вдоль заданного пути, зависимости от времени.

В целом численное решение средствами универсального пакета – рутинная и существенно автоматизированная процедура, но, если задача сложна геометрически и физически, её решение имеющимися средствами может доставить немало затруднений.

Важнейший этап решения – *оценка достоверности* получаемого численного решения. При постановке, решении и анализе результата надо запомнить и регулярно повторять себе истину, сформулированную в виде одного из законов Мэрфи(?): "всякое непроверенное вычисление неверно". При решении инженерных, в особенности проектировочных, задач возможности проверки экспериментом ограничены или отсутствуют, и анализ достоверности численного решения приходится вести другими имеющимися средствами.

Эталон для проверки решения новых задач отсутствует, и решение проверяется по его отдельным свойствам. Процедура проверки достоверности может иметь много разных аспектов, как, например:

- оценка фактической области применимости физических моделей (например, выход за пределы упругости)
- сравнение с точными решениями похожей задачи, если таковые имеются, или –
- аналитические оценки решения по порядку величины, если возможны;
- экспериментальные данные по похожим случаям и данные других расчётов;
- расчёт упрощённых конфигураций для сравнения получаемых результатов и выявления тенденций;
- измельчение сетки – исследование "сходимости по сетке", или применение элементов более высокого порядка
- вариация параметров модели и численного метода – исследование влияния существенных и несущественных параметров (например, способа дискретизации).

Этап исследования влияния различных факторов на получаемое решение может быть проведён систематически и с применением статистического анализа :

- многовариантные расчёты: составляется таблица вариантов – "матрица расчётов", в которых параметры меняются в заданных пределах; влияние каждого оценивается по результатам расчётов;
- статистический анализ неопределённостей – составляется набор вариантов, в котором параметры меняются во всевозможных комбинациях в рамках статистического распределения; результаты анализируются методами статистики: строятся распределения, вычисляются коэффициенты корреляции и т.п.; здесь решаются обычно сотни или более однотипных задач, и такая процедура практически всегда в той или иной степени автоматизирована, что необходимо, хотя бы, для контроля входных данных.

13.3.3. Режимы работы с универсальным пакетом программ

13.3.3.1. Интерактивный режим

Интерактивный (диалоговый) режим уже довольно давно ассоциируется с графическим интерфейсом пользователя GUI (graphical user interface) – системой меню, подсказками и т.п. Изначально диалоговый режим существовал в виде текстового интерфейса TUI (text user interface) – посылка текстовых команд с параметрами. Он назывался также командным режимом – ввод команд на исполнение. Команды могут также вводиться и в графическом интерфейсе из специального окна. Суть одинакова – посылка с экрана инструкций программе на выполнение определённых инструкций.

Отметим, что в коммерческих пакетах командный режим (TUI) всегда существует и может быть первичным в том смысле, что содержит несколько больше возможностей управления решением, чем меню графического интерфейса. Обычно новые, ещё недокументированные, тестируемые возможности кода ("beta-features") первоначально проще ввести через команды (где они и меньше видны, не отвлекают внимание), и только после успешной длительной апробации дублировать их в графическом интерфейсе. Командный режим необходим также при пакетном выполнении задания, например, при дистанционном запуске на расчёт, когда возможности графического обмена лимитированы, либо при множественных запусках типового задания на расчёт.

13.3.3.2. Пакетный режим

В пакетном режиме инструкции по выполнению считываются из *командного файла* ("*скрипта*"), составленного на соответствующем языке (Scheme, Python etc.); такой файл

обычно предусмотрен в коммерческих кодах. Командный файл составляется вручную на основе соответствующих описаний в документации. Существенно более простой путь его формирования состоит в первоначальном выполнении соответствующих команд интерактивно, из GUI, поскольку подобный файл, дублирующий в текстовом режиме интерактивные действия пользователя, может формироваться самой исполняемой программой в процессе интерактивной работы.

При дальнейшей работе командный файл может служить основой для доработки модели, поскольку редактировать текст готового командного файла и запускать готовый пакет заданий обычно легче, чем повторять с небольшими модификациями набор действий на экране. Существенно, что при этом облегчается контроль входных данных – они приведены не в пунктах меню и подменю, а в текстовой таблице, "input deck". Командный режим полезен, например, при построении сетки препроцессором, а также при графической обработке результатов – построении "картинок" нужного ассортимента, ракурса, цветовой гаммы, линий и т.п. Одно из преимуществ работы с текстовым командным файлом состоит также в том, что, например, при задании входных данных размеры конструкции, мелкость разбиения, константы материалов и др. величины могут быть заданы в параметрической форме, легко варьируются и контролируются в параметрических расчётах.

14. Неполноразмерные элементы. Балочный элемент

14.1. Основные неполноразмерные элементы: балка и оболочка

Как отмечалось, неполноразмерными называются конечные элементы, моделирующие конструкции, у которых один или более размеров h много меньше остальных L : $h/L \ll 1$. В этом случае (нормальные) напряжения в направлениях, перпендикулярных направлению с размером h , могут превосходить напряжения в h -направлениях в $\sim L/h$ раз. С точки зрения прочности наиболее интересными будут эти нормальные напряжения при изгибе, что позволяет свести общий трёхмерный случай к квазидвумерному (оболочка) или одномерному (балка). Теория оболочек является довольно сложной, и для целей иллюстрации основных подходов в неполноразмерных моделях будет разобран только пример изгиба стержня. Нормальные напряжения при изгибе были рассмотрены в гл.6. На основе этого строится простейший изгибный конечный элемент.

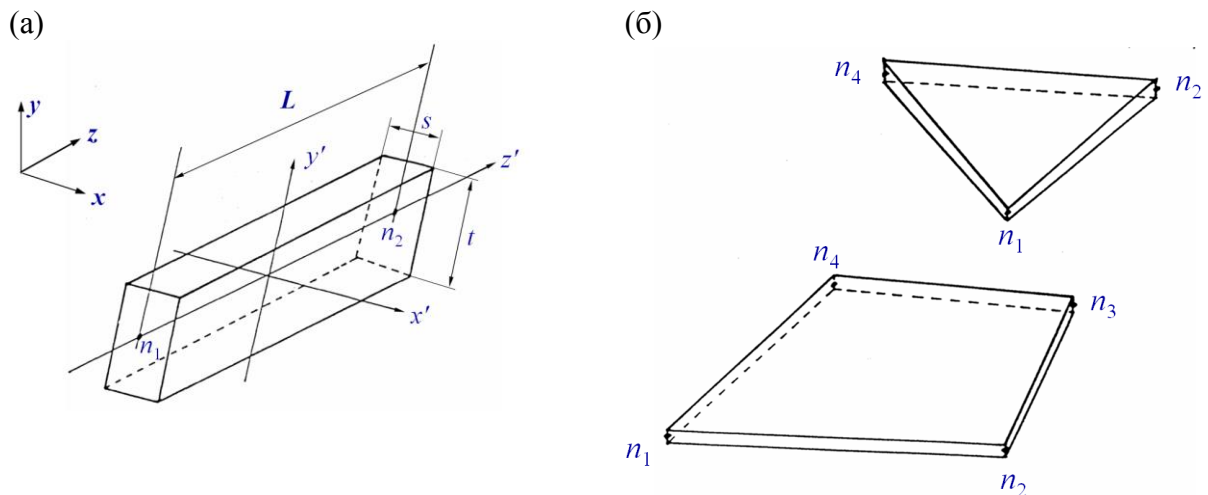


Рис.14.1. Балочный (а) и оболочечные (б) элементы

Основные параметры балок и оболочек приведены на рис. 14.1. Во входных данных расчёта балка может быть задана своими размерами L , t , s , как на рис.14.1а и узлами n_1 , n_2 . Модуль упругости задаётся в свойствах материала. Описанная ниже геометрическая теория изгиба применима и при пластическом деформировании. Аналогично, но более сложно, конструируются оболочечные элементы, отвечающие участку оболочки или пластины. Здесь также пространственное распределение деформаций сводится к изгибу некоторой эффективной срединной поверхности, и узловыми переменными служат отклонение от исходного положения поверхности (прогиб) и распределённые по поверхности элемента углы изгиба относительно двух направлений. Параметрами геометрии оболочечного элемента (рис.14.1б) могут служить размеры (толщина и положение узлов) и параметры модели материала. Существует несколько теоретических моделей балок и оболочек, и ряд типов КЭ, отвечающих этим моделям.

14.2. Балка (изгибный элемент)

Балочный элемент (beam, flexure element) используется для моделирования элементов конструкций, аналогичных стержню, но работающих также на изгиб. В простейшем случае он задаётся двумя узлами – концами балки. Ниже описывается модель с

минимальным количеством параметров, основанная на элементарной теории изгиба, рассмотренной в гл.6. В ней учитываются только нормальные напряжения при изгибе, вычисленные поперечные перемещения не участвуют в изменении геометрии балки. Напомним два общих ограничения, связанных с нагрузками. Первое связано с гипотезой плоских сечений, которая отвечает идеализированному случаю моментного нагружения призматического стержня простого сечения (в частности, не коробчатого) и тех, которые могут к ним сведены. При более сложных нагрузках, например, касательных, на продольных плоскостях, применимость этой гипотезы подлежит проверке. Второе ограничение связано с граничными условиями: для точного соответствия решению в объёме стержня приложение, например, концевой силы на краю стержня должно в точности следовать этому решению. Это ограничение отчасти снимается применением принципа Сен-Венана, если длина стержня велика (малое отношение: $h/L \ll 1$). Но напряжения на концах стержня требуют при этом отдельного анализа.

В итоге мы приходим к идеализации изгибного конечного элемента как отрезка прямой линии, характеризуемого двумя концевыми точками, на котором задано распределение перемещений, описываемое решением задачи изгиба. Положение линий отвечает геометрическому месту точек центров тяжести поперечных сечений стержня. В соответствии с идеологией МКЭ, деформирование при изгибе моделируется заданием узловых обобщённых перемещений и функций формы, позволяющих приближённо вычислить эти перемещения в любой точке между узлами. Введение узловых переменных здесь не так очевидно, как для сплошных (solid) и стержневых элементов. Чтобы понять, каковы должны быть эти узловые величины и определить функции формы, напомним и обобщим некоторые приведённые ранее результаты элементарной теории изгиба.

14.3. Характеристики изгиба

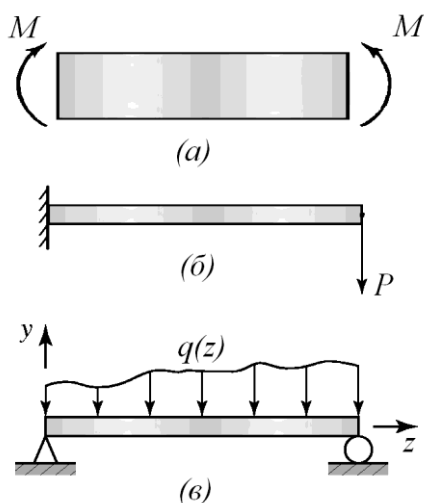


Рис.14.2. Геометрия изгиба и нагрузки

Обозначим (рис.14.2) через Oz направление вдоль балки. Поперечное сечение находится в плоскости xOy , ось Oy находится в плоскости чертежа и направлена вниз. Координата z характеризует положение текущего сечения балки. Сечение в точке с координатой z делит балку на две части, левую и правую. Основное предположение элементарной теории изгиба – это гипотеза Сен-Венана о деформированном состоянии при изгибе: все сечения при изгибе только поворачиваются на малый угол, при этом изменения поперечных расстояний между продольными волокнами обусловлены только поворотом и в первом порядке не изменяются.

Для упрощения построения конечного элемента принимаются ранее сделанные предположения элементарной теории:

- балка имеет призматическую (цилиндрическую) форму, в точках вдоль длины образующей цилиндра поперечные сечения неизменны;
- отклонения при изгибе от начального положения малы относительно её полной длины (линейная теория);
- материал балки – однородный, изотропный, упругий;
- имеется плоскость симметрии (*центральная плоскость*), в которой действует изгибная нагрузка, растягивающие силы приложены вдоль линии изгиба.

Силowymi характеристиками изгиба в каждом сечении служат перерезывающие силы F_x, F_y , приложенные в центральной точке, и изгибающие моменты M_x, M_y относительно пары осей Ox и Oy в плоскости данного сечения (см. гл. 6). Напомним, что перерезывающей силой называется равнодействующая всех сил, приложенных к сечению по одну его сторону, левую, либо правую, с обратным знаком, а изгибающим моментом – моменты соответствующих сил относительно поперечной оси, проходящей через центр изгиба. С точки зрения левой или правой половин балки полный момент и перерезывающая сила, приложенные в сечении с центром в точке z , создаются распределёнными напряжениями в этом сечении, такими, что при убиении одной из половин балки напряжённое состояние в другой части не меняется. Основные (наибольшие по величине) напряжения при изгибе это, как правило – нормальные к сечению. Перерезывающая сила приводит также к касательным напряжениям, которые мы здесь не учитываем.

Пусть стержень нагружен моментом относительно оси Ox , перпендикулярной центральной плоскости, $M=M_x$. При наличии изгиба дополнительно моментом M_y относительно оси Oy упругое решение в случае малых поворотов даётся суперпозицией состояний, связанных с M_x и M_y . При чистом изгибе (рис.14.2а) полный момент по определению одинаков в каждом поперечном сечении: $M_x(z) = const(z)$. Распределение нормального напряжения по толщине даётся уравнением (6.13):

$$\sigma_{zz} = (M_x / J_{xx}) y, \quad (14.1)$$

а распределение перпендикулярного перемещения $v(x)$ вдоль линии изгиба при малых отклонениях – (приближённым) уравнением (6.15):

$$v'' = M_x / (EJ_{xx}). \quad (14.2)$$

Это – уравнение *параболы изгиба*.

14.3.1. Точечное и распределённое нагружение

В общем случае в уравнении (14.1) полный момент может быть непостоянным по длине, в частности, при нагружении концевой силой он линейно изменяется вдоль длины. Изгибное нагружение может задаваться также силой, приложенной по длине балки, сосредоточенной, F_y (рис.14.2б) или распределённой, f_y (рис.14.2в). При этом в каждом сечении возникают свои перерезывающие силы и изгибающие моменты. Рассмотрим участок балки от $z = a$ до $z = b$, $a \leq z \leq b$, с приложенной распределённой силой. Эквивалентная перерезывающая сила, приложенная в промежуточном сечении $z = \xi$ справа или слева, по определению суть интеграл от *плотности* распределённой силы (силы на ед. длины):

$$F_y(\xi) = F_y^{лев}(\xi) = \int_a^\xi f_y dz = -F_y^{прав}(\xi) = -\int_\xi^b f_y dz. \quad (14.3)$$

По определению момента эту силу можно также представить как производную по z от изгибающего момента, приложенного в данном сечении балки $z = \xi$. Чтобы показать это, приравняем момент $M_x(\xi)$ *внутренних* сил, приложенных в сечении балки при $z = \xi$, уравновешивающему его моменту *внешней* распределённой силы $f_y(z)$, приложенной вдоль оси, и продифференцируем полученный интеграл по продольной координате $z = \xi$:

$$M_x(\xi) = \int_\xi^b f_y(z)(z - \xi) dz = \int_\xi^b f_y(z) z dz - \xi \int_\xi^b f_y(z) dz, \quad (14.4)$$

$$dM_x(\xi)/d\xi = -\xi f_y(\xi) - \int_{\xi}^b f_y(z) dz + \xi f_y(\xi) = - \int_{\xi}^b f_y(z) dz \equiv F_y^{npae}(\xi). \quad (14.5)$$

Для консоли, нагруженной одной концевой силой P , перерезывающая сила в сечении постоянна вдоль Oz , а изгибающий момент изменяется линейно.

С учётом (14.5) дифференцируем последовательно уравнение (14.2) по z . Получим уравнения, связывающие деформации с перерезывающей силой:

$$v''' = F_y / (EJ_{xx}), \quad (14.6)$$

или с плотностью распределённой боковой силы:

$$v^{(IV)} = f_y / (EJ_{xx}). \quad (14.7)$$

Таким образом, в общем случае при произвольной плотности распределённой боковой нагрузки f_y , линия изгиба описывается уравнением 4-го порядка. Если $F_y = \text{const}$, то линия будет кривой 3-го порядка. При чистом изгибе концевым моментом внутренний момент вдоль балки постоянен, и решение – кривая второго порядка.

В случае не бесконечно малых деформаций при изгибе следует учитывать локальный поворот, поскольку перерезывающая сила может стать не перпендикулярной линии изгиба. В вычислительной практике это можно приближённо учесть, разбивая балку на небольшие отрезки и путь нагружения – на малые участки, учитывая на каждом малом шаге поворот элемента и изменение направления нагрузки, подобно тому, как это описано для сплошных элементов общего вида.

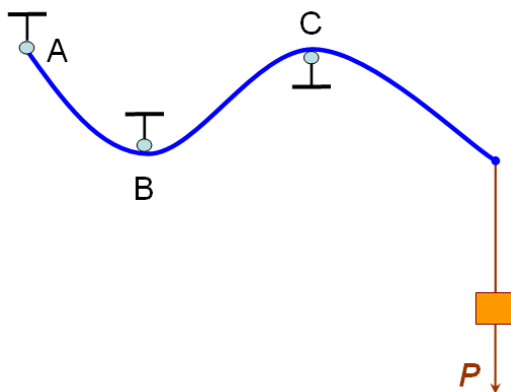


Рис. 14.3. Сплайн, проведённый по точкам A, B, C (spline – рейка)

14.3.2. Энергия упругого изгиба и "сплайны"

Происхождение названия кубической аппроксимации сплайнами связывают с упругим изгибом (см., например, [Форсайт]). Первоначально "сплайном" (spline) называлась гибкая чертёжная линейка для построения плавных линий. Эта линейка с подвешенными грузиками в заданных точках, использовалась чертёжниками для проведения плавных линий по заданным точкам. Как мы видели, при малых перемещениях функция, отвечающая форме изгиба, имеет гладкие первые производные между точками и непрерывные вторые и, как мы видели, при малых перемещениях

представляется кубическим полиномом. Кубические сплайны, обладающие этими свойствами, появились в середине 20в. и начали применяться в теории аппроксимации в 50–60-е гг. Плавность линий, проводимых по "деревянным" сплайнам, связана с механикой.

Составим интеграл упругой энергии при изгибе балки постоянного сечения, в котором учитываем только нормальные напряжения и соответствующие деформации:

$$U(a,b) = \int_a^b \int_A \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} dAdz = E \int_a^b \int_A (v_z''(z)y)^2 dAdz =$$

$$= E \int_a^b v_z''(z)^2 \left(\int_A y^2 dA \right) dz = E J_{xx} \int_a^b v_z''^2(z) dz. \quad (14.8)$$

Упругая энергия участка балки (a,b) оказывается пропорциональной интегралу от квадрата кривизны. Учитывая принцип минимума потенциальной энергии при упругой деформации, мы заключаем, что форма консоли, нагруженной только на конце, отвечает минимуму этой интегральной кривизны линии, и эта форма при малых изгибах (относительно толщины консоли) приближённо описывается кубической параболой.

Пусть, например, нам надо через три точки А, В, С (рис. 14.3) провести плавную кривую с минимальным квадратом кривизны. Закрепим металлическую линейку шарнирно слева в точке А и со скольжением – в точке В. Если на правом конце линейки подвесить груз (приложить сосредоточенную силу, направленную вниз), который сгибает её до касания линейкой точки С, то форма линейки будет отвечать "самой плавной" кривой, проведённой через точки А, В и С. Эта кривая между точками А, В и С будет состоять из двух отрезков кубической параболы. При больших перемещениях следует рассматривать полную форму уравнения (6.14), к тому же, гипотеза плоских сечений, на которой оно основано, может быть не вполне точна. В этом случае кубичность по z для кривой с минимальным квадратом кривизны может выполняться только приближённо.

Задача. Останкинская телебашня изготовлена (до высоты 385м) из бетона и преднапряжена 132-мя стальными тросами, создающими сжимающие осевые напряжения. Зачем? Оценить требуемое минимальное усилие в одном тросе (Указание – оценить максимальную нагрузку (ветровую, постоянную во времени), задаться средним радиусом башни – считать её трубой; полное усилие ~100МН).

14.4. Построение изгибного КЭ

Под построением изгибного двухузлового КЭ подразумевается выбор обобщённых перемещений и построение функций формы $\varphi_i(z)$ от продольной координаты z , таких, что обобщённые перемещения в любой точке КЭ могут быть вычислены по формуле (10.2), и могут быть построены аналоги матрицы деформации и матрицы упругости, приведённых выше для случаев полноразмерных элементов. После этого матрица жёсткости конструкции определяется в рамках стандартной техники дискретизации МКЭ – определение элементных матриц жёсткости, учёт равновесия сил, формирование алгебраической системы для неизвестного алгебраического вектора перемещений. Случай неупругости (пластичности) здесь не рассматривается, но, поскольку расчётный алгоритм будет вполне аналогичен ранее описанному (расчёт перемещений, деформаций, напряжений, обновление нагрузок и далее – в цикле), вычислительная процедура, например, модели пластичности вполне может быть внедрена в этот алгоритм, с надлежащими коррекциями матрицы определяющих соотношений и др.

14.4.1. Функции формы изгибного КЭ

В отличие от общего случая многомерных КЭ, где общий вид решения заранее не известен, и функции формы выбираются на основе компромисса между порядком аппроксимации и простой вычислений, в случае изгибного элемента распределение перемещений вдоль него может быть построено на основе элементарной теории изгиба, и вид функций формы вполне этим определён. Как и в случае многомерного КЭ, принимается, что сосредоточенные силы приложены в узлах элемента (концах стержня). Из уравнения (14.6) следует, что функция смещения нейтральной линии, распределённого по длине элемента, будет тогда полиномом степени 3 от продольной координаты – единственной в конечном элементе. Кубический полином $p_3(z)$ имеет 4 коэффициента:

$$v(z) = p_3(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3. \quad (14.9)$$

Необходимо определить эти коэффициенты, для чего надо построить четыре уравнения: аналогично рассмотренному выше случаю 3–угольного плоского элемента, используем метод неопределённых коэффициентов. Т.к. значения функции $v(z)$ в промежуточных точках неизвестны, значения для определения коэффициентов могут быть заданы только в узлах. Это определяет количество обобщённых узловых координат: в каждом узле задаются не одна, а две степени свободы: обобщённые узловые перемещения. В каждом из узлов 1 и 2 обозначим их как пары (v_1, θ_1) , (v_2, θ_2) .

Очевидно, что одно из этих обобщённых перемещений в узлах должно задавать смещение нейтральной линии (v_1 и v_2), поскольку непрерывность $v(z)$ есть необходимое условие *совместности* узловых перемещений соседних КЭ. Второе требование на непрерывность компонент обобщённых перемещений в точке соединения элементов вытекает из условия *равновесия внутренних сил* – в общем узле соседствующих элементов внутренние силы между ними взаимоуравновешены (в общем случае присутствует также внешняя узловая сила, что рассматривается в процедуре задания граничных условий).

Чтобы удовлетворить требованию равновесия, необходимо выполнение условия непрерывности первых производных перемещений по продольной координате. Это следует из того, что при отсутствии поперечной силы в месте соединения КЭ будет состояние чистого изгиба, описываемое уравнением (14.2). В уравнение для чистого изгиба входит вторая производная от перемещения $v(z)$, поэтому требуется непрерывность угла наклона в узле, т.е., первой производной перемещения по длине, поскольку при малых углах $\theta \sim dv(z)/dz$.

Таким образом, на каждой из двух границ элемента выполнены условия:

$$v(z_1) = v_1, \quad v(z_2) = v_2, \quad (14.10)$$

$$v_z'(z_1) = \theta_1, \quad v_z'(z_2) = \theta_2. \quad (14.11)$$

Здесь z_1, z_2 – координаты узлов элемента, локальные или глобальные, θ_1, θ_2 – значения производных на границах элемента. Значения перемещений и их производных – общие для обоих КЭ в местах их соединения (нет узловой силы). Для изгиба балки в двух плоскостях количество степеней свободы, соответственно, удваивается.

Подставим в (14.9) значения четырёх неизвестных пока обобщённых перемещений, заданных в 2–х узлах элемента (по паре на каждый узел), и приравняем получившихся выражений самим этим перемещениям. После нахождения коэффициентов a_i (14.9) может быть преобразовано к общей форме (10.2) для интерполяции перемещений в точке z конечного элемента через узловые значения:

$$v(z) = \varphi_1(z) v_1 + \varphi_2(z) \theta_1 + \varphi_3(z) v_2 + \varphi_4(z) \theta_2, \quad (14.12)$$

где $\varphi_k(z)$ – линейно независимые кубические полиномы, которые в данном случае служат функциями формы изгибного конечного элемента.

Определим коэффициенты аппроксимаций (14.9). Используем внутреннюю систему координат элемента, аналогичную той, что была использована для стержня. В ней координаты узлов элемента $z_1 = 0$, $z_2 = L$ неизменны, вследствие предположения об относительной малости вертикальных перемещений в КЭ. Условия (14.10)–(14.11) на производные в этих точках приводят к линейной системе уравнений для коэффициентов a_k в (14.9):

$$\begin{aligned} a_0 &= v_1 \\ a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 &= v_2 \\ a_1 &= \theta_1 \end{aligned}$$

$$a_1 + 2 a_2 L + 3 a_3 L^2 = \theta_2 \quad ,$$

решение которой:

$$\begin{aligned} a_0 &= v_1 \\ a_1 &= \theta_1 \\ a_2 &= 3(v_2 - v_1)/L^2 - (2\theta_1 + \theta_2)/L \\ a_3 &= 2(v_1 - v_2)/L^3 + (\theta_1 + \theta_2)/L^2 . \end{aligned} \quad (14.13)$$

Для идентификации коэффициентов общей интерполирующей функции в форме (14.12) подставляем в него эти коэффициенты. После приведения подобных слагаемых при узловых величинах $(v_1, v_2, \theta_1, \theta_2)$ получим функцию узловых перемещений в виде конечно-элементной аппроксимации общего вида, выраженную через обобщённые координаты:

$$v(z) = (1 - 3z^2/L^2 + 2z^3/L^3) v_1 + (z - 2z^2/L + z^3/L^2) \theta_1 + (3z^2/L^2 - 2z^3/L^3) v_2 + (z^3/L^2 - z^2/L) \theta_2.$$

Это выражение аналогично выражению (10.2) для плоского элемента. Коэффициенты при перемещениях v_k и углах θ_k , $k=1, 2$ – это искомые функции формы $\varphi_i(z)$, $i=1, \dots, 4$, зависящие от z по кубическому закону. Подчеркнём, что углы (θ_1, θ_2) являются независимыми переменными, определяемыми, наряду с перемещениями (v_1, v_2) , в процессе решения.

Вторая производная интерполирующей функции по z , фигурирующая в определении деформации, получается непосредственно:

$$v''(z) = \varphi_1''(z) v_1 + \varphi_2''(z) \theta_1 + \varphi_3''(z) v_2 + \varphi_4''(z) \theta_2. \quad (14.14)$$

Напомним, что при анализе напряжённого состояния стержня нас интересуют только нормальные напряжения при изгибе, рассмотренные выше в гл. 6.

14.4.2. Дискретное уравнение равновесия изгибного КЭ

Для дискретизации МКЭ используем метод перемещений. Определим сначала элементные матрицы жёсткости изгибных КЭ, из которых затем собирается глобальная матрица жёсткости. Введём вектор $\{d\}$ обобщённых перемещений в элементе, матрицу функций форм $\{\varphi\}$ и матрицу деформаций $[B]$ в виде:

$$v(z) = \{\varphi\}\{d\} \quad , \quad v''(z) = \{\varphi''\}\{d\} \equiv [B]\{d\}, \quad (14.15)$$

где использовано соотношение (14.14) и -

$$\{d\} = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}^T, \quad \{\varphi\} = \{\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z), \varphi_4(z)\}^T, \quad \{\varphi''\} = \{\varphi_1''(z), \varphi_2''(z), \varphi_3''(z), \varphi_4''(z)\}.$$

Матрица деформаций $[B]$ (здесь это вектор–строка), составлена вторыми производными функций формы. Это следует из выражения для напряжений в изгибном элементе, основанного на соотношениях (6.6)–(6.9) (рассматриваются нормальные напряжения в плоском сечении $A(z)$, координата y перпендикулярна линии изгиба):

$$\sigma(y, z) = E \varepsilon = E v''(z) y = E(\{\varphi\}^T\{d\})|_z y = E(\{\varphi\}^T)_z \{d\} y = E [B]\{d\} y .$$

Интерпретация следующая: при изгибе концевой силой в плоскости Ozy напряжённое состояние в любой точке плоскости поперечного сечения стержня вычисляется через момент внутренних сил в данном сечении, взятый относительно центра изгиба, который может быть определён через вторую производную функции перемещения. Подчеркнём, что, хотя изгиб элемента представляется распределением смещения центральной линии, напряжённое состояние и работа внутренних сил относятся ко всему стержню, т.е. интегрирование проводится по всему объёму элемента.

Как и в случае полноразмерных элементов, для численного представления условия равновесия всего элемента используем принцип равенства работ внутренних сил и узловых сил, задаваемых вектором $\{F\}$ узловых сил, на виртуальном обобщённом перемещении. Узловое виртуальное перемещение задаётся вектором $\delta(z)=\{\delta v_1, \delta\theta_1, \delta v_2, \delta\theta_2\}$, это отклонение от искомого деформированного состояния $v(z)$, заданного узловым вектором $\{\delta\}$, $\|\delta\| \ll \|d\|$. Виртуальное перемещение в точках КЭ приводит к распределённой виртуальной деформации $\delta\varepsilon$, аппроксимируемой с помощью приведённых выражений.

Работа внутренних сил, в соответствии с принятым приближением, равна работе осевых напряжений в объёме элемента при его деформировании. Интегрируя по объёму:

$$\begin{aligned} \{\delta\}^T \{F\} &= \int_V \sigma(y, z) \delta\varepsilon(y, z) dV \approx \int_V E v''(z) \delta v''(z) y^2 dV = \int_V E v''(z) \delta v''(z) \left(\int_V y^2 dA \right) dz = \\ &= J_{xx} E \int_V v''(z) \delta v''(z) dz = Q \int_V [B] \{\delta\} [B]^T \{d\} dz = Q \int_V (\{\delta\} [B])^T [B] \{d\} dz = \\ &= Q \{\delta\}^T \left(\int_V [B]^T [B] dz \right) \{d\} \equiv \{\delta\}^T [k] \{d\}, \end{aligned} \quad (14.16)$$

где обозначено $J_{xx} E = Q$ и введена матрица жёсткости конечного элемента. При преобразованиях мы воспользовались тем, что для скалярной величины – произведения строки на столбец, $[B] \{\delta\} = ([B] \{\delta\})^T = \{\delta\}^T [B]^T$. Произведение $[B]^T [B]$ столбца на строку – это матрица размером 4×4 , составленная из попарных произведений вторых производных функций форм вида $\varphi''_i \varphi''_k$. При непосредственном вычислении интеграла удобно перейти к внутренней координате элемента, $\xi = (z - z_1) / L = (z - z_1) / (z_2 - z_1)$, которая изменяется вдоль его длины от 0 до 1.

Определения узловых сил, которые непосредственно используются и при задании граничных условий, следуют из условий нагружения стержня. Вводится вектор *обобщённых узловых сил*, отвечающих силовой и моментной нагрузкам. В левой части (14.16) при изгибе относительно Ox берётся пара перерезывающих сил F_y , приложенных на концах элемента, и изгибающих моментов M_x :

$$\{F\} = \{P_1, M_1, P_2, M_2\}^T.$$

Это следует из определения работы сил и моментов на обобщённом виртуальном перемещении $\{\delta\}$ заданного выше вида:

$$\{\delta\}^T \{F\} = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\} \{P_1, M_1, P_2, M_2\}^T = P_1 \delta v_1 + M_1 \delta \theta_1 + P_2 \delta v_2 + M_2 \delta \theta_2 \quad (14.17)$$

Используя произвольность виртуального перемещения $\{\delta\}$, получим условие равновесия виртуальных работ внутренних и внешних сил для элемента в виде

$$[k] \{d\} = \{F\},$$

где матрица жесткости элемента –

$$[k] = Q \int_V [B]^T [B] dz. \quad (14.18)$$

В матрицу жёсткости входят модуль упругости E , момент инерции $J = J_{xx}$ сечения, длина балки. При плоском изгибе балки достаточно задать толщину балки в направлении Oy . При рассмотрении изгиба также относительно оси Oy надо знать и момент инерции или толщину элемента и для этого направления. Эти параметры и длина L должны быть заданы для элемента в исходных данных (рис.14.1). Размеры матриц жёсткости при рассмотрении изгиба вокруг обеих поперечных осей увеличатся вдвое. При объединении

матриц балочных элементов в отсутствии сосредоточенных сил и моментов полные обобщённые узловые силы в местах их сочленения – нулевые. На краях должны быть заданы необходимые условия закрепления или нагружения.

Силовые граничные условия задаются как узловые обобщённые силы. Условия по перемещениям задаются в полной аналогии с полноразмерным случаем.

Описанный КЭ пригоден только для моделирования изгиба, но в нём нетрудно учесть также растяжение (сжатие) осевой силой F_z . Пользуясь принципом суперпозиции выражение (6.10) для полного нормального напряжения переписывается в виде суммы нормального изгибного и чисто растягивающего напряжений:

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}^b + E\varepsilon_{zz}^s \approx Ev''y + Ew'_z.$$

Продольное удлинение w полагается однородным по сечению, оно учитывается независимо от поперечных перемещений. При этом должны быть добавлены соответствующие слагаемые в векторы перемещений, в вектор узловых сил и в матрицу жёсткости.

15. Динамические явления и методы их количественного описания

15.1. Введение: общая классификация динамических задач

В задачах динамики существенно ускорение, испытываемое точками тела при приложении нагрузки. Это имеет место, например, при распространении колебаний. Универсального критерия "динамичности" движения материального тела нет, но, рассматривая характерные времена и другие масштабы задачи можно понять, существенно ли ускорение для НДС. Такими масштабами могут быть время изменения нагрузки, характерное время изменения перемещений в точках, время прохождения звуковой волной характерного размера тела, относительный вклад сил инерции в напряжённое состояние и т.п.:

$$\tau, u/\dot{u}, L/c, |\rho\ddot{u}/\sigma_e|, \dots \quad (15.1)$$

Типичное динамическое нагружение – удар – быстрое нагружение контактной силой при соударении твёрдых тел, воздействии сжатого газа и т.п. При достаточно высокой амплитуде воздействия деформирование материала будет неупругим, возможно разрушение, изучение которого часто служит основной задачей исследования. Неупругое деформирование поглощает избыточную начальную энергию воздействия, и возмущение с уменьшенной амплитудой распространяется в виде упругих волн. В теле конечных размеров возможны только стоячие волны, имеющие частоту, близкую к одной из собственных частот системы. В металлах затухание может быть слабым, и собственные колебания могут длиться относительно долго, как, например, в колоколе. В технике интерес представляет резонансный отклик системы на периодическое внешнее воздействие, поскольку нагружение с собственной частотой чревато разрушением конструкции. Соответственно, обычно рассматриваемые динамические явления можно условно разбить на 2 класса, отвечающие импульсным (ударно-волновым) явлениям и колебательным (волновым) процессам. Как импульсные, так и волновые задачи могут быть рассмотрены с помощью общей численной методики, изложенной ниже. В сложных конструкциях основной интерес чаще представляют собственные частоты и формы колебаний, которые рассчитываются с помощью специфического аппарата, предъявляющего меньшие требования к ресурсам.

Приведём простой пример динамической задачи: *Вертикально расположенный упругий стальной стержень падает на жёсткий пол. Оценить максимальную деформацию стержня.*

При контакте нижнего конца стержня с полом в момент $t = 0$ нижний конец останавливается, а остальной материал будет продолжать движение до прихода волны сжатия снизу. Для оценок полагаем, что в момент $t = \tau$ начала разгрузки, на котором весь стержень остановится, и деформация станет максимальной, массовая скорость в любом сечении стержня – нулевая, и вся его кинетическая энергия перешла в потенциальную энергию упругой деформации:

$$M \dot{u}^2 / 2 = M/\rho E \varepsilon^2 / 2 .$$

Здесь \dot{u} – скорость, приобретённая стержнем при падении к моменту контакта с полом. Выражаем деформацию в момент максимального сжатия –

$$\varepsilon = \frac{\dot{u}}{\sqrt{E/\rho}}. \quad (15.2)$$

Величина $c = \sqrt{E/\rho}$ отвечает величине скорости продольной звуковой волны в бесконечной упругой среде. Это можно показать, оценив деформацию из метрических соотношений. К моменту τ , перед началом отскока, волна вдоль стержня пройдёт длину $L = c\tau$, дальний конец стержня пройдёт длину $\Delta L = \dot{u}\tau$, откуда

$$\varepsilon = \Delta L/L = \dot{u}/c.$$

Продольная скорость звука c в металлах составляет величину порядка нескольких км/с. Возьмём оценкой порога пластичности $\varepsilon = 0,002$. Это отвечает скорости соударения $5 \div 7$ м/с – падение с высоты 2 м.

Данную задачу, в сравнении с квазистатикой, можно рассматривать в лабораторной системе так: внешняя сила ускоряет тело, после чего оно соударяется со стенкой и испытывает деформацию – появляются внутренние силы. В системе отсчёта стержня можно сказать, что в процессе ускорения сил не было (состояние покоя), затем на него внезапно подействовала внешняя сила со стороны пола. Обе точки зрения важны: вторая – для определения сил, действующих на стержень, первая – для расчёта общей кинематики движения самого стержня и деформации пола, если это учитывается.

Приведённое рассмотрение упрощено в ряде отношений. Во-первых, мы не учитывали деформирование преграды – материала пола, на который падает стержень. Это может изменить профиль нагружения края стержня и характер деформирования, поскольку сталь обычно более жёсткая, чем пол, и испытываемое стержнем ускорение будет меньшим – пол частично демпфирует. Во-вторых, мы не учли, что стержень может деформироваться поперёк – расплющиваться из-за отсутствия стеснения на боковых границах. В общем случае, мы считали деформацию одноосной и волну – продольной. В действительности в стержне будут поперечные перемещения, которые максимальны на боковой поверхности, и наряду с продольной волной возникнут отстающие от неё поперечные волны. При малых скоростях пластическая деформация будет иметь место только в соударяющемся конце стержня, далее начальное возмущение распространяется в стержне во все стороны, деформируя границы. Возникает система упругих волн, которые распространяются с разной скоростью. Если стержень – тонкий (провода), то при ударе могут быть изгибные деформации. Все эти вопросы требуют детализации постановки задачи.

В общем случае картина динамического воздействия может быть очень сложной, особенно – колебательного характера. В принципе, такие задачи могут быть решены по рассмотренной далее общей схеме численной дискретизации динамической задачи. Но такие расчёты часто весьма затратны, а в случае тонкостенных конструкций с большим количеством контактов могут быть очень неточными или просто невыполнимыми. Поэтому анализ колебательных явлений и следующие из него редукции исходной общей постановки динамической задачи играют важнейшую роль. Они рассмотрены после нижеследующего общего введения в МКЭ для динамических задач.

15.2. Дискретизация МКЭ для динамических задач

15.2.1. Система уравнений динамики твёрдого деформируемого тела.

По 2–му 3–му Ньютона ускорение и движение точек материального тела связаны с приложенными внешними и связанными с ними внутренними силами. Для описания движения в динамике, как и в квазистатике, можно применить "текущий лагранжев"

подход: на каждом шаге по времени элемент преобразуется, и с ним преобразуются компоненты тензора напряжений, взятые в неподвижной системе отсчёта. Введя некоторые естественные предположения относительно описания ускорения, можно пользоваться силовыми (тензор напряжений) и кинематическими (тензор деформации) характеристиками состояния, построенными для случая малых квазистатических деформаций. Напомним, что в лагранжевом подходе координаты точек в момент времени t отнесены к координатам (a_1, a_2, a_3) точек тела в некоторый предшествующий момент времени $t=t_0$:

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t), \quad a_i = x_i(a_1, a_2, a_3, 0), \quad u_i(a_1, a_2, a_3, t) = x_i(a_1, a_2, a_3, t) - a_i. \quad (15.3)$$

На шаге по времени Δt перемещения точек:

$$u_i(a_1, a_2, a_3, t + \Delta t) = x_i(a_1, a_2, a_3, t + \Delta t) - x_i(a_1, a_2, a_3, t) = x_i(a_1^*, a_2^*, a_3^*, \Delta t) - a_i^*,$$

где $a_i^* = x_i(a_1, a_2, a_3, t)$ – преобразованные координаты точки на шаге.

Ускорение (скорость изменения импульса) ед. объёма тела обусловлено внутренней и внешней силами. Уравнение движения можно получить, повторив рассуждения, сделанные в гл. 1 при выводе уравнения равновесия, учтя, что силы, приложенные к малому объёму, не уравновешены, а вызывают его ускорение:

$$\rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i. \quad (15.4)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений Коши, ρ – плотность, ρf_i – объемная сила, \ddot{x}_i – ускорение.

В динамической постановке задачи надо определить перемещения точек тела в зависимости от времени (закон движения) и напряжённое состояние при движении из исходного положения в момент t_0 в неизвестное новое положение в момент t :

$$A(a_1, a_2, a_3, t_0) \rightarrow X(x_1, x_2, x_3, t),$$

Исходные и новые координаты отнесены к некоторой неподвижной декартовой системе координат – "лабораторной системе". В начальный момент $t=t_0$ должны быть заданы начальные условия по координатам и скоростям:

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t_0) = a_i \quad (15.5)$$

$$\dot{u}_i(x, t_0) = \dot{u}_i^0(x, t_0)|_{x \in \Omega}.$$

Заданы граничные условия по напряжениям на части границы $\partial\Omega_S$:

$$\sigma_{ij} n_j = p_i, \quad (15.6)$$

и граничные условия по координатам (скоростям) на части границы $\partial\Omega_U$:

$$x_i(t) = b_i(t) \quad \text{или} \quad \dot{u}_i(x_1, x_2, x_3, t) = U_i(t). \quad (15.7)$$

В случае контакта поверхностей тел 1 и 2 должно выполняться условие непрерывности нормального напряжения на границе контакта $\partial\Omega_C$:

$$(\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}) n_j = 0. \quad (15.8)$$

Здесь $\{n_j\}$ – вектор единичной внешней нормали к элементу границы.

Уравнение движения (15.4) описывает изменение импульса деформируемого твёрдого тела. В эйлеровом описании, отвечающем фиксированной в пространстве сетке конечных элементов, существует также закон сохранения массы. Но для лагранжевой частицы,

через границы которой вещество не перетекает, сохранение массы тривиально и определяет текущую величину средней плотности ρ данного малого объема V :

$$\rho V = m = \text{const}, \quad \text{или} \quad -\rho \varepsilon = \rho_0, \quad (15.11)$$

где $\varepsilon = V/V_0$ – относительное изменение объема.

Изменение полной энергии частицы рассматривается, если заметная часть механической энергии переходит во внутреннюю. В динамике имеют дело с производными по времени, т.е. с соответствующими мощностями. Изменение полной энергии складывается из изменения кинетической энергии, мощности работы приложенных сил (внешних и внутренних) и источников (стоков) тепла:

$$\dot{E} = \dot{T} + \dot{W} + \dot{U} + \dot{Q} \quad (15.9)$$

Если диссипация и источники тепла отсутствуют, то при отсутствии внешних механических воздействий это уравнение выражает сохранение механической энергии: $\dot{T} + \dot{W} + \dot{U} + \dot{W} = 0$, где \dot{W} – мощность работы внешних объёмных сил. Сохранение механической энергии следует из уравнения движения (15.4): умножая его на \dot{x}_i , получим

$$\begin{aligned} \rho \dot{x}_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} &= \rho \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}_i^2}{2} = \dot{x}_i \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right) = \frac{\partial \dot{x}_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \dot{W} = \frac{\partial \dot{x}_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \dot{W} = \\ &= \frac{\partial \dot{x}_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \dot{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij} + \dot{W} \end{aligned}$$

Здесь учтено равенство $\dot{u}_i = \dot{x}_i$, разложение тензора градиентов скоростей деформаций на тензор скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ik}$ и угловой скорости и то, что полная свёртка симметричного (напряжений) и антисимметричного (угловой скорости) тензоров равна нулю. Интегрируем по объёму равенство –

$$\dot{T} \equiv \rho \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}_i^2}{2} = \frac{\partial \dot{x}_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} + W - \dot{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij} \equiv P + W - \dot{U},$$

и для первого слагаемого P правой части воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского, интеграл будет нулевым. Интеграл от слагаемого \dot{U} будет мощностью работы внутренних сил, интеграл от W – полной мощностью работы внешних объёмных сил. Нетрудно видеть, что данное рассмотрение аналогично рассуждениям при выводе принципа виртуальной работы.

Как и в статике, мощность работы внутренних сил можно разложить на мощность сжатия, оказываемого силами давления, и мощность формоизменения. Последняя при неупругости связана с пластическими деформациями и диссипацией. Раскладывая тензоры на девиаторную и шаровую составляющие, получим для полной мощности, как и ранее, в гл. 3, мощность работы формоизменения и мощность сил сжатия:

$$\dot{U} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = (s_{ij} - p \delta_{ij})(\dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\varepsilon} \delta_{ij}) = s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - p \dot{\varepsilon}.$$

Величина $\dot{\varepsilon}$ – это скорость объёмной деформации, фигурирующая в термодинамическом описании системы. Диссипацией (нагревом) при формоизменении обычно можно пренебречь.

В общей форме уравнения энергии, описывающего баланс полной энергии (15.10), учитывается изменение во времени составляющих баланса, связанных с деформированием и теплопереносом. В термодинамике изменение внутренней энергии замкнутой системы

входит, обычно через температуру, в уравнение состояния, которое связывает, в частности, давление со степенью сжатия ε (или удельным объёмом) и температурой θ :

$$p=p(\varepsilon,\theta) .$$

При малой деформации влиянием температуры на давление часто можно пренебречь. Например, используемое для жидкостей эмпирическое уравнение Тэта имеет вид:

$$p=p(\varepsilon) , \quad p = p_0 + B \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^b - 1 \right) ,$$

где B и b – константы материала.

Отметим, что уравнение состояния используется только для вычисления давления в определяющем соотношении, и в лагранжевых координатах, в которых объём и плотность – это характеристики данного элемента объёма, перенос тепла связан непосредственно с движением этих элементов, если теплопроводность не важна. Поэтому уравнение энергии как уравнение в частных производных не требуется. В задачах динамики твёрдого тела молекулярный теплоперенос за характерное время процесса, как правило, пренебрежимо мал, либо может быть учтён в численном расчёте как дополнительный процесс, идущий в деформируемой системе параллельно деформации. Аналогично, влияние теплопереноса (теплопроводности) на колебательное движение рассматривается, при необходимости, как отдельный фактор. То же можно сказать и про тепловое излучение при рассмотрении движения газа. Поэтому при изложении дискретизации МКЭ мы, в полной аналогии со случаем квазистатики, ограничимся только уравнением движения, привлекая соответствующие кинематические и определяющие соотношения.

15.2.2. Пространственная дискретизация уравнений динамики ДТТ

Дискретизация системы уравнений (15.4-15.8) и решение получаемой системы алгебраических уравнений проводятся отдельно по пространственным координатам и времени, как это было сделано выше для уравнения теплопроводности. Механическая интерпретация этой процедуры расщепления состоит в том, что динамическая задача формулируется как (квази)статическая для текущего момента времени в локальной системе отсчёта каждой материальной частицы тела: известный принцип Д'Аламбера (см. [Голдстейн]) гласит, что силы инерции, возникающие в неинерциальной системе частицы, трактуются наравне с прочими объёмными силами. Динамической системе в каждый момент времени соответствует статическая, нагруженная определёнными внешними силами, известными на каждом шаге по времени, в которой уравнение (15.4) примет вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho(f_i - d^2 u_i / dt^2) = 0 , \quad u_i = u_i(x) , \quad x \in \Omega \quad (15.11)$$

Всё, что говорилось ранее про квазистатические системы, справедливо и в этом случае квазиравновесия. При этом время является не просто параметром нагружения, а новой переменной, фигурирующей в объёмном источнике импульса, определяющей изменение всего состояния тела. Это изменение формулируется в дифференциальной форме, и по времени необходимо интегрировать. Очевидно, что точка отсчёта интегрирования должна быть единая для всех КЭ. Единая лабораторная система отсчёта, необходимая при сборке матрицы жёсткости, включает и единый отсчёт времени. Различие локальных неинерциальных систем отсчёта конечных элементов, вводимых для получения квазиравновесия, состоит в ускорении, которое проявляется как внешняя объёмная сила.

15.2.3. Обобщённая формулировка уравнения квазиравновесия

Для пространственной дискретизации используем метод взвешенных невязок, в котором производная скорости по времени полагается просто некоторой функцией источника. В соответствии с процедурой метода взвешенных невязок, рассмотрим

обобщённую формулировку "замороженного" уравнения движения (15.11). Умножим его почленно на пробную функцию $\omega = \omega(x, y, z)$ из некоторого семейства допустимых (дифференцируемых нужное количество раз и совместимых с граничными условиями по перемещениям/скоростям на границе области $\partial\Omega_U$), проинтегрируем получившееся уравнение по объёму:

$$\int_{\Omega} \omega \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} \omega \rho (f_i - d^2 x_i / dt^2) d\Omega = 0. \quad (15.12)$$

Обобщённое (слабое) решение уравнения (15.4) – это функция перемещений (набор трёх компонент смещений относительно начального положения) и связанных с ними компонент тензоров деформаций и напряжений, удовлетворяющих (15.12) при любых допустимых $\omega(x, y, z)$ и заданной аппроксимации по времени, что вполне аналогично решению уравнения равновесия на каждом шаге по времени в квазистатике.

Функционал (15.12) имеет прямой физический смысл: наборы из трёх пробных функций $\omega = \omega(x, y, z)$ можно рассматривать как векторы виртуального перемещения с тремя физическими компонентами, $\vec{\omega} = \{\delta u_k(x, y, z)\}$, $k = 1, 2, 3$, которые могут браться независимо друг от друга. В этом случае (15.12) можно рассматривать как работу внутренних и внешних сил на этих перемещениях – суммируя слагаемые, получим скалярное произведение силы на перемещение за единицу времени, т.е. полную возможную работу главной силы, тождественно равную нулю в каждой материальной частице и во всём объёме:

$$\int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i \rho (f_i - d^2 x_i / dt^2) d\Omega = 0. \quad (15.13)$$

Интегрирование в (15.13) проводится по объёму системы на текущий момент времени, при вычисленных производных по времени. Напомним, что эквивалентность в обратную сторону, т.е. формулировки (15.13) – решению квазистатического уравнения (15.11), дополненного кинематическими соотношениями и граничными условиями, следует из вариационного принципа для задач МДТТ и выполнена при любом определяющем соотношении материала (которое сюда просто не входит).

Дальнейшее повторяет вывод принципа возможных перемещений в гл. 4 – преобразованию (15.13) к виду суммы виртуальных работ сил, приложенных к системе. Раскрывая в левой части (15.13) слагаемое с дивергенцией тензора напряжений по формуле интегрирования по частям и заменяя интеграл с полной дивергенцией по формуле Гаусса–Остроградского, получаем:

$$\int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega = - \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta u_i \sigma_{ij} n_j dA.$$

Подставляем это в (15.13):

$$\int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_i \rho (f_i - d^2 x_i / dt^2) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta u_i \sigma_{ij} n_j dA. \quad (15.14)$$

Примем во внимание граничные условия (15.5)–(15.6) на участках границ $\partial\Omega_U$, $\partial\Omega_S$, $\partial\Omega_C$. При этом учитываются условия по перемещениям на границе $\partial\Omega_U$, $\delta u_i(x, y, z) = 0$, и по скорости, которые предполагаются интегрируемыми связями [Голдстейн]. В частности, в условие не входит сила трения, зависящая от скорости, и в любой момент известно положение граничных точек, вычисленное путём интегрирования скорости на всём интервале времени. На остальных границах отсутствуют напряжения, и интеграл по всей

границе, как и ранее, сводится к сумме интегралов по границам задания силовых граничных условий:

$$\int_{\partial\Omega} \delta u_i \sigma_{ij} n_j ds = \int_{\partial\Omega_S} \delta u_i \sigma_{ij} n_j ds + \int_{\partial\Omega_C} \delta u_i \sigma_{ij} n_j ds .$$

Далее, преобразуя первое слагаемое в правой части (15.14), получим –

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} \delta u_{(i,j)} \sigma_{ij} d\Omega \equiv \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \rho (f_i - d^2 x_i / dt^2) \delta u_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_S} \delta u_i P_i ds + \int_{\partial\Omega_C} \delta u_i \sigma_{ij} n_j ds \end{aligned}$$

Здесь при свёртке тензоров в левой части использовано тождество $t_{ik} s_{ik} = t_{(ik)} s_{ik}$, где операция $t_{ik} \rightarrow t_{(ik)}$ означает симметрирование тензора: $t_{(ik)} = \frac{1}{2}(t_{ik} + t_{ki})$. Симметрирование тензора градиентов деформаций $\delta u_{(i,j)}$ даёт, как мы помним, тензор деформаций на виртуальных перемещениях: $\delta u_{(i,j)} = \delta \varepsilon_{ij}$, и в левой части мы получили работу внутренних сил W_I . Полученное в итоге соотношение представляет собой принцип виртуальных перемещений для "замороженной" на шаге по времени конфигурации, в которой в мощность работы объёмных сил W_V включена мощность работы сил инерции, а работа внешних сил W_B учитывает приложенные силы на границах:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \rho (d^2 x_i / dt^2 - f_i) \delta u_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_S} \delta u_i P_i ds + \int_{\partial\Omega_C} \delta u_i \sigma_{ij} n_j ds . \quad (15.15)$$

или, как упоминалось выше –

$$W_I = W_V + W_B .$$

Условие (15.5) на начальные скорости в точках также приводится к обобщённой форме:

$$\int_{\Omega} \omega u_i(x, t_0) d\Omega = \int_{\Omega} \omega \dot{u}_i^0(a, t_0) d\Omega .$$

15.2.4. Дискретизация МКЭ

Начальный этап процедуры дискретизации, как и ранее, включает разбиение на конечные элементы и задание аппроксимирующих функций (функций форм) в пределах элементов. Основными неизвестными служат компоненты перемещений в узлах, взятые в зависимости от времени. Узловые точки КЭ–разбиения общим количеством n при этом рассматриваются как точки задания набора дискретных базисных функций $\{N_i(x, y, z)\}$, $i=1, \dots, n$, и формальное приближённое решение задачи (15.3)–(15.8) в области Ω ищется как комбинация этих функций, взятых с весами, равными значениям компонент перемещений в узлах КЭ. Базисная функция $N_i(x, y, z)$ (пирамидальная) задана в окрестности каждого из узлов, её сужение на данный конечный элемент, содержащий данный узел, даёт одну из восьми функций формы элемента. За пределами элементов, содержащих данный узел k , базисная функция $N_k(x, y, z)$ равна нулю. Используем метод Бубнова–Галеркина, в котором набор пробных функций совпадает с набором базисных функций, используемых для аппроксимации компонент вектора перемещений в узле.

При дискретном представлении количество линейно независимых уравнений вида (15.11), необходимое для получения пространственной зависимости решения, определяется количеством линейно независимых пробных функций, т.е. в нашем случае – конечно-элементной сеткой и набором функций формы. Разложение решения по базисным функциям для k -й физической компоненты перемещения в данной точке (x, y, z) имеет вид (11.7):

$$u_k(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) u_k^{(i)}(t), \quad k=1, 2, 3, \quad (15.16)$$

где $u_k^{(i)}(t)$ – узловые значения. В полной аналогии с двумерным случаем, рассмотренным в квазистатике, это будет три независимых равенства: интерполяция трёх компонент вектора перемещений $\{u_k\}$ одним и тем же набором базисных функций $\{N_i\}$. В любой точке области выражение (15.16) сводится к интерполяционной формуле по функциям формы элемента, содержащего эту точку. Это же представление справедливо для координат, скоростей и ускорений.

Как и ранее, при матричной записи соотношений неизвестные узловые перемещения представляются в виде матрицы–вектора перемещений $\{d\}$ размерности $3n \times 1$. Аналогично (11.9) вводится матрица базисных функций $[N^{(e)}]$ размером $3 \times 3n$, составленная из нулей и базисных функций. В точке $(x, y, z) \in \Omega$, находящейся внутри некоторого КЭ, содержащего данный узел m : $(x, y, z) \in e^m \subset \Omega$, аппроксимирующее выражение для компонент u_i , $i=1, 2, 3$ физического вектора перемещения, представляемого матрицей размером 3×1 , записывается в матричном виде как:

$$\{u(x, y, z, t)\}^T = [N] \{d\}^T, \quad (x, y, z) \in e^m \subset \Omega. \quad (15.17)$$

В данном соотношении ненулевыми будут только слагаемые, содержащие базисные функции узлов, принадлежащих данному КЭ.

Деформации в любой точке области по-прежнему определяются с помощью тензора малых деформаций Коши:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^n \frac{\partial N_m(x)}{\partial x_i} u_{(k)}^{(m)} + \frac{\partial N_m(x)}{\partial x_k} u_{(i)}^{(m)} \right). \quad (15.18)$$

Далее вводится матрица деформаций $[B]$ размером $6 \times 3n$, элементы которой по-прежнему суть производные базисных функций, сводящиеся к производным от функций формы. С её помощью алгебраический вектор деформаций, записанный в виде столбца 6×1 , выражается как:

$$\{\varepsilon(x, y, z, t)\} = [B(x, y, z)] \{d(t)\}. \quad (15.19)$$

Определяющее соотношение, связывающее приращения напряжений и деформаций на шаге по времени, запишем, как и ранее, в квазилинейной форме:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \equiv C_{ijkl} u_{(k,l)}.$$

В упругом случае –

$$\{\sigma(x, y, z, t)\} = [E] \{\varepsilon\} = [E] [B] \{d\}. \quad (15.20)$$

Рассмотрим подробнее схему сведения интегрального соотношения (15.15) к алгебраической системе. Используются описанные ранее трилинейные (билинейные, линейные в случае размерностей 2 или 1) функции формы на гексаэдральных (4–сторонних или стержневых/изгибных 2–точечных) элементах. Из определения базисных функций и изопараметрических конечных элементов следует, что набор $\{N_i(x, y, z)\}$, взятый для всех узлов данного КЭ–разбиения, будет полным в смысле представления решения в виде аппроксимации по трилинейным функциям формы вида (11.8). Как отмечалось ранее, формальное равенство (15.16), расписанное для точки, принадлежащей некоторому КЭ, есть просто детализация выражения (11.10) через базисные функции. Следуя общей схеме метода взвешенных невязок (11.27) в интегральное выражение (15.15) следует подставить аппроксимацию (15.16) и следующие из неё соотношения (15.19)–(15.20). С граничными условиями и объёмными силами

обходимся так же, как и ранее в гл. 10, вводя функции формы, определённые на двумерных сегментах границы.

В методе Бубнова-Галёркина пробные функции, используемые для записи обобщённого решения, равны базисным функциям, используемым для аппроксимации решения: $\omega_i(x, y, z) = N_i(x, y, z)$. Для того чтобы из интегрального выражения (15.15) получить $3n$ формально независимых уравнений для $3n$ независимых переменных, его надо проинтегрировать поочерёдно с $3n$ линейно независимыми пробными функциями. Мы построили для каждого узла свою базисную функцию координат, и общее количество этих линейно независимых базисных функций равно n , в соответствии с количеством узлов. Поскольку компоненты векторов перемещений формально независимы, уравнение (15.15) может быть написано для набора из $3n$ независимых пробных функций вида $\omega_k^{(i)}(x, y, z) = \{\delta_{k1}, \delta_{k2}, \delta_{k3}\} N_i(x, y, z)$, взятых с некоторыми коэффициентами. Здесь $\omega_k^{(i)}(x, y, z)$ может быть представлено как матрица $[N]$ размером $3 \times n$, δ_{kj} – символ Кронекера, $i=1, \dots, n$ – номер узла, $k=1,2,3$ нумерует координатные направления. Пространство пробных функций фактически является декартовым (прямым) произведением трёх пространств исходных базисных функций $N_i(x, y, z)$, и его размерность равна $3n$. $(3n+1)$ -е уравнение будет линейно зависимым от остальных. Запись интегральных выражений с использованием $N_i(x, y, z)$ ниже будет пониматься в указанном смысле.

Дальнейшие преобразования аналогичны рассмотренным в гл. 10. Введём алгебраический вектор $\{\Delta\}$ виртуальных узловых перемещений размерности $1 \times 3n$: $\{\delta(x, y)\} = [N]\{\Delta\}$, где 3-вектор $\{\delta(x, y)\}$ – функция координат. Введём деформации, построенные на виртуальных перемещениях. В компонентной форме – в окрестности m -го узла, аппроксимация виртуальной деформации, записанная через базисные функции и виртуальные узловых перемещения, записываются по формуле (15,18). В окрестности m -го узла её можно записать в виде:

$$\delta u_{i,k}^m = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k^m}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta u_i^m}{\partial x_k} \right) = \sum_{p(m)} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_{p(m)}^{(e)}(x)}{\partial x_i} \Delta_{(k)}^{p(m)} + \frac{\partial N_{p(m)}^{(e)}(x)}{\partial x_k} \Delta_{(i)}^{p(m)} \right) . \quad (15.21)$$

Здесь $p(m)$ пробегает восемь глобальных номеров узлов одного из конечных элементов (e) , содержащих данный узел (m) , $N_{p(m)}^{(e)}$ – сужение базисной функции $N_{p(m)}$ узла $p(m)$ на этот конечный элемент, $\Delta_{(i)}^{p(m)}$ – значение i -го узлового перемещения в узле $p(m)$, причём по индексам координат i нет суммирования. В матричной форме, для всей области записываем в полной аналогии с (15.19) –

$$[\delta u_{i,k}] = [B]\{\Delta\} . \quad (15.21)$$

Соотношение для виртуальной работы внутренних сил из (15.15) примет вид

$$\begin{aligned} W_I &= \int_{\Omega} \delta u_{i,k} E_{ikpq} \varepsilon_{pq} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_j(x)}{\partial x_i} \Delta_{(k)}^{(j)} + \frac{\partial N_j(x)}{\partial x_k} \Delta_{(i)}^{(j)} \right) E_{ikpq} \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^n \frac{\partial N_m(x)}{\partial x_p} u_{(q)}^{(m)} + \frac{\partial N_m(x)}{\partial x_p} u_{(q)}^{(m)} \right) d\Omega \end{aligned}$$

В матричном виде:

$$W_I = \{\Delta\}^T \int_{\Omega} [B]^T [E] [B] d\Omega \{d\} \equiv \{\Delta\}^T [K] \{d\} = \{\Delta\}^T \{F\}_{in}^{\Omega} , \quad (15.23)$$

где $[E]$ - это матрица определяющего соотношения, $\{F\}_{in}^{\Omega}$ - вектор внутренних узловых сил.

Далее вводятся алгебраические векторы нагрузок, соответствующие узловым векторам поверхностных сил (граничные условия по нагружению) и объёмных сил. Внося выражения для соответствующих слагаемых уравнения (15.15), запишем его в матричной форме, аналогично ранее рассмотренному в 2D методе перемещений, (10.33) –

$$\{\Delta\}^T \int_{\Omega} ([B]^T [E] [B] \{d\} + [N]^T \rho [N] d^2 \{x\} / dt^2) d\Omega = -\{\Delta\}^T \int_{\Omega} [N]^T \rho \{f\} d\Omega + \{\Delta\}^T \{P\} \quad (15.24)$$

где $\{P\}$ – узловой вектор граничных нагрузок, определяемый по граничным условиям:

$$\{P\} = \int_{\partial\Omega_p} [N_s]^T \{p(x, y, z)\} dA. \quad (15.25)$$

Ввиду произвольности узлового вектора виртуальных перемещений $\{\Delta\}^T$, его можно опустить, и мы приходим к системе $3n$ линейно независимых уравнений:

$$\int_{\Omega} ([B]^T [E] [B] \{d\} + [N]^T \rho [N] d^2 \{x\} / dt^2) d\Omega = -\int_{\Omega} [N]^T \rho \{f\} d\Omega + \{P\} \quad (15.26)$$

Большинство слагаемых в каждом из уравнений системы – нулевые, поскольку произведение двух базисных функций отлично от нуля только в случае, если они имеют общую область, в которой обе отличны от нуля. Матрица

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [E] [B] d\Omega \quad (15.27)$$

будет матрицей жёсткости, а матрица при ускорениях –

$$[M] = \int_{\Omega} [N]^T \rho [N] d^2 \{x\} / dt^2 d\Omega \quad (15.28)$$

называется *матрицей масс системы*. С помощью введённых матриц уравнение (15.26) можно написать в виде

$$[M] \{\ddot{d}\} + [K] \{d\} = \{F\} \quad (15.29)$$

Здесь в правой части объёмные силы и поверхностные нагрузки объединены в вектор нагрузки $\{F\}$. Обе матрицы $[M]$ и $[K]$ симметричны и положительно определены.

15.2.5. Матрица демпфирования. Псевдовязкость

Полученное уравнение (15.29) – это система обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно функций узловых перемещений, зависящих от времени. 1-е производные по времени в уравнениях отсутствуют, и любое начальное возмущение порождает незатухающие колебания разных частот и форм – моды колебаний. Физически, в случае толстостенных конструкций большая часть мод быстро затухает или несущественна. Для того, чтобы уменьшить их вклад, в расчётах вводят демпфирование в виде слагаемого вида $[C] \{\dot{d}\}$ – произведение скорости на *матрицу вязкого демпфирования* $[C]$:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{d}\} + [K] \{d\} = \{f\}. \quad (15.30)$$

Обычно используемая форма матрицы $[C]$ в случае матрицы масс общего вида – это т.н. *рэлеевская форма* $[C]$:

$$[C] = a[M] + b[K],$$

где a и b – коэффициенты, подлежащие определению. Формальное, разрешённое относительно ускорений, аппроксимированное уравнение движения имеет вид

$$\{ \ddot{x} \} = [M]^{-1} (-[C]\{\dot{d}\} - [K]\{d\} + \{f\}) \quad (15.31)$$

Таким образом, в общем случае интегрирование по времени требует обращения матрицы масс, вообще говоря, переменной.

При расчёте импульсных нагружений, характеризуемых резкими фронтами и образованием ударных волн, когда вариация давления доминирует относительно сдвиговых сил (в частности, в жидкостях), в вязкое демпфирование добавляется *квадратичное по скорости слагаемое* в виде **псевдовязкости** Неймана–Рихтмайера, известной из газодинамики ("искусственная вязкость"). Это – скаляр, играющий роль дополнительного давления:

$$p_v = \rho d |\dot{\epsilon}| (q_1 d |\dot{\epsilon}| + q_2 c) .$$

Здесь ρ – плотность в элементе, $\dot{\epsilon}$ – скорость объёмной деформации, d – характерный размер подобласти, например, кубический корень из объёма КЭ, c – местная скорость звука. Если скорость объёмной деформации положительна, т.е., если идёт разгрузка и материал расширяется, то полагается $p_v = 0$. Поэтому вязкие "квадратичные" силы увеличивают сопротивление материала только при сжатии, работа внешних сил не запасается в паразитных колебаниях, частично диссипирует, что отвечает реальности. Вязкое давление учитывается в общем давлении, и работа псевдовязких сил суммируется в полной внутренней энергии, что в целом соответствует реальности.

Динамические процессы, в которых доминируют ударно–волновые явления, обычно требуют задания уравнения состояния для давления, причём при "средних" давлениях, когда сдвиговые силы сравнимы с силами сжатия (в пределах ~100 кбар), они могут протекать *реологически*, т.е. с явной зависимостью свойств материала от времени (запаздывание текучести, откольные явления и др.). Это – весьма обширная область исследований, тесно связанная с материаловедением. При небольших нагрузках материал часто может рассматриваться как упругий или упруго–пластический с характеристиками, близкими к квазистатическим. Ввиду быстрого затухания движения при импульсной нагрузке, накопление энергии может происходить только при периодическом – колебательном воздействии. Отдельный класс задач составляет распространение упругих или близких к таковым возмущений в бесконечной среде. Типичные относящиеся сюда постановки задач рассмотрены ниже по тексту.

15.2.6. Сосредоточенные массы. Явное интегрирование по времени

Уравнения (15.26) динамики дискретной системы могут быть разбиты на n групп (число узлов) по три уравнения (размерность задачи), отвечающих n базисным функциям. Каждому узлу соответствуют 3 уравнения для 3–х степеней свободы в узле. Слагаемое с ускорением в x –направлении в уравнении для m –го узла, представляющее собой сумму интегралов от силы инерции по объёму Ω_m элементов, окружающих узел m , имеет вид:

$$\int_{\Omega_m} \sum_{(e)} \rho^{(e)} \ddot{u}_x^{(e)} d\Omega = \sum_{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} \rho^{(e)} \Phi_m^{(e)} \sum_k \Phi_k^{(e)} \ddot{u}_k^{(e)} d\Omega = \sum F_m^e . \quad (15.32)$$

Ненулевой вклад в этот интеграл дают только элементы, содержащие узел m . Вне этих элементов подынтегральное выражение тождественно равно нулю. Суммирование идет по элементам, окружающим m –й узел, занумерованных индексом (e) , а также по вкладам узлов в каждом элементе (индекс k). Среднее выражение в левой части двух равенств (15.32) – это слагаемые с узловыми ускорениями, справа – сумма по приложенным силам. Для регулярной сетки b –гранных элементов в общем положении в каждом уравнении

имеются слагаемые с компонентами ускорений и перемещений 27 узлов. При дискретизации по времени ускорения выражаются с помощью конечных разностей через неизвестные перемещения узлов, и в результате получается система квазилинейных уравнений, которая решается методами, аналогичными описанными для статики.

Чтобы иметь возможность использовать явную схему интегрирования по времени, требующую малого шага по времени, но минимума арифметических действий, матрицу масс преобразуют к диагональной – тогда ускорения явно разрешаются относительно остальных величин. Чтобы получить диагональную матрицу масс, представим себе, что массы элементов вблизи данного узла частично стягиваются в этот узел, и аналогично – для остальных узлов. Плотность становится набором δ -функций с центрами в узлах, и в левой части второго уравнения (15.32) вместо 27-ми слагаемых с узловыми ускорениями остаётся одно, умноженное на сосредоточенную массу m -го узла:

$$\begin{aligned} \sum_{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} \rho^{(e)} \varphi^{(e)} \sum_k \varphi_k^{(e)} \ddot{x}_k^{(e)} d\Omega &= \sum_{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} \rho^{(e)} \varphi^{(e)} \ddot{x}_m^{(e)} \sum_k \varphi_k^{(e)} d\Omega = \\ &= \sum_{(e)} \ddot{x}_m^{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} \rho^{(e)} \varphi^{(e)} d\Omega \approx \sum_{(e)} \ddot{x}_m^{(e)} \rho^{(e)} \int_{\Omega^{(e)}} \varphi^{(e)} d\Omega \end{aligned} \quad (15.34)$$

Здесь отсутствуют слагаемые с ускорениями узлов, окружающих m -й узел, т.к. массы и ускорения этих узлов в приближении точечных (lumped) масс учтены в других уравнениях и учтено, что сумма базисных функций даёт единицу. Обозначение $\varphi^{(e)}$ указывает в каждом элементе на ту функцию формы, которая принимает максимальное значение в узле m . При интегрировании проводится замена переменных, поскольку φ заданы в локальных координатах. В итоге матрица масс становится диагональной: $[M] \equiv [m]$, m – масса узла.

Указанная процедура существенно упрощает вычисления, хотя, как указывают некоторые авторы в ранних работах по МКЭ, может приводить к частичной потере аппроксимации [Зенкевич], что восполняется измельчением сетки в нужных подобластях. В уравнениях (15.31) умножение на обратную матрицу сводится к делению на массу узла, и ускорения в уравнении легко разрешаются

$$\{ \ddot{x} \} = [m^{-1}] (-[C]\{ \dot{d} \} - [K]\{ d \} + \{ f \}) \quad (15.35)$$

В задачах распространения волн интересующий отрезок времени имеет порядок скорости звука, поделённой на длину, поэтому явное интегрирование вполне приемлемо.

15.2.7. Процедура интегрирования по времени

В качестве примера интегрирования ускорений по времени приведём самую простую, центрированную 2-слойную явную разностную схему:

$$a_m = \ddot{x}_m = \frac{1}{m_m} \sum F_m^e, \quad a_m^{(n)} = \frac{v_m^{(n+1/2)} - v_m^{(n-1/2)}}{\tau_{n+1/2}}, \quad v_m^{(n+1/2)} = \frac{x_m^{(n+1)} - x_m^{(n)}}{\tau_n}, \quad \tau_{n+1/2} = 1/2(\tau_{n-1} + \tau_n)$$

В данном случае индекс n обозначает номер шага по времени, m – номер узла, τ – шаг по времени, v – скорость. Очевидно, что в случае точечных масс в явной схеме интегрирование по времени может быть проведено для каждого уравнения независимо, что существенно облегчает распараллеливание численной процедуры.

Для численной устойчивости решения по явной схеме необходимо выполнение условия Куранта для шага интегрирования

$$\Delta x / \Delta t > c, \quad (15.36)$$

где c – местная скорость звука, Δx , Δt – местный шаг по пространству (минимальный размер КЭ) и шаг по времени. В программах расчёта динамики по явной схеме текущий шаг по времени, учитывающий ограничение (15.36), определяется в начале цикла вычислений на шаге. Вследствие не квадратичного, как в задаче теплопроводности, а линейного ограничения на шаг по времени, явные схемы часто используются для решения динамических задач, особенно ударно-волновых.

15.2.8. Физические особенности динамики твёрдого тела и её численной модели

Суммируем выявленные основные физические особенности уравнений динамики ДТТ, проявляющиеся и в схеме построения численной процедуры решения:

- время – физически значимый параметр, вместе со скоростью звука; вместо уравнений квазистатического перехода от состояния к состоянию решается уравнение движения, которое интегрируется по времени в случае явной схемы с соблюдением соответствующего критерия (Куранта);
- инерция материала проявляется в виде дополнительной "матрицы масс" системы, требующая обращения; явное интегрирование по времени возможно путём дискретизации распределения плотности – по отдельным узлам, с общей суммой, равной полной массе тела;
- при больших давлениях заметную роль может играть внутренняя энергия системы;
- типичное динамическое явление - колебания, которые в численном расчёте могут иметь нефизический характер вследствие отсутствия естественного демпфирования – возникает ряд новых проблем, решаемых на уровне общей методологии – отделение физически значимых колебаний, демпфирование паразитных мод и т. п.

Эти особенности определяют специфику всей процедуры прямого, т.е., исходящего непосредственно из уравнения движения, решения динамической задачи. Для анализа частотных характеристик системы используются иные подходы.

16. Анализ упругих колебаний

16.1. Постановки колебательных и волновых задач

Рассмотрим, следуя [Работнов МДТТ], постановки задач с колебаниями и волнами в твёрдом деформируемом теле.

А. Свободные колебания. Тело свободно от действия внешних сил: $f_i = 0$, граничные нагрузки нулевые: $\sigma_{ij}n_j = 0$ на $\partial\Omega_p$. Часть поверхности $\partial\Omega_u$, где заданы условия по перемещениям, может быть неподвижно закреплена, на ней $u_i = 0$. Заданы начальные условия (16.3). Тело приводится в движение сообщением ему начального распределения перемещений и скоростей.

Б. Вынужденные колебания. Если объёмные силы f_i , поверхностные силы P_i , заданные на участке $\partial\Omega_p$, и заданные перемещения точек поверхности u_i представляют собою периодические функции времени такие, что

$$P_i = P_i^0 \varphi(t), \quad u_i = u_i^0 \varphi(t), \quad f_i = f_i^0 \varphi(t),$$

и величины, отмеченные индексом «нуль», от времени не зависят, то в качестве представительной функции $\varphi(t)$ можно принять

$$\varphi(t) = \exp(i\omega t)$$

Действительно, любая периодическая функция может быть представлена рядом Фурье. Построив решение для одного члена этого ряда, мы можем воспользоваться принципом суперпозиции для построения полного решения.

В. Распространение волн. Если в некоторой части тела больших размеров внезапно создается возмущение, оно распространяется с конечной скоростью. Это значит, что в точке, находящейся на расстоянии L от источника возмущения, в течение некоторого времени τ будет сохраняться покой. Периодическое возмущение, создаваемое в точке, будет вызывать в другой точке, отстоящей от нее на расстоянии L , периодическое движение с той же частотой, но сдвинутое по фазе. Задачи подобного типа называют *волновыми задачами*.

При постановке **А** и **Б** обычно подразумевается, что размеры тела малы относительно длины волны, а при постановке **В** – наоборот, среда предполагается безграничной.

16.2. Распространение плоских волн в неограниченной упругой среде

Рассмотрим сначала задачу о распространении волн в безграничной среде. Выражая в уравнении движения (****) напряжения через компоненты перемещения с помощью закона Гука, получаем для общего случая тела с произвольной анизотропией следующие дифференциальные уравнения движения:

$$\frac{1}{2}C_{ijkl}(u_{k,lj} + u_{l,kj}) - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (16.7)$$

Будем называть *плоской волной* решение системы (16.7), которое описывает перемещение неизменной конфигурации в направлении единичного вектора \mathbf{n} со скоростью c . Как оказывается, решения такого типа, соответствующие постоянной скорости c , не зависящей от конфигурации, возможны лишь в неограниченной упругой среде. Согласно определению поле перемещений, соответствующее плоской волне, дается выражением

$$u_i = U_i(ct - n_q x_q). \quad (16.8)$$

где U_i – дважды дифференцируемая функция координат, n_q – компоненты вектора направления распространения волны. Подставляя (16.8) в (16.7), получим

$$\frac{1}{2}C_{ijkl}(U''_{kn}n_j + U''_{ln}n_k) - \rho U_i'' c^2 = 0.$$

Полагая $U_i = \delta_{iq} U_q$, приведем эту систему к следующему виду:

$$(\frac{1}{2}C_{ijkl}(\delta_{kq}n_l n_j + n_k n_j \delta_{lq}) - \rho \delta_{iq} c^2) U_q'' = 0$$

Эта система однородных линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда, когда определитель ее равен нулю. Условие

$$\det \|\frac{1}{2}C_{ijkl}(\delta_{kq}n_l n_j + n_k n_j \delta_{lq}) - \rho \delta_{iq} c^2\| U_q'' = 0 \quad (16.9)$$

представляет собою кубическое уравнение относительно c^2 , решение которого определяет для каждого направления n_i три скорости распространения плоских волн. В случае изотропного материала тензор модулей упругости зависит только от двух постоянных:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Внесем эти выражения в уравнение (16.9). Заметим, что

$$\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{kq} n_l n_j = \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{lq} n_k n_j = \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{lq} n_k n_j = n_i n_q$$

Уравнение (16.9) для скоростей плоских волн примет следующий вид:

$$\det \|(\lambda + \mu)n_i n_q + \mu \delta_{iq} - \rho \delta_{iq} c^2\| = 0 \quad (16.10)$$

Для изотропного тела, очевидно, скорости распространения волн во всех направлениях одинаковы, поэтому в (16.10) можно принять, например, $n_1=1, n_2=0, n_3=0$. Теперь это уравнение запишется следующим образом:

$$\det \begin{vmatrix} \lambda + 2\mu - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0$$

Как видно, оно имеет двойной корень, следовательно, в изотропном теле получается не три, а две скорости распространения плоских волн, а именно,

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

Заметим, что для изотропного тела уравнения движения можно было сразу записать в следующей форме:

$$\lambda \varepsilon_{,k} + 2\mu \varepsilon_{ki,i} - \rho \ddot{u}_k = 0$$

Подставляя сюда $\varepsilon_{ki} = \frac{1}{2}(\partial u_k / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_k)$, получим следующее выражение

$$\lambda \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{2\mu}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_i} \right) - \rho \ddot{u}_k = (\lambda + \mu) \varepsilon_{,k} + \mu \Delta u_k - \rho \ddot{u}_k = 0$$

Здесь Δu_k – лапласиан u_k . Не нарушая общности, мы опять можем рассмотреть волны, распространяющиеся вдоль оси x_1 , а именно:

а) продольные волны: $u_1 = u(ct - x_1), u_2 = u_3 = 0, \varepsilon = u'$; первое уравнение движения приводится к следующему:

$$(\lambda + 2\mu - \rho c^2) u'' = 0$$

Ненулевое решение имеется при $c = c_1$;

б) поперечные волны: $u_1 = u_3 = 0, u_2 = u(ct - x_1)$. Подстановка во второе уравнение движения приводит к результату

$$(\mu - \rho c^2) u'' = 0$$

Таким образом, c_2 есть скорость распространения поперечных волн. Случай $u_1 = u_2 = 0, u_3 = u(ct - x_1)$ очевидно аналогичен второму.

Заметим, что для поперечных волн объёмная деформация $\varepsilon \equiv 0$, распространение их не сопровождается изменением объема. С другой стороны, для продольных волн $\text{rot } \mathbf{u} \equiv 0$. Поэтому их называют, соответственно, *эквиволюминальными* и *безвихревыми*, или *волнами искажения* и *волнами расширения*.

В рассмотренной выше задаче о распространении продольной волны в стержне скорость ее, согласно оценке (16.1), даётся выражением $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$. Эта скорость отлична как от c_1 , так и от c_2 , поскольку, в частности, для продольных волн

$$\lambda + 2\mu = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E}{1 + \nu} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 - \nu - 2\nu^2)},$$

и оценка (16.***) точна только до второго порядка по ν . В действительности, как отмечалось, плоские волны в стержне, представляющем собою ограниченное тело, распространяться не могут, возмущение, переносимое вдоль оси стержня, меняет свою конфигурацию.

Волны в неограниченных и полуограниченных средах рассматриваются, в частности, при анализе сейсмических процессов в толще Земли. Когда же сейсмическая волна от заглублённого источника выходит на поверхность, она распространяется далее в виде поверхностных волн, которые называются *волнами Рэлея* ([Седов], [Саваренский Сейсмические волны]). Они устроены сложнее, являются продольно–поперечными, движутся по поверхности и поэтому затухают слабее других типов волн, распространяясь, например, вдоль земной поверхности на большие расстояния.

16.2. Свободные колебания в упругой среде

Задача о свободных колебаниях упругого тела играет важнейшую роль в технике, т.к. совокупность этих колебаний определяет отклик тела на динамическую нагрузку. Будем искать решение уравнений движения (16.***) в следующем виде:

$$u_i = U_i \exp(i\omega t).$$

Здесь U_i — функции только координат, но не времени, i – мнимая единица. Аналогичным образом представляются, очевидно, компоненты деформации и напряжения. Обозначая через u_i , σ_{ij} теперь амплитуды перемещений и напряжений, без учёта объёмной силы, которая часто мала, мы получим вместо (16.***) следующую систему:

$$\sigma_{ij,j} - \rho\omega^2 u_i = 0. \quad (16.2)$$

Граничные условия в случае свободных колебаний должны быть однородными (отсутствие нагрузок и закрепления), тогда множитель $\exp(i\omega t)$ сокращается. Вопрос о начальных условиях мы оставляем в стороне. Уравнения связи между амплитудами напряжений и деформаций сохраняют форму обычных уравнений закона Гука

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,l} + u_{l,k}). \quad (16.3)$$

Система уравнений (31) и (32) при однородных граничных условиях имеет очевидное тривиальное решение $u_i = 0$, $\sigma_{ij} = 0$. Но при некоторых значениях параметра $\omega = \omega_k$ возможны и ненулевые решения

$$u_i = \psi_i^k, \quad \sigma_{ij} = s_{ij}^k.$$

Соответствующие значения ω_k называются *собственными частотами* упругого тела, а функции ψ_i^k точек пространства определяют *собственные формы колебаний*. Заметим, что в (16.2) входят квадраты собственных частот, которые сохраняются при всех дальнейших выкладках, поэтому корню ω_k будет всегда соответствовать корень $-\omega_k$, так что кроме решения $u_i \exp(\omega t)$ всегда присутствует парное ему решение $u_i \exp(-\omega t)$. Это позволяет суммированием образовывать из них действительные комбинации, которые одни только имеют механический смысл.

Связь амплитуд s_{ij}^k и ψ_i^k даётся для каждого собственного колебания уравнением (16.2)

$$s_{ij,j}^k - \rho\omega_k^2 \psi_i^k = 0. \quad (16.4)$$

Уравнения (16.4) могут рассматриваться как уравнения статической теории упругости с массовой силой $\rho\omega_k^2 \psi_i^k$.

Очевидно, что вследствие однородности системы уравнений и граничных условий, функции ψ_i^k и, соответственно, s_{ij}^k определены с точностью до произвольного множителя, причём выполнен принцип суперпозиции, т.е. эти функции образуют линейное пространство. Далее, несложно показать (рассматривая работы систем упругих сил s_{ij}^q и ψ_i^k на перемещениях s_{ij}^k и ψ_i^q , соответственно, и вспоминая формулу Клапейрона (4.***)), что собственные формы ортогональны с весом ρ [Работнов]:

$$\int_{\Omega} \rho \psi_i^k \psi_i^q d\Omega = A \delta_{kq}, \quad (16.5)$$

а квадраты частот действительны и положительны. Соответственно, в пространстве частотных форм $\{\psi_i^k\}$ вводится норма с помощью соотношения (16.5), и нормировка функций выбирается такой, чтобы $A=1$.

16.3. Вынужденные колебания

Предположим, что на тело действуют периодические силы с круговой частотой p :

$$f_i = f_i^0 + P_i = f_i^0 + P_i^0 \exp(ipt)$$

Для простоты будем считать, что $f_i^0 = 0$, $P_i = P_i^0 \exp(ipt)$ на всей поверхности $\partial\Omega^p = \partial\Omega$; рассмотрение более общего случая не встречает принципиальных затруднений. Полагая перемещения и напряжения также пропорциональными $\exp(ipt)$ и, сохраняя обозначения u_i и σ_{ij} для амплитуд перемещений и напряжений, получим статические уравнения, аналогичные случаю свободных колебаний:

$$\sigma_{ij,j} - \rho p^2 u_i = 0 \quad (16.**)$$

при силовом граничном условии

$$\sigma_{ij} n_j = P_i^0 \text{ на } \partial\Omega_p. \quad (16.**)$$

Представим искомое решение в виде

$$u_i = u'_i + u_i^0, \quad \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma_{ij}^0,$$

где u_i^0 , σ_{ij}^0 — решение статической задачи теории упругости, удовлетворяющее уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0,$$

уравнениям связи и граничным условиям (16.**). Тогда первая часть решения u'_i , σ'_{ij} удовлетворяет следующим уравнениям движения:

$$\sigma'_{ij,j} - \rho p^2 u'_i = \rho p^2 u_i^0 \quad (16.6)$$

Положим

$$u_i = \sum a_k \psi_i^k \quad (16.**)$$

и, соответственно,

$$\sigma_{ij} = \sum a_k s_{ij}^k. \quad (16.**)$$

Подставляя эти выражения в (16.6) и исключая производные $s_{ij,j}^k$ с помощью (16.4), получим

$$\sum a_k \rho (\omega_k^2 - p^2) \psi_i^k = \rho p^2 u_i^0$$

Умножая на ψ_i^m , интегрируя по объему и используя затем свойство ортогональности (16.5) частотных форм, найдем

$$a_m (\omega_m^2 - p^2) = p^2 \int_{\Omega} \rho u_i^0 \psi_i^m d\Omega$$

Отсюда следует для коэффициента при ψ_i^m —

$$a_m = \frac{p^2}{(\omega_m^2 - p^2)} \int_{\Omega} \rho u_i^0 \psi_i^m d\Omega$$

Если $p = \omega_m$, т. е. частота возмущающей силы совпадает с одной из собственных частот упругого тела, соответствующий коэффициент ряда обращается в бесконечность, т.е. наступает *резонанс*.

В теории колебаний доказывается, что при весьма общих предположениях функция перемещений, удовлетворяющая данным кинематическим граничным условиям, может быть представлена бесконечным рядом по собственным формам колебаний, т.е., отклик на динамическое воздействие в некотором приближении может быть описан совокупностью основных частотных форм (с наибольшей амплитудой). В этом состоит значение частотных форм.

16.4. Процедуры расчёта частотных форм

В качестве иллюстрации подхода к решению задач теории колебаний рассмотрим в общих чертах процедуру численного расчёта собственных частот и соответствующих им форм колебаний. Для численного расчёта собственных колебаний системы используется построенное выше уравнение движения (16.17) в дискретной форме. Перемещения при колебаниях малы, и могут задаваться как координаты, отсчитанные от нейтрального положения. Рассматриваются описанные выше свободные колебания с нулевой нагрузкой. Диссипативное слагаемое не влияет на частоты, и для определения частот и форм можно брать однородную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для $3n$ -вектора узловых перемещений:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0$$

Подставив сюда колебательные решения вида $\{u(t)\} = \{U\}\sin(\omega t)$ и сократив синусоиды, получаем обобщённую задачу на собственные значения для матрицы $[K]$:

$$-\omega^2[M]\{U\} + [K]\{U\} = 0, \text{ или } ([K] - \omega^2[M])\{U\} = 0$$

Эквивалентом соотношения (***) служит следующее (характеристическое) уравнение:

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0$$

Квадраты частот суть n корней этого уравнения.

Для симметричной положительно определённой матрицы $[K]$ корни уравнения, т.е., квадраты собственных частот, действительны и положительны. Соответствующие собственные векторы $\{U\}^{(k)}$ представляют собственные формы колебаний дискретной модели конструкции. Величина компонент собственного вектора определена с точностью до общего множителя – фиксировано только отношение составляющих собственного вектора. Собственные колебания нумеруются в порядке возрастания собственных частот: $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$. Дискретным аналогом соотношения ортогональности (16.5) служит следующее [Hutton]:

$$\{U\}^{(i)}[M]\{U\}^{(k)} = \delta_{ik}.$$

Говорят, что собственные векторы дискретной системы M -ортогональны. В упрощённом подходе матрица масс $[M]$ при частотном анализе может быть сведена к диагональной с помощью упомянутого ранее приближения сосредоточенных масс.

(На практике значительные осложнения в задачах колебаний доставляют кинематические граничные условия – они редко бывают абсолютно жёсткими и жёсткость связей порой трудно бывает оценить. Одно из осложнений связано с т.н. присоединённой массой – когда колебания происходят в массивной среде, например, воде, которую трудно, или практически невозможно ввести в уравнения движения системы.)

Литература

1. [Марчук] Г.И. Марчук, В.И. Агошков. Введение в проекционно-сеточные методы. М. Наука, 1977
2. [Оден] Дж. Оден. Конечные элементы в нелинейной механике сплошной среды. Пер. с англ. "МИР", М. 1975.
3. [Стрэнг Фикс] Г. Стрэнг, Дж. Фикс. Теория метода конечных элементов. Пер. с англ. «МИР» М. 1977
4. [Митчел Уэйт] Э. Митчелл, Р. Уэйт. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. "МИР", М. 1981.
5. [Hutton] D.Hutton. Fundamentals of Finite Element Analysis. McGraw-Hill, 2004.
6. [ANSYS в руках] Каплун А. Б., Морозов Е. М., Олферьева М. А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. — М.: Едиториал, 2003. - 272 с.
7. [Зенкевич] О.Зенкевич. Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ. «МИР» М. 1975
8. [Zenkevich] O.C. Zienkiewicz, R.L Taylor. The Finite Element Method. Fifth edition. Volume 2: Solid Mechanics. Oxford 2000.
9. [WGAMA_MCCI] State-of-the-Art Report on Molten Corium Concrete interaction and Ex-Vessel Molten Core Coolability. NEA/CSNI/R(2016)15. NEA No. 7392.
10. [HEFEST] Филиппов А.С., Дробышевский Н.И., Киселёв А.Е., Стрижов В.Ф., Фокин А.Л. СОКРАТ/HEFEST: модели взаимодействия расплава активной зоны ВВЭР с конструкциями реактора при тяжёлой аварии. Известия РАН, Энергетика, 3, 2010, стр.4-24
11. [дисс] Филиппов А. С. Разработка, верификация, применение программных средств расчетного анализа поздней стадии тяжелой аварии на АЭС с ВВЭР. Диссертация на соискание ученой степени док. тех. наук. М., ИБРАЭ РАН, 2013
12. [HEFEST_URAN 2014] A.S. Filippov, D.K. Valetov, D.D. Kamenskaya, Modeling of Melt Pool Formation during IVMR Using the HEFEST-URAN Code. ERMSAR-2017, May 16-18, 2017, Warsaw, Poland
13. [Розин] Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов. Л. Изд-во ЛГУ, 1975. 237 с.
14. [Hughes] Hughes T.J.R., The Finite Element Method. New Jersey, 1987, 803 p.
15. [Smith Progr.] I.M.Smith and D.V. Griffiths. Programming the Finite Element Method. 2nd ed., Wiley, 1988.
16. [Общетех] Общетехнический справочник, ред. Е.А.Скороходов, М., 1990
17. [ANSYS book] Moaveni, Saeed. Finite element analysis. Theory and application with ANSYS. Prentice Hall, 1999
18. [ANSYS Басов] К.А.Басов. ANSYS в примерах и задачах. Компьютер пресс, М. 2002 – 224 с.
19. [Беляев] Н. М. Беляев. Сборник задач по сопротивлению материалов. М., «НАУКА», 1968
20. [Никифоров] Никифоров Уваров. Специальные функции
21. [HEFEST-M] Н.И. Дробышевский, А.Е. Киселёв, В.Ф. Стрижов, А.С. Филиппов. HEFEST-M: программное средство для расчёта высокотемпературного нелинейного деформирования. // Математическое моделирование, 22 (2), 2010, стр. 45-63
22. [Уилкинс ВМГД] Уилкинс Расчёт упруго-пластических течений. В сб. Вычислительные методы в гидродинамике. Пер. с англ. Ред. Григолюк. М. Мир, 1967
23. [Krieg, Key] Krieg R.D., Key S.W. Implementation of a time independent plasticity theory into structural computer programs, ASME, AMD-20, 1976, pp.125-137.
24. [Алгоритмы для Пластичности] EA de Souza Neto, D Perirc, DRJ Owen. Computational methods for plasticity theory and applications. Wiley 2008

- 25 . [Беличко 2001] Т. Belytschko. Finite Elements for Nonlinear Continua & Structures. 1998
- 26 . [Дэннис] Дэннис Дж., мл., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных систем уравнений. М.: Мир, 1987. 440с.
- 27 . [Гилл] Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509с
- 28 . Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984. 333с.
- 29 . [Стеер] *Дробышевский Н.И., Филиппов А.С.* Численный анализ высокотемпературной ползучести реакторной стали. Известия РАН, Энергетика, 3, 2004, с.27–34.
- 30 . [Голдстейн] Голдстейн, Классическая механика