

А.С. Филиппов

**Численные методы в механике деформируемого
твёрдого тела**
(конспект лекций)

Часть 1. Механика деформируемого твёрдого тела

Москва 2024

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ: ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА ЛЕКЦИЙ	7
1. НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ ТВЁРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА	9
1.1. Твёрдое тело, нагрузка, внутренние силы	9
1.1.1. Принцип отвердевания и механическое равновесие абсолютно твёрдого тела	11
1.1.2. Внутренние силы и напряжения в деформируемом твёрдом теле	12
1.2. Формула Коши и тензор напряжений	14
1.3. Условия равновесия твёрдого деформируемого тела	17
1.3.1. Уравнение равновесия	17
1.3.2. Граничные условия по напряжениям. Знаки компонент нормальных напряжений	18
1.3.3. Уравнение равновесия моментов. Симметрия тензора напряжений.....	20
1.4. Инварианты тензора напряжений	22
1.5. Главные оси и главные значения компонент тензора напряжений	22
1.5.1. Свойства главных значений и главных направлений	24
1.5.2. Размерность задачи и характеристическое уравнение	26
2. ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИЙ	29
2.1. Движение, перемещение и деформация	29
2.2. Тензор деформаций	30
2.3. Физическая интерпретация компонент тензора малых деформаций	34
2.4. Инварианты тензора деформаций, главные оси. Объёмы и площади	35
2.5. Малое движение, тензоры малых вращений и деформаций	37
3. УПРУГО ДЕФОРМИРУЕМОЕ ТЕЛО И ЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ	40
3.1. Энергия упругой деформации	41
3.2. Определяющее соотношение упругого материала. Изотропные упругие постоянные	43
3.3. Единицы измерения и порядки величин	48
3.4. Шаровая и девиаторная составляющие тензоров напряжений и деформаций	48
3.4.1. З–н Гука для девиаторных составляющих.....	48
3.4.2. Энергия упругого сжатия и энергия формоизменения	49
4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МДТТ	49
4.1. Уравнения статической теории упругости	50
4.2. Нелинейность механического поведения и общая задача его количественного описания	51

4.3. Ускорение деформируемого тела. Динамика сплошной среды	52
4.3.1. Уравнение движения сплошной среды	52
4.3.2. Замечания о подходах к описанию движения сплошной среды	54
4.3.3. Лагранжев подход к описанию движения ДТТ [5].....	56
4.3.4. Динамика и статика	58
4.4. Принцип возможных работ	59
5. ЧАСТНЫЕ ПОСТАНОВКИ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ МДТТ	61
5.1. Способы упрощения уравнений и г.у. задачи упругости. Принцип Сен–Венана	61
5.2. Плоские одно– и двумерные задачи	63
5.2.1. Стержень: 1–мерная конфигурация, неоднородное нагружение	64
5.2.2. Двумерная плоская задача теории упругости	66
5.3. Цилиндрическая система координат. Осевая симметрия	68
5.3.1. Осевая симметрия. Задача о толстостенной трубе.....	70
5.3.2. Предельные случаи в задаче о трубе	74
5.4. Термоупругие деформации и напряжения	77
5.4.1. Примеры–задачи.....	80
5.4.2. Задача о термоупругих напряжениях в трубе	81
6. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБА: СИЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ	81
6.1. Действие поперечной концевой силы, приложенной к стержню	81
6.2. Силы, моменты и условия равновесия стержня	83
6.3. Напряжения при чистом изгибе.....	85
6.3.1. Общие допущения в задаче об изгибе.....	85
6.3.2. Определение нормальных напряжений	86
7. НЕУПРУГОСТЬ: ПЛАСТИЧНОСТЬ, ПОЛЗУЧЕСТЬ, РАЗРУШЕНИЕ	90
7.1. Где в технике изучают неупругость.....	90
7.2. Пластичность	91
7.2.1. Физические представления	92
7.2.1.1. Эксперименты по пластическому деформированию и их истолкование.....	95
7.2.2. Характерные особенности диаграммы деформирования при пластичности	96
7.2.2.1. Разгрузка и циклическое нагружение.....	97
7.2.2.2. "Поликристаллическое" истолкование эффектов упрочнения.....	98
7.2.2.3. Схематизация диаграмм растяжения.....	99
7.2.2.4. Влияние скорости деформации на предел текучести.....	101
7.3. Основные представления теории пластичности	101
7.3.1. Задачи и способы описания пластического деформирования	101
7.3.2. Основные постулаты теории пластичности.....	103
7.3.3. Функция текучести, геометрическая интерпретация	105
7.3.4. Механическая интерпретация: силовой и энергетический критерии текучести.....	107
7.3.5. Критерии текучести при одноосном растяжении и сдвиговом нагружении	108

7.3.6. Уравнения теории пластического течения	109
7.3.6.1. Уравнения Прандтля–Рейсса с упрочнением	110
7.4. Пример: задача о пластической мембране.....	111
7.5. Температурные зависимости основных механических величин	113
7.6. Ползучесть	113
7.6.1. Ползучесть при нормальной температуре.....	114
7.6.2. Высокотемпературная ползучесть	115
7.7. Модели разрушения.....	116
7.7.1. Механическое разрушение и условия его развития	116
7.8. Механика с учётом разрушения	118
7.8.1. Расчёты на прочность и предмет механики разрушения	118
7.8.2. Длительная прочность.....	120
7.8.2.1. Основные понятия.....	120
7.8.2.2. Температурно–временные зависимости длительной прочности.....	121
ЛИТЕРАТУРА.....	123
ПРИЛОЖЕНИЕ. МЕХАНИКА УПРУГО–ПЛАСТИЧЕСКИХ ТРЕЩИН И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЁТЫ	125
<i>Трещиностойкость материалов и элементов конструкций</i>	125
Разрушение и трещины	125
Основные понятия и этапы развития линейной механики трещин	126
Подходы к решению проблемы хрупкого разрушения.....	127
Силовой критерий разрушения.....	129
Упруго–пластическая трещина	129
Пластическая поправка – размер пластической зоны	130
<i>Параметры трещиностойкости</i>	131
<i>Примеры численных расчётов в механике трещин</i>	133
Методика расчетов.....	133
Численное определение основных критериев механики разрушения.....	134
Трещина Гриффитса в линейно–упругой бесконечной области	134
Определение коэффициента интенсивности напряжений (КИН).....	135
Раскрытие трещины	138
Форма и размеры пластической зоны.....	139
Моделирование эксперимента.....	140
Площадь сечения трещины в главном циркуляционном трубопроводе ВВЭР–1000	142
ЛИТЕРАТУРА К ПРИЛОЖЕНИЮ.....	145

Обозначения к обеим частям курса

a_i – начальные координаты

A – (часто) площадь

B_{ik} – тензор градиентов деформаций (гл. 2)

$[B]$ – матрица деформаций

E – модуль упругости

$[E]$ – матрица упругости

e_{ik} – тензор–девиатор деформаций, общий тензор деформаций Эйлера–Альманзи

$I_1(s_{ik}), I_2(s_{ik}), I_3(s_{ik})$ – 1–й, 2–й, 3–й инварианты тензора–девиатора s_{ik}

$J_1(a_{ik}), J_2(a_{ik}), J_3(a_{ik})$ – 1–й, 2–й, 3–й инварианты тензора a_{ik}

$i, j, k, l, m, n, p, q, r, s$ – обозначение скользящих индексов при суммировании

k – жёсткость пружины

$[k]$ – элементная матрица жёсткости

$[K]$ – матрица жёсткости системы

n_i – компоненты единичного вектора нормали к площадке, линии

$\{N\}=\{N(x,y)\}$ – матрица базисных функций, $N(x,y,z)$ – базисная функция

M – момент силы

s_{ik} – тензор–девиатор напряжений

T – температура

u_i – компоненты вектора (физического) перемещений

\dot{u}_i – компоненты вектора массовой скорости

x_i – текущие координаты точки

ϵ_{ij} – тензор малых деформаций

ϵ^e_{ij} – упругая часть тензора деформаций

ϵ^p_{ij} – пластическая часть тензора деформаций

ϵ^p – эффективная пластическая деформация

δ – приращение

δ_{ik} – символ Кронекера, единичный тензор

ν – коэффициент Пуассона

$[\phi]=[\phi(x,y)]$ – матрица функций форм элемента, $\phi(x,y)$ – функция формы

ρ – плотность

σ_{ik} – тензор напряжений

ω – пробная функция; круговая частота

ω_{ik} – тензор поворота на малый угол

Ω_{ik} – тензор угловых скоростей

Ω – область задания функции

$\partial\Omega$ – граница области задания функции

Сокращения

АЭС – атомная энергетическая станция

г.у. – граничные условия

ДТТ – деформируемое твёрдое тело

КТР – коэффициент теплового расширения

КЭ – конечный элемент

МДТТ – механика деформируемого твёрдого тела

МЖ – матрица жесткости

МЖГ – механика жидкости и газа

МКЭ – метод конечных элементов

МСС – механика сплошной среды

НДС – напряжённо–деформированное состояние

НС – напряжённое состояние

с.к. – система координат

ТП – теория пластичности

ЭВМ – электронная вычислительная машина

Соглашения о словоупотреблении, полиграфии etc.

- Механическое сжатие – в контексте может означать как сжатие, так и растяжение;
- "Твёрдое тело" означает "твёрдое деформируемое тело", если не оговорено противное;
- Союз (логическая связка) *или* понимается в неисключающем смысле, как в пропозициональной логике; для взаимoisключения используется связка *либо*;
- Для обозначения компонент векторов и тензоров большей частью используются индексные обозначения. Фиксированные индексы компонент векторов и тензоров обозначаются цифрами, а иногда также буквами, например, σ_{11} , σ_{xx} , σ_{12} , σ_{xy} и т.п.;
- Вектор как объект также обозначается жирным шрифтом, без индексов, либо обычным шрифтом в фигурных скобках. Это относится как к физическим векторам, так и к алгебраическим;
- Используется соглашение о суммировании по повторяющимся переменным (скользящим) индексам – знак суммы опускается. Если суммирования по повторяющимся индексам нет, они заключены в скобки или это оговорено явно;
- Термины, важные формулировки или акценты выделены *курсивом*;
- **Синим цветом** шрифта выделены упражнения.

Введение: цели и задачи курса лекций

Настоящее пособие представляет собой конспект лекций, в течение ряда лет читаемых автором на базовой кафедре МФТИ (Кафедра Проблем безопасного развития современных энергетических технологий) в стенах Института проблем безопасного развития атомной энергии Российской Академии наук (ИБРАЭ РАН). Специфика тематики института и род занятий автора (численное моделирование процессов при тяжёлых авариях ядерных энергетических установок) в значительной степени определили содержание курса. Это попытка кратко изложить базовые сведения из механики деформируемого твёрдого тела (МДТТ) и основного численного метода решения её задач – метода конечных элементов (МКЭ), необходимые для проведения численного анализа предельных механических состояний элементов конструкций ядерных энергетических установок.

МДТТ изучает деформированное состояние твёрдого тела, возникающее при приложении к нему нагрузки. При неограниченном росте нагрузки любое "твёрдое" тело разрушается, и конечная цель изучения состояния конструкции, наряду с её оптимизацией, состоит именно в изучении условий, при которых возможно разрушение или иные нежелательные изменения состояния материала. Начало необратимых изменений, т.е. неупругости и разрушения, связано с распределением внутренних сил и деформаций, возникающих под действием приложенной нагрузки. Соотношения между ними до определённого момента описываются теорией упругости, а при дальнейшем росте нагрузки или при длительном нагружении постоянной нагрузкой – специфическими законами пластичности, ползучести и др. Поэтому основу МДТТ составляют уравнения теории упругости, дополняемые более сложными моделями и концепциями неупругого деформирования, вместе с механическими критериями смены режимов деформирования.

Решение уравнений МДТТ общего вида можно получить только численно. В данном учебном курсе ставится задача сообщить те сведения из механики и численных методов, которые полагаются необходимыми для понимания основных методов и критической интерпретации получаемых результатов численного решения нелинейных задач МДТТ. Студент, освоивший данный курс, должен –

- уметь свободно обращаться с компонентами тензоров напряжений и деформаций и др. механическими величинами, что, как показывает опыт, достигается не сразу;
- уметь делать "на бумаге – карандашом" оценки НДС в простейших случаях;
- усвоить базовые понятия метода конечных элементов;
- усвоить базовые понятия моделей неупругого поведения материалов;
- уметь ставить задачу расчёта НДС, понимать полученный результат и оценивать область применимости нелинейных механических моделей и численных методов.

Курс рассчитан на 2 семестра и представляет собой введение в предмет. Профессиональное освоение требует гораздо большего времени, как на изучение теории, так и на приобретение практических навыков. Соответственно, большая часть вопросов, традиционно излагаемых в курсах МДТТ и сопротивления материалов, здесь, разве что, упоминается, основы же изложены кратко, с указанием источников. Знание основных понятий и уравнений МДТТ необходимо для построения численных методов, поэтому изложение ведётся с достаточно общих позиций, и отбор материала определяется его дальнейшим применением в численном моделировании (построение конечных элементов и схем дискретизации уравнений среды и т.п.). Относительно большое внимание уделяется

нелинейному деформированию как преобладающему в механике конструкций АЭС при тяжёлых авариях. Для понимания вводимых механических понятий и допущений привлекается физическая интерпретация явлений, лежащая вне рамок приближения сплошной среды, в частности, при изложении теории пластичности. Изложение МКЭ в применении к задачам МДТТ во второй части тесно связано с материалом первой.

При изложении МКЭ одной из методических целей служило по возможности подробное рассмотрение элементарных шагов процедуры МКЭ–дискретизации исходных уравнений, от определений сеточных примитивов и простейших числовых примеров – до схемы метода взвешенных невязок, применимой к широкому классу задач. Общая процедура при первом ознакомлении с МКЭ не позволяет увидеть, почему и как весьма абстрактные посылки и действия приводят к высокоэффективному и "конкретному" алгоритму решения технических проблем. Для отделения частных деталей от общих установок МКЭ рассмотрено несколько схем реализации метода, следуя от частного к общему, и комментарии к ним. Включён пример реализации алгоритма расчёта упруго–пластических течений как введение в нелинейные задачи. Количество разобранных конечных элементов минимально, поскольку в литературе в изобилии имеются подробные описания элементов, примеры техники МКЭ и его разнообразных применений.

Таким образом, данный курс лекций адресован тем, кто, не планируя профессионально заниматься механикой и численными методами, хотел бы понимать постановки задач и результаты численных исследований по нелинейной МДТТ. Либо, приступая к работе с компьютерной программой и не желая ограничиваться только изучением рецептов проведения расчётов, хотел бы скорее войти в предмет. Отчасти по этой причине для ряда вводимых терминов приводится также их англоязычное написание в том виде, в каком оно может встретиться в описаниях зарубежных программных комплексов и цитируемой литературе. Это же определило сообщаемый минимум сведений из МДТТ и МКЭ. В настоящее время существует обширная литература, в которой все упоминаемые вопросы разбираются подробно и во всевозможных аспектах. Отметим, что в списке литературы приведены только источники, использованные при написании.

Общее содержание настоящего пособия ясно из оглавления. Практически весь основной материал лекций содержится в цитируемых учебниках и монографиях. Основой служат статические задачи, поскольку большая часть введённых механических понятий и законов едина в статике и динамике. Примеры, иллюстрирующие вводимые понятия, интересные с практической точки зрения и отчасти используемые в изложении, рассмотрены в тексте, либо в упражнениях. В Приложение вынесено изложение некоторых основных понятий механики трещин как основополагающей феноменологии хрупкого и квазихрупкого разрушения. Там же приведены примеры численного расчёта НДС и параметров трещин растяжения, иллюстрирующие применение численных методов на физически содержательных задачах МДТТ.

В заключение стоит упомянуть, что изложенный в данном пособии материал по постановке и методам решения задач МДТТ и теплопроводности успешно применяется на практике. В частности, он является основой построения развиваемых в ИБРАЭ РАН программ для ЭВМ HEFEST–М и HEFEST, предназначенных для расчётов термомеханики и теплофизики конструкций реактора при моделировании аварий АЭС с ВВЭР [1], [2]. За время работы методы и программы продемонстрировали свою эффективность при решении задач моделирования аварийного состояния конструкций ВВЭР и аналогичных проблем, нелинейных физически и геометрически.

1. Напряжённое состояние твёрдого деформируемого тела

1.1. Твёрдое тело, нагрузка, внутренние силы

Механика рассматривает движение или равновесное состояние материальных тел под действием сил. Введём основные, используемые далее, понятия механики деформируемого твёрдого тела. Они основаны на понятиях силы, равновесия сил и др., используемых в механике точки и недеформируемого (абсолютно жёсткого) тела. Обсуждение применимости этих идеализированных понятий в механике деформируемой сплошной среды см., например, в [3]. Наши ближайшие цели: пояснить происхождение и классификацию силовых характеристик состояния нагруженного тела, используемых в механике твёрдого тела, что важно для понимания области её применимости.

Начать следует с самого объекта исследования – деформируемого твёрдого тела (ДТТ). Его необходимые свойства для технических приложений – это однородность и изотропность, в более общей ситуации – контролируемые неоднородность и анизотропия. Это позволяет ввести сравнительно простое описание механического поведения с небольшим количеством коэффициентов, описывающих т.н. механические свойства. Это предположение иногда называют гипотезой сплошности. Мы знаем, однако, что макроскопические характеристики суть следствие атомно–молекулярного строения среды. Поэтому хотелось бы, если не вычислять "из первых принципов" эти механические свойства, что вряд ли когда-нибудь станет инженерной рутинной, то, хотя бы, установить соответствие между описаниями с позиций физики твёрдого тела и гипотезы сплошности. Тем более что методы механики твёрдого тела успешно применяются, скажем, в теории дислокаций.

Далее следует установить соответствие между понятием *силы*, вызывающей изменение состояния (движения, деформации) макроскопического твёрдого тела и его эквивалентом в микроскопическом описании. Этим эквивалентом силы может служить понятие *взаимодействия* компонентов системы (атомов ...), вызывающего изменение её *состояния*. Здесь, аналогично, и речи быть не может об установлении количественного соответствия, скажем, методами молекулярной динамики, а только о формулировке феноменологии, позволяющей с помощью простых и понятных предположений (гипотез) привлечь хорошо разработанный аппарат механики материальных точек и протяжённых абсолютно твёрдых тел к описанию деформируемого твёрдого тела.

Для целей формулировки феноменологии МДТТ привлекаются факты, известные из повседневного опыта и специальных исследований. Мы говорим, что тело *твёрдое*, если его форма и размеры сохраняются или достаточно слабо изменяются при неизменной нагрузке в течение некоторого характерного времени. Основное отличие твёрдого тела от жидкости связано с тем, что в состоянии покоя под действием нагрузки в нём существуют ненулевые внутренние касательные силы (см. ниже), препятствующие заметному формоизменению. В обычной жидкости эти силы в состоянии покоя практически нулевые. Именно межатомное взаимодействие не позволяет твёрдому телу в поле земного тяготения "принять форму сосуда, в котором оно заключено" или растечься по поверхности опирания. Твёрдого тела, как и жидкость – это модели сплошной среды, в которых рассматриваются взаимодействующие малые объёмы вещества без апелляции к атомному строению.

Описание кинематики и динамики абсолютно твёрдого тела просто, вследствие неизменности расстояний между его точками. Деформируемое твёрдое тело отличается в двух существенных аспектах, тесно связанных между собой: а) деформация – это новая степень свободы, связанная с изменением расстояния между точками тела; б) деформация и движение в общем случае неоднородны. Соответственно, рассмотрения в МДТТ всегда относятся к малому объёму или "материальной точке" физического тела. Рассматриваемые "точки", "частицы", "малые объёмы" практически во всех технических приложениях МДТТ имеют размеры более нескольких микрон, т.е. всегда содержат миллиарды атомов. Вследствие пространственной неоднородности механического состояния материального тела, закон его движения (или равновесия под действием сил) в общем случае имеет вид системы дифференциальных уравнений в частных производных. Кинематика неоднородного деформирования твёрдого тела сводится к некоторым утверждениям из геометрии. Связь между динамикой (силами) и кинематикой деформирования сплошной среды даётся внешним эмпирическим законом – определяющим соотношением. Это – схема построения всей механики сплошной среды (МСС), включая механику жидкости и газа (см., например, [4], [5]).

Понятия, вводимые в МСС, вполне прозрачны с точки зрения теории атомного строения материальных тел. Атомы твёрдого тела связаны силовым взаимодействием. Приложение силы в точке тела происходит от внешнего поля или контакта с другим материальным телом. Атомы отклоняются от исходного положения, что макроскопически описывается как деформация, т.е. изменение формы и размеров твёрдого тела. Деформация вызывает реакцию, возникают *внутренние силы*, связанные с отклонением взаиморасположения атомов тела от равновесного. Взаимодействие атомов при этом ровно то, благодаря которому тело является "твёрдым". В ненагруженном состоянии оно уравновешено и не участвует в феноменологическом механическом описании. Приложение нагрузки – это возмущение, переводящее систему в новое состояние равновесия. Таким образом, внутренние силы в сплошной среде – это "эффективные" силы, появляющиеся при отклонении от равновесия, как отклик системы на внешнее механическое воздействие. Они непосредственно связаны с деформацией. Простая формализация понятия внутренней силы как взаимодействия в твёрдом теле дана ниже.

При переходе к протяжённому твёрдому телу существенно место приложения силы, определяющее пространственное распределение деформации и внутренних сил – отклик на воздействие. Приложенная к данному телу сила – *нагрузка*, может быть локальной – *сосредоточенной*, либо *распределённой* в пространстве. Распределённая нагрузка может быть *поверхностной* – распределённой в точках участка внешней границы, обычно это внешняя граница контактного взаимодействия материальных тел, может быть *объёмной* – приложенной в каждой точке некоторой подобласти или всего материального тела. Например, на Земле существенна объёмная сила земного тяготения, в неинерциальных системах отсчёта эффективные силы инерции действуют как сила тяготения.

Особый вид нагружения – *момент силы*, вызывающий вращение тела конечных размеров. Приложенный момент может быть сведён к паре одинаковых сил противоположных направлений, приложенных к разным точкам тела перпендикулярно соединяющей их линии. Но, вообще, сила и момент силы могут трактоваться как производные от двух разных фундаментальных характеристик механического состояния тела – импульса и момента импульса, которые в состоянии равновесия нулевые. Эта первичная классификация состояния проходит через всю механику твёрдого тела и проявляется различным образом.

Степень жёсткости деформируемого тела (сопротивления нагрузке, определяемого внутренними силами) определяет величину деформации, вызываемой данной нагрузкой. При малых деформациях эта связь линейна. При росте деформации отклик становится нелинейным, и рассчитывать состояние гораздо труднее. Предположение о малости деформации соответствует практике для многих типичных задач. В большей части курса рассмотрены статические условия, когда внешняя нагрузка уравновешена внутренними силами, и во всех точках тела ускорение отсутствует. Рассмотрение задач динамики, в которых ускорение, испытываемое телом, существенно, опирается на статику и дано позже.

1.1.1. Принцип отвердевания и механическое равновесие абсолютно твёрдого тела

Механика деформируемого тела строится по аналогии с механикой абсолютно жёсткого тела. Принимается **принцип отвердевания**: равновесие системы не нарушается от наложения на него дополнительных связей (см. [3]). В частности, состояние покоя при равновесии сил, приложенных к деформируемому телу, отвечает однородной скорости всех точек тела, $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \text{const}$, которая для наших целей может быть положена нулевой. При однородном ускорении или вращении динамическую задачу можно рассмотреть методами статики, переходя в неинерциальную систему отсчёта тела и вводя силы инерции, пропорциональные местному ускорению. Имея в виду эти возможности, в дальнейшем состояние покоя будет пониматься как условие нулевой скорости и ускорения всех точек тела в выбранной системе отсчёта, которая задана или понятна из контекста.

Для формулировки условия равновесия напомним определение момента силы. Пусть в некоторой точке Р приложена сосредоточенная сила F . По определению, момент в точке Р относительно точки О есть векторное произведение плеча силы – радиуса–вектора из точки О в точку Р, на вектор силы :

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_P \times \mathbf{F} . \quad (1.1)$$

Момент в точке Р относительно оси, характеризуемой направлением \mathbf{n} , проходящей через некоторую заданную точку О, определяется как проекция на направление \mathbf{n} вектора момента, взятого относительно любой точки этой оси (не только точки О):

$$M_n = (\mathbf{M}, \mathbf{n}) = ((\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}), \mathbf{n}) .$$

Нетрудно убедиться, что так определённый вектор \mathbf{M}_n не зависит от положения точки на оси.

Условия равновесия абсолютно жёсткого тела, находящегося под действием системы внешних сил $\{F_i\}$, это в геометрической статике – равенство нулю главного вектора этой системы сил и главного момента системы сил относительно некоторой точки О. Эти условия – частные случаи законов сохранения импульса и момента импульса:

$$\mathbf{F}_0 = \sum_i \mathbf{F}_i = 0 , \quad (1.2)$$

$$\mathbf{M}_0 = \sum_i \mathbf{M}_i = 0 . \quad (1.3)$$

Если главный момент нулевой относительно некоторой точки О с радиус–вектором \mathbf{R}_0 , то в состоянии равновесия он будет нулевым относительно любой точки $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$, в чём нетрудно убедиться непосредственной постановкой и применением условия равновесия сил. Это даёт возможность выбирать точку приложения наиболее удобным образом.

Выполнение условия (1.3) для момента относительно точки влечёт выполнение этого условия для момента относительно любой оси. Выполнение условий (1.2)–(1.3) для деформируемого твёрдого тела требует их выполнения для любого малого объёма.

1.1.2. Внутренние силы и напряжения в деформируемом твёрдом теле

Определение внутренних сил как реакции на приложенное внешнее воздействие не позволяет вычислить эти силы. Систематическое изучение напряжённого состояния в любой внутренней точке тела методами механики сплошной среды возможно благодаря следующему принципу напряжений Эйлера–Коши (см., например, [6]):

Принцип напряжений (0). В каждом поперечном сечении, мысленно проведённом внутри тела, имеет место взаимодействие сил такого же характера, как и на внешней поверхности при приложенной поверхностной нагрузке. Указанное предположение позволяет изучать внутренние силы, недоступные прямому наблюдению, как внешние силы в выделенном сечении.

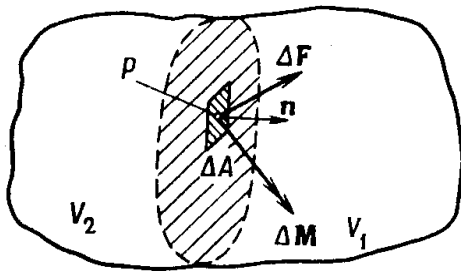


Рис.1.1. К определению внутренних сил

Локальное равновесие сил в каждом малом сечении удобно отнести к ед. площади сечения. Введём понятие *напряжения*, которое, как и момент, связано с парой внутренних сил, проистекающих от внешнего взаимодействия или от внутренней неоднородности – например, остаточные напряжения после пластического деформирования. Эти силы равны по величине, противоположны по направлению и действуют в одной точке или, точнее, на границах одного малого сечения (рис.1.1). Это силы воздействия друг на друга "половинок" некоторого малого объёма физического тела, мысленно разделённого в данном месте сечением. Плоское сечение характеризуется направлением n нормали к его плоскости. По отношению к левой части сечения действие правой части может считаться внешним и наоборот. По принципу напряжений, действие внутренних сил на внутренних границах аналогично действию внешней силы, приложенной к внешней границе.

Направление нормали n – это два противоположных направления, одно из которых условно "налево", второе – "направо". На внешней границе тела это внешняя и внутренняя нормали. Для данного сечения вектор напряжения вводится аналогично нормальному давлению (внешняя сила), т.е. как приложенная в сечении сила, действующая на одну из половин сечения, отнесённая к ед. площади сечения:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} . \quad (1.4)$$

По 3–му закону Ньютона действия левой и правой половинок друг на друга равны и противоположны, следовательно –

$$\sigma^{-n} = -\sigma^n . \quad (1.5)$$

Знак нормального напряжения как силы на ед. площади в данном сечении будет зависеть от того, на какой из двух противоположно ориентированных площадок сечения мы его

вычисляем, и от выбора положительного направления. Далее, говоря о векторе напряжений, будем считать, что это направление определено, и будет дано соответствующее правило. Повторим, что числовое определение напряжения, введённое как сила на единицу площади, не сводится только к силе – напряжение связано с парой внутренних сил. Эти силы являются поверхностными по отношению к каждой половинке.

Исходя из сказанного, можно сформулировать **Принцип напряжений (1)** в следующей форме: напряжённое состояние в каждой точке деформируемого тела определяется внутренними силами, сведёнными к напряжениям в каждой точке. Дальнейшие уточнения приведут к математической трактовке, позволяющей вычислить напряжения и силы.

Нормальные и касательные составляющие. Сила, приложенная к данной площадке, и отвечающее ей напряжение раскладываются на нормальную и касательную составляющие (рис.1.2). Это разделение связано не только с удобством выбора координатной системы, но и несёт в себе глубокий механический смысл: нормальные и касательные силы задают разные типы деформаций, приводящие к различному поведению материалов под нагрузкой. Задание компонент напряжений показано на рис.1.2. Верхний индекс указывает компоненту нормали площадки в текущей системе координат, нижний – компоненты силы в этой системе. Нормальная составляющая напряжения (вектор) направлена по нормали, как следует из названия, касательная может иметь любое направление в плоскости площадки.

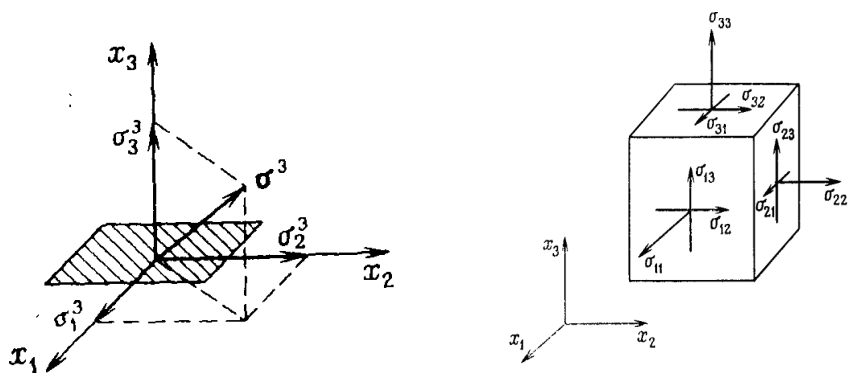


Рис.1.2. Нормальная и касательная составляющие вектора напряжения
Рис. 1.3. Компоненты тензора напряжения в декартовой с.к.

Простой пример нормального напряжения даёт давление в газе или жидкости. Оно может быть описано как скаляр, поскольку при нулевой массовой скорости в данном сечении в газе отсутствуют касательные силы, есть только нормальная, направленная по перпендикуляру к касательной плоскости в данной точке. Это следует из изотропии жидкости/газа. Для описания напряжённого состояния в твёрдом теле недостаточно скаляра и недостаточно даже вектора. Почему? Возникающие касательные и нормальные компоненты напряжения в твёрдом теле, характеризуемые внутренней силой, приложенной в данной точке на данной малой площадке, зависят от ориентации этой площадки или сечения, которое с ней связано. Взяв другое по направлению сечение, получим обычно другие компоненты вычисляемого напряжения, т.е. измеряемый в данной точке механический отклик материала на нагрузку зависит от направления сечения. Соотношение величин касательных и нормальных сил, вообще говоря, будет меняться с направлением выбранной площадки, и это может быть существенным для механической прочности тела.

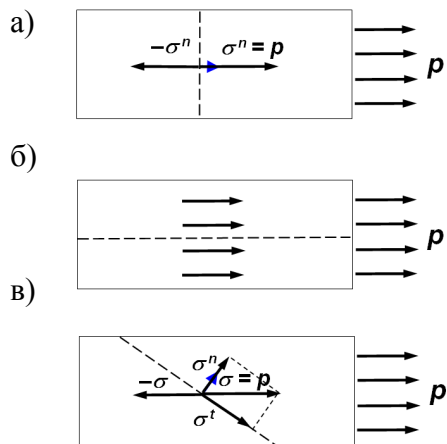


Рис. 1.4. Зависимость вектора напряжений от выбора площадки

Рассмотрим пример: однородное нагружение стержня сечением A силой P , приложенной вдоль его оси Ox (рис.1.4). Выберем три площадки в толще стержня, расположенные перпендикулярно, параллельно и наклонно оси стержня. В каждом из соответствующих сечений внутренние силы, приложенные к их противостоящим краям, уравнивают друг друга, создавая напряжённое состояние. Интуитивно ясно, и будет показано ниже, что на площадке, перпендикулярной оси, напряжение можно оценить как $\sigma = \sigma_x = -p = P/A$, оно направлено перпендикулярно к площадке (рис.1.4а), остальные компоненты напряжения – нулевые: $\sigma_y = \sigma_z = 0$. На параллельной площадке $\sigma_x = 0$ (рис.1.4б). На наклонной площадке все компоненты напряжений могут быть ненулевыми. Т.к. распределение нормальных и касательных

компонент напряжений на всевозможных площадках разное и, в частности, имеет максимум, критерий прочности тела под нагрузкой должен это учитывать. Предположим, что стержень сделан из дерева. В зависимости от способа вырезания стержня – вдоль волокон, поперёк, наклонно, прочность стержня (способность противостоять нагрузке) будет меняться на порядки.

Таким образом, задание напряжённого состояния в малом объёме подразумевает задание вектора напряжений в сечениях объёма всевозможной ориентации, задаваемых вектором нормали. Для дальнейшего продвижения необходимо установить связь между вектором нормали к площадке и вектором напряжения на ней, что следует из формулы Коши, рассматриваемой ниже. Коэффициенты зависимости образуют т.н. тензор напряжений.

1.2. Формула Коши и тензор напряжений

Возьмём некоторую точку P тела, находящегося в равновесии под внешней нагрузкой, в ней зададим декартову систему координат. Рассмотрим в малой окрестности точки P площадку A общего положения с нормалью \mathbf{n} , пересекающую координатные плоскости октанта местной декартовой системы. Расположение осей системы координат произвольно, при соблюдении условия достаточной пространственной однородности напряжённого состояния в окрестности точки P . Для дифференцируемой функции, что предполагается ниже, такая окрестность всегда существует. Площадка A и её проекции A_k на k -е координатные плоскости, $k = 1, 2, 3$, образует малый тетраэдр (рис.1.5).

Условие общего механического равновесия тела подразумевает, что любая его подобласть находится в состоянии механического равновесия, т.е. главная сила в любой точке (малом объёме) и главный момент относительно точки – нулевые. Для того чтобы воспользоваться приведёнными выше условиями равновесия твёрдого тела, рассмотрим условия равновесия в компонентах сил для введённого тетраэдра, рассматриваемого как абсолютно жёсткое тело (принцип отвердевания). С точки зрения всего тела силы, отвечающие напряжениям во всех его сечениях – внутренние, с точки зрения тетраэдра приложенные к его граням силы будут внешними. Нас интересуют внутренние силы: к

тетраэдру на его гранях приложены силы воздействия остальной части тела. Результат действия внешних объёмных сил входит во внутренние силы.

Под действием внешней нагрузки в сечении А возникает напряжение σ , создаваемое парой взаимопротивоположных сил на ед. площади, $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_{out} = -\mathbf{F}_{in} \equiv \sigma \mathbf{A}$. Аналогично, пары таких сил, сводимые к напряжениям, существуют и на каждой из остальных граней A_k тетраэдра. Суммарная сила, действующая на тетраэдр со стороны его окружения, в состоянии равновесия нулевая:

$$0 = \mathbf{F}^{out} + \mathbf{F}_1^{out} + \mathbf{F}_2^{out} + \mathbf{F}_3^{out} = \mathbf{F}^{out} - \mathbf{F}_1^{in} - \mathbf{F}_2^{in} - \mathbf{F}_3^{in} . \quad (1.6)$$

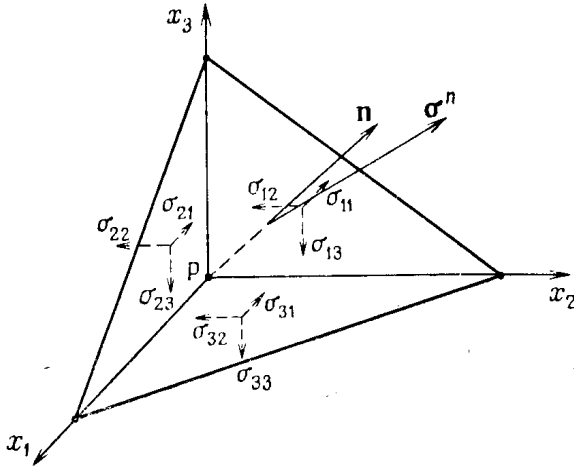


Рис.1.5. К формуле Коши

Обозначим направление площадки А единичным вектором \mathbf{n} нормали к ней. В k -ой координатной плоскости, задаваемой координатной осью k , сила \mathbf{F}_k^{in} , приложенная к соответствующей грани, может быть разложена на три силы, действующие вдоль осей координат, задаваемых каждая своим направлением i : $\mathbf{F}_k = \{\sigma_{k1}A_k, \sigma_{k2}A_k, \sigma_{k3}A_k\}$. Эти силы связаны с общим напряжённым состоянием в точке Р, они в общем случае не перпендикулярны координатным плоскостям.

Условие равновесия (1.6) четырёх сил, приложенных к четырём площадкам тетраэдра, в проекции на i -е координатное направление имеет вид:

$$F_1^{out} = \sigma_i A = F_{1i}^{in} + F_{2i}^{in} + F_{3i}^{in} = \sigma_{1i} A_1 + \sigma_{2i} A_2 + \sigma_{3i} A_3 = \sigma_{1i} A \cos\varphi_1 + \sigma_{2i} A \cos\varphi_2 + \sigma_{3i} A \cos\varphi_3 ,$$

или –

$$\sigma_i = \sigma_{1i} \cos\varphi_1 + \sigma_{2i} \cos\varphi_2 + \sigma_{3i} \cos\varphi_3 \equiv \sigma_{1i} n_1 + \sigma_{2i} n_2 + \sigma_{3i} n_3 , \quad n_i = \cos\varphi_i .$$

В индексных обозначениях соотношение между компонентами напряжений на гранях –

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^3 n_i \sigma_{ik} . \quad (1.7)$$

Здесь введены косинусы углов, задающие проекции площадки А на координатные плоскости: $A_k = A \cos\varphi_k$. Как нетрудно показать, эти косинусы равны направляющим косинусам внешней нормали $\{n_i\}$ площадки А (для i -го косинуса надо рассмотреть сечение плоскостью, построенной на векторах \mathbf{n} и Ox_i). Знак в правой части (1.7) выбран в соответствии с физическим смыслом: действие внешних (относительно тетраэдра) сил на площадке А уравновешено противодействием его внутренних сил на координатной площадке. Будем связывать этот знак с направлением внешней нормали к границе – с точки зрения объёма тетраэдра и объёма его окружения их *внешние* нормали к общей границе противоположны. В формуле Коши (1.7), следовательно, $\{n_i\}$ – внешняя нормаль с точки зрения выделенного объёма тетраэдра.

Коэффициенты в (1.7.) составляют объект тензорной природы. Чтобы это показать, заметим, что n_i служат компонентами вектора, т.е. тензора 1-го ранга, равно как и компоненты $\{\sigma_i\}$ – напряжения на площадке – по (1.4) это тоже вектор, отвечающий приложенной к площадке A силе, который определяется площадкой и напряжённым состоянием. Следовательно, согласно обратному тензорному признаку (см., например, [7]) наборы компонент напряжений σ_{ki} на трёх остальных гранях вместе являются тензором 2-го ранга. В интерпретации рис. 1.5 *первый индекс тензора указывает координатную площадку, одну из трёх проекций площадки A в текущей системе, второй – направление компоненты силы* на этой координатной площадке, одной из трёх, уравнивающей силу на площадке A (см. также рис. 1.3).

Таким образом, соотношение (1.7), по причине независимости от выбора системы координат и произвольности направления площадки A , т.е. вектора \mathbf{n} , показывает, что:

- во-1, по обратному тензорному признаку, $\{\sigma_{ki}\}$ – тензор: *тензор напряжений*;
- во-2, мы имеем соотношение для вычисления компонент вектора внутренней силы, приложенной при данном напряжённом состоянии к любой данной малой площадке, т.е. тензора напряжения достаточно для определения напряжения в любом сечении.

Тензор напряжений включает в себя зависимость внутренних сил от точки тела и направления сечения, на котором они рассматриваются. Простейшие понятия из теории тензоров предполагаются известными (см. [7]). Тензор определён его компонентами в некоторой системе координат и законом преобразования координат.

Принцип напряжений (2) теперь приобретает конструктивную форму: напряжённое состояние в каждой точке задано полем тензора напряжений. Заметим, что знак нормальной компоненты вектора напряжений зависит от выбора направления нормали к площадке, а знак соответствующей компоненты тензора напряжений – не зависит (см. (1.4) и (1.7)). Задача определения равновесного напряжённого состояния деформируемого твёрдого тела сводится к нахождению поля тензора напряжений $\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3)$, возникающего при приложении нагрузки. Для него будет получено соответствующее уравнение равновесия, без которого тензор напряжений – это "вещь в себе".

Далее, в зависимости от контекста, термин "напряжение" может относиться к тензору, характеризующему компонентами, вектору напряжений или к компонентам напряжений на площадках. Путаницы не должно возникнуть, но следует ясно представлять себе математическую природу объекта в каждом случае. В частности, тензор напряжений не следует отождествлять с вектором напряжений, хотя их отдельные компоненты могут численно совпадать. Компоненты вектора напряжений имеют ясную физическую интерпретацию, это сила на ед. площади. Тензор напряжений можно рассматривать как набор коэффициентов для получения компонент этой силы по формуле Коши. Другие соотношения, в которых фигурируют компоненты тензора напряжений, обычно также имеют силовую или энергетическую интерпретацию.

Пример. Пусть НС в теле, имеющем форму куба, возникло в результате сжатия однородной нагрузкой в направлении Ox_1 . Из соображений симметрии поле вектора напряжений однородно в плоскостях, параллельных координатным плоскостям, тензор напряжения – диагонален и имеет одну компоненту, σ_{11} .

1.3. Условия равновесия твёрдого деформируемого тела

1.3.1. Уравнение равновесия

Зная связь между направлением сечения и напряжением на нём, можно получить уравнение равновесия любого малого объёма. Это условие локального механического равновесия даёт общее условие равновесия физического тела под действием внешних объёмной и поверхностных сил. Напомним, что условия равновесия записываются как условие нулевых главной силы (1.2) и главного момента (1.3), приложенных к рассматриваемому объёму. Пространственные распределения внутренних сил и компонент тензора напряжений полагаются достаточно гладкими. Случаи трещин, точечных сил и прочих сингулярностей рассматриваются как особые.

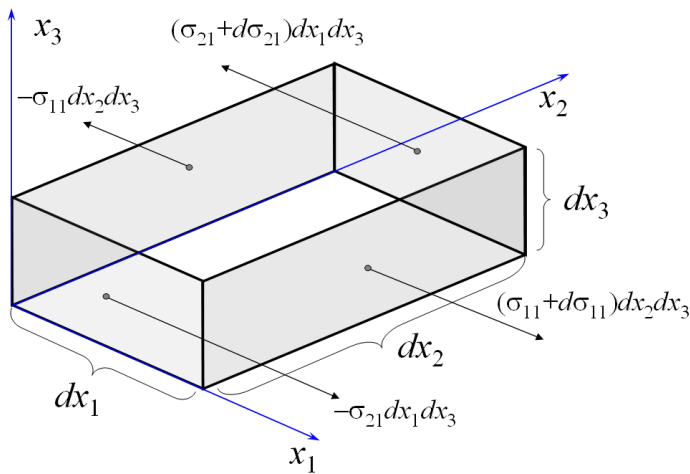


Рис. 1.6. К уравнению равновесия: пары сил на двух парах граней

Далее, если не оговорено противное, мы будем работать в декартовой системе координат. Уравнения равновесия в точке могут быть получены путём рассмотрения сил, действующих на грани малого однородного параллелепипеда, вырезанного в материале физического тела, параллельные координатным плоскостям. Малость объёма здесь означает, что изменения компонент тензоров в малом объёме имеют не менее чем первый порядок малости.

Сначала используем условие нулевой главной силы. Пусть параллелепипед занимает область пространства в интервалах $\{x_1, x_2, x_3, x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3\}$. По отношению к нему силы, с которыми действует на его грани остальная часть тела – внешние, и по 3–му з–ну Ньютона они уравновешены на каждой грани силами реакции со стороны рассматриваемого малого объёма (рис. 1.6).

Рассмотрим компоненты сил вдоль направления "1". Как и ранее, рассмотрим граничные площадки параллелепипеда, характеризуемые компонентами вектора $\mathbf{n}^{(i)}$ внешней нормали к ним. Нормальное напряжение на грани с меньшей координатой x_1 , имеющей внешнюю нормаль $\mathbf{n}^{(1)}$, направленную наружу из параллелепипеда, выражается по формуле Коши как $(-1) \cdot \sigma_{11}$, т.е. внешняя сила равна $-\sigma_{11} dx_2 dx_3$. Тензор напряжений, немного меняясь в направлении противоположной грани, имеющей противоположный вектор нормали $-\mathbf{n}^{(1)}$, равен на ней $\sigma_{11} + (\partial \sigma_{11} / \partial x_1) dx_1$, с точностью до малых второго порядка. На этой грани параллелепипеда, находящейся на расстоянии dx_1 , внешняя сила, согласно формуле Коши, имеет другой знак и равна $(\sigma_{11} + (\partial \sigma_{11} / \partial x_1) dx_1) dx_2 dx_3$. Суммарная компонента внешней силы в направлении 1, действующей на эти грани: $(-\sigma_{11} + \sigma_{11} + (\partial \sigma_{11} / \partial x_1) dx_1) dx_2 dx_3$. Аналогичные выражения справедливы для граней направлений $\mathbf{n}^{(2)}$ и $\mathbf{n}^{(3)}$, где напряжения в направлении

"1" – касательные к этим граням. Вектор $\mathbf{n}^{(2)}$ имеет одну ненулевую компоненту $n_1^{(2)}=1$, соответственно, при вычислении напряжения останется только компонента σ_{21} . Аналогично – для направления $\mathbf{n}^{(3)}$. Если имеется объёмная сила, приложенная в объёме, имеющая плотность \mathbf{f} , то уравнение равновесия компонент сил направления 1 имеет вид:

$$(-\sigma_{11} + \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1) dx_2 dx_3 + (-\sigma_{21} + \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2) dx_1 dx_3 + (-\sigma_{31} + \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3) dx_1 dx_2 + f_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0 .$$

Приводя подобные члены и деля на величину элементарного объёма это уравнение можно привести к виду

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = 0 .$$

Аналогичное выражение получается для направлений 2 и 3. Уравнение равновесия для всех трёх направлений будет иметь вид:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_k} + f_j = 0 . \quad (1.8)$$

1.3.2. Граничные условия по напряжениям. Знаки компонент нормальных напряжений

Получим граничные условия для уравнения (1.8). Они определены поверхностными силами: на внешней границе тела приложенная нагрузка, задаваемая вектором \mathbf{p} силы на единицу площади границы, уравновешена внутренними силами, описываемыми тензором напряжений. Граничное условие для тензора напряжений определено в исходной предпосылке принципа напряжений (0). Рассмотрим напряжение на малой площадке \mathbf{n}' внутри тела и устремим её к внешней границе: $\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}$, где \mathbf{n} обозначает направление внешней нормали площадки на внешней границе тела и саму площадку (рис. 1.7).

В соответствии с принципом напряжений должен выполняться непрерывный переход от напряжённого состояния на площадке \mathbf{n}' к состоянию на внешней граничной площадке \mathbf{n} с нагрузкой \mathbf{p} . Векторы напряжений $\boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{n}}$ и $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}}$, задаваемые парами сил на единицу площади, действующих по направлению внутрь внешней границы и вовне, равны по величине и противоположны, в соответствии с определениями (1.5). В сечении \mathbf{n}' : $-\boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{n}'} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}'}$. На внешнем направлении одна из пары сил отвечает внешнему воздействию, имеем: $-\boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}} = \mathbf{p}$. Выражая компоненты векторов напряжений $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}}$ и $\boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{n}'}$ по формуле Коши (1.7), получим при переходе к пределу $\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}$ граничное условие для компонент тензора напряжений, входящих в уравнение равновесия:

$$\sum_{i=1}^3 -\sigma_{ik} \cdot (-n_i) = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ik} n_i = p_k . \quad (1.9)$$

В общем случае граничное условие (1.9) записано для трёх компонент вектора внешней нагрузки, каждое уравнение содержит в левой части сумму с тремя компонентами тензора напряжений.

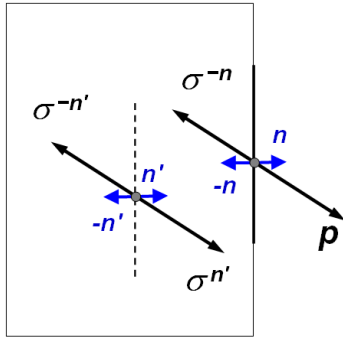


Рис.1.7. К заданию граничных условий

$= -n_1 p$, т.е. $\sigma_{11} = -p$.

Когда внешнее давление положительно, тело сжимается, знак соответствующей нормальной компоненты σ_{11} тензора напряжений будет отрицательным. При растяжении отрицательным давлением знак нормальной компоненты напряжения положителен. Этот знак отвечает знаку объёмной деформации: при сжатии деформация отрицательна.

Заметим, что в двух касательных направлениях на данной площадке в общем случае нет выделенного, касательные силы не изменяют объёма, и знак касательных компонент не имеет простой интерпретации. В литературе встречается интерпретация знака касательной компоненты относительно нормалей к сечению и плоскости рисунка.

Дополнение. Приведённый выше вывод уравнения равновесия (1.8) можно воспроизвести в более общей математической форме, рассматривая условие равновесия объёмных и поверхностных сил в произвольном объёме Ω , выделенном в рассматриваемом однородном физическом теле. В состоянии равновесия сумма главной силы F , связанной с объёмными силами, и главной силы U , связанной с поверхностными силами, действующими на этот объём со стороны примыкающего материала, нулевая:

$$F + U = \int_{\Omega} f_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^3 p_j dA_j = \int_{\Omega} f_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 n_k \sigma_{kj} dA_j = 0.$$

Здесь мы воспользовались граничным условием (1.9) и формулой Коши, перейдя от внешней граничной силы $\{p_i\}$ к компонентам внутренней силы на границе объёма Ω .

Второе слагаемое в правой части представим как сумму трёх j -х слагаемых вида:

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^3 n_k \sigma_{kj} dA_j = \int_{\partial\Omega} S_j dA_j.$$

Величины S_j являются компонентами вектора напряжений на единичной площадке данного направления (см. (1.9)). Вектор S_j непрерывно зависит от положения площадки, его можно дифференцировать по координатам. По формуле Гаусса–Остроградского выразим интеграл от потока вектора S_j через его дивергенцию:

$$\int_{\partial\Omega} S_j dA_j = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial S_j}{\partial x_k} d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial n_i \sigma_{kj}}{\partial x_k} d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_k} d\Omega.$$

Здесь мы воспользовались тем, что производная $\partial n_i / \partial x_k = \delta_{ik}$, т.е. равна дельте Кронекера.

Переходя к исходному уравнению, получим:

$$\mathbf{F} + \mathbf{U} = \int_{\Omega} f_i d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_k} d\Omega = 0 .$$

Устремляя объём Ω к нулю, получим уравнение (1.8). Далее мы будем опускать знак суммы при суммировании по повторяющимся индексам (правило Леви–Чивита – Эйнштейна). Уравнение равновесия будет выглядеть как –

$$\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_k} + f_i = 0 . \quad (1.8a)$$

Нетрудно видеть, что данный вывод повторяет приведённые выше рассуждения с параллелепипедом. Формула Гаусса–Остроградского позволяет сократить рассмотрение направлений нормалей и отдельных компонент. Первый вывод уравнения равновесия, тем не менее, нагляднее и является полезным упражнением на манипуляцию с компонентами вектора и тензора напряжений. Области применимости обоих выводов совпадают и обоим присуща следующая неточность. Выводя формулу Коши и уравнения равновесия, мы пренебрегли различием между деформированным и недеформированным состоянием, хотя, строго говоря, изменение конфигурации в деформированном состоянии неизвестно, а тензор напряжений меняется от состояния к состоянию. В случае рассматриваемых здесь малых деформаций, близких к упругим, этим можно пренебречь. Но в общем случае расчёта при больших деформациях зависимость тензора напряжений от конфигурации может быть существенной. Этот вопрос затронут несколько ниже.

1.3.3. Уравнение равновесия моментов. Симметрия тензора напряжений

Рассмотрим, что даёт условие равновесия для моментов (1.3): главный момент относительно любой оси равен нулю. Рассмотрим момент относительно оси Ox_3 . Поместим начало координат в центре малого координатного параллелепипеда, рассмотренного выше при выводе уравнения равновесия (рис.1.8). Он имеет три пары граней: "передняя–задняя", "правая–левая", "верхняя–нижняя", различающихся направлением вектора единичной нормали $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$, компоненты которого соответственно равны 1 или -1 . Моменты сил, нормальных к граням – нулевые, и существенны только касательные компоненты сил. При этом вклады в полный момент составляющих сил, приложенных к граням с направлением Ox_3 (верхняя–нижняя), вследствие полагаемой практической однородности поля напряжений в малом объёме малы, и ими можно пренебречь. Остаются моменты сил, приложенных к парам граней параллелепипеда направлений 1 и 2 в плоскостях, параллельных Ox_3 . Внешние силы, приложенные к граням направлений 1 и 2, выражаются по формуле (1.9), причём нас пока интересуют только компоненты сил в плоскости Ox_1x_2 :

$$n_1 \sigma_{12} = \pm \sigma_{12} \text{ (на гранях 1)} \text{ и } n_2 \sigma_{21} = \pm \sigma_{21} \text{ (на гранях 2)}. \quad (1.10)$$

На противоположных гранях векторы внешней нормали будут противоположны и соответственные компоненты внешних сил противоположны.

По определению вектор момента, создаваемого силой \mathbf{F} с плечом силы $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$, имеет компоненты:

$$M_1 = x_2 F_3 - x_3 F_2, \quad M_2 = x_3 F_1 - x_1 F_3, \quad M_3 = x_1 F_2 - x_2 F_1 . \quad (1.11)$$

Для касательной силы, например, направления "1", приложенной к грани "2" положительного направления, имеем $F_1 = \sigma_{21} dx_1 dx_3$. В этом рассуждении величины dx_i полагаются положительными.

На правой грани направления +2 с площадью $dx_1 dx_3$ (положительное направление) –

$$dM_3^{(+2)} = 0,5 dx_1 F_2 - 0,5 dx_2 F_1 = -0,5 dx_2 \sigma_{21} dx_1 dx_3, \quad (1.12)$$

на передней грани направления +1 –

$$dM_3^{(+1)} = 0,5 dx_1 F_2 - 0,5 dx_2 F_1 = 0,5 dx_1 \sigma_{12} dx_2 dx_3. \quad (1.13)$$

Знак минус в (1.12) связан с тем, что только второе слагаемое в третьем выражении (1.11) ненулевое (компонента x_2 вектора \mathbf{r}), а знак плюс в (1.13) связан с тем, что отлично от нуля первое слагаемое (компонента x_1 вектора \mathbf{r}).

На противоположных гранях (левая и задняя, противоположные правой и передней) меняют знаки оба плеча внешней силы, и сами силы, компоненты же напряжений σ_{ik}

меняются на малую величину $-\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} dx_i$.

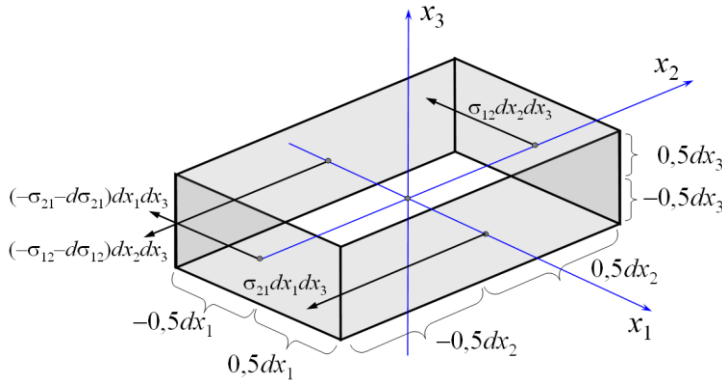


Рис.1.8. К условию равновесия для моментов

С учётом всего этого, подставив вместо компонент векторов напряжений соответствующие выражения с компонентами тензора напряжений, выпишем условие равновесия для компоненты момента M_3 как суммы четырёх слагаемых на 4 гранях:

$M_3=0$, или –

$$0,5(-dx_2 \sigma_{21} + dx_2 (-\sigma_{21} - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2)) dx_1 dx_3 + 0,5(dx_1 \sigma_{12} + -dx_1 (-\sigma_{12} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1)) dx_2 dx_3 = 0.$$

Поделив на $0,5 dx_1 dx_2 dx_3$ и перенеся вправо слагаемые с σ_{21} , получим –

$$2\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 = 2\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2.$$

Устремим к нулю толщины dx_1 , dx_2 – получим условие симметрии компонент: $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Аналогичным образом можно выписать уравнения для остальных компонент, и мы получаем свойство симметрии тензора напряжений.

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \quad (1.14)$$

В технике это свойство формулируют как *закон парности касательных напряжений* – на двух малых взаимоперпендикулярных площадках с общей границей касательные напряжения равны по величине и имеют направления: либо в сторону общего ребра, либо противоположно. Для недиагональных компонент тензора напряжений используют также обозначение τ_{ik} .

Тензор 2–го ранга общего вида имеет в 3–мерном пространстве $3 \times 3 = 9$ независимых компонент, у симметричного тензора их 6. Уравнений для компонент тензора напряжений пока всего три. Учёт деформирования и связи между деформацией и напряжением позволит далее замкнуть задачу путём добавления соответствующих новых уравнений.

Тензорный характер силовых и деформационных характеристик механического состояния твёрдого тела позволяет использовать результаты линейной алгебры при их изучении. Вводимые ниже математические свойства тензоров напряжений, а также деформаций, часто имеют наглядную механическую интерпретацию.

1.4. Инварианты тензора напряжений

Инварианты – это скаляры, вычисляемые по компонентам тензора и остающиеся неизменными при преобразовании координат. Из линейной алгебры известно, что тензор 2–го ранга в 3–мерном пространстве имеет 3 инварианта, которые служат коэффициентами инвариантного характеристического уравнения, рассмотренного ниже. Первый инвариант:

$$J_1(\sigma_{jk}) = \sigma_{kk} \equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} . \quad (1.15)$$

Пример. В газе/жидкости при любом статическом нагружении, в любой плоскости отсутствуют касательные напряжения, и тензор напряжений диагонален в любой системе. Рассмотрим малый кубик жидкости на большой глубине, $h \gg a$. Гидростатическое давление вызывает напряжения на гранях куба $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$, где p – гидростатическое давление в жидкости, т.е. нормальное напряжение, не зависящее от ориентации куба. Этот закон Паскаля для статического давления в газе/жидкости (независимость напряжения от ориентации площадки) следует из формулы Коши.

Второй инвариант:

$$J_2(\sigma_{jk}) = \frac{1}{2}(\sigma_{jj} \sigma_{kk} - \sigma_{jk} \sigma_{kj}) = \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12} \sigma_{21} + \sigma_{11} \sigma_{33} - \sigma_{13} \sigma_{31} + \sigma_{22} \sigma_{33} - \sigma_{23} \sigma_{32} . \quad (1.16)$$

Для симметричного тензора напряжений –

$$J_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - (\sigma_{12})^2 - (\sigma_{31})^2 - (\sigma_{23})^2 . \quad (1.17)$$

Второй инвариант *девиатора* тензора напряжений применяется в теории пластичности.

Третий инвариант – определитель:

$$J_3(\sigma_{jk}) = \det\|\sigma_{ik}\| . \quad (1.18)$$

Третий инвариант тензора напряжений не имеет интерпретации в механике. Отметим, что в механике второй инвариант может определяться с другим знаком.

1.5. Главные оси и главные значения компонент тензора напряжений

Как известно, выбором системы координат симметричный тензор 2–го ранга может быть приведён к главным осям, т.е. существует система координат, в которой тензор имеет

диагональный вид. В линейной алгебре такой тензор может быть отождествлён с коэффициентами квадратичной формы или матрицей линейного преобразования, которые могут быть приведены к каноническому виду. Для тензора напряжений его диагональность имеет физический смысл: в данной точке можно выбрать *главные направления* (оси), такие, что на площадках, перпендикулярных к ним, напряжения только нормальные – *главные напряжения*, касательные напряжения – нулевые. В главных осях матрица тензора диагональна. Главные напряжения суть собственные значения тензора, они удовлетворяют характеристическому уравнению, которое может быть получено из формулы Коши.

Пусть одно из неизвестных пока главных направлений задано единичным вектором \mathbf{n} в некоторой системе координат. Нормальное напряжение (вектор) $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}}$ на ортогональной к этому вектору площадке ему коллинеарно: $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}} = \sigma \mathbf{n}$, где σ – модуль вектора. С другой стороны, вектор напряжений может быть выражен через тензор напряжений σ_{ki} и вектор \mathbf{n} по формуле Коши, и компоненты вектора напряжений $\sigma_i^{(n)}$ удовлетворяют равенствам:

$$\sigma_{ki} n_k = \sigma n_i \equiv \sigma_i^{(n)}, \quad \text{или:} \quad (\sigma_{ik} - \sigma \delta_{ik}) n_k = 0. \quad (1.19)$$

В алгебраических терминах левое равенство (1.19) означает, что преобразование с матрицей $[\sigma_{ki}]$, действующее на собственный вектор $\{n_k\}$, в любой системе координат сводится к умножению компонент вектора на собственное число преобразования. Система трёх линейных однородных алгебраических уравнений относительно компонент $\{n_k\}$ в правом равенстве имеет ненулевое решение при равенстве нулю определителя системы:

$$\det \|\sigma_{ik} - \sigma \delta_{ik}\| = 0. \quad (1.20)$$

Это кубическое *характеристическое уравнение* относительно σ имеет три корня $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Левая часть уравнения (1.20) может быть разложена в произведение

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0. \quad (1.21)$$

Из трёх корней кубического уравнения с вещественными коэффициентами хотя бы один – вещественный, откуда следует, что всегда имеется не менее одного главного направления. Обозначим его номером 1. У вещественного тензора все три корня характеристического уравнения (собственные значения) будут вещественны, что несложно показать непосредственным вычислением, переходя в систему координат с осью вдоль уже известного главного направления и рассматривая оставшиеся два главных направления. Определитель матрицы (1.20) размером 2×2 сведётся к квадратному уравнению с положительным детерминантом и потому – вещественными корнями:

$$(\sigma_{22} - \sigma)(\sigma_{33} - \sigma) - \sigma_{23}^2 = \sigma^2 - \sigma(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 = 0.$$

Введённые выше с помощью определений (1.15)–(1.18) инварианты тензора напряжений в системе главных осей примут вид:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (1.22)$$

$$J_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3, \quad (1.23)$$

$$J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (1.24)$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что уравнение (1.21) может быть записано через общие выражения (1.15–1.18) для инвариантов тензора напряжений как:

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0. \quad (1.25)$$

Коэффициенты уравнения инварианты, поскольку его корни, т.е. главные значения, независимы от системы координат. Нулевой корень означает отсутствие отвечающего ему главного направления.

Для данного напряжённого состояния в точке после нахождения корней характеристического уравнения находятся главные направления как три решения трёх систем (1.19) с тремя собственными значениями (см., например, [7]). Это даёт компоненты главных векторов, определенных с точностью до множителя. Перечислим дальнейшие относящиеся сюда факты, включая случаи кратных корней.

1.5.1. Свойства главных значений и главных направлений

Главные направления, отвечающие двум собственным значениям, ортогональны. Покажем это для случая некратных корней характеристического уравнения. Рассмотрим два собственных направления, характеризуемых единичными векторами \mathbf{n} , \mathbf{m} с компонентами $\{n_i\}$, $\{m_k\}$. Им отвечают собственные значения σ_n , σ_m . По определению –

$$\sigma_{ik} n_k = \sigma_n n_i, \quad \sigma_{ki} m_i = \sigma_m m_k.$$

Для проверки ортогональности составим два скалярных произведения: умножим скалярно левое равенство на вектор \mathbf{m} , а правое – на \mathbf{n} . Имеем

$$\sigma_{ik} n_k m_i = \sigma_n n_i m_i, \quad \sigma_{ki} m_i n_k = \sigma_m m_k n_k.$$

Здесь в левом и правом равенстве суммирование идёт по одинаковым индексам, но произведения $n_k m_i$ разные. В силу симметрии тензора, $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, индексы i и k можно поменять местами, левые части этих равенств совпадают, следовательно, равны и правые:

$$\sigma_n n_k m_k = \sigma_m n_k m_k.$$

В случае неодинаковых собственных значений $\sigma_n \neq \sigma_m$ отсюда следует, что скалярное произведение – нулевое, т.е. векторы $\{n_i\}$, $\{m_k\}$ ортогональны. Таким образом, в случае некратных корней уравнения (1.19) имеется три фиксированных попарно ортогональных главных направления. Эти направления могут быть взяты как оси декартовой системы координат – *главные оси*.

Рассмотрим случаи кратных корней. Пусть $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$, т.е. два из трёх корней кратны. Одно из отвечающих им главных направлений $\mathbf{n}^{(1)}$ будет перпендикулярно главному направлению $\mathbf{n}^{(3)}$. Перейдём в систему координат с осями $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ и перпендикулярной им некоторой оси $\mathbf{n}^{(2)}$. На площадках $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(3)}$ касательные напряжения отсутствуют, их непосредственным представлением по формуле Коши показывается (упражнение: показать), что недиагональные компоненты тензора $\sigma_{21} = \sigma_{31} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_{12} = 0$. Следовательно, нормальное напряжение на площадке $\mathbf{n}^{(2)}$ равно: $\sigma_2 = \sigma_{22}$, и $\mathbf{n}^{(2)}$ – также главное направление.

Далее, рассмотрим линейную комбинацию векторов $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$:

$$\mathbf{n}' = a_1 \mathbf{n}^{(1)} + a_2 \mathbf{n}^{(2)} \quad \text{или} \quad n'_k = a_1 n_k^{(1)} + a_2 n_k^{(2)}, \quad a_1 a_2 \neq 0.$$

Очевидно, он также будет собственным вектором с собственным значением σ_2 – согласно определению (1.19):

$$\sigma_2 n'_k = \sigma_2 (a_1 n_k^{(1)} + a_2 n_k^{(2)}) = a_1 \sigma_2 n_k^{(1)} + a_2 \sigma_2 n_k^{(2)} = a_1 \sigma_{ki} n_i^{(1)} + a_2 \sigma_{ki} n_i^{(2)} = \sigma_{ki} (a_1 n_i^{(1)} + a_2 n_i^{(2)}) = \sigma_{ki} n'_i, \quad ,$$

т.е. при двух кратных собственных значениях возможные пары взаимоперпендикулярных главных направлений $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$ занимают всю плоскость, перпендикулярную третьему

направлению (пример – осесимметричное НС – см. ниже). Аналогично, в случае 3–кратного корня любая тройка ортов будет базисом собственных векторов. Таким образом, *система координат главных осей тензора напряжений существует всегда*.

Экстремальное свойство. Величина нормального напряжения, вычисляемого в данной точке тела на площадках всевозможной ориентации, принимает минимальное и максимальное значения вдоль главных осей.

Покажем здесь, что экстремумы *модуля вектора* напряжений на площадке достигаются в главных осях, когда он равен модулю нормального напряжения. Рассмотрим для данного НДС в данной точке всевозможные площадки \mathbf{n} и векторы напряжений $\{s_i\}$ на них. Для вычисления компонент вектора перейдём в систему главных осей тензора напряжений. В главных осях тензор напряжений диагонален, и компоненты вектора напряжения s_i , вычисляемого на любой малой площадке с нормалью $\{n_i\}$, сводятся к главным значениям σ_i :

$$s_i = \sigma_{ik} n_k = \sigma_{(i)} n_{(i)},$$

откуда выражаем компоненту n_i , являющуюся направляющим косинусом нормали \mathbf{n} –

$$n_i = s_i / \sigma_{(i)}. \quad (1.26)$$

Индекс, заключённый в скобки, не участвует в суммировании. Компоненты векторов напряжений на этих площадках всевозможных направлений \mathbf{n} удовлетворяют уравнению

$$1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{s_1^2}{\sigma_{(1)}^2} + \frac{s_2^2}{\sigma_{(2)}^2} + \frac{s_3^2}{\sigma_{(3)}^2}. \quad (1.27)$$

Это соотношение имеет вид уравнения эллипсоида, если ввести масштаб длины по осям координат в единицах измерения напряжения. В этой метрике геометрическое место концов всевозможных векторов напряжений, получаемых при вариации направления малой площадки, отложенных от начала координат, это поверхность *эллипсоида напряжений* (1.27), построенного для данного напряжённого состояния в данной точке тела в системе главных осей тензора напряжений, в которых эллипсоид имеет полуоси σ_i .

Длина радиус–вектора любой точки поверхности эллипсоида принимает экстремальные значения в направлениях его осей, т.е. главных осей напряжений. Это нетрудно увидеть, вписав координатные сечения эллипсоида – эллипсы, в соответствующие окружности или, наоборот, вписав в эти эллипсы окружности с центром в начале координат. Если корни характеристического уравнения совпадают, эллипсоид вырождается в эллипсоид вращения, или в сферу. Если одно из главных значений нулевое, эллипсоид становится эллипсом (плоское НС). Если два значения нулевые (одноосное сжатие), то – становится отрезком. В линейной алгебре аналогичное построение называется просто "тензорный эллипсоид". В практически важном случае одного или более положительных главных напряжений (растягивающих) максимум модуля вектора равен максимальному главному напряжению.

Экстремальное свойство для нормальной компоненты напряжений можно установить из условия экстремума нормальной компоненты вектора на площадках, даваемой квадратичной формой $\sigma^n = s_i n_i = \sigma_{ki} n_k n_i$ относительно переменных $\{n_k\}$ (см., например, [6]). Преобразуя условия экстремума (метод множителей Лагранжа при условии (1.27)), мы придём к уравнению (1.19) для искомых векторов $\{n_k\}$, т.е. к главным направлениям. Главные напряжения могут при этом иметь, вообще говоря, разные знаки.

Экстремальные свойства главных значений тензора напряжений используются при формулировке механических критериев прочности на растяжение–сжатие, т.е. там, где существенны нормальные напряжения. В частности, для хрупкого разрушения изотропного тела при растяжении простейший критерий прочности может иметь вид:

$$\sigma_1 < \xi \sigma_{\max} ,$$

где σ_{\max} – известная из опыта критическая величина напряжения разрушения, σ_1 – максимальное главное напряжение (положительное при растяжении), а величина $\xi < 1$ или обратная величина – принимаемый запас прочности (в данном случае – на растяжение).

Главные оси нумеруют в соответствии с главными значениями:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 .$$

Касательные напряжения также обладают экстремальным свойством: в каждой точке существуют *плоскости*, в которых касательные напряжения принимают экстремальные значения. По аналогии с главными направлениями для нормальных напряжений эти плоскости называются *главными касательными плоскостями*. Каждая из них параллельна одной из главных осей и образует с другими главными осями угол 45° . Максимальная величина касательного напряжения $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Мы встретимся с этой величиной при обсуждении критериев пластичности (критерий Треска). Подробнее см. в [6], [10], [12].

1.5.2. Размерность задачи и характеристическое уравнение

Напряжённые состояния в механике могут быть охарактеризованы как "трёхосные", "двухосные", "одноосные" (см. также [8]). Под "осностью" напряжённого состояния понимают количество координатных осей, существенных для представления напряжённого состояния (НС) в данном теле. Подчёркнём, что в данном случае речь идёт о единообразном описании НС во *всей* рассматриваемой деформируемой области, не только в отдельных точках. Осность (термин не общепринятый и используется только здесь) отвечает фактической геометрической размерности задачи. Подобная классификация НС возможна в системе главных осей, которую следует выбирать в качестве лабораторной, если этим упрощается постановка задачи.

Нулевое собственное значение тензора напряжений означает отсутствие нормального напряжения в данном главном направлении – нулевой корень характеристического уравнения. Если это направление выбрано за координатную ось, то вычисляемые напряжения всегда будут находиться в плоскости, перпендикулярной этому направлению. Обратно, если в данной системе координат напряжения на площадках, параллельных этой оси, всегда находятся в перпендикулярной к ней плоскости, то эта ось – одно из главных направлений, возможно с нулевым собственным значением. Соответственно, в случае 1–осного НС возможны 2 нулевых корня, в случае 2–осного – 1 нулевой корень и при 3–осном напряжённом состоянии все корни ненулевые. В определённых случаях 3–осные НС путём линейной суперпозиции могут быть представлены как наложение 1– и 2–осных (например, состояние *всестороннего сжатия* незакреплённого куба вдоль направлений его граней может быть представлено наложением трёх 1–осных сжатий по трём осям).

Если в задаче есть выделенное направление (причём оно одинаково выделено как по геометрии, так и по конфигурации нагрузки), то оно будет одной из главных осей. (например, ось симметрии системы или продольное направление сжатия стержня). По

возможности, задача нахождения НС ставится в системе главных осей, если заранее известен общий вид напряжённого состояния и оси могут быть определены.

Примеры. Размерность ("осность") НС в простых случаях.

Одноосное сжатие вдоль оси призматического тела при отсутствии нагружения и стеснения в поперечных направлениях: $p_1 = -\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид: $\sigma - \sigma_1 = 0$. Есть одна главная ось – ось сжатия, остальные – не определены, т.к. напряжения в перпендикулярных направлениях отсутствуют.

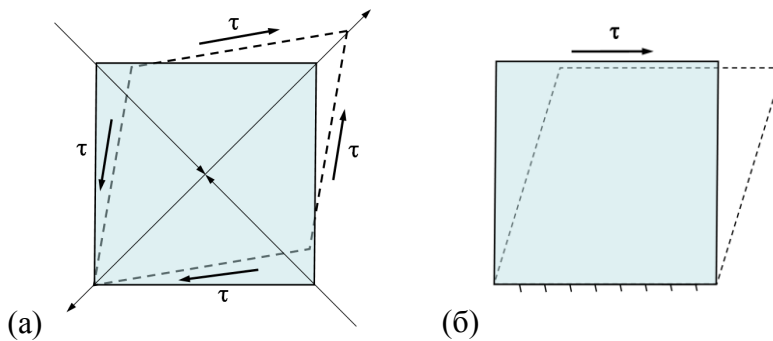


Рис.1.9. (а) Главные направления при чистом сдвиге.

(б) Сдвиг в одном направлении

Двухосное (плоское) НС. Рассмотрим чистый сдвиг в квадратной пластине, получаемый приложением в её плоскости одинаковых по величине касательных напряжений к смежным границам (парных!), при отсутствии нагружения и закрепления по нормали к пластине (рис. 1.9а, плоскость Ox_1x_3). Компоненты тензора напряжений лежат в плоскости пластины. Напряжённое состояние – двухосное, однородное (**обосновать**). Главные оси параллельны диагоналям квадрата. Характеристическое уравнение: $\sigma^2 - \tau^2 = 0$, корни по абсолютной величине равны приложенным касательным напряжениям, что нетрудно показать непосредственно из уравнений (**показать**).

Упражнение. Сравнить напряжённое состояние при чистом сдвиге и при однородном сдвиге вдоль оси (рис.1.9б), при закреплении нижней границы и свободных боковых границах.

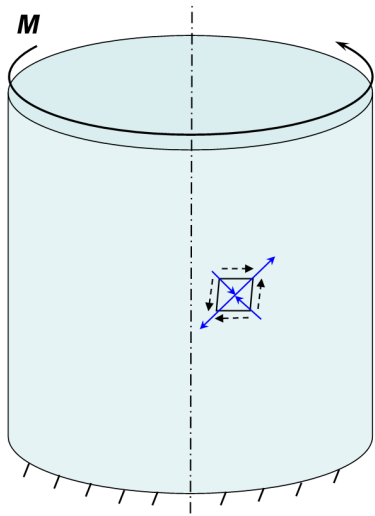


Рис.1.10. Главные направления при кручении тонкой трубы

Чистое кручение тонкой трубы: задан вращающий момент относительно оси трубы, отсутствуют осевая и радиальная нагрузки (стандартное испытание на сдвиг). НС локально сводится к сдвигу в плоскости, касательной к образующей трубы, при этом главные направления будут расположены в касательной плоскости и меняться вдоль окружности в соответствии с направлением радиуса-вектора точки в перпендикулярном сечении трубы (рис. 1.10). Характеристическое уравнение в *местной* системе координат (касательная плоскость) будет иметь тот же вид, что в предыдущем примере: $\sigma^2 - \tau^2 = 0$. Эта плоскость своя для каждого азимутального угла вдоль окружности трубы, т.е. НС – трёхосное, но *локально* оно 2–осное.

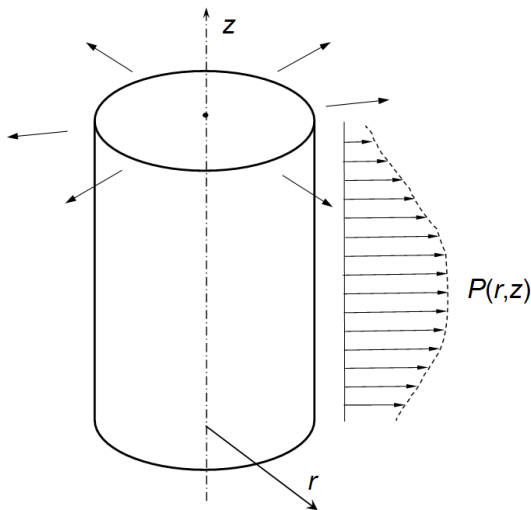


Рис.1.11. Осесимметричное НС

Осесимметричное НС (рис.1.11). Дано тело вращения. Оно сжимается или растягивается нормально нагрузкой давлением, изменяющейся только в направлении оси или по радиусу, независимо от азимутального угла. В декартовой системе координат с одной из осей вдоль оси вращения главные напряжения в каждой точке на площадках, перпендикулярных радиусу-вектору оси, направлены вдоль радиуса или перпендикулярно ему, их распределение обладает осевой симметрией. Ось симметрии НС совпадает с геометрической осью симметрии системы, которая является главной осью тензора напряжений в любой точке, любая пара ортогональных прямых в плоскости, перпендикулярной оси, будет

главными осями тензора в соответствующей осевой плоскости. Данное состояние 3–осное, но в каждой осевой плоскости оно может рассматриваться как 2–осное, не зависящее от азимутального угла.

При наличии кручения относительно оси симметрии появляются касательные напряжения в плоскости вращения, и, хотя определённая симметрия вращения остаётся, направления главных осей в точке будут зависеть также от её радиального положения, и при деформации в осевой плоскости задача не может считаться двухосной.

Трёхосное напряжённое состояние характеризуется ненулевым напряжением в каждом из трёх главных направлений в данной точке тела. Переходом в главные оси сложное НС можно свести локально к 3–стороннему сжатию–растяжению (как, например, рассмотренный выше чистый сдвиг), но в общем случае эти главные оси меняются от точки к точке. Если главные оси и главные напряжения одинаковы во всех точках тела, такое НС называется *гидростатическим*.

2. Деформирование и тензор деформаций

Обстоятельное изложение всех рассматриваемых в гл. 2 вопросов геометрии деформирования см. в [5], [24], частично в [4]. Краткое изложение на русском языке – в [6]. Основные определения кинематики больших деформаций можно найти на русском языке в [9] и в другой литературе по этому вопросу.

2.1. Движение, перемещение и деформация

Деформирование материала конструкции определяет её способность выполнять свои функции (например, изгибная деформация вращающегося вала недопустима). Введение деформаций для описания напряжённого состояния связано с тем, что оно, как мы видели, описывается только 3–мя уравнениями равновесия, с шестью неизвестными. В общем случае задачи равновесия деформируемого тела являются "статически неопределимыми", т.е. не определяемыми методами геометрической статики, оперирующей только приложенными силами (см. Работнов [3]). Введя деформации и связь напряжений с деформациями через дополнительные уравнения, мы замыкаем математическое описание.

Общее движение деформируемого тела, включающее изменение его размеров и формы, описывается как перемещения точек тела относительно их начальных положений, характеризуемых радиус–вектором $\{a_i\}$, в новые положения, характеризуемые вектором $\{x_i\}$. Вводится функция *перемещений* ("*смещений*"), задающая текущее изменение положения в каждой точке тела – поле вектора $\{du_i\}$:

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) = x_i - a_i . \quad (2.1)$$

Вектор $\{x_i\} = \mathbf{x}$ задаёт положение данной точки тела в фиксированной системе координат (по умолчанию – декартовой). Перемещение вычисляется либо относительно исходного состояния $\{a_i\}$, либо относительно некоторого последующего.

При деформировании существенно изменение *относительного расположения* точек тела при движении. Если близкие точки P и Q, заданные радиус–векторами $\{a_i\}$ и $\{a_i + da_i\}$, испытали одно и то же перемещение $\{u_i\}$, то расстояние между ними не изменилось, и их относительное расположение также не изменилось. Поворот также не изменяет расстояний, и такие движения в изолированной системе не приводят к внутренним силам. Если в точке Q перемещение $\{u_i\}$ отлично от перемещения в соседней точке P: $\{u_i + du_i\}$ и движение тела отлично от вращения, то расстояние между P и Q меняется, возникают внутренние силы, описываемые некоторым физическим законом. Для его формулировки вводится величина, характеризующая деформирование как смещение точек друг относительно друга.

Рассмотрим сначала 1–мерный случай, который имеет самостоятельный интерес для экспериментов на одноосное растяжение, основного вида механических испытаний. Пусть стержень длиной a удлинился на δ : $a \rightarrow a + \delta$. Вводится относительное удлинение: $\varepsilon = \delta/a$ и локальная величина $\varepsilon(x) = du/dx$, где $u = u(x)$ – перемещение в точке x . В отличие от перемещения, местная деформация не зависит от "базы измерения", например, от длины стержня при его равномерном удлинении, и служит характеристикой деформирования стержня в любой точке. Если деформация – не бесконечно малая, существенно, к какой длине относить удлинение – к первоначальной, или к новой. Пусть однородный стержень однородно растягивается от длины a до a' , поэтапно, малыми порциями δ_k . Накопленное

перемещение будет суммой δ_k . Деформация за n этапов может быть вычислена двумя способами –

$$\varepsilon = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n}{a} \quad \text{и} \quad \varepsilon_L = \frac{\delta_1}{a_1} + \frac{\delta_2}{a_2} + \dots + \frac{\delta_n}{a_n}. \quad (2.2)$$

В общем случае приближённое равенство соблюдается только при малом полном относительном удлинении:

$$\varepsilon_L = \frac{\delta_1}{a_0} + \frac{\delta_2}{a_2} + \dots + \frac{\delta_n}{a_n} \approx \int_a^{a'} \frac{da}{a} = \ln \frac{a'}{a} = \varepsilon_{\log} = \ln\left(1 + \frac{a' - a}{a}\right) \approx \frac{a' - a}{a} = \varepsilon. \quad (2.3)$$

Величину $\varepsilon_{\log} = \varepsilon_L$ принято называть *логарифмической* или "истинной" деформацией (natural deformation). Это интегральная характеристика одноосного, одномерного деформирования. Смысл её введения понятен из вычисления: при поэтапном деформировании в каждый момент приращение длины отнесено к текущей длине, что корректно с точки зрения общих определений, рассмотренных ниже. Она полезна при представлении результатов экспериментов на растяжение. Отметим, что растяжение следует полагать равномерным по длине, т.к. итоговая деформация – просто число, зависящее от истории нагружения.

Попытки обобщения на трёхмерный случай приводят к сложным и трудно интерпретируемым объектам (см., например, обсуждение в [6]). Поэтому для представления деформации в общем случае используются бесконечно малые величины, накопленная же информация определяется и используется по-разному.

2.2. Тензор деформаций

В общем случае деформирование неоднородно и неоднородно. Оно может быть введено как чисто геометрическое понятие: преобразование исходной области пространства, занимаемой телом, в новую:

$$X: \{a_i\} \rightarrow \{x_i\}, \quad x_i = X_i(a_1, a_2, a_3), \quad \{a_i\} \in \Omega. \quad (2.4)$$

Предполагается, что функции $\{X_i\}$ – непрерывно дифференцируемые. Трещины и другие разрывы суть особые случаи. Существует обратное преобразование:

$$Y: \{x_i\} \rightarrow \{a_i\}, \quad a_i = Y_i(x_1, x_2, x_3), \quad \{x_i\} \in \Omega'. \quad (2.4a)$$

Координаты исходных и преобразованных точек отнесены к неподвижной декартовой системе. Движение может быть выражено также в терминах компонент перемещений точек тела Ω относительно исходной конфигурации (2.1). В общем случае нет величины, аналогичной интегральной логарифмической деформации при одномерном удлинении, но гладкое отображение общего вида (2.4) правомерно рассматривать как последовательность бесконечно малых линейных преобразований. Введём матрицу линейной части зависимости функции преобразования области от координат, называемую матрицей градиентов деформаций (deformation gradient matrix) [6]:

$$[J_{ik}] \equiv \{\partial X_i / \partial a_k\} = \|\mathbf{J}\|. \quad (2.5)$$

Подобно локальному малому одномерному удлинению, в трёхмерном случае преобразование дифференциалов координат точек линейно и описывается этой матрицей, составленной из частных производных по координатам точки:

$$dx_i = \frac{\partial X_i}{\partial a_k} da_k . \quad (2.6)$$

Матрица $[J_{ik}]$ имеет обратную, это линейная часть матрицы обратного преобразования:

$$[J_{ik}]^{-1} \equiv \{\partial Y_i / \partial x_k\} = \| \mathbf{J} \|^{-1} , \quad (2.7)$$

Коэффициенты матрицы преобразования области $[J_{ik}]$ образуют тензор второго ранга (градиент векторного поля $\{X_i\}$, задающего преобразование: деформационный градиент [5]). Отметим, что определитель матрицы $\| \mathbf{J} \|$ равен отношению объёмов параллелепипедов, деформированного и исходного, построенных, соответственно, на двух системах отрезков – образов дифференциалов и самих дифференциалов координат:

$$\det \| \mathbf{J} \| = V_{\text{new}} / V_{\text{prev}} , \quad (2.8)$$

что следует из определений (2.6) и смешанного произведения трёх векторов. Поскольку функции $\{X_i\}$ – дифференцируемые, функция $\det \| \mathbf{J} \|$ также дифференцируема, причём $\det \| \mathbf{J} \| \neq 0$. В начальный момент $\det \| \mathbf{J} \| = 1$ и остаётся положительным в соответствии с его геометрическим смыслом.

Определяющее свойство формоизменения – это изменение расстояния между точками тела, что есть следствие теоремы о полярном разложении (см. ниже). Для выражения деформации через перемещения следует рассмотреть изменение расстояния между близкими точками $\{a_i\}$, $\{a_i + da_i\}$, задаваемого дифференциалами координат $\{da_i\}$.

Квадрат длины отрезка в недеформированном теле:

$$(dS_a)^2 = (da_1)^2 + (da_2)^2 + (da_3)^2 = da_i da_i .$$

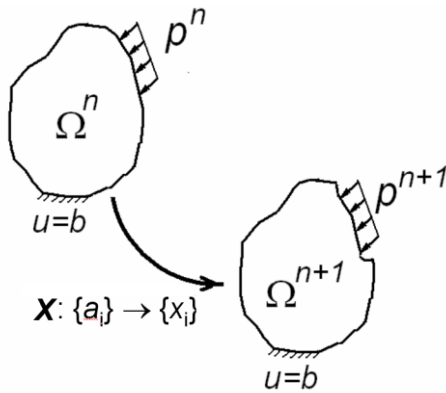


Рис.2.1. Деформация как преобразование

Рассмотрим разность квадратов $(ds_x)^2 - (dS_a)^2$ длин в исходном и преобразованном, т.е. деформированном, состояниях. Мы хотим соотнести её с размерами рассматриваемого линейного элемента и записать это в инвариантной форме. Как и в одномерном случае, здесь есть выбор – относительно каких значений координат производить вычисления – исходных или преобразованных. Дифференциалы исходного и преобразованного линейных элементов можно связать через матрицы линейной части преобразования, прямую (2.5), либо обратную (2.7), откуда следуют выражения для квадратов длин:

$$dx_i = \frac{\partial X_i}{\partial a_j} da_j , \quad ds_x^2 = \frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} da_j da_m ,$$

$$da_i = \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} dx_j , \quad dS_a^2 = \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial Y_i}{\partial x_m} dx_j dx_m . \quad (2.9)$$

Далее, удлинение можно выразить через исходные значения координат точек и написать, следуя (2.9):

$$\begin{aligned}
(ds_x)^2 - (dS_a)^2 &= dx_i dx_i - da_p da_p = \frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} da_j da_m - da_p da_p = \\
&= \left(\frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} - \delta_{pj} \delta_{pm} \right) da_j da_m = \left(\frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} - \delta_{jm} \right) da_j da_m \equiv 2E_{jm}^a da_j da_m. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Коэффициенты квадратичной формы E_{jm} образуют тензор, что является одним из его определений. Он называется тензором деформаций Лагранжа–Грина.

С другой стороны, мы можем выражать удлинение линейного элемента в новых координатах и не учитывать явно исходное состояние:

$$\begin{aligned}
(ds)_x^2 - (ds)_a^2 &= dx_i dx_i - da_i da_i = dx_p dx_p - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial Y_i}{\partial x_m} dx_j dx_m = \\
&= \left(\delta_{pj} \delta_{pm} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial Y_i}{\partial x_m} \right) dx_j dx_m = \left(\delta_{jm} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial Y_i}{\partial x_m} \right) dx_j dx_m \equiv 2E_{jm}^x dx_j dx_m. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Набор E_{jm}^x называется тензором деформаций Эйлера–Альманзи.

Таким образом, тензор деформации введён геометрически как коэффициенты квадратичной формы от дифференциалов координат, исходных или преобразованных, вычисляющей инвариантную величину – изменение квадрата длины малого отрезка при геометрическом преобразовании рассматриваемой области, служащим математической моделью деформирования твёрдого тела. Определения тензоров деформаций (2.10), (2.11) для дальнейшего использования в механике удобно выразить не через исходные или преобразованные координаты, а через перемещения. Внося определение перемещения (2.1), например, в определение (2.10) тензора Лагранжа–Грина, получим:

$$\begin{aligned}
E_{jm}^a &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} - \delta_{jm} \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \delta_{ij} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_m} + \delta_{im} \right) - \delta_{jm} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} \delta_{im} + \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial a_m} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_i}{\partial a_m} + \delta_{jm} - \delta_{jm} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_m} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_i}{\partial a_m} \right). \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Компоненты этого тензора определяются преобразованием (2.4), которое и вычисляется по перемещениям на каждом этапе деформирования как изменение конфигурации. Перемещения входят в тензор деформаций, который, как мы увидим далее, связан с линейной частью преобразования на каждом малом шаге вычислений, матрицей (2.6) в каждой точке. Связь деформаций с напряжениями позволяет определить эти перемещения и замкнуть описание движения под действием сил.

Аналогичное выражение через перемещения, взятые как функция координат x_i , получается для тензора деформаций Эйлера–Альманзи (2.11):

$$\begin{aligned}
E_{jm}^x &= \frac{1}{2} \left(\delta_{jm} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial Y_i}{\partial x_m} \right) = \frac{1}{2} \left(\delta_{jm} - \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\delta_{im} - \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\delta_{jm} - \delta_{ji} \delta_{im} + \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} + \delta_{im} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.12a)
\end{aligned}$$

Поле тензора деформации полностью описывает деформирование, т.е. составляющую преобразования (2.4), связанную с изменением формы тела. Рассмотрение только линейной части (2.5) функции координат (2.4) несущественно для определения тензора в точке, поскольку для гладких функций всегда можно обеспечить постоянство с заданной точностью матрицы J_{ik} в некоторой окрестности данной точки. В общем случае деформация неоднородна, как, например, на рис. 2.2, где изображено деформирование упругого тела (резина) переменного сечения.

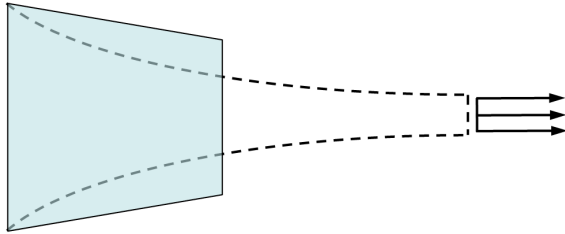


Рис. 2.2. Неоднородное деформирование

Нулевые перемещения дают нулевой тензор деформаций. Ниже мы увидим, что справедливо и обратное утверждение: если в результате непрерывного преобразования (2.4) тензор деформаций везде нулевой, то расстояние между точками не изменилось. Таким образом, подобно тому, как напряжённое состояние полностью характеризуется тензором напряжений, "деформированность" имеет место тогда и только тогда, когда тензор деформаций

отличен от нуля. Тем не менее, для расчёта напряжённо–деформированного состояния тела в общем случае недостаточно только тензоров напряжений и деформаций, поскольку деформированное состояние не всегда может быть осуществлено без локальных поворотов (в частности, изгиб). Т.е. деформирование в общем случае не исчерпывает формоизменение, локально содержащее и повороты, что можно усмотреть и на рис. 2.2.

Далее, напряжённое состояние меняется при деформировании. Т.к. компоненты тензора напряжений связаны с напряжениями на площадках (формула Коши), то при его определении следует уточнять, к какой площадке отнесены напряжения – к исходной или деформированной, что дало бы разные определения этого тензора. Введённый выше тензор напряжений Коши отвечает случаю, когда различие между исходной и новой конфигурацией малого объёма мало, т.е. деформации в данной точке малы.

Из (2.12), как и из исходного выражения (2.10), видно, что описание деформирования в общем случае нелинейно по перемещениям – *геометрически нелинейно*. Например, это не позволяет в общем случае менять местами или складывать два преобразования деформации. Далее компоненты деформации будут полагаться малыми, и слагаемое второго порядка будет опускаться. Результирующий *тензор малых деформаций Коши* –

$$\varepsilon_{jm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_m} \right), \quad (2.13)$$

линеен по перемещениям. Определённые выше тензоры (2.12) и (2.12a) в случае малых деформаций различаются на величину второго порядка по компонентам деформации (см. (2.1)). Критерий геометрической линейности, т.е. малости квадратичного слагаемого в определении тензора деформации, следует непосредственно из выражений (2.12): градиенты компонент перемещений должны быть малыми порядка не выше второго относительно единицы.

Для примера: *упругая* деформация металлов практически всегда находится в пределах $\sim 10^{-3}$. (Об этом говорит, в частности, наличие взятой за условный предел текучести для металлов величины σ_{02} , напряжения удлинения до 0,2%). Поэтому, для металлов упругие,

линейные физически, деформации всегда линейны геометрически. Обратный пример дают резина и аналогичные материалы. Отметим ещё, что малость локальных деформаций не предполагает малость *перемещений* точек тела друг относительно друга при его деформировании, если они разнесены достаточно далеко. Пример – упругий изгиб длинного тонкого стержня (линейки).

2.3. Физическая интерпретация компонент тензора малых деформаций

В качестве иллюстрации рассмотрим приведённые определения в простейших случаях. Пусть линейный элемент (отрезок) первоначально направлен вдоль оси Oa_1 лабораторной системы: $\{da_1, 0, 0\}$. Первоначальная длина отрезка: $dS_a = da_1$. Определим относительное удлинение после деформирования, когда длина стала ds_x :

$$\begin{aligned} (ds_x - dS_a)/dS_a &= (ds_x - da_1)/da_1 = ds_x/da_1 - 1 \approx \frac{1}{da_1} \sqrt{\frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} da_j da_m} - 1 = \\ &= \frac{da_1}{da_1} \sqrt{\frac{\partial X_i}{\partial a_1} \frac{\partial X_i}{\partial a_1}} - 1 = \sqrt{1 + 2E_{11}^a} - 1 \approx E_{11}^a . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь использовано выражение (2.9) и (2.10) для лагранжева тензора деформаций. Видим, что деформация (сжатие/растяжение) малого отрезка, направленного вдоль Oa_1 , равна E_{11}^a . Условие малости E_{11}^a совпадает с условием геометрической линейности деформации: $E_{11}^a \ll 1$. Для отрезков $\{0, da_2, 0\}$, $\{0, 0, da_3\}$ – аналогично, т.е. *диагональные компоненты тензора деформаций связаны с укорочением (удлинением) в соответственном направлении* (сжатие отрезка i -го направления в i -м направлении): с линейной деформацией.

Недиагональные компоненты связаны с изменением углов между отрезками. Рассмотрим в недеформированном теле два ортогональных линейных элемента малой длины, направленных вдоль осей координат, $dS : \{0, da_2, 0\}$ и $dS^* : \{0, 0, da_3\}$. Между ними – прямой угол. При деформировании $X : \{a_i\} \rightarrow \{x_i\}$ они преобразуются в новые: $dS \rightarrow ds$, $dS^* \rightarrow ds^*$, расположенные под другим углом φ . Выразим этот угол через компоненты тензора деформаций, используя формулы для скалярного произведения векторов. Из определений (2.9) следует для наших отрезков –

$$ds \cdot ds^* = ds ds^* \cos \varphi = dx_i dx_i^* = \frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i^*}{\partial a_m} da_j da_m = \frac{\partial X_i}{\partial a_2} \frac{\partial X_i^*}{\partial a_3} da_2 da_3 .$$

Поскольку ортогональные малые линейные элементы взяты "в одной точке", их деформирование может быть описано одним и тем же тензором деформаций. Можно видеть, что справа в произведении стоит множителем недиагональная компонента тензора деформаций (2.10) в данной точке, причём частные производные по соответственным координатам близки, если тензор деформаций почти один и тот же: $\partial X_i^* / \partial a_3 \approx \partial X_i / \partial a_3$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial X_i}{\partial a_2} \frac{\partial X_i^*}{\partial a_3} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial X_i}{\partial a_2} \frac{\partial X_i}{\partial a_3} = E_{23}^a . \quad (2.15)$$

Длины преобразованных сегментов были da_2 , da_3 и, как мы видели выше, в предположении малости деформаций и поворотов изменились в $ds/da_2=1+E_{22}^a$ и в $ds^*/da_3=1+E_{33}^a$ раз, откуда получаем для косинуса угла:

$$\cos \phi = \frac{2E_{23}^a}{(1+E_{22}^a)(1+E_{33}^a)} .$$

Если величины E_{22}^a и E_{33}^a малы относительно 1, то угол между сегментами изменился на малую величину $\gamma=\pi/2-\phi$, и тогда –

$$\sin \gamma \approx \gamma \approx 2E_{23}^a , \quad (2.16)$$

т.е. в случае малых деформаций удвоенная недиагональная компонента тензора отвечает изменению угла – *угловая деформация*. В технической литературе углы поворотов, отвечающие недиагональным компонентам тензора деформаций, обозначаются $\gamma_{ik}=2\varepsilon_{ik}$.

2.4. Инварианты тензора деформаций, главные оси. Объёмы и площади

Тензор деформаций симметричен, имеет главные значения, главные оси со свойствами, аналогичными свойствам тензора напряжений. В соответствии с определением главных направлений, недиагональные компоненты тензора деформации будут вдоль них нулевые. В частности, если в рассмотренном только что примере оси лабораторной системы, и с ними рассмотренные ортогональные элементы dS , dS^* направлены вдоль главных осей тензора деформации, то косинус угла между ними останется равным нулю, т.е., угол между элементами при деформировании вдоль главных осей деформации не изменится, что понятно. Максимальное же изменение угла будет в случае, если оси координат расположены под углом в 45° к главным осям (см., например, [6]).

Уместно спросить, как соотносятся главные оси тензоров напряжений и деформаций для заданного НДС? Это следует из свойств материала, описываемых соотношением между тензорами напряжений и деформаций. Для изотропного упругого тела главные оси этих тензоров совпадают – тензоры *соосны* (см. ниже гл. 3).

Рассмотрим инварианты тензора деформаций и связанных с ним тензоров (ср. (1.15)–(1.18)):

$$J_1(\varepsilon_{ik}) = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} , \quad J_2(\varepsilon_{ik}) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{jj} \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{jk} \varepsilon_{kj}) , \quad J_3(\varepsilon_{ik}) = \det \|\varepsilon_{ik}\| . \quad (2.17)$$

Первый и третий имеют метрическую интерпретацию. Из определения (2.13) тензора малых деформаций следует, что его первый инвариант можно записать через дивергенцию вектора перемещений (свёртка тензора механической дисторсии), рассмотренного в следующем параграфе:

$$J_1(\varepsilon_{ik}) = \frac{\partial u_k}{\partial a_k} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u} . \quad (2.18)$$

Первый инвариант тензора малых деформаций имеет смысл относительного приращения малого объёма $(\Delta V/\Delta V_0 - 1)$ в окрестности данной точки, или *дилатации*, что нетрудно показать, рассмотрев в главных осях малую деформацию растяжения прямоугольного

параллелепипеда, построенного на этих осях, и используя выражение (2.14). Можно также применить формулу Гаусса–Остроградского к величине $\text{div} \mathbf{u}$. В одномерном случае это отвечает интерпретации (2.14). При сдвиговых же деформациях малой величины, определяемых недиагональными компонентами и не меняющих первый инвариант тензора деформаций, объём в первом порядке неизменен.

Из (2.14) нетрудно убедиться также в том, что при малых деформациях *степень сжатия* dV/dV_0 , даётся в главных осях величиной $((1+2E_{11})(1+2E_{22})(1+2E_{33}))^{1/2}$. Если, в соответствии с определением (2.10), ввести тензор

$$\delta_{jm} + 2E_{jm} = \frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m},$$

то его третий инвариант (детерминант матрицы) J_{III} будет равен квадрату степени сжатия. Т.к. детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, мы приходим к общему соотношению (2.8):

$$\det |\delta_{jm} + 2E_{jm}| = \det \left| \frac{\partial X_i}{\partial a_j} \frac{\partial X_i}{\partial a_m} \right| = \det^2 \left\| \frac{\partial X_i}{\partial a_m} \right\| = \left(\frac{dV}{dV_0} \right)^2.$$

Далее, вспоминая алгебраическое определение детерминанта матрицы, выражаем –

$$\frac{dV}{dV_0} = \det \left\| \frac{\partial X_i}{\partial a_m} \right\| = e_{ijk} \frac{\partial X_i}{\partial a_1} \frac{\partial X_j}{\partial a_2} \frac{\partial X_k}{\partial a_3},$$

где e_{ijk} – символ Леви–Чивита (антисимметричный по всем парам индексов). Для произвольной перестановки (p, q, r) индексов (1, 2, 3) справедливо тождество –

$$e_{pqr} \frac{dV}{dV_0} = e_{ijk} \frac{\partial X_i}{\partial a_p} \frac{\partial X_j}{\partial a_q} \frac{\partial X_k}{\partial a_r}. \quad (2.19)$$

Аналогичным образом можно получить –

$$e_{pqr} \frac{dV_0}{dV} \equiv e_{pqr} J_{III}^{-1} = e_{ijk} \frac{\partial Y_i}{\partial x_p} \frac{\partial Y_j}{\partial x_q} \frac{\partial Y_k}{\partial x_r}. \quad (2.20)$$

При записи уравнений МСС в лагранжевых координатах эти соотношения служат интегральным эквивалентом закона сохранения массы.

Рассмотрим теперь, как изменяется площадь малого сегмента поверхности при деформировании. Это ниже используется при определении тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа, применяемого для учёта деформируемости конфигурации.

Рассмотрим в недеформированном теле два малых линейных элемента общего положения, dS и dS^* . Площадь параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$dA \equiv NdS = dS \times dS^* = \{ N_i dA \} = \{ e_{kji} da_j da_i^* \}. \quad (2.21)$$

При деформировании $X: \{a_i\} \rightarrow \{x_i\}$ параллелограмм преобразуется: $dS \rightarrow ds$, $dS^* \rightarrow ds^*$, его площадь изменяется:

$$\mathbf{n}ds = ds \times ds^* \equiv \{ n_p dA' \} = \{ e_{pqr} dx_q dx_r^* \}. \quad (2.22)$$

Здесь \mathbf{N} и \mathbf{n} – векторы нормали к исходному и преобразованному сегментам площади. Выражая векторное произведение в координатах и используя определения (2.9), получим для исходного параллелограмма–

$$N_i dA = e_{ikj} da_k da_j^* = e_{ikj} \frac{\partial Y_k}{\partial x_p} \frac{\partial Y_j^*}{\partial x_q} dx_p dx_q^*. \quad (2.23)$$

Сворачивая обе стороны равенства с тензором $\partial Y_i / \partial x_r$ и используя тождество (2.20), получим –

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_r} N_i dA = e_{ikj} \frac{\partial Y_i}{\partial x_r} \frac{\partial Y_k}{\partial x_p} \frac{\partial Y_j^*}{\partial x_q} dx_p dx_q^* = J_{III}^{-1} e_{rpq} dx_p^* dx_q^* = J_{III}^{-1} n_r dA',$$

откуда, вводя по (2.20) степень сжатия, используя её выражение через плотности (обратный удельный объём) –

$$n_p dA' = \frac{dV}{dV_0} \frac{\partial Y_i}{\partial x_p} N_i dA = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial Y_i}{\partial x_p} N_i dA.$$

Здесь слева стоит вектор ориентированной площади преобразованного сегмента, справа – свёртка вектора площади исходного сегмента с обратной матрицей преобразования, умноженные на степень объёмного сжатия при прямом преобразовании, которая по (2.19) может быть интерпретирована как произведение трёх коэффициентов сжатия при прямом преобразовании. Интерпретация этого соотношения в простом случае сжатия–растяжения вдоль координатных осей очевидна – площадь сегмента, расположенного в координатной плоскости, пропорциональна произведению коэффициентов сжатия–растяжения в этой плоскости. Учёт изменения площади сегмента при воздействии напряжения позволяет уточнить определение тензора напряжений при больших деформациях.

2.5. Малое движение, тензоры малых вращений и деформаций

Отметим некоторые полезные следствия из трактовки описания общего малого движения деформируемого тела как геометрического преобразования. В случае абсолютно жёсткого тела его движение складывается из поступательного и вращательного. При наличии деформирования сюда входит также движение деформации, и при малых изменениях положения движение малого объёма можно разложить на составляющую перемещения центра масс объёма, составляющую вращения и составляющую деформирования. Поясним это для случая малых (*инфинитезимальных*) преобразований. Нас интересует случай, когда движение отлично от чистой трансляции, т.е., когда центр масс не перемещается.

Поле вектора перемещений точек тела задаётся вектор–функцией координат точек (2.1): $u_i = u_i(a_1, a_2, a_3)$. Дифференциал перемещений связан с дифференциалами координат как

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial a_k} da_k \equiv B_{ik} da_k, \quad (2.24)$$

где $\|\mathbf{B}\| = \{B_{ik}\}$ – *тензор механической дисторсии*. Она показывает распределение относительного смещения (дисторсии) точек тела, т.е. перемещений, отнесённых к

дифференциалам координат – малым отрезкам. Матрица $\|\mathbf{B}\|$ связана с матрицей преобразования $\|\mathbf{J}\|$ (2.5) очевидным соотношением (поскольку $x_i = a_i + u_i$)

$$\|\mathbf{J}\| = \|\mathbf{E}\| + \|\mathbf{B}\|, \quad (2.25)$$

где $\|\mathbf{E}\|$ – единичная матрица. $\{B_{ik}\}$ – тензор, потому что это – градиент вектора. Применяя тензорные операции симметрирования и альтернирования представим $\{B_{ik}\}$ суммой :

$$B_{ik} = 1/2(u_{i,k} + u_{k,i}) + 1/2(u_{i,k} - u_{k,i}) \equiv \varepsilon_{ik} + \omega_{ik}, \quad (2.26)$$

где по определению симметричная и антисимметричная части – это:

$$\varepsilon_{ik} \equiv 1/2(u_{i,k} + u_{k,i}) \quad - \text{тензор малых деформаций}, \quad (2.27)$$

$$\omega_{ik} \equiv 1/2(u_{i,k} - u_{k,i}) \quad - \text{тензор малых поворотов}. \quad (2.28)$$

Эти определения иллюстрируются ниже на рис. 2.3.

Упомянем, что справедливо и общее утверждение: преобразование (2.4) в случае не малого движения также может быть локально сведено к композиции преобразований вращения и растяжения. Это составляет содержание т.н. *теоремы о полярном разложении* (см. [5], [24]). Она гласит, что симметричная матрица градиентов деформаций \mathbf{J} (2.5) может быть разложена в произведение диагональной матрицы \mathbf{T} и ортогональной матрицы \mathbf{R} , которые отождествляются с преобразованиями поворота $[R_{ij}]$ и растяжения по осям $[T_{pq}]$ (тензор растяжения – stretch tensor). Отсюда, в частности, следует, что деформирование имеет место тогда и только тогда, когда имеет место изменение расстояния между точками тела, что и берётся за основу определения тензора деформаций. Но в общем случае разложение на композицию вращения и растяжения зависит от порядка преобразований, соответственно, для данного поворота вводятся левый и правый тензоры растяжения. В случае конечных деформаций неправомерна также и приведённая выше простая геометрическая интерпретация инвариантов тензора деформаций.

Численные методы решения задач МДТТ как правило работают с малыми движениями, для которых композиция преобразований поворота и растяжения вычисляется непосредственно. В индексных обозначениях сумма матриц (2.25) имеет вид:

$$J_{ik} = E_{ik} + B_{ik}. \quad (2.25a)$$

Линейная часть преобразования поворота, записанная в виде тензора, аналогична:

$$R_{ik} = \delta_{ik} + \omega_{ik}, \quad (2.29)$$

как и преобразование малой деформации –

$$T_{ik} = \delta_{ik} + \varepsilon_{ik}. \quad (2.30)$$

Составляя их произведение, описывающее общее движение как композицию поворота и деформации, отбрасывая слагаемые второго порядка для случая малых движений, получим:

$$J_{ik} = R_{ip} T_{pk} = (\delta_{ip} + \omega_{ip})(\delta_{pk} + \varepsilon_{pk}) = \delta_{ik} + \omega_{ik} + \varepsilon_{ik} + \omega_{ip} \varepsilon_{pk} \approx \delta_{ik} + \omega_{ik} + \varepsilon_{ik}, \quad (2.31)$$

т.е. разложение (2.26) общего тензора малой дисторсии B_{ik} .

Линейность (2.31) означает возможность *суперпозиции* малых движений – матрицы малых поворотов и деформаций можно складывать, результат не зависит от порядка операций. Мы позже используем полученные выражения для выделения вращения при общем малом движении в формулировке численного описания конечных деформаций.

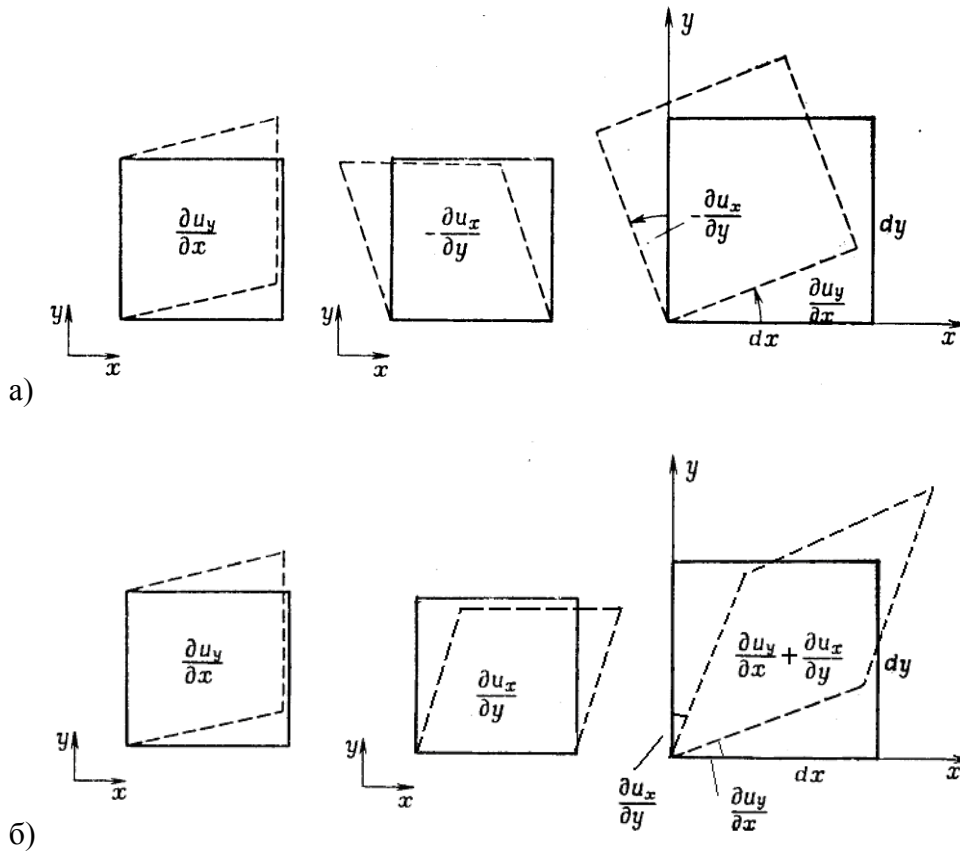


Рис.2.3. Преобразования вращения и чистого сдвига.

Рис.2.3. иллюстрирует комбинации движений, связанные с разложением (2.26). Малое движение $u(x,y)$ в плоскости Oxy представлено как композиция двух малых сдвигов вдоль осевых направлений, взятых с различными знаками.

Рассмотрим преобразования малого куба с ребром a , расположенного в 1-м октанте. Проекция куба на плоскость Oxy – это квадрат со стороной a . При повороте точек квадрата с координатами $\{x, y, z\}$, $0 \leq x, y, z \leq a$, в плоскости Oxy вокруг оси Oz на угол $2\omega_z$ x -компонента малого перемещения согласно (2.24), (2.26), (2.28) даётся выражением

$$du_x = (\partial u_x / \partial y - \partial u_y / \partial x) dy,$$

y -компонента –

$$du_y = (\partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y) dx,$$

z -компонента – нулевая.

Рис.2.3а иллюстрирует преобразование поворота на малый угол как композицию двух сдвигов в перпендикулярных направлениях Oy и $O(-x)$:

$$y \rightarrow y' = y + u_y = y + k_x y \quad \text{и} \quad x \rightarrow x' = x + u_x = x - k_y x.$$

Главная часть компоненты перемещения в направлении $-x$ равна $du_x = -k_y dx = -(\partial u_x / \partial y) dy$, т.е. связана преимущественно со сдвигом вдоль оси $O(-x)$. Перемещение в y -направлении при вращении связано преимущественно с параллельным сдвигом по Oy , при повороте

приближённо равном $du_y = kx dx = (\partial u_y / \partial x) dx$. Перемещения вдоль оси Ox при y -сдвиге имеют второй порядок малости и наоборот – при x -сдвиге. При повороте производные перемещений по несоответственным координатам по абсолютной величине одинаковы и с точностью до второго порядка равны углу $2\omega_z$. В первом порядке малости квадрат при комбинации двух сдвигов, образующих поворот на угол $2\omega_z$ остаётся недеформированным, что может быть проверено непосредственно, вычислением его диагоналей после преобразования.

Малый поворот вокруг оси общего положения может быть разложен на композицию малых поворотов вокруг трёх координатных осей.

Интерпретация деформации *чистого сдвига*, описываемой удвоенным тензором (2.27), представлена на рис.2.3б. Он иллюстрирует также расположение главных осей тензора деформации (направлений с нулевой деформацией углов) и сделанное выше утверждение о максимальной деформации углов в случае расположения осей координат под углом 45° относительно главных осей тензора деформации. Непосредственной проверкой показывается, что при малом чистом сдвиге площадь в первом порядке неизменна, что иллюстрирует сделанное выше общее утверждение относительно изменения объёма. Отметим, также, что преобразование малого сдвига в координатной плоскости Oxy с перемещением только вдоль одного направления, например, оси Oy : $du_y = (\partial u_y / \partial x) dx$ (левая позиция рис.2.3б) имеет матрицу преобразования, составленную, согласно (2.26), из суммы матриц удвоенного тензора деформации (2.27) и тензора поворота на угол $-2\omega_z$, т.е. в таком преобразовании участвует также вращение. Подробнее эти вопросы разобраны в монографии [5].

3. Упруго деформируемое тело и линейная упругость

Напряжённое состояние тела неотделимо от деформированного. Рассмотрим медленное нагружение (с малыми ускорениями) до состояния равновесия. При приложении нагрузки тело деформируется, возникают внутренние силы, которые при отсутствии разрушения растут с ростом деформаций, пока внешнее воздействие не будет скомпенсировано. В состоянии равновесия деформации в каждой точке тела отвечает определённое напряжение. Деформированное состояние в точке определено тензором деформации, напряжённое состояние – тензором напряжений. Эти величины описывают разные стороны одного явления, и между ними существует связь, которая записывается в виде физического закона – *определяющего соотношения материала*:

$$\sigma_{jl} = \sigma_{jl}(\varepsilon_{ik}) . \quad (3.1)$$

В общем случае форма этого соотношения может быть сложной, в него могут входить другие величины, но для упругого материала оно может браться линейным, и его вид можно определить, исходя из достаточно общих посылок, энергетических. Хотя закон сохранения

механической энергии является следствием остальных, понятие потенциальной энергии деформирования очень важно для общих формулировок механики.

3.1. Энергия упругой деформации

Свойство упругости твёрдого деформируемого тела можно определить как его полный возврат к исходной конфигурации после снятия нагрузки. Эта конфигурационная обратимость упругой деформации имеет атомарную природу: взаимодействие между отдельными атомами потенциально, и каждому их взаиморасположению должно отвечать вполне определённое значение потенциальной энергии взаимодействия, которая минимальна в состоянии равновесия. При квазистатическом (с малыми ускорениями) деформировании упругого тела только очень малая часть работы необратимо превращается в тепло (через затухающие колебания). Упругое деформирование будет также и термодинамически обратимо, т.е., например, при упругом адиабатическом сжатии, влекущим небольшой нагрев, и последующей полной разгрузке температура останется прежней. Рассматриваемые в практике твёрдые тела, как правило, слабо сжимаемы, и тепловыми эффектами при упругом деформировании можно пренебречь (о термодинамике деформирования см., например, [5], [6], [10], [11]). В упругом теле можно ввести механическую потенциальную энергию деформирования, которая с точностью до тепловых эффектов будет внутренней энергией тела, функцией состояния.

В сплошной среде изменение взаиморасположения точек тела описывается тензором деформаций $\varepsilon_{ij}(x)$, внутренние силы – тензором напряжений $\sigma_{ij}(x)$. Работа при деформировании, т.е. работа внешней нагрузки W против внутренних сил при деформировании от исходного до конечного состояния равна и противоположна работе внутренних сил (без учёта нагрева). В единице объёма –

$$-W(=U) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \equiv \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}) d\varepsilon_{ij} . \quad (3.2)$$

Здесь выписана сумма из шести интегралов по компонентам деформации вдоль пути деформирования, в которых предполагается наличие зависимости (3.1). Компоненты тензора деформаций изменяются от нуля до своего конечного значения. При подсчёте энергии всего деформированного тела следует проинтегрировать по его объёму.

Происхождение (3.2) для работы сил сжатия можно пояснить на примере 1–осного деформирования. В этом случае работа, совершаемая в единице объёма – это "произведение силы на расстояние". Например, пусть грань A_1 малого параллелепипеда толщиной Δx_1 переместилась вдоль своей нормали, параллельной внутренней силе F , на расстояние δx_1 , тогда работа силы: $\Delta W = F \delta x_1$. Полагая напряжение постоянным на малом шаге деформирования, приращение энергии на единицу объёма можно записать как –

$$\Delta U = \Delta W / (A \Delta x_1) = F \delta x_1 / (A \Delta x_1) = F / A \delta x_1 / \Delta x_1 = \sigma \varepsilon_{11} .$$

При деформировании от исходного нулевого до конечного состояния работа внутренних сил суммируется на малых отрезках истории деформирования:

$$\Delta U^{(n+1)} = \int_{\varepsilon_{11}^{(n)}}^{\varepsilon_{11}^{(n+1)}} \sigma_{11} d\varepsilon_{11} .$$

Аналогичную интерпретацию можно привести для работы при деформации сдвига. Например, при чистом сдвиге в малом кубе с ребром a (рис.2.3б), описываемом удвоенным тензором деформаций, работу в направлении Ox выполняет сила, приложенная к грани с нормалью вдоль Oy , в направлении Oy работу выполняет сила, приложенная к грани с нормалью вдоль Ox , и выражение для элементарной работы сдвига в малом объёме величиной a^3 соответствует (3.2):

$$\Delta W = a^2(\tau_{yx} dx + \tau_{xy} dy) = a^2(\tau_{yx} \frac{da_x}{a} a + \tau_{xy} \frac{da_y}{a} a) = a^3 \tau_{yx} (\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) = a^3 \tau_{xy} 2\varepsilon_{xy}.$$

Соотношение (3.2) для работы внутренних сил весьма общее и справедливо также, если упругость не предполагается, хотя работа может не быть функцией состояния, т.к. интеграл может зависеть от пути интегрирования. В упругом случае такая функция может быть введена: $U = U(\varepsilon_{kl})$.

Для более точных формулировок введём арифметическое пространство с декартовыми координатами – компонентами тензора деформаций ε_{ij} . Интеграл работы (3.2) – это интеграл вдоль контура, пути в этом пространстве деформаций. Упругость среды означает обратимость деформирования, т.е., возврат к исходному напряжённому и деформированному состоянию при снятии нагрузки. Интеграл (3.2) по любому замкнутому контуру в пространстве деформаций будет равен нулю: работа, совершённая над телом, не привела к изменению его состояния и, следовательно, не изменила внутреннюю энергию – функцию состояния. Поэтому интеграл не должен также зависеть от пути интегрирования. Выражение $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ в упругом случае, следовательно, представляет собой полный дифференциал, и оно интегрируемо, т.е. существует скалярная потенциальная функция $U(\varepsilon_{ij})$ – *потенциальная энергия деформирования*, для которой –

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (3.3)$$

При неупругом деформировании предположение о независимости от пути не выполнено, вследствие необратимости деформирования, при этом текущее напряжённое состояние может зависеть, например, также от скорости деформаций или иных параметров.

Отметим, что для изотропного линейно упругого материала (см. далее) соотношение (3.2) можно проинтегрировать явно для всей истории деформирования, в которой напряжённое состояние изменяется от нулевого до конечного. Плотность упругой энергии в любой точке упругого тела при данном НДС даётся *формулой Клапейрона*.

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (3.4)$$

Покажем это для нагружения, однородного в пространстве. Рассмотрим НДС в системе главных осей тензора напряжений. Пусть нагружение пропорционально, т.е. отношение главных значений неизменно, тогда главные оси не меняются при нагружении от исходного до конечного состояния. Используя свойства соосности тензоров напряжений и деформаций изотропного тела, линейную связь $\sigma_{(kk)} = E \varepsilon_{(kk)}$ и принцип суперпозиции, получим потенциальную энергию 3–осного гидростатического сжатия, интегрируя от начального до конечного состояния при сжатии в каждом направлении и складывая соответствующие выражения:

$$U_1 = \int_0^{\varepsilon_{11}} \sigma_{11}(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_{11}} E \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon_{11}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{11} \varepsilon_{11}$$

и

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33}).$$

Используя инвариантность свёртки тензоров, в данном случае σ_{ij} и ε_{ij} , это соотношение распространяется и на любую другую декартову систему координат, что означает справедливость общего выражения (3.4). Рассматривая малые объёмы, формула Клапейрона распространяется и на случай неоднородного нагружения, когда положение главных осей изменяется от точки к точке (см., например, [12]).

3.2. Определяющее соотношение упругого материала. Изотропные упругие постоянные

Пусть в некоторой точке x упругого тела напряжённо–деформированное состояние задано тензорами напряжений и деформаций $\sigma_{ik}(x)$, $\varepsilon_{lm}(x)$, и при нулевой нагрузке тело свободно от напряжений. Выпишем для данной точки разложение введённой функции упругой энергии $U(\varepsilon_{ik})$ в ряд Тейлора до второго порядка по компонентам деформации в окрестности исходного состояния, при котором деформация нулевая, $\varepsilon_{ik}(x)=0$:

$$U = U_0 + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ik}} \varepsilon_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \dots \approx U_0 + \sigma_{ik}^{(0)} \varepsilon_{ik} + \frac{1}{2} E_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm}. \quad (3.5)$$

Здесь индексом "0" обозначена энергия при нулевой деформации, $\varepsilon_{lm} = 0$ и учтено (3.3). Напомним, что по всем повторяющимся индексам идёт суммирование. Дифференцируя энергию по компонентам деформации ε_{pq} , получим тензор напряжений в окрестности исходного состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_{pq} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{pq}} = \sigma_{ik}^{(0)} \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial \varepsilon_{pq}} + \frac{E_{iklm}}{2} \left(\varepsilon_{ik} \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial \varepsilon_{pq}} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial \varepsilon_{pq}} \varepsilon_{lm} \right) = \sigma_{ik}^{(0)} \delta_{ip} \delta_{kq} + \frac{E_{iklm}}{2} (\varepsilon_{ik} \delta_{lp} \delta_{mq} + \varepsilon_{lm} \delta_{ip} \delta_{kq}) = \\ &= \sigma_{pq}^{(0)} + \frac{1}{2} (E_{ikpq} \varepsilon_{ik} + E_{pqim} \varepsilon_{im}) = \sigma_{pq}^{(0)} + \frac{1}{2} (E_{ikpq} + E_{pqik}) \varepsilon_{ik}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь введены обозначения производных в выражении (3.5). Т.к. по условию, исходное состояние – нулевая деформация, то в недеформированном состоянии можно положить напряжённое состояние, вызываемое приложенным механическим воздействием, также нулевым $\sigma_{pq}^{(0)} = 0$ (деформация отсчитывается от некоторой заданной конфигурации; напряжение $\sigma_{pq}^{(0)} \neq 0$ в этой исходной конфигурации может быть введено как наложенное НДС – *преднапряжение* и "пред–деформация"). Вследствие полагаемой двукратной дифференцируемости потенциальной энергии и независимости коэффициентов в (3.5) от порядка дифференцирования, матрица (тензор) симметрична по этим двум парам индексов: $E_{iklm} = E_{lmik}$. Потенциальная энергия (3.5) станет билинейной формой (отсчёт от нуля):

$$U = \frac{1}{2} E_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm}, \quad (3.7)$$

и упругое соотношение (3.6) принимает вид:

$$\sigma_{ik} = E_{iklm} \varepsilon_{lm}, \quad (3.8)$$

где E_{iklm} – тензор модулей упругости.

Таким образом, при достаточно малых отклонениях от исходного состояния связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций линейна, и это линейное *определяющее соотношение* следует для упругого тела из термодинамических соображений, т.е. из существования потенциальной энергии деформирования, связанного с обратимостью процесса – выражения (3.2) для работы деформирования и разложения в ряд (3.5) до квадратичного слагаемого. В общем случае конечных деформаций упругого квадратичного слагаемого недостаточно, и определяющее соотношение не обязано быть линейным.

Подстановкой (3.8) в (3.7) мы немедленно получаем формулу Клапейрона (3.4). Т.к. при деформировании запасённая упругая энергия положительна (внешняя работа тратится на запасание упругой энергии), то, беря начало отсчёта потенциальной энергии деформирования нулевым, мы получаем *положительную определённость* квадратичной формы потенциальной энергии (3.7), что очень важно для численных приложений. (3.7) используется при дискретизации методом конечных элементов.

Опыты при малых деформациях и разных способах нагружения хорошо подтверждают наличие линейной связи между упругой деформацией и приложенной нагрузкой. Например, в важном частном случае одноосного нагружения к концам стержня прикладывают продольную силу и, изменяя силу, следят за деформацией вдоль направления нагружения. При этом до определенного предела деформирования выполняется закон Гука ("какова сила, такова деформация"), т.е., для осевых компонент –

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}, \quad (3.9)$$

где E – *модуль упругости* (модуль Юнга). Общее линейное соотношение (3.8) также называют законом Гука.

В силу симметрии тензоров σ_{ik} и ε_{lm} тензор E_{ijklm} имеет не более 36 независимых компонент. Требование существования дифференцируемой потенциальной энергии деформации (независимость от порядка дифференцирования в (3.5)) позволяет снизить число компонент до 21 – самый общий случай упругой анизотропии ([показать – перебором возможных комбинаций](#)). Симметрия в анизотропных кристаллических телах приводит к дальнейшему уменьшению возможного числа независимых компонент тензора модулей упругости. Количество компонент тензора модулей упругости в зависимости от типа кристаллической решётки приведено, например, в [11].

Анизотропия деформирования проявляется как зависимость коэффициентов линейного закона (3.8) от направления приложения нагрузки. Анизотропия свойственна монокристаллам и композитным материалам. Анизотропна древесина. В случае гексагональных или кубических кристаллов в системе главных осей тензор модулей упругости имеет 5 или 3 существенных упругих постоянных. В изотропном же теле по его определению тензор модулей упругости обладает одинаковыми компонентами в любой системе координат, что позволяет уменьшить число независимых упругих постоянных до

двух. Перед тем, как показать это (см. также [Седов] т.1), уточним понятие изотропного материала.

Предположим, у нас имеется большой монолит (однородный компактный слиток) исходного материала, из которого вырезаются малые образцы стандартной формы для стандартных испытаний относительно некоторого физического закона, например, одноосного закона Гука (3.9) – растяжения вдоль оси образца и испытаний на кручение. С монолитом жёстко связана некоторая лабораторная система координат. Пусть в разных направлениях относительно этой системы вырезаются образцы на растяжение. Направление приложения нагрузки отсчитывается относительно образца, и для образцов, вырезанных по-разному относительно осей системы координат монолита, приложенная сила будет образовывать разные углы с осями этой системы. Материал изотропен, если результаты испытаний, т.е., соотношения между компонентами тензоров деформации и напряжений в этих стандартных экспериментах не зависят от этих углов "выкраивания образцов".

Условие независимости результатов от системы координат накладывает очень жёсткие ограничения на компоненты компонент тензора E_{jlik} . Изменение "углов выкраивания" означает преобразование системы отсчёта (системы координат) проведения испытаний относительно системы монолита, и в изотропном теле приложение нагрузки, одинаковой относительно вырезанного образца, но разной относительно системы монолита, даёт одно и то же линейное соотношение между компонентами тензоров напряжений и деформаций. Т.е. компоненты тензора E_{jlik} одинаковы в любой системе координат, они образуют т.н. *изотропный тензор*. В тензорном исчислении показывается, что общий вид изотропного тензора 4-го ранга –

$$E_{jlik} = a \delta_{ij} \delta_{kl} + b \delta_{ik} \delta_{jl} + c \delta_{il} \delta_{jk} , \quad (3.10)$$

где a, b, c – произвольные постоянные.

Анизотропный материал не обладает свойством независимости E_{jlik} от "угла выкраивания", и для него тензор модулей упругости не имеет подобного вида – упругих постоянных для записи закона Гука здесь необходимо больше. Далее без специальной оговорки мы всегда будем считать материал изотропным. Это выполнено для практически всех металлов, поскольку по строению они, как правило, поликристаллические, т.е., состоят из хаотически ориентированных кристаллов размером порядка 1 мм или меньше. Для изготовления металлического монокристалла требуются специальные усилия. В результате механической обработки ориентация зёрен поликристалла может частично принять преимущественное направление (при прокатке, волочении), и механические свойства могут быть не изотропными в указанном выше смысле. Но анизотропия невелика, может исчезнуть при термообработке, и часто ею пренебрегают.

Подставляя (3.10) в (3.8) и используя симметрию тензора деформаций, $\epsilon_{lk} = \epsilon_{kl}$, можно убедиться в том, что *независимых* коэффициентов в (3.10) будет только два:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl} &= (a \delta_{ij} \delta_{kl} + b \delta_{ik} \delta_{jl} + c \delta_{il} \delta_{jk}) \epsilon_{kl} = a \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon_{kl} + b \delta_{ik} \delta_{jl} \epsilon_{kl} + c \delta_{il} \delta_{jk} \epsilon_{kl} = a \delta_{ij} \epsilon_{kk} + (b + c) \epsilon_{ij} \equiv \\ &\equiv \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} . \end{aligned}$$

Общее линейное соотношение закона Гука для изотропного материала имеет вид (множитель 2 вводится для удобства дальнейшего использования):

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} . \quad (3.11)$$

Таким образом, упругие свойства изотропного материала определены двумя постоянными λ и μ , называемыми *постоянными Ляме*. Чаще в механике используются

другие величины, связанные с ними. Перед тем, как их вводить, заметим, что из выражения (3.11) следует **параллельность главных осей тензоров напряжений и деформаций**. В самом, деле, если мы находимся в системе главных осей тензора деформаций, то ненулевыми в левой части будут только диагональные компоненты тензора напряжений. Это означает, что данные оси являются главными также и для σ_{ij} . Обратно, в любой координатной системе главных осей σ_{ij} , как нетрудно видеть, недиагональные компоненты тензора ε_{ij} будут нулевыми. Таким образом, тензоры напряжений и деформаций упругого изотропного материала *соосны*. Из (3.11) видно также, что соосность не подразумевает пропорциональность – например, при одноосном растяжении стержня тензор напряжений имеет только одно ненулевое главное значение, а тензор деформаций – три, как будет видно из дальнейшего.

Из равенства (3.11) можно сразу получить соотношение между объёмной деформацией и гидростатической составляющей напряжения. Свернув (3.11) по j , получим соотношение между первыми инвариантами тензоров:

$$\sigma_{jj} \equiv \sigma = 3\lambda \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{jj} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{jj} \equiv 3K\varepsilon, \quad (3.12)$$

где обозначено $\varepsilon_{jj} \equiv \varepsilon$, а величина K – *объёмный модуль*. В случае жидкости сдвиговая жёсткость отсутствует, $\mu=0$, и тогда $\lambda=K$.

При гидростатическом сжатии $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, p – давление, а при малых деформациях 1-й инвариант (2.18) тензора деформации – это объёмная деформация $(V - V_0)/V_0$, поэтому (3.12) – это простейшая форма *уравнения состояния*, т.е. соотношения, связывающего давление с относительным изменением объёма (в общем случае – объёма и внутренней энергии):

$$I_1 = \varepsilon_{kk} = \Delta V/V, \quad p \equiv \sigma/3 = -K \varepsilon_{kk} = -K \Delta V/V.$$

Чаще используют и указывают в таблицах механических свойств материалов другие постоянные, одна из которых – упомянутый выше модуль упругости E , измеряемый при одноосном нагружении стержня (сжатии–растяжении), когда отлична от нуля только одна компонента напряжений (но не деформаций). Выразим E через коэффициенты Ляме. Рассмотрим 1-осное сжатие в системе главных осей, и пусть ось Ox_1 совпадает с направлением сжатия. Получим, согласно определениям:

$$\sigma_{11} \equiv E\varepsilon_{11} = \lambda\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{11}. \quad (3.13)$$

Выразим (3.13) только через одну диагональную компоненту ε_{11} , для чего внесём в него выражение для $\varepsilon \equiv \varepsilon_{ii}$ из (3.12) для объёмного сжатия:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11} \lambda / (3\lambda + 2\mu) + 2\mu \varepsilon_{11} \rightarrow (1 - \lambda / (3\lambda + 2\mu)) \sigma_{11} = (2\lambda + 2\mu) / (3\lambda + 2\mu) \sigma_{11} = 2\mu \varepsilon_{11} \quad (3.14)$$

$$\text{откуда} \quad - \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (3.15)$$

Далее, запишем одно из соотношений (3.11) в компонентах:

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \varepsilon_{11}. \quad (3.16)$$

Выражая левую часть с помощью (3.11) и (3.15), получим:

$$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \varepsilon_{11} = \sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{11}, \quad (3.17)$$

откуда соотношение между главными компонентами деформации –

$$\left(\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} - \lambda - 2\mu\right)\varepsilon_{11} = \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad (3.18)$$

При одноосном сжатии вдоль главной оси 1, в силу симметрии, главные значения деформации в перпендикулярных направлениях одинаковы: $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$, следовательно –

$$v\varepsilon_{11} \equiv \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22}, \quad (3.19)$$

(Это соотношение можно получить также из (3.11), положив $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$.) Величина

$$v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (3.20)$$

есть упругая постоянная, называемая *коэффициентом Пуассона*. Как следует из (3.19), этот коэффициент даёт отношение *относительного* поперечного расширения ε_r к относительному осевому укорочению ε_z *при одноосном сжатии*. Для металлов $v=0,25 \div 0,35$, для стали $v=0,3$. Для *несжимаемого* тела, у которого объём при деформировании не изменяется, $v=0,5$, что несложно показать, рассмотрев малые деформации при продольном деформировании кругового цилиндра:

$$1 \equiv V/V_0 = (1 + \varepsilon_z)(1 + \varepsilon_r)^2 \approx (1 + \varepsilon_z)(1 + 2\varepsilon_r) \approx 1 + \varepsilon_z + 2\varepsilon_r, \text{ откуда } \varepsilon_r = -0,5\varepsilon_z.$$

(Этот вывод аналогичен геометрической интерпретации первого инварианта тензора деформаций (2.18) – малое относительное изменение объёма в случае несжимаемости будет нулевое.) Т.к. при сжатии объём не увеличивается, а при растяжении – не уменьшается, отсюда следует, что $v \leq 0,5$. Случай $v=0,5$ – особый, и при упругой деформации всегда $v < 0,5$.

Величина $\mu = G$ называется также *модулем сдвига*. Происхождение названия ясно из закона Гука для девiatorных компонент, выписанного ниже. В таблицах упругих свойств материалов обычно указывают коэффициент Пуассона и модуль упругости – это стандартные, или *технические упругие постоянные*.

Объёмный модуль выражается через стандартные постоянные:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2v)}. \quad (3.21)$$

Выразим через них постоянные Ляме:

$$\lambda = \frac{vE}{(1 + v)(1 - 2v)} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + v)}. \quad (3.22)$$

Закон Гука (3.8) примет вид:

$$\sigma_{ij} = \frac{vE}{(1 + v)(1 - 2v)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \frac{E}{(1 + v)} \varepsilon_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{v}{(1 - 2v)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right). \quad (3.23)$$

Если с использованием (3.12) равенство (3.11) записать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma \lambda \delta_{ij} / (3\lambda + 2\mu) + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

то закон Гука (3.23) несложно обратить и, подставив выражения для коэффициентов Ляме, выразить деформации через напряжения в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} ((1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}) . \quad (3.25)$$

3.3. Единицы измерения и порядки величин

В системе единиц СИ давление и упругие постоянные измеряются в Н/м²=Па. Другие единицы: техническая атмосфера (она же – бар, bar: стержень) 1 атм=10⁵ Па, используемая преимущественно для характеристики давления, как и мм.рт.ст. (Тор – Торричелли). В технической литературе, особенно XX в., применяется единица, скомпонованная из "килограмм–силы": 1 кГ/мм²=10⁷ Па=10 МПа. У американских и английских авторов встречаются также: psi (pound per square inch) и ksi (kilopsi).

Порядок упругих величин: у алюминия (чистого) $E = 70$ ГПа, у стали (сплав железа с углеродом) $E = 210$ ГПа, у вольфрама: $E = 410$ ГПа – самый жёсткий металл, у алмаза $E=(900–1050)$ ГПа – самый жёсткий материал. Жёсткость конструкционных материалов означает малую деформируемость под номинальной нагрузкой (в чём, собственно, наряду с прочностью, и состоит их основное преимущество): деформация стального стержня длиной 1 м при продольном напряжении в 1000 атм (что эквивалентно 100 МН/мм²) составляет $\varepsilon_{11} \approx 0,1$ ГПа/200ГПа = $5 \cdot 10^{-4}$, т.е. удлинение (упругое) метровой стальной проволоки сечением 1мм² при подвеске на ней гири массой 10 кг составляет 0,5мм. Все величины даны при нормальной температуре.

3.4. Шаровая и девиаторная составляющие тензоров напряжений и деформаций

Наряду с тензорами напряжений и деформаций используются также соответствующие тензоры–девиаторы (deviate – отклоняться, в данном случае – от "гидростатического" состояния) –

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + 1/3\delta_{ik}\sigma, \quad \text{где } \sigma = J_1(\sigma_{ik}) = \sigma_{kk} = -3p \quad (3.26)$$

$$\varepsilon_{ik} = e_{ik} + 1/3\delta_{ik}\varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon = J_1(\varepsilon_{ik}) = \varepsilon_{kk} \quad (3.27)$$

Величины s_{ik} и e_{ik} – это тензоры–девиаторы напряжений и деформаций, соответственно. Они отличаются от исходных тензоров диагональными компонентами. Свёртки девиаторов (первые инварианты) – нулевые:

$$\delta_{ik} s_{ik} = s_{kk} = 0, \quad \delta_{ik} e_{ik} = e_{kk} = 0 .$$

В жидкостях и газах касательные напряжения при отсутствии движения равны нулю, и тензор напряжений в этом случае сводится к шаровому, т.е. задаётся только величиной давления.

3.4.1. 3–н Гука для девиаторных составляющих

Подставим выражения для девиаторных составляющих тензоров напряжений и деформаций в закон Гука в форме (3.11):

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + \delta_{ik}\sigma/3 = \lambda\delta_{ik}\varepsilon + 2\mu(e_{ik} + \delta_{ik}\varepsilon/3) = (\lambda + 2\mu/3)\delta_{ik}\varepsilon + 2\mu e_{ik} .$$

Выделяя выражение

$$\sigma/3 = (\lambda + 2\mu/3)\varepsilon \quad \text{или} \quad p = -K\varepsilon , \quad (3.28)$$

т.е. соотношение для давления, получаем для девиаторов:

$$s_{ik} = 2\mu e_{ik}, \text{ или } s_{ik} = 2Ge_{ik}. \quad (3.29)$$

Соотношение (3.29) вместе с уравнением для давления (3.28) эквивалентны закону Гука, т.е. они вместе задают определяющее соотношение линейно–упругого материала. Аналогичным образом, и при неупругом деформировании в большинстве случаев можно сдвиговые деформации и напряжения рассматривать независимо от деформаций и напряжений сжатия. Соответственно этому, определяющее соотношение обычно строится по–отдельности для указанных гидростатической и сдвиговой составляющих. Физическая причина связана с тем, что неупругое поведение типа пластичности часто связано только со сдвиговыми микродеформациями – необратимым скольжением вдоль атомных плоскостей микрористаллов, из которых состоит материал, не сопровождающимся заметным изменением среднего расстояния между атомами, т.е. объёма. Часто, поэтому, определяющим соотношением называют только соотношение между девиаторами тензоров напряжений и деформаций. В численных расчётах с помощью уравнения состояния $p=p(V)$ подходящего вида и определяющего соотношения одновременно и единообразно моделируется механическое деформирование как твердого тела, так и, например, жидкости, воздействующей на него через поверхность контакта.

3.4.2. Энергия упругого сжатия и энергия формоизменения

Покажем, что наряду с разложением тензоров на шаровой и девиаторный, аналогичное разделение существует и для работы (энергии) деформирования. Подставим в формулу Клапейрона (3.4) для потенциальной упругой энергии тензоры в виде сумм девиаторной и шаровой составляющих и выделим слагаемые с девиаторами:

$$U = 1/2(s_{ij} + 1/3\delta_{ij} \sigma)(e_{ij} + 1/3\delta_{ij} \varepsilon) = 1/2(s_{ij} e_{ij} + \sigma/3\delta_{ij} e_{ij} + \varepsilon/3\delta_{ij} s_{ij} + 1/9\delta_{ij} \sigma\delta_{ij} \varepsilon) = 1/2(s_{ij} e_{ij} + 0 + 0 + \sigma\varepsilon/3) = 1/2 s_{ij} e_{ij} + \sigma\varepsilon/6 \equiv U_S + U_P \quad (3.30)$$

Здесь учтено, что для девиаторов свёртка $\delta_{ij}s_{ij}=s_{ii}=0$, $\delta_{ij}e_{ij}=e_{ii}=0$. По определению

$$U_S = 1/2 s_{ij} e_{ij} = G e_{ij} e_{ij} \quad (3.31)$$

– объёмная энергия формоизменения,

$$U_P = \sigma\varepsilon/6 = K\varepsilon^2/2 \quad (3.32)$$

– объёмная энергия сжатия. При отсутствии объёмного сжатия (объём неизменен, $\varepsilon=0$) $U_E = U_S$, и, наоборот, при чистом сжатии (касательные компоненты $=0$) $U_E = U_P$. Здесь использованы выражения (3.28) и (3.29) закона Гука для шаровой и девиаторной составляющих. Это разделение важно при рассмотрении критериев текучести при переходе в пластическое состояние.

4. Система уравнений МДТТ

4.1. Уравнения статической теории упругости

Соберём выписанные ранее уравнения и определения (1.8а), (1.14), (2.13), (3.23) вместе. Получим, вместе с граничными условиями (1.9), систему уравнений статической задачи теории упругости:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0, \quad (4.1a)$$

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \quad (4.1б)$$

$$\sigma_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}), \quad (4.1в)$$

$$\varepsilon_{ik} = 1/2(u_{i,k} + u_{k,i}), \quad (4.1г)$$

$$p_i = \sigma_{ik} n_k. \quad (4.1д)$$

В численном расчёте, как правило, обязательны *граничные условия по перемещениям* (кинематические гран. условия) – условия частичного (для отдельных компонент) или полного закрепления на некоторой подобласти, обычно принадлежащей внешней границе:

$$u_i(t) = 0, \quad x_i \in \partial\Omega_s. \quad (4.1e)$$

Из линейности уравнений (4.1) по напряжениям, деформациям и перемещениям следует принцип суперпозиции – возможность наложения (суммирования) различных решений системы уравнений при условии их удовлетворения одинаковым кинематическим гран. условиям (4.1e) и определяющим соотношениям (4.1в). Сумма решений служит новым решением данной задачи.

Система (4.1а–г) содержит 18 уравнений, не являющихся тождествами, для $9+6+3=18$ неизвестных, следовательно, она полна. Справедлива теорема единственности решения (см., например, [6] и другие руководства по теории упругости). Важные частные случаи постановки задачи:

- задача в напряжениях – *первая краевая задача*: определить равновесные напряжения при заданной нагрузке;
- задача в перемещениях – *вторая краевая задача*: определить равновесные напряжения и перемещения при заданных перемещениях границ.

На практике чаще рассматривается смешанная постановка, когда заданы оба типа граничных условий.

Для исследования и получения аналитических решений можно исключить из системы уравнений компоненты напряжения и деформации с помощью з–на Гука и кинематических соотношений, тогда получаются *уравнения в перемещениях*. Деформации и напряжения определяются по ним. Для целей формулировки численных методов решения будут использованы уравнения в общей форме (4.1а–д).

Замечание об условиях совместности. Компоненты вектора перемещений – три непрерывно дифференцируемые функции $u_i(x)$, заданные на расчётной области, полностью описывают изменение конфигурации деформируемого тела. Если же в качестве известных компонент *тензора деформаций* заданы некоторые шесть функций координат, то система из шести уравнений (4.1г) для *трёх неизвестных* функций $u_i(x)$, будет переопределена на три уравнения. Следовательно, шесть уравнений будут зависимы, т.е. шесть компонент тензора деформаций должны удовлетворять трём условиям, обращающим три лишних

уравнения в тождества. Эти дополнительные соотношения между компонентами тензора деформаций, получаемые в разной форме, называются *уравнениями (условиями) совместности*. Вывод их см. в учебниках по теории упругости. Они иллюстрируют тот факт, что не всякий набор из 6-ти компонент тензора (деформаций), подставленный в левые части кинематических соотношений (4.1г), отвечает какому-либо распределению перемещений, т.е., деформированному состоянию. Если взять неизвестными компоненты тензоров деформации и напряжений, оставить три условия совместности, 3-н Гука и уравнения равновесия, то получим систему *уравнений в напряжениях* (см. [6], [12]), полезную, когда интересно только напряжённое состояние, без вычисления перемещений.

Отметим, что при построении большинства конечно-элементных процедур численного интегрирования уравнений равновесия условия совместности не используются, т.к. перемещения обычно служат основными переменными задачи. Подробнее о постановках задачи в теории упругости см. [6], [12] и другие руководства.

4.2. Нелинейность механического поведения и общая задача его количественного описания

Повторим кратко условия, при которых теряется линейность выписанных выше уравнений упругости. *Физической нелинейностью* механического поведения материала называют отклонение поведения материала от линейно-упругого, подчиняющегося 3-ну Гука (3.8), т.е., физическая нелинейность заключена в определяющем соотношении материала. Для металлов эта нелинейность может быть заметна уже при очень малых деформациях ($\sim 10^{-4}$), причём поведение при разгрузке может быть близким к полностью упругому. При больших деформациях появляется заметная необратимость и связанная с этим диссипация. Для расчёта физически нелинейных задач строятся специфические определяющие соотношения, основанные на экспериментальных данных.

Геометрическая нелинейность проявляется в определении тензора деформаций и возникает, когда перемещения настолько велики, что в формулах (2.12) становятся существенными квадратичные члены. Выражение (2.13) для тензора малых деформаций, вычисленное для перемещений относительно исходного состояния, будет неточным. Часто геометрическая нелинейность сопровождается физической нелинейностью (пластичность etc.). Для приближённого расчёта конечного состояния полная деформация разбивается на несколько последовательных малых (например, соотношения (2.2) и (2.3)) и вычисляется пошагово. Малая деформация может также сопровождаться поворотом на угол, который необязательно мал. Поворот локально не изменяет напряжённого состояния, но в общей деформации его необходимо учитывать. Это делается при последовательном численном интегрировании уравнений квазистатики. Процедура охарактеризована в разделе по численным методам.

Отметим, что формальное использование нелинейных выражений типа (2.12) вместо уравнения (4.1г) приводит к уравнению равновесия, в котором присутствует общий тензор механической дисторсии. Такая постановка задачи оказывается бесперспективной, даже для численной процедуры (см. обсуждение, например, в [10]). Тем не менее, и при численном поэтапном решении таких задач описание геометрически нелинейного поведения при больших поворотах и деформациях на шаге может потребовать, вместе с детализацией описания кинематики, и более общих определений тензора напряжений.

Указанные проблемы описания механики ДТТ проистекают из очевидной особенности общей задачи этого описания – в отличие, например, от задач теплопроводности,

термохимии, электродинамики и других, сводящихся к системе уравнений в частных производных в фиксированной области пространства, в механике область определения решения (т.е. ДГТ), вообще говоря, изменяется вместе с решением, что, собственно, и приводит к специфической геометрической нелинейности. Поэтому важнейшую роль тут играет способ описания кинематики, т.е. деформирования расчётной области. Ещё один важнейший фактор связан с сопротивлением материала деформированию – если оно нулевое, т.е. материал – жидкость, возникает ряд новых физических явлений, требующих дополнительных предположений и моделей. Ключевую роль тут играет разделение напряжений на нормальное и касательные и связанные с этим эмпирические соотношения между напряжениями и деформацией. Приведённые ниже замечания имеют целью зафиксировать эти особенности и обосновать выбор подходов к построению численной модели механического поведения среды в различных случаях. Для этого задача формулируется с более общих позиций. Напомним, что речь идёт о случае конечных деформаций, когда изменением конфигурации расчётной области нельзя пренебречь.

4.3. Ускорение деформируемого тела. Динамика сплошной среды

4.3.1. Уравнение движения сплошной среды

В случае, когда общее равновесие отсутствует, неуравновешенные силы, действующие на малый объём, приводят к его ускорению: $a_i = d^2 u_i / dt^2$. Динамика может быть формально, на основе принципа д'Аламбера рассмотрена как "обобщённая статика", её систематическое изложение вместе с процедурой численной дискретизации отнесено в конец настоящего курса. Ниже некоторые понятия динамики рассмотрены в качестве непосредственного обобщения введённых в статике понятий на нестационарные задачи и их первичной классификации.

Кинематические и материальные уравнения (определяющие соотношения), полученные в статике, в динамике также формально пригодны, а уравнение равновесия малой материальной частицы (произвольного малого элемента объёма деформируемого тела) превращается в уравнение движения частицы. Её ускорение определяется законом сохранения импульса: сумма приложенных сил, внутренних и внешних, равна изменению импульса, определяемого через скорость частицы и текущую плотность –

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{du_i}{dt} \right) = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + f_i \quad (4.2)$$

Закон движения: $x(t) = a(t) + u(t)$ получается двукратным интегрированием по времени уравнений движения (4.2) – динамического уравнения. Внутренняя сила здесь представлена тензором напряжений Коши, относимым к текущей конфигурации и определяемым в условиях малых деформаций, координаты также соответствуют текущей конфигурации. Способ применения этой записи динамического закона обсуждается ниже.

Если пространственные производные относятся к фиксированной декартовой системе координат (эйлерово описание), запись (4.2) будет формально корректной, если определить полную производную в левой "кинематической" части. Переходя к скоростям деформации (их корректное определение в общем случае также требует отдельного рассмотрения, см. [4], [5]), полную скорость изменения импульса в ед. объёма можно выразить как *субстанциональную* производную:

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{du_i}{dt} \right) = \frac{\partial \rho \dot{u}_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial \rho \dot{u}_i}{\partial t} = \dot{u}_k \frac{\partial \rho \dot{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \rho \dot{u}_i}{\partial t} . \quad (4.3)$$

В представлениях численных методов это можно интерпретировать так: полное изменение импульса *в малом объёме* при эйлеровом описании движения относительно неподвижной сетки складывается из его приращения (первое слагаемое), связанного с притоком в ячейку сетки по трём направлениям, и приращением за счёт ускорения (второе). Здесь выделение курсивом подчёркивает коренное различие формулировок "изменение малого объёма" и "изменение в малом объёме". Введение субстанциональной производной и означает отказ от контроля границ малых объёмов, в численном описании – расчётной сетки, и переход к описанию "с точностью до ячейки", от лагранжева – к эйлеровому.

Необходимость эйлерова описания динамики жидкости следует из детализации правой части уравнения (4.2), относящейся к внутренним силам, и определяющего отношения. Тензор напряжений представим суммой шаровой и девиаторной составляющих –

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + s_{ik} , \quad \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} = -\delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial s_{ki}}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ki}}{\partial x_k} ,$$

которые описывают силы сжатия, связанные с градиентом давления, и сдвиговые силы –

$$\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + f_i . \quad (4.4)$$

Если напряжения обратимо зависят от деформаций, уравнение движения (4.4) вкупе с определяющими соотношениями (4.1в) и кинематическими уравнениями (4.1г) описывает (с учётом сделанных замечаний относительно нелинейностей) динамику движения упругого деформируемого тела. При движении напряжения могут зависеть также и от *скоростей* деформации (вязкое трение), что в жидкостях играет определяющую роль и встречается в твёрдых телах как *реологическое* поведение, например, *ползучесть*.

Зависимость от скорости деформации выражается отдельно для шаровых и девиаторных составляющих тензора скоростей деформаций, через два разных коэффициента вязкости. *Формальное различие между жидкостью и твёрдым телом заключено только в определяющем соотношении*, причём сплошная среда может проявлять свойства и твёрдого тела, и жидкости. В случае ньютоновской жидкости влияние девиаторов *деформаций* на напряжения отсутствует, определяющее соотношение через *скорости деформаций* представляется в виде (где введена вторая вязкость β , сдвиговая вязкость обозначена обычным образом через μ , по аналогии с девиаторным соотношением (3.29)):

$$\sigma_{ik} = s_{ik} - p\delta_{ik} , \quad p = p_c + p' , \quad p_c = -3K\varepsilon , \quad p' = -\beta\dot{\varepsilon} , \quad s_{ik} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ik} . \quad (4.5)$$

Здесь введён тензор скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ik}$ и, в полной аналогии, тензор–девиатор скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}'_{ik}$, равный разности тензора $\dot{\varepsilon}_{ik}$ и изотропного тензора $\frac{1}{3}\dot{\varepsilon}\delta_{ik}$, скорости объёмной деформации. Отметим, что приближённое равенство производной по времени от тензора деформаций тензору скоростей деформаций соблюдается только при малых деформациях (см. [6]), но в качественных рассуждениях этим пренебрегаем.

Вместе с соотношениями (4.5) и кинематическими уравнениями (2.13) уравнение (4.4) описывает гидродинамику сжимаемой вязкой жидкости (обычно используется несколько другая форма записи, чем приведённая здесь). Подставив (4.4) в (4.3), получим соотношения,

соответствующие правой части уравнения движения для сжимаемой вязкой жидкости (взято $p=p_c$, объёмная сила отсутствует), левая часть которого приведена в (4.4):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial(\beta \dot{\epsilon})}{\partial x_i} - \frac{\partial(2\mu \dot{\epsilon}_{ik})}{\partial x_k} = \\
 &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} 2\mu \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \beta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \\
 &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \beta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} .
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Единый подход к изложению механики сплошной среды, включающий динамику твёрдого тела и жидкости, принят, например, в работах [4], [5]. Уравнение (4.2), закон сохранения импульса, служит основой общего описания динамики сплошной среды. В гидродинамике, где существенна только объёмная деформация, применяют эйлеров подход, в котором моделируются не частицы среды, а состояние малых объёмов, "сквозь" которые движется среда. В уравнениях законов сохранения появляются "конвективные" слагаемые, описывающие перетоки через границы ячеек импульса, массы, энергии (ср. (4.3)).

4.3.2. Замечания о подходах к описанию движения сплошной среды

Способ описания движения – "эйлеров" или "лагранжев", играет в численном моделировании механики сплошной среды определяющую роль. С формально–математической стороны они эквивалентны, различие – в геометрии, которая в эйлеровом представлении не моделируется явно. Приводимые ниже замечания иллюстрируют следующий тезис: способ кинематического описания определяется механическими свойствами среды. Для МДТТ естественным служит лагранжево описание, для МЖГ – эйлерово. Немногие исключения (задачи взрыва и т.п.) не противоречат этому правилу.

В *лагранжевом* описании основными неизвестными служат исходные координаты точек (материальные координаты) и компоненты напряжения (в жидкости – давление). Лагранжевы уравнения движения жидкости приведены, например, в [13], уравнения МДТТ для конечных деформаций в общей лагранжевой формулировке приведены в [24] и [Коробейников]. С точки зрения кинематики лагранжево описание движения сводится к определению во времени закона преобразования (2.4) относительно исходного расположения точек. Термин "лагранжев" используется в вычислительной гидродинамике также для описания движения дискретных частиц, не деформируемых, но движущихся и взаимодействующих вместе с окружающей средой, описываемой своей системой уравнений (жидкость) и, возможно, взаимодействующих друг с другом.

Лагранжево описание с точки зрения геометрии и механики – естественное и наиболее последовательное: отслеживая траектории движения малых частиц, мы следим за подобластями, физически одними и теми же. Такой подход в расчёте облегчает описание эволюции материальных тел, физические свойства которых могут меняться в зависимости от их механического состояния. При численном решении мы следим за движением дискретных точек (узлов) сетки, "частицей" служат ячейки (конечные элементы) сетки, которые при изменении расстояния между узлами сетки соответственно преобразуются. В численной реализации в МДТТ вычисления на новом шаге идут относительно новой отсчётной конфигурации ("updated Lagrangian" или "related Lagrangian" метод),

преобразованной в соответствии с движением на данном шаге. Закон преобразования координат (2.4) используется в линеаризованной форме (2.5). В соответствии с этим законом преобразуется тензор напряжений в уравнении движения (4.2).

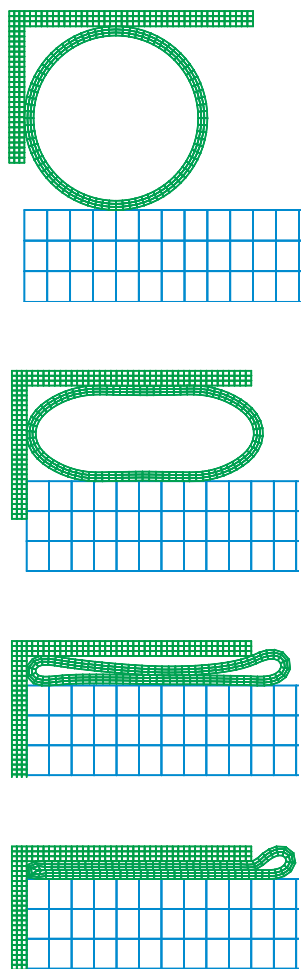


Рис. 4.1. Расчёт кодом HEFEST_M (Н.И. Дробышевский)

Основной недостаток лагранжева подхода в численном моделировании движения непрерывной среды – труднопреодолимые вычислительные трудности при расчётах больших деформаций. Они связаны с тем, что метрика в лагранжевой системе при деформировании становится неевклидовой, что катастрофически усложняет запись уравнений и вычислительную процедуру. В частности, даже в updated Lagrangian формулировке для увеличения точности вводят более сложные определения тензора напряжений etc. Эволюция системы во времени усложняет геометрию лагранжевой системы (расчётной сетки), и, начиная с локальных деформаций порядка ста процентов, расчётная процедура становится неточной, что требует дробления сетки и т.п. Преобразование расчётной сетки при деформациях в десятки процентов неплохо работает в МДТТ (см. рис. 4.1), но в механике жидкости, с тангенциальными разрывами и вихрями, лагранжев подход абсолютно непригоден. Компромиссные варианты типа методов частиц и "крупных частиц", в котором решение на каждом шаге переинтерполируется на фиксированную сетку, являются разновидностью эйлерова подхода.

Далее, структура потока жидкости является следствием механических свойств среды: в ньютоновской жидкости отсутствуют касательные напряжения в состоянии покоя, и, за исключением случая гидростатики, нет смысла говорить о деформациях вязкой жидкости – в воде, например, касательные деформации практически ненаблюдаемы, если исключить поверхностные эффекты. Но возможны вихревые движения и турбулентность. Статика ньютоновской жидкости тривиальна, понятие о напряжённо– деформированном состоянии тут избыточно. Касательные напряжения возникают только в динамике, и в технике обычно интерпретируются опосредованно (через коэффициент трения, сопротивление etc.). Соответственно, в динамике жидкости

основное кинематическое понятие – это не перемещение и не деформация, а *скорость* течения и скорость деформации, которая в квазистационарном потоке не зависит от начального состояния и в ньютоновской жидкости простым образом связана с девиаторными напряжениями. Поэтому в МЖГ применение *эйлерового* описания динамики сплошной среды естественно. Уравнений сохранения массы, импульса и энергии описывают и движение (компоненты скорости) среды "сквозь" пространство, что численно отвечает движению сквозь ячейки *фиксированной* сетки. Эти уравнения записаны через *скорости в данной точке пространства*, а не через координаты материальных частиц, и неучёт геометрии движения, т.е. преобразования (2.4), суть преимущество эйлерова описания динамики жидкости, существенно упрощающее модель, в которой напряжённое состояние зависит только от скорости и давления.

Недостатки суть продолжение достоинств: вследствие отсутствия понятия материальной частицы, в эйлеровом численном расчёте напрямую не отслеживаются траектории, свободные границы, подвижные поверхности контакта (фаз жидкости). Для этого вводятся дополнительные средства ("маркеры", "индикаторы фазы"). Закон сохранения массы имеет нетривиальный вид, в нём также присутствуют конвективные слагаемые. В уравнении импульса конвективные слагаемые нелинейны, и они представляют основную трудность для численной аппроксимации. Именно они определяют степень точности эйлеровой численной схемы дискретизации уравнений МСС.

Что касается МДТТ (динамики, не говоря уже о статике), где деформации и перемещения существенны для описания состояния конструкции, то эйлеров подход, с его проблемами отслеживания границ, при больших деформациях будет, как минимум, неточным и громоздким. При малых же перемещениях и деформациях различие подходов исчезает, поскольку изменение формы не учитывается в уравнениях.

Таким образом, использование лагранжева подхода в численных методах МДТТ обусловлено физической (механической) природой моделируемой среды (ДТТ), равно как использование эйлерова подхода естественно для динамики жидкости (жидкость–газ). При этом полная лагранжева формулировка уравнений МСС (относительно исходных координат) практически не используется в эволюционных задачах, численное решение уравнений МДТТ при больших деформациях основано на геометрических приёмах её упрощённой реализации: преобразование сетки при пошаговом вычислении, поворот тензора напряжений при преобразовании сетки, использование тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа, вычисленного на сетке предыдущего шага (см. ниже). Всё это – атрибуты численной реализации лагранжева подхода.

Подводя итог, соответствие подходов в описании динамики ДТТ и жидкости можно интерпретировать так. Жидкость не имеет формы, понятие "де–формация" ей чуждо. Твёрдое тело имеет форму, форма связана с координатами. Следовательно, описание, оперирующее координатами точек (лагранжево), естественно для ДТТ. Для (однородной) жидкости, не имеющей формы, координаты её малых "частиц" – избыточны. Движение жидкости описывается подходом (эйлеровым), в котором основную роль играют скорости.

4.3.3. Лагранжев подход к описанию движения ДТТ [5]

Вернёмся к механике твёрдого тела, в которой деформации относительно невелики (в пределах десятков–сотен процентов, как правило – много меньше), и лагранжев подход естественен. В частности, в случае упругого деформирования исходное состояние, к которому тело возвращается при снятии нагрузки, служит естественной отсчётной конфигурацией, а в общем случае лагранжев подход привлекателен также тем, что автоматически отслеживает границы подобластей. Эти границы при конечно–элементной дискретизации являются границами деформируемых конечных элементов. Соответственно, для лагранжевых частиц сохранение массы при изменении объёма от V_0 до V соблюдается автоматически и выражается уравнением (см. также (2.19)):

$$\rho V = \rho_0 V_0 . \quad (4.7)$$

Это уравнение используется для вычисления текущего значения плотности как физической характеристики деформируемого элемента.

Аналогичным образом, в лагранжевом подходе изменение импульса записано относительно некоторой известной отсчётной конфигурации. При этом необходимо иметь

возможность относить к этой отсчётной конфигурации и текущие силы, действующие на частицу. Закон движения, взятый для данной материальной частицы как интеграл по её границам (это – внутренняя сила, которая по отношению к малому объёму суть внешняя поверхностная сила) и по объёму (это – внешняя объёмная сила), имеет вид [5]:

$$\int_{A_0} n_i T_{ik}^0 dA + \int_{V_0} \rho_0 g_k(\mathbf{a}) dV = \int_{V_0} \rho_0 \frac{d^2 u_k}{dt^2} dV. \quad (4.8)$$

Здесь введён тензор T_{ik}^0 , относящий силы, действующие в текущей конфигурации на частицу со стороны остального материала, к исходной конфигурации. Он называется *первым тензором напряжений Пиолы–Кирхгофа* (П–К: иногда называется также *тензором псевдонапряжений*). В дифференциальной форме, сводя поверхностный интеграл к объёмному и используя произвольность малого объёма, получим уравнение, сходное с уравнением (4.2) или его статической формой (4.1а):

$$\frac{\partial T_{ik}^0}{\partial x_i} + \rho_0 g_k = \rho_0 \frac{d^2 u_k}{dt^2}. \quad (4.9)$$

Введённый первый тензор Пиолы–Кирхгофа T_{pq}^0 связан с тензором напряжений Коши σ_{ik} соотношением

$$T_{ik}^0 = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial Y_i}{\partial x_q} \sigma_{qk} \equiv \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial a_i}{\partial x_q} \sigma_{qk}, \quad (4.10)$$

которое получается с использованием формулы (2.23) для преобразования сегмента площади при деформировании. Тензор T_{ik}^0 оказывается в общем случае несимметричным, что приводит к большим трудностям, в частности, при конструировании определяющих соотношений с симметричным тензором деформаций. Чтобы их обойти, используют симметризованный *второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа*, \tilde{T}_{pq}^0 , связанный с тензором T_{ik}^0 и тензором напряжений Коши σ_{ik} соотношениями

$$\tilde{T}_{ik}^0 = T_{iq}^0 \frac{\partial a_k}{\partial x_q}, \quad \sigma_{ik} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \tilde{T}_{pq}^0 \frac{\partial a_q}{\partial x_k}. \quad (4.11)$$

Уравнение движения приобретает более сложный вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_p} \tilde{T}_{pq}^0 \frac{\partial x_k}{\partial a_q} \right) + \rho_0 g_k = \rho_0 \frac{d^2 u_k}{dt^2}. \quad (4.12)$$

но симметрия тензора и вместе с ней ряд полезных свойств восстанавливаются.

Второй тензор напряжений П–К применяется при численном решении задач с большими деформациями и поворотами, например, в известном коммерческом пакете ANSYS LS DYNA. Если сравнить уравнения (4.2) и (4.9), то их различие только в определении тензора напряжений – оба могут быть интерпретированы следующим образом: "В начальный момент в исходной конфигурации к малому объёму (в данной точке) приложены силы, задаваемые тензором напряжений, определённым по данной конфигурации. Эти силы вызывают ускорение данного объёма и прирост импульса к некоторому моменту времени $t_0 + \Delta t$." Т.к. речь идёт об ускорении лагранжевой частицы, плотность в уравнении берётся относительно недеформированного объёма, если интегрирование идёт по V_0 . Различие в

тензорах появляется при пересчёте сил на новую конфигурацию в новый момент времени $t_0 + \Delta t$ – в обоих подходах может быть учтён поворот рассматриваемого малого объёма, но в тензоре П–К учитывается также изменение границ малого объёма (в тензоре напряжений Коши оно учтено в его приращении за счёт физики, но не геометрии). На следующем шаге по нагружению напряжённое состояние, служащее исходным для последующего шага, будет определено с тензором П–К точнее. Численная процедура обновления напряжённого состояния при последовательном деформировании рассмотрена при изложении МКЭ.

4.3.4. Динамика и статика

В зависимости от ускорения при деформировании, подход к решению эволюционной задачи МДТТ может быть различным. Если приложенная нагрузка постоянна во времени и нас не интересует история её установления, то задача – *статическая* – задавшись исходным состоянием системы при отсутствии нагрузки, определить конечное состояние равновесия при её приложении. (В случае сложного поведения среды постановка и статической задачи может быть непростой, например, в механике грунтов.) Если возникающие при приложении нагрузки ускорения в точках тела малы, но история нагружения существенна, то ускорениями пренебрегают, но задача – *квазистатическая* – следует рассмотреть поэтапное деформирование с последовательно меняющейся нагрузкой. Квазистатическая задача, в которой нагружение изменяется за n шагов, эквивалентна n статическим задачам. Статическая задача с большими деформациями также может решаться как квазистатическая, с поэтапным изменением нагрузки до заданной – *метод установления*. Если ускорение существенно, задача *динамическая*. Классификация динамических задач приведена в разделе по динамике.

В качестве граничных условий по перемещениям, могущих в нестационарной задаче зависеть от времени, задаётся закон движения точек соответствующего подмножества $\partial\Omega_s$ границы области Ω , $\partial\Omega_s \subseteq \partial\Omega$ (пример – задача о внедрении с постоянной скоростью абсолютно жёсткого штампа в пластичную среду) –

$$u_i(t) = x_i(t) - x_i(0) \quad , \quad x_i \in \partial\Omega_s \quad (4.13)$$

Возможность эффективного прямого решения общей системы уравнений статики (4.1а–е) и тем более, динамики (4.2)–(4.1б–е) появилась с развитием численных методов и ЭВМ. Классическое применение динамики – это колебательные явления: колебания механических систем и распространение волн в простых конфигурациях. Масштаб скорости в динамике определяется скоростью звука, порядок которой в твёрдых телах $\sim 10^3 \div 10^4$ м/с. Поэтому значительная часть задач МДТТ носит (квази)статический характер. Масштаб времени деформирования и ускорения обычно может быть оценен.

Например, при расчёте НДС в элементах конструкции двигателя внутреннего сгорания масштаб времени нагружения при вспышке смеси в цилиндре двигателя составляет $\sim 10^{-4}$ с (0,5 периода вращения вала), перемещение стенок $\sim 10^{-5}$ м, ускорение – очень мало. Масштаб времени распространения возмущения в деталях конструкции $\sim 0,2 \div 0,5 \cdot 10^{-4}$ с. Но, вследствие того, что плотность газа пренебрежимо мала относительно массы двигателя, малости деформаций, быстрого затухания возмущений во всей конструкции, мер, принимаемых против резонанса периодического движения поршня с колебаниями стенок цилиндров, нагружение стенок (но не газа) даже в таком быстром процессе может с определённой точностью рассматриваться квазистатически, без учёта инерции. Далее рассматриваются (квази)статические режимы, с нулевым ускорением, и основная система

уравнений будет системой уравнений равновесия (4.1a–e). Большая часть введённых понятий сохранится и при рассмотрении динамики деформируемого твёрдого тела.

Отметим, что в число фундаментальных законов движения сплошной среды входит также баланс её энергии. В упругом теле, нагружаемом потенциальными силами, при отсутствии тепловых эффектов сохранение механической энергии следует из уравнений механики. Тепловые эффекты упругого деформирования (повышение температуры при адиабатическом сжатии) в металлах малы, вследствие малости коэффициента теплового расширения. Механические эффекты внешнего нагрева сводятся к тепловому расширению и зависимости механических свойств от температуры. Поле температуры при решении квазистатической термомеханической задачи можно полагать заданным извне. Уравнение энергии при квазистатическом нагружении может понадобиться, например, для вычисления тепловых эффектов при неупругом деформировании, когда часть механической работы идёт в тепло. Если существенно взаимопревращение механической энергии и тепловой, например, в динамике при больших давлениях и скоростях деформации, уравнение энергии вместе с уравнением состояния обязательно входит в полную систему уравнений механики рассматриваемой среды. Эти вопросы рассмотрены в разделе по динамическим задачам.

4.4. Принцип возможных работ

Из уравнений равновесия и кинематических уравнений можно получить важное следствие, в достаточно общих предположениях эквивалентное самим этим уравнениям –

Принцип возможных (виртуальных) работ:

В состоянии равновесия механической системы работа всех приложенных к ней сил на любом бесконечно малом изменении конфигурации системы, совместимом со связями (кинематическими условиями), равна 0.

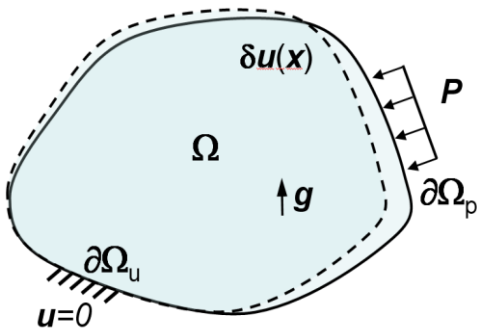


Рис. 4.2. К принципу возможных работ

Перемещения, совместимые со связями (граничными условиями по перемещениям), называют также *кинематически допустимыми*, или *возможными*, или *виртуальными*. Требование совместимости со связями существенно. Обозначим возможные перемещения как δu_i . На любом сегменте границы $\partial\Omega$ области Ω (рис. 4.2) может быть задано г.у. одного из двух типов – силовые на подсегменте $\partial\Omega_p$ и кинематические – на подсегменте $\partial\Omega_u$ или не задано никакое

граничное условие – на сегменте $\partial\Omega_o$. Вся граничная поверхность:

$$\partial\Omega = \partial\Omega_p \cup \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_o .$$

В состоянии покоя на границе $\partial\Omega_u$ кинематические г.у. сводятся к условиям закрепления:

$$u_i(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega_u. \quad (4.14)$$

Выражение для работы всех сил имеет вид:

$$\delta W = \delta P + \delta F + \delta U = \int_{\partial\Omega_p} p_i \delta u_i dA + \int_{\Omega} f_i \delta u_i dV - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = 0 . \quad (4.15)$$

где δP – полная работа внешних сил, приложенных к границе, δF – полная работа внешних объёмных сил, δU – полная работа внутренних сил (для внешних сил вид (4.15) очевиден, для внутренних сил обсуждался ранее). Взятый сам по себе, сформулированный принцип устанавливает свойство стационарности функционала (4.15) механической работы на малых перемещениях, т.е., является вариационным принципом, где виртуальное перемещение – это вариация функции перемещений. Далее показывается, что принцип (4.15) следует из уравнений равновесия. Он используется при формулировке вычислительной схемы метода конечных элементов, поскольку из него могут быть получены уравнения равновесия. При решении задач статики твёрдого тела из выражения для виртуальной работы при определённых предположениях о напряжённом состоянии можно определить внутренние силы (см. примеры ниже). В отсутствие диссипации этот принцип выражает закон изменения механической потенциальной энергии.

Пусть в каждой точке $\mathbf{r} \in \Omega$ задано виртуальное перемещение $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})$. Его компоненты – функции $\delta u_i(\mathbf{r})$, которые равны нулю за пределами области Ω , непрерывно дифференцируемы, удовлетворяют определённому условию малости в заданных пределах δ_i и совместимы с кинематическими г.у.:

$$|\delta u_i(\mathbf{r})| < \delta_i, \quad \delta u_i(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega_u.$$

В остальном функции $\delta u_i(\mathbf{r})$ произвольны. Интегрированием по объёму тела составляем вариацию левой части уравнения равновесия (4.1а), которая тождественно равна нулю:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i d\Omega = \delta W \equiv 0. \quad (4.16)$$

После преобразований величина $(\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i$ окажется возможной (виртуальной) работой всех рассматриваемых сил в единице объёма на распределённом виртуальном перемещении. Проинтегрируем первое слагаемое в (4.16) по частям с использованием тождества (производная произведения функций):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} \delta u_i &= (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij} (\delta u_i)_{,j}, \\ \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i d\Omega &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} (\delta u_i)_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Первое выражение в правой части (4.17) суть интеграл от дивергенции, который выражается через интеграл от потока на границе по теореме Гаусса–Остроградского. Преобразуем этот граничный интеграл, используя заданные граничные условия:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_{\partial\Omega_u + \partial\Omega_p + \partial\Omega_o} (\sigma_{ij} \delta u_i) n_j ds = \int_{\partial\Omega_p} (\sigma_{ij} n_i) \delta u_j ds = \int_{\partial\Omega_p} p_j \delta u_j ds.$$

Здесь интегралы по границам $\partial\Omega_u$ и $\partial\Omega_o$ тождественно обращаются в нуль, поскольку на первой из них вариация перемещений – нулевая, а на второй – нагрузка нулевая и, соответственно, напряжения – нулевые. В интеграле по границе по напряжениям $\partial\Omega_p$ перегруппируем сомножители и воспользуемся силовым граничным условием:

$$(\sigma_{ij} \delta u_i) n_j = (\sigma_{ij} n_i) \delta u_j = p_j \delta u_j,$$

откуда видно, что интеграл равен работе внешних сил на виртуальном перемещении точек этой границы. Во втором слагаемом правой части (4.17) введём тензор малой деформации, связанной с малым виртуальным перемещением:

$$\delta \varepsilon_{ij} = 1/2 ((\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}),$$

и выразим через него градиент –

$$(\delta u_i)_{,j} = 2\delta\varepsilon_{ij} - (\delta u_j)_{,i} .$$

Пользуясь симметрией тензора напряжений, переставляя индексы, отсюда получаем:

$$\sigma_{ij}(\delta u_i)_{,j} = 2\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}(\delta u_j)_{,i} = 2\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} - \sigma_{ji}(\delta u_j)_{,i} = 2\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}(\delta u_i)_{,j} = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} ,$$

т.е., работу внутренних сил в ед. объёма. По другому можно сказать, что величина $(\delta u_i)_{,j}$ – это тензор градиентов перемещений (2.18), связанный с вектором виртуальных перемещений, и он раскладывается на сумму тензоров малых деформаций и малых вращений (2.26). Из предыдущего равенства следует, что:

$$\sigma_{ij}(\delta u_i)_{,j} = \sigma_{ij}(\delta\varepsilon_{ij} + \delta\omega_{ij}) = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} , \text{ т.е. } \sigma_{ij}\delta\omega_{ij} = 0 ,$$

т.е., на виртуальном перемещении поворота совершаемая внутренними силами работа равна нулю, и это следует также из того, что полная свёртка (по обоим индексам) симметричного и антисимметричного тензоров равна нулю. Поэтому последнее равенство также можно использовать для преобразования второго слагаемого в правой части (4.17).

В результате исходное тождество (4.16) преобразуется в требуемое равенство (4.15):

$$\delta W = \int_{\partial\Omega_p} p_i \delta u_i dA + \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega = \delta P + \delta F + \delta U = 0 .$$

5. Частные постановки статической задачи МДТТ

Последующие несколько глав посвящены различного рода редукции основной системы уравнений (4.1), важной в приложениях и при формулировке численных методов. Приведены также базовые сведения из механики упруго–пластического деформирования, являющейся основой для построения численных моделей пластического деформирования. Ниже по тексту рассмотрены упрощения, важные для постановки задачи МДТТ в различных случаях.

5.1. Способы упрощения уравнений и г.у. задачи упругости. Принцип Сен–Венана

Сложность системы уравнений упругости в основном связана с количеством неизвестных функций – компонент тензоров и векторов. Упрощение постановки задачи в направлении уменьшения количества неизвестных достигается различными способами, в частности, следующими:

- **Упрощение конфигурации и граничных условий** как общий способ уменьшения числа неизвестных: убирание несущественных деталей, сведение нагрузок или способов закрепления к более простым, что может уменьшить несимметрию. Например, неоднородное на границах нагружение можно свести к более простому с помощью рассматриваемого ниже принципа Сен–Венана. Точечное закрепление в отдельных местах (болтовые, клёпочные соединения) можно свести к равномерно распределённому, а задача о локальной концентрации напряжений в месте крепления может быть рассмотрена отдельно;

- **Понижение размерности**, используя симметрию. Упрощение конфигурации может позволить достичь симметрии: трансляционной, вращательной и др. Например, может быть известно, что по одной из координат рассматриваемая конструкция и нагрузка приблизительно однородны (трансляционная симметрия), тогда искомое решение вдоль этой координаты не должно изменяться, следовательно, размерность или "осность" задачи может быть понижена;
- **Угадывание решения: использование правдоподобных гипотез** об искомом НДС, например, гипотезы плоских сечений при изгибе;
- **Угадывание решения: использование линейности уравнений и принципа суперпозиции** – как отмечалось выше, из более простых решений можно скомбинировать более сложные путём линейной суперпозиции, а сложное НДС иногда можно разложить на несколько более простых.

Ниже описаны постановки задач теории упругости для некоторых случаев однородных тел простой формы. При сведении к этим простым конфигурациям и получении решения задач часто используются указанные упрощающие предположения.

Начнём с важного вопроса о необходимой степени точности учёта неоднородной нагрузки или закрепления (упрощение граничных условий). Распределение силы, действующей на границе тела, не всегда однородно, к тому же, оно локально может зависеть от напряжённого состояния. Возникает вопрос – приложимы ли идеализированные постановки задачи с однородными нагрузками к реальным случаям, когда нагрузка локальна и напряжение в окрестности её приложения может быть распределено сложным образом? Ответ даёт интуитивно понятный, хотя в общем случае строго не обоснованный, принцип сведения сложной системы нагрузок к более простой:

Принцип Сен–Венана: Пусть два одинаковых тела находятся под действием различных, но статически эквивалентных систем нагрузок, каждое под действием своей, приложенных в малой области. Действия, оказываемые в каждом теле внутренними силами в точках, достаточно удалённых от места приложения отдельных сил, одинаковы.

Здесь "*статическая эквивалентность*" двух систем нагрузок означает, что они имеют одинаковую главную силу (равнодействующая) и главный момент (сумма моментов). "Достаточная удалённость" в конкретных случаях определяется размером области приложения сил, габаритами системы, допуском на точность решения задачи. Например, для стержня (рис.5.1) однородность растяжения практически достигается на расстояниях величиной нескольких его толщин, даже в случае (с). Расчётный пример приведён на рис. 5.2а: труба с доньями. Это используется при моделировании стержневых конструкций – стержни, большие определённой длины, рассматриваются как бесконечно тонкие, т.е. без учёта поперечной неоднородности распределения сил (при наличии соответствующей геометрической симметрии). Концевые области требуют дополнительного анализа.

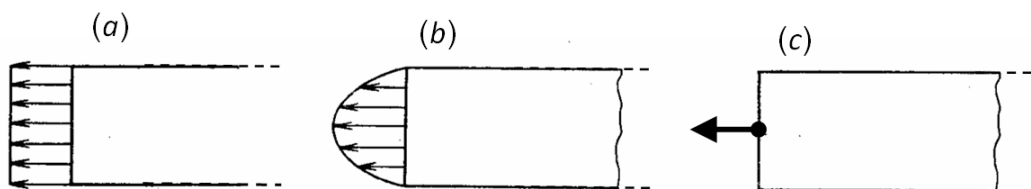


Рис. 5.1. К принципу Сен–Венана (показана также зона неоднородности)

Отметим, что степень неоднородности НДС в общем случае определить сложно, причём, в частности, при испытаниях на растяжение и разрыв стержень может разрушаться вблизи области закрепления, где напряжённое состояние сложно. Для минимизации этого эффекта при испытаниях на растяжение цилиндрического стержня рабочий участок образца находится на определённом расстоянии от мест закрепления, на концах образец утолщается и обеспечен плавный переход (рис. 5.2б – пояснить, зачем). Выбор конфигурации здесь очень важен, поскольку испытание на растяжение – это единственный простой способ достижения однородного по образцу напряжённого состояния, необходимого для экспериментального определения механических характеристик материала [3]. Далее этот случай рассмотрен подробнее.

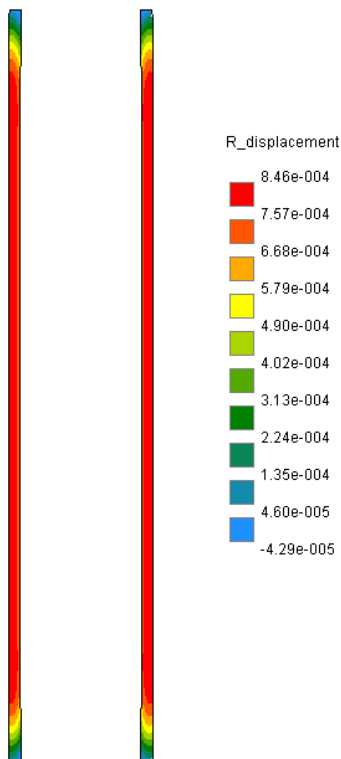


Рис. 5.2а. Области влияния концов закрепления в расчёте (толстостенная труба, нагреваемая изнутри)

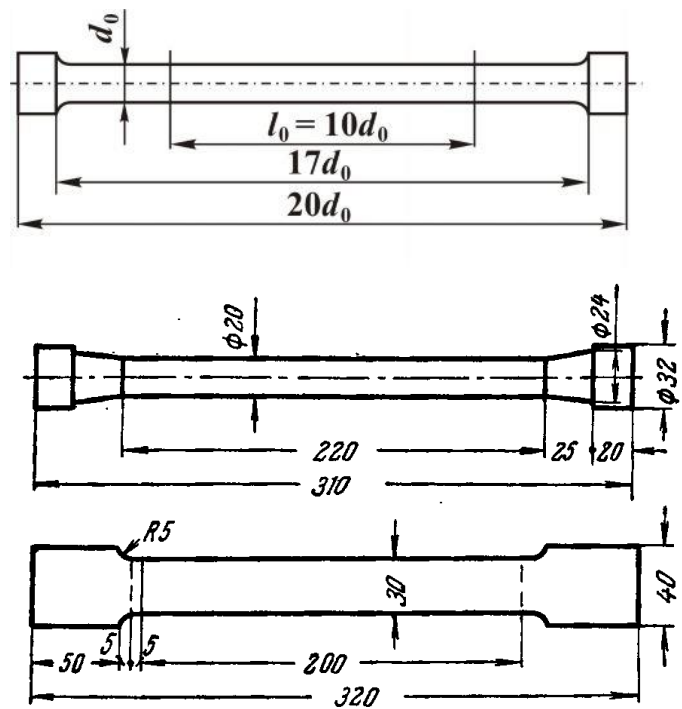


Рис. 5.2б. Стандартный образец на растяжение – вверху, длинный, внизу укороченные образцы [3]

5.2. Плоские одно– и двумерные задачи

Пример упрощения путём понижения размерности дают плоские задачи (рассмотрение в декартовой системе координат). В плоской задаче НДС оказывается двухосным, либо может быть сведено к таковому. Ниже рассмотрены постановки плоских задач, в которых по одному, либо двум направлениям неизменны следующие факторы:

а) форма области и механические свойства материала – т.е. контур сечения и распределение мех. свойств в плоскости, перпендикулярной этому направлению;

- б) нагрузка – т.е. условия по напряжениям и объёмные силы;
- в) связи – т.е. граничные условия по перемещениям.

Подчеркнём, что эти условия должны выполняться вместе. Направления однородности формы и нагрузок отвечают направлениям одной из главных осей тензоров напряжений и деформаций во всём теле. Напомним, что среда полагается изотропной. Частным случаем плоской задачи служит рассматриваемая ниже одномерная задача о растяжения стержня.

5.2.1. Стержень: 1–мерная конфигурация, неоднородное нагружение

Стержень – это тело, сечение которого неизменно в одном направлении, вдоль образующей цилиндра или призмы, причём поперечные размеры много меньше длины. Это – простейший элемент строительных конструкций. Для него рассматриваются задачи, в которых один или оба его конца закреплены разными способами, а параметры нагружения изменяются только вдоль длины. Часто полагается, что стержень работает только на сжатие, а для других случаев используют другие его наименования. Стержень, работающий на изгиб, называется балкой. Другие случаи нагружения, которые могут быть сведены к одномерным, приведены на рис.5.3.

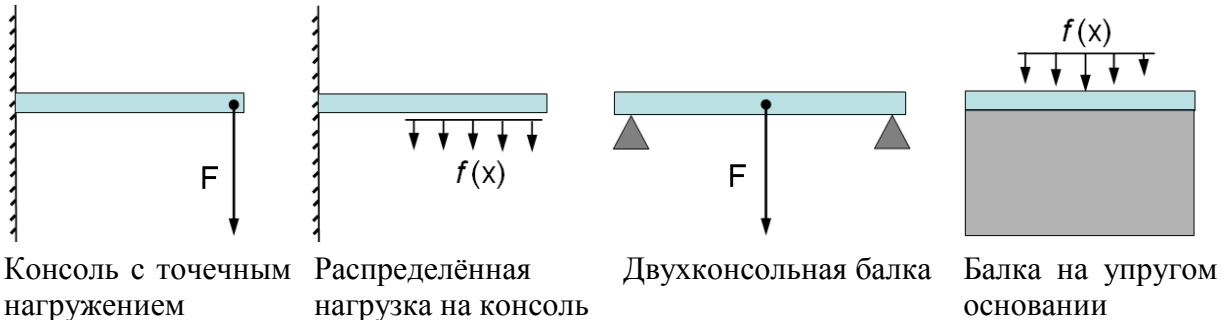


Рис. 5.3. Примеры стержней с поперечным нагружением разного типа.

Если один конец стержня закреплён, а нагрузка приложена на другом конце, постановка задачи известна как *общая задача Сен–Венана*.

Пусть ось Oz направлена вдоль образующей призматического стержня (цилиндра). К концам стержня, находящегося в равновесии, могут быть приложены силы и моменты, вызывающие деформирование следующих типов (рис.5.4):

- а) F_z – сжатие–растяжение;
- б) Q_x, Q_y – поперечный изгиб;
- в) M_x, M_y – чистый изгиб;
- г) M_z – кручение.

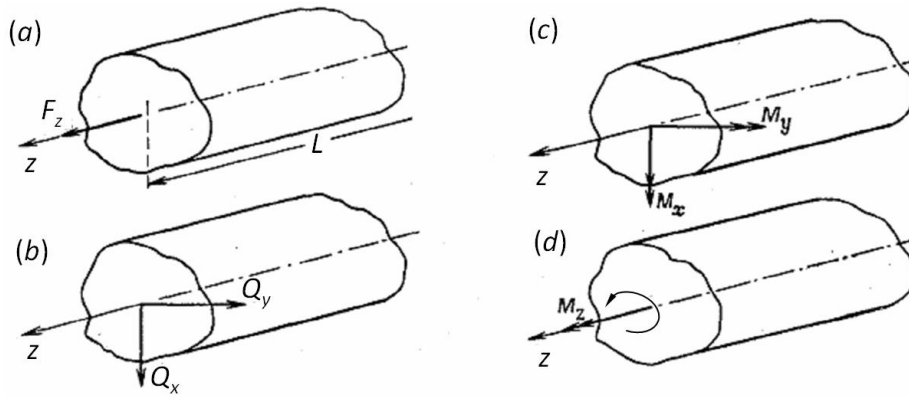


Рис. 5.4. К общей задаче Сен–Венана

Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок. В случае, когда стержень достаточно длинный, согласно принципу Сен–Венана существует протяжённая область, в которой распределение напряжений по сечению однородно.

Рассмотрим простейший случай (рис.5.4а) – осевое растяжение (сжатие). Позже будут рассмотрены случаи (с) – чистый изгиб и (b) – поперечный изгиб. Случай d) можно найти в литературе ([6], [10], [12] и др.). Пусть к одному из торцов однородного стержня постоянного сечения, находящегося в равновесии, приложена нагрузка, растягивающая, либо сжимающая, действующая вдоль оси стержня Oz. Нагрузка однородно распределена по плоской границе стержня. Второй конец стержня ($z=0$) закреплён относительно *продольных* перемещений: $u_z=0|_{z=0}$.

На боковые перемещения не накладываем ограничений (при численном решении на втором конце стержня должно быть введено закрепление по поперечным перемещениям в одной точке, чтобы зафиксировать позицию). Силовые граничные условия запишем в предположении нагрузки внешним давлением p (см. п.1.3.2):

$$\text{торец : } \sigma_{zz} = -p, \quad \text{боковая граница : } \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0.$$

Определим напряжённое состояние и перемещения. В силу однородности приложенной нагрузки в поперечной плоскости и отсутствия стеснения и нагружения в боковых направлениях, напряжённое состояние может полагаться однородным вдоль оси (введение дополнительной гипотезы – допущения Фойгта–Митчелла: трансляционная симметрия продольного нагружения). Отсюда следует, с учётом формулы Коши, что тензор напряжений имеет во всей области только одну ненулевую компоненту σ_{zz} . В уравнениях равновесия остаётся только одна ненулевая компонента напряжений,

$$\partial \sigma_{zz} / \partial z = 0, \quad \text{откуда, учитывая г.у.} \quad \sigma_{zz} = \text{const} = -p.$$

Из закона Гука (3.9), записанного для одноосного случая, получаем –

$$\sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon_{zz} = \sigma_{zz} / E \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{zz} = -\nu \sigma_{zz} / E.$$

Подставляем в уравнения для перемещений:

$$\varepsilon_{zz} = \partial u_z / \partial z = -p / E, \quad \varepsilon_{yy} = \partial u_y / \partial y = \nu p / E, \quad \varepsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x = \nu p / E.$$

Кинематические соотношения можно проинтегрировать, используя равенство нулю касательных деформаций: для перемещений по Oz – от нулевых значений координат в месте закрепления, для поперечных направлений – от оси Oz :

$$u_z = -z p / E, \quad u_x = x \nu p / E, \quad u_y = y \nu p / E.$$

В данном случае решение получено без интегрирования общей системы уравнений равновесия, с помощью допущения, позволившего определить вид тензора деформаций, не решая всю задачу. Это допущение состояло в предположении одномерности НДС в случае одномерности приложенной нагрузки и одномерности области.

5.2.2. Двумерная плоская задача теории упругости

Рассмотрим постановку двумерной плоской задачи теории упругости. Обозначения координат и компонент возьмём буквенные, x, y, z . В плоском случае рассматриваемое тело однородно по толщине, точнее, заключено между двумя параллельными плоскостями, а нагружение, связанное с приложением внешних сил или закреплением, лежит в этой плоскости. Возникающее НДС предполагается однородным по одному из направлений (Oz), называемых далее "осевым", и может быть неоднородным по остальным двум. Эта однородность по осевому направлению может проявляться по отношению к одной из двух характеристик НДС, связанных друг с другом определяющим законом:

(а) однородность напряжений (или отсутствие) : $\sigma_{zz}(x,y)=\text{const} (=0)$,

(б) однородность деформаций (или отсутствие) : $\varepsilon_{zz}(x,y) = \text{const} (=0)$.

Такие условия постулируются при рассмотрении плоской задачи теории упругости, которая, соответственно, может быть сформулирована в двух видах: случай *плоских напряжений* и случай *плоских деформаций*. Какой именно случай реализуется в плоской конфигурации, определяется постановкой задачи, позволяющей установить соответствующую симметрию, обычно, приближённую, напряжённого или деформированного состояния. Рассмотрим примеры.

Плоско–напряжённое состояние (ПН) – пример: плоское упругое тело малой толщины – пластина: $t \ll R$, нагружаемая только силами в своей плоскости, не зависящими от z . Толщина пластины однородна. Состояние ПН реализуется, когда приложенные силы лежат в плоскости пластины, и закрепление не препятствует деформированию по Oz . В этом случае компоненты *напряжения* по оси Oz отсутствуют почти во всём объёме пластины (рис.5.5 справа). Предполагается отсутствие коробления (изгиба) при приложении сжимающей нагрузки в плоскости пластины.

Вопросы. Зачем нужно условие малости толщины? Могут ли напряжения быть плоскими в толстой пластине? Привести примеры.

Плоско–деформированное состояние (ПД) возникает в призматическом теле, нагружаемом поверхностными силами, не зависящими от z , и не имеющими составляющей вдоль Oz в условиях, когда *деформация* вдоль направления Oz отсутствует. Стандартный пример состояния ПД приведён на рис.5.5 слева: боковое нагружение бесконечно длинного, $t \gg R$, призматического тела, либо тела, закрепленного на торцах (плоскость, перпендикулярная оси Oz) относительно осевых перемещений. Наличествуют перемещения в поперечных направлениях.

Вопрос. Нужно ли здесь условие "бесконечной длины"? Обязано ли призматическое тело (стержень) быть длинным для получения плоского НДС? При каком условии напряжения будут плоскими в коротком стержне? Привести примеры.

Выпишем уравнения равновесия, опуская те компоненты тензора напряжений, которые должны быть нулевыми по условию симметрии, определяемому состоянием. Касательные

компоненты тензоров напряжений и деформаций имеются только в направлениях основной плоскости Oxy , в противном случае в плоскости Oxy имелись бы напряжения и перемещения направления Oz (поскольку $\tau_{zx}=2G\varepsilon_{zx}$, $\tau_{zy}=2G\varepsilon_{zy}$, и не реализуется, ни случай ПН, ни случай ПД). Следовательно, в 2–мерном случае имеются следующие ненулевые компоненты напряжений:

$$\sigma_{xx}=\sigma_{xx}(x,y), \quad \sigma_{yy}=\sigma_{yy}(x,y), \quad \sigma_{xy}=\tau_{xy}=\tau_{xy}(x,y), \quad \sigma_{zz}=f(\sigma_{xx},\sigma_{yy}).$$

Из уравнений равновесия (4.1а) останутся следующие:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (5.1)$$

Здесь для упрощения записи мы не учитываем объёмные силы. Если их вводить, они не должны зависеть от z .

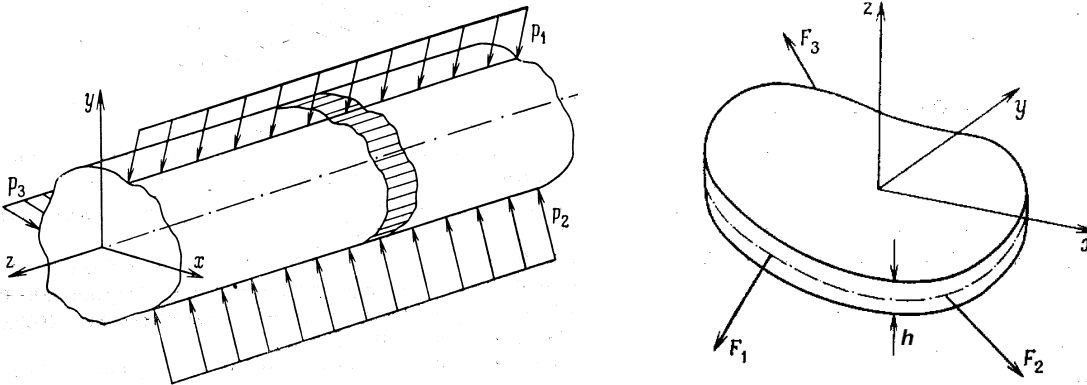


Рис.5.5. Плоско–деформированное (слева) и плоско–напряжённое (справа) состояния

Перемещения вычисляются относительно координат начального положения:

$$u=u(x,y)=x-ax, \quad v=v(x,y)=y-ay, \quad w(x,y)\equiv\text{const}. \quad (5.2)$$

Кинематические уравнения (4.1г) сводятся в данном случае к следующим:

$$\varepsilon_{xx}=\partial u/\partial x, \quad \varepsilon_{yy}=\partial v/\partial y, \quad \varepsilon_{xy}=1/2(\partial u/\partial y+\partial v/\partial x), \quad \varepsilon_{yz}=\varepsilon_{xz}=0, \quad \varepsilon_{zz}=\partial w/\partial z. \quad (5.3)$$

При рассмотрении определяющего соотношения возьмём сначала случай плоских деформаций: везде $\varepsilon_{zz}=0$. Постановка граничных условий по напряжениям и перемещениям подчинена условию плоской симметрии, других ограничений нет.

Закон Гука (4.1в) –

$$\sigma_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}),$$

для компонент в плоскости деформирования примет вид:

$$\sigma_{xx} = 2G(\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon), \quad \sigma_{yy} = 2G(\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon), \quad \sigma_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad (5.4)$$

а в перпендикулярном направлении имеем:

$$\sigma_{zz} = 2G\left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\right), \quad \text{или (см. (3.25))} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left((1+\nu)\sigma_{zz} - \nu\sigma\right), \quad (5.5)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ и $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ – первые инварианты деформаций и напряжений.

В случае плоских деформаций $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ и $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$. В случае плоских напряжений $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ и $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$. Таким образом, различие случаев плоских напряжений и плоских деформаций формально проявляется через вид закон Гука. Он определяет вид двумерного НДС – какие из осевых компонент напряжений и деформаций имеют ненулевое значение:

– в случае плоских деформаций нет z -деформаций (закрепление по направлению вдоль оси Oz), но возникает ненулевое z -напряжение, постоянное вдоль оси.

– в случае плоских напряжений нет z -напряжения (свободные торцевые границы пластины), но возникает ненулевая z -деформация, причём, из (5.5) следует, что она однородна в плоскости задачи: $\varepsilon_{zz} = \partial w / \partial z = \text{const}$.

Заданное условие плоского деформирования, $\varepsilon_{zz} = 0$ или напряжения, $\sigma_{zz} = 0$, позволяет выразить неизвестную осевую (zz) компоненту тензора напряжения или деформации через существенные компоненты в плоскости деформирования.

В случае плоских напряжений в левом соотношении (5.5) левая часть σ_{zz} нулевая, и осевая деформация

$$0 = (1-2\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \quad \text{или} \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}). \quad (5.6)$$

Таким образом, роль коэффициента Пуассона при изменении толщины в случае плоских напряжений играет величина $\nu/2(1-\nu)$ [12]. Сам коэффициент Пуассона как упругая постоянная остаётся. Аналогичное (5.6) соотношение для осевой компоненты напряжений в случае плоских деформаций, когда $\varepsilon_{zz} = 0$, можно получить, складывая уравнения (5.4) и вспоминая определение модуля объёмного сжатия вместе с его выражением (3.19):

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (5.7)$$

Внося (5.6) в уравнения (5.4), получим для только существенных компонент:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}, \quad (5.4a)$$

что будет использовано при построении матрицы деформации в двумерном МКЭ.

Аналитические решения плоской задачи представляют собой классическую проблему теории упругости и разобраны во всех руководствах (см. [4], [6], [10], [12] и др.).

Вопрос. Существует ли плоское нагружение, при котором напряжение, и деформация в осевом направлении нулевые? Ответ пояснить.

5.3. Цилиндрическая система координат. Осевая симметрия

Конфигурация нагружаемого тела, условия закрепления и распределение нагрузки часто обладают осевой симметрией или могут быть сведены к таковым. В этом случае координаты удобно исчислять в зависимости от расположения точки z вдоль оси симметрии, расстояния R до этой оси и полярного угла θ . Эти величины связаны с декартовыми координатами законом преобразования:

$$x_1 = x = R \cos \theta, \quad x_2 = y = R \sin \theta, \quad x_3 = z. \quad (5.8)$$

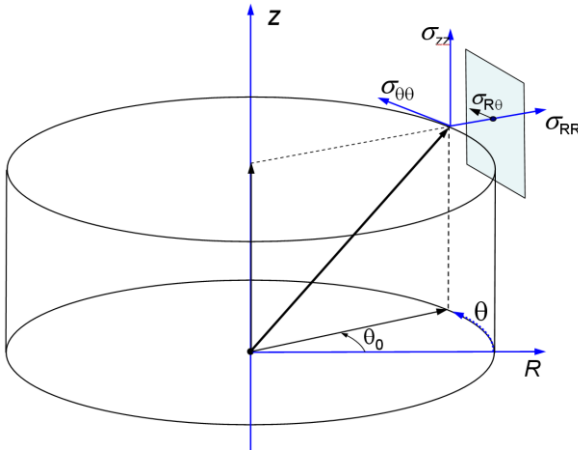


Рис. 5.6. К названиям компонент тензоров в цилиндрических координатах

касательным направлениям – *радиальное, окружное и осевое* (рис. 5.6). Плоскость, перпендикулярную оси Oz, будем называть плоскостью вращения, или горизонтальной плоскостью, а плоскости, содержащие ось ЦСК – осевыми плоскостями.

Введём обозначения компонент тензоров напряжений и деформаций в местной декартовой системе, определяемой глобальной ЦСК (у диагональных компонент иногда будет опускаться один индекс):

Осевые:

$$\sigma_{11} \equiv \sigma_{zz} \equiv \sigma_z, \quad \varepsilon_{zz} \equiv \varepsilon_z, \quad (5.9)$$

Радиальные:

$$\sigma_{22} \equiv \sigma_{RR} \equiv \sigma_R, \quad \varepsilon_{RR} \equiv \varepsilon_R, \quad (5.10)$$

Окружные (кольцевые):

$$\sigma_{33} \equiv \sigma_{\theta\theta} \equiv \sigma_\theta, \quad \varepsilon_{\theta\theta} \equiv \varepsilon_\theta, \quad (5.11)$$

Касательные:

$$\sigma_{12} \equiv \tau_{R\theta}, \quad \sigma_{13} \equiv \tau_{Rz}, \quad \sigma_{23} \equiv \tau_{\theta z}, \quad \varepsilon_{12} \equiv \varepsilon_{R\theta}, \quad \varepsilon_{13} \equiv \varepsilon_{Rz}, \quad \varepsilon_{23} \equiv \varepsilon_{\theta z}. \quad (5.12)$$

В общих уравнениях равновесия и кинематических уравнениях можно рассматривать указанные компоненты тензоров и векторов перемещений как функции криволинейных цилиндрических координат. Уравнения равновесия примут вид (см., например, [6]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \sigma_{RR}) + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{Rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{R} + f_R &= 0, \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\sigma_{R\theta}}{R}) + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + f_\theta &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \sigma_{Rz}) + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Тензор деформаций в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{RR} &= \frac{\partial u_R}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_R}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{R\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \varepsilon_{zR} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_R}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Закон Гука, т.е., алгебраическое соотношение между компонентами тензоров напряжений и деформаций, рассматриваемыми в местной декартовой системе координат, очевидно, останется неизменным:

$$\sigma_{pq} = 2G \left(\varepsilon_{pq} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \delta_{pq} \varepsilon \right) = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-2\nu) \varepsilon_{pq} + \nu \delta_{pq} \varepsilon \right), \quad (5.15)$$

где каждый из индексов p, q принимает значения R, θ, z .

Уравнения (5.13)–(5.14) сложнее их аналога в декартовых координатах. Их основное достоинство в том, что они позволяют упростить постановки задачи в случаях круговой симметрии или зависимостей только от полярного угла и радиуса. Рассмотрим примеры.

5.3.1. Осевая симметрия. Задача о толстостенной трубе

Если область осесимметрична, и нагружение вместе с гран. условиями не зависит от полярного угла θ , в выписанных уравнениях эта зависимость также должна отсутствовать, т.е., производные по этому углу нулевые. Но две касательные компоненты $\sigma_{R\theta}$ и $\sigma_{z\theta}$, могут быть ненулевыми (при кручении), и система (5.13)–(5.14) будет довольно громоздкой.

Если, далее, касательные напряжения на площадках окружного направления нулевые, уравнения равновесия примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \sigma_{RR}) + \frac{\partial \sigma_{Rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{R} + f_R &= \frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{\partial \sigma_{Rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{RR} - \sigma_{\theta\theta}}{R} + f_R = 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \sigma_{Rz}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= \frac{\partial \sigma_{Rz}}{\partial R} + \frac{\sigma_{Rz}}{R} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

С точки зрения кинематики деформирования этот случай аналогичен случаю плоских деформаций, в котором появилась осесимметричная окружная деформация (ср. кинематические соотношения (5.3) и (5.14)) и связанное с ней окружное напряжение. Соответственно, решение, т.е. распределение компонент тензоров напряжений и деформаций, будет одинаковым в любой плоскости осевого сечения, и в цилиндрической системе задача 2–мерная: две существенные координаты в местной системе координат и круговая симметрия, приводящая к однородности НС вдоль координатных окружностей. В лабораторной декартовой системе такое напряжённое состояние будет трёхосным: присутствуют компоненты напряжений, отвечающие трём направлениям: осевому и радиальному с окружным. Два последних меняются вместе с азимутальным углом (Примеры: наддув изнутри симметричной трубы с заглушенными концами. При анализе тяжёлых аварий: корпус реактора с расплавом.)

Отметим, что при дискретизации методом конечных элементов двумерных задач нет нужды в использовании записи уравнений равновесия в цилиндрических, сферических или иных координатах, отличных от декартовых. Для построения вычислительной процедуры МКЭ применяются эквивалентные интегральные формулировки, аналогичные рассмотренному выше принципу виртуальных перемещений. Для проведения

интегрирования в случае, например, осевой симметрии достаточно рассмотреть систему уравнений при нулевом угле, напряжённое состояние при этом рассматривается в подвижной локальной декартовой системе координат. Отличие постановок задач в случаях плоской и осесимметричной геометрии численно проявляется только в наличии окружных компонент тензоров и в записи компонент тензора деформаций через перемещения – следует использовать (5.14).

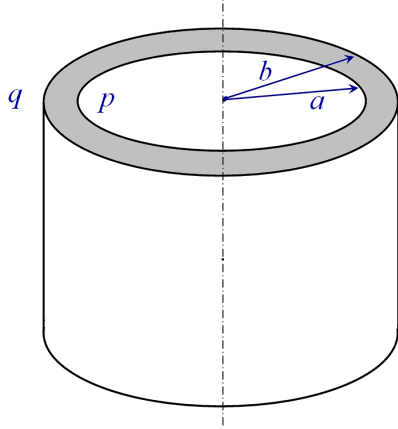


Рис. 5.7. К задаче о толстостенной трубе

При дальнейшем упрощении можно исключить зависимости (формы области, профиля нагрузок и граничных условий закрепления), либо от координаты R – это будет рассмотренное выше осевое нагружение стержня, либо от z – получится толстостенная труба (рис. 5.7). Последний случай интересен тем, что простое решение существует в замкнутой форме, а сама задача встречается достаточно часто как идеализация элементов толстостенных трубчатых конструкций и отверстий в сплошном материале. Упругие решения при совместном осевом растяжении и радиальном нагружении толстостенной трубы могут быть получены путём линейной комбинации. Для простоты положим объёмную силу нулевой (она может зависеть от радиуса, например, при вращении). Уравнения для компонент

напряжений примут вид:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} (R\sigma_{RR}) \right) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{R} = \frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{\sigma_{RR} - \sigma_{\theta\theta}}{R} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \quad (5.17)$$

Решение получается сведением уравнений в частных производных к обыкновенным. Пусть внутренний радиус трубы конечной длины L равен a , внешний – b . Введём давление внутри и вне трубы, запишем гран. условия на внутренней и внешней границах:

$$\sigma_{RR} = -p, \quad R = a, \quad \sigma_{RR} = -q, \quad R = b. \quad (5.18a)$$

При положительном давлении p только изнутри труба будет распирается, при положительном давлении q только снаружи – сжиматься.

Условия на торцах трубы, т.е. по координате z , можно задавать, либо по напряжениям:

$$\sigma_{zz} = \sigma_0, \quad (5.18б)$$

либо по перемещениям:

$$u_z = 0, \quad z = 0, \quad u_z = u_0, \quad z = L. \quad (5.18в)$$

В случае условия (5.18б) получим аналог плоско–напряжённого состояния в плоскости вращения. В случае условия (5.18в) при $u_0=0$ имеем плоско–деформированное НС. Полагается, что ось трубы не меняет своего положения.

Распишем деформации согласно (5.14), заменив частную производную на полную, что допустимо, поскольку производная по z не должна зависеть от радиуса, вследствие отсутствия касательных деформаций:

$$\varepsilon_{RR} = \frac{du_R}{dR}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_R}{R}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{du_z}{dz}, \quad \varepsilon_{R\theta} = \varepsilon_{Rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_{RR} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} + \frac{du_z}{dz}. \quad (5.19)$$

Решение ищем в перемещениях. Вносим выражения для деформаций в 3-н Гука (5.15):

$$\sigma_{RR} = 2G(\varepsilon_{RR} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon) = \frac{2G}{1-2\nu}((1-\nu)\frac{du_R}{dR} + \nu\frac{u_R}{R} + \nu\frac{du_z}{dz}), \quad (5.20a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G(\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon) = \frac{2G}{1-2\nu}(\nu\frac{du_R}{dR} + (1-\nu)\frac{u_R}{R} + \nu\frac{du_z}{dz}), \quad (5.20б)$$

$$\sigma_{zz} = 2G(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon) = \frac{2G}{1-2\nu}(\nu\frac{du_R}{dR} + \nu\frac{u_R}{R} + (1-\nu)\frac{du_z}{dz}), \quad (5.20в)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{Rz} = 0. \quad (5.20г)$$

Подставляя из уравнения (5.20в) σ_{zz} в уравнения равновесия, получим для производной осевого перемещения

$$\frac{d^2 u_z}{dz^2} = 0, \quad \frac{du_z}{dz} = \varepsilon_{zz} = const.$$

Внося σ_{RR} и $\sigma_{\theta\theta}$ из (5.20) в (5.17), для радиального перемещения получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 u_R}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_R}{dR} - \frac{u_R}{R^2} = 0.$$

Это линейное однородное уравнение типа уравнения Эйлера (при наличии объёмной силы оно будет неоднородным). Его частные решения имеют вид CR^n , $n = \pm 1$, и общее решение:

$$u_R(R) = C_1 R + \frac{C_2}{R}. \quad (5.21)$$

Используя это в выражении для компонент напряжений (5.20а–в), можем получить:

$$\sigma_{RR} = \frac{2G(C_1 + \nu\varepsilon_{zz})}{1-2\nu} - \frac{2GC_2}{R^2} \equiv A - \frac{B}{R^2}, \quad (5.22)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2G(C_1 + \nu\varepsilon_{zz})}{1-2\nu} + \frac{2GC_2}{R^2} \equiv A + \frac{B}{R^2}, \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \frac{2G(1-\nu)\varepsilon_{zz}}{1-2\nu} + \frac{4G\nu C_1}{1-2\nu} = \frac{G(4\nu C_1 + 4\nu^2\varepsilon_{zz} - 4\nu^2\varepsilon_{zz})}{1-2\nu} + \frac{2G(1-\nu)\varepsilon_{zz}}{1-2\nu} \\ &= 2\nu \frac{2G(C_1 + \nu\varepsilon_{zz})}{1-2\nu} + \frac{2G((1-\nu) - 2\nu^2)\varepsilon_{zz}}{1-2\nu} = 2\nu A + 2G(1+\nu)\varepsilon_{zz} = 2\nu A + E\varepsilon_{zz}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Здесь введены новые константы интегрирования А и В, связанные с константами C_1 и C_2 соотношениями:

$$C_1 = \frac{(1-2\nu)A}{2G} - \nu\varepsilon_{zz}, \quad C_2 = B/2G \quad (5.25)$$

Заметим, что $\sigma_{RR} + \sigma_{\theta\theta} = const$ по сечению трубы, а вместе с этим постоянен и первый инвариант напряжений.

Постоянные А и В определяются из граничных условий (5.18а) для σ_{RR} на внутренней и внешней границах трубы, они не зависят от величины осевой деформации ε_{zz} , которая определится из соотношения (5.24):

$$A = \frac{pa^2 - qb^2}{b^2 - a^2}, \quad B = \frac{a^2b^2(p - q)}{b^2 - a^2}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{2\nu A}{E} = -\frac{2\nu}{E} \frac{pa^2 - qb^2}{b^2 - a^2}. \quad (5.26)$$

Отметим, что при положительном внутреннем давлении p и нулевом внешнем давлении q деформация отрицательна: при распирании изнутри окружность трубы удлиняется, соответственно, длина трубы укорачивается.

В случае трубы со свободными концами $\sigma_0 = 0$, осевые напряжения отсутствуют. Соотношения для остальных компонент напряжений (5.22), (5.23) после подстановки коэффициентов из (5.26) примут вид:

$$\sigma_{RR}(R) = -\frac{p - q}{b^2 - a^2} \frac{a^2b^2}{R^2} + \frac{pa^2 - qb^2}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{p - q}{b^2 - a^2} \frac{a^2b^2}{R^2} + \frac{pa^2 - qb^2}{b^2 - a^2}. \quad (5.27)$$

Для нахождения радиального перемещения в (5.21) подставляются осевая деформация (5.26) и константы C_1 и C_2 , выражаемые из (5.25) через найденные коэффициенты A и B :

$$C_1 = \frac{pa^2 - qb^2}{b^2 - a^2} \frac{1 - \nu}{E}, \quad C_2 = \frac{a^2b^2(p - q)}{b^2 - a^2} \frac{1 + \nu}{E},$$

и перемещение в случае незакреплённых торцов трубы, т.е., ненулевой осевой деформации:

$$u_R(R) = \frac{1}{E(1 - a^2/b^2)} \left((p \frac{a^2}{b^2} - q)(1 - \nu)R + (p - q) \frac{(1 + \nu)a^2}{R} \right). \quad (5.28)$$

Видно, что радиальное перемещение будет ненулевым, даже в случае равенства внутреннего и внешнего давлений, когда оно ненулевое. Перемещение будет отрицательным (сжатие), что связано с большей полной силой, полученной как проинтегрированное по окружности и на единицу длины трубы давление, действующее на наружной границе и внутренней границах. Это – эффект радиальной геометрии, проявляющийся при большом различии внутреннего и внешнего радиусов.

При постановке на торцах трубы нулевых граничных условий по осевым перемещениям (закреплении торцов) осевая деформация в (5.24) будет нулевая, в результате чего множитель $(1 - \nu)$ в первом слагаемом (5.21а) превратится в $(1 - \nu - 2\nu^2)$. В этом случае из уравнений (5.24) и (5.26) можно получить возникающее z -напряжение:

$$\sigma_{zz} = 2\nu \frac{p a^2 - qb^2}{b^2 - a^2}. \quad (5.29)$$

Данное граничное условие отвечает случаю плоской деформации, и этот результат можно получить также из соотношений (5.7) и (5.27). Отметим также, что деформация (5.26) трубы с незакреплёнными концами связана с напряжением (5.29) трубы с фиксированной длиной соотношением

$$\sigma_{zz} = -E\varepsilon_{zz},$$

что иллюстрирует принцип суперпозиции: НДС в случае плоской деформации (в радиальном направлении) может быть получено из НДС трубы с незакреплёнными концами путём растяжения с продольной деформацией величиной $-\varepsilon_{zz}$.

5.3.2. Предельные случаи в задаче о трубе

Рассмотрим с помощью формул (5.27) распределения напряжений для некоторых предельных случаев геометрии трубы.

1) Бесконечно толстая труба: концентрация напряжений. Устремив внешний радиус b к бесконечности получим :

$$\sigma_{RR} = -(p-q) \frac{a^2}{R^2} - q \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = (p-q) \frac{a^2}{R^2} - q .$$

Пусть давление на бесконечности нулевое, внутри – положительное, $p > 0$, $q = 0$, тогда радиальное напряжение всегда – сжимающее (отрицательное), а окружное – растягивающее (положительное, равное по абсолютной величине), причём обе компоненты монотонно убывают. Внутри напряжение максимально: $\sigma_{\theta\theta} = P$. При высоком давлении (например, в толстом орудийном стволе), равном пределу текучести материала (порядка нескольких тысяч атмосфер у стали, что для пушки не так много), возможны необратимые пластические деформации ствола. Для противодействия давлению в таких случаях создают разными способами преднапряжение: остаточные деформации, порождающие сжимающие окружные напряжения (например, путём автофреттирования, т.е. предварительного пластического деформирования орудийных стволов [14]).

В случае, когда $p = 0$, $q < 0$: отверстие в сплошной среде в поле растягивающих напряжений, максимум окружного напряжения величиной $-2q$ опять же находится на контуре отверстия. На качественном уровне это иллюстрирует общий факт: возмущение внешнего однородного поля напряжений отверстием приводит к концентрации напряжений в окрестности отверстия, в данном случае – с коэффициентом относительно приложенной нагрузки $\sigma_{\max}/q = 2$. Таким образом, отверстие в стене не только ослабляет стену в целом, но и увеличивает напряжение в своей окрестности, и при критических растягивающих нагрузках разрушение более вероятно здесь. Поэтому отверстия, люки, проходки в стенах укрепляют путём утолщения краёв.

2) Бесконечно тонкая труба. Пусть $a \approx b$: $b = a + h$, $h \ll a$, $R = a + \delta$, $0 \leq \delta \leq h$, $a^2/R^2 \approx 1$, $p - q \sim q$. С точностью до малых первого порядка по h :

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(\delta) &= \frac{p-q}{b^2-a^2} \frac{a^2 b^2}{R^2} + \frac{p a^2 - q b^2}{b^2 - a^2} \approx \frac{a(p-q)}{h(2+h/a)} \left(\frac{(1+h/a)^2}{(1+\delta/a)^2} + 1 \right) \approx \\ &\approx \frac{a(p-q)}{h(2+h/a)} (1+1) \approx \frac{a(p-q)}{h} \end{aligned}$$

Радиальное напряжение монотонно изменяется от величины $-p$ на внутренней поверхности до $-q$ на наружной. Таким образом, в незакреплённой трубе (т.е., со связями, не препятствующими деформированию) возникающее окружное напряжение превосходит приложенное давление с коэффициентом $a/h \gg 1$.

Выражение для осевого напряжения при плоских деформациях (закреплённые в продольном направлении концы) получается из (5.28):

$$\sigma_{zz} = 2\nu \frac{p a^2 - q b^2}{b^2 - a^2} = \nu \frac{a}{h} \frac{p - q(1+h/a)^2}{1+h/2a} \approx \nu \frac{a}{h} (p - q) \approx \nu \sigma_{\theta\theta} , \quad (5.30)$$

т.е. отношение осевых и окружных напряжений равно $\nu < 0,5$.

Для упрощения формул положим далее $q=0$. Осевая деформация (5.26) незакреплённой тонкой трубы:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu p a}{E h} \approx -\frac{\nu \sigma_{\theta\theta}}{E} \approx -\nu \varepsilon_{\theta\theta} . \quad (5.31)$$

Радиальное перемещение (5.28) в этом случае:

$$u_R \approx \frac{p a^2}{E h} = a \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} = a \varepsilon_{\theta\theta} .$$

Здесь окружная деформация введена как относительное удлинение по окружности $\varepsilon_{\theta\theta} = 2\pi u_R / 2\pi a$, и полученное равенство согласуется с крайней правой частью (5.31).

Точность приближённой оценки напряжения в $\sim 10\%$ достигается при относительной толщине $h/a \approx 1/5$. При меньших толщинах труба приближённо может полагаться тонкостенной.

Примеры конструкций с внутренним наддувом, приводящим к высоким тангенциальным напряжениям, весьма многочисленны. Из области энергетики можно упомянуть паровые котлы, корпус водо–водяного ядерного энергетического реактора (тоже водогрейный котёл), а также защитную оболочку АЭС, которая строится из железобетона, но должна выдерживать без трещин внутреннее давления до 5 атмосфер. Для противодействия образованию сквозных трещин в стенах оболочки при росте внутреннего давления в них проходят натянутые стальные канаты, создающие сжимающие напряжения (преднапряжения). Для тонкой трубы исходная постановка задачи может быть упрощена, и приведённые оценки могут быть получены гораздо быстрее. Рассмотрим примеры получения простых приближённых оценок напряжений для тонкостенной трубы и аналогичных конфигураций. Все они относятся к области геометрической статики, когда рассматривается только равновесие сил, а деформации не участвуют в решении.

Задача – Определить окружные и осевые напряжения под действием внутреннего давления в длинной тонкостенной трубе с доньями, т.е., в замкнутом цилиндрическом сосуде с незакреплёнными торцами. (Пример – внутреннее давление в твэле в процессе наработки газообразных продуктов деления возрастает на 20 атм и более. Но рабочее давление в первом контуре ВВЭР, т.е. внешнее давление для твэла, составляет 160 атм.)

Решим задачу методом виртуальных перемещений. Сделаем следующие предположения о возникающем НДС:

- оцениваются средние по толщине стенки значения напряжений – они вычисляются как однородные;
- осевая симметрия НДС;
- труба достаточно длинная – относительное влияние краевых эффектов мало – принцип Сен–Венана;
- малость деформаций (растяжение и увеличение объёма мало, нагрузка не зависит от деформации).

Предполагаемый вид тензоров напряжения и деформаций: при осевой симметрии НДС одна из главных осей – это ось трубы, две другие перпендикулярные оси можно выбрать

произвольно в плоскости вращения, как показано в гл.1, и касательные напряжения отсутствуют. Используем свойство линейности уравнений равновесия (4.1): решение для случая малых деформаций ищем по-отдельности для нагружения боковой поверхности и растяжения вдоль оси за счёт давления на торцы. Составляем выражения для виртуальной работы. Пусть точки системы испытали малое перемещение, осесимметрично распределенное в пространстве. Рассмотрим растяжение по окружности, вызванное нормальным давлением. Работа окружных напряжений на ед. длины трубы по абсолютной величине равна работе сил давления:

$$pA_{\Delta}R = \sigma_{\theta\theta} h_{\Delta}l, \quad A = 2\pi R, \quad \text{следовательно, } \Delta l = 2\pi\Delta R,$$

откуда

$$pR = h_{\sigma}, \quad \sigma_{\theta\theta} = pR/h.$$

Отсюда следует, что радиальным напряжением, которое по модулю не превышает величины внутреннего давления, можно пренебречь. Рассмотрим осевое нагружение. Работа осевых напряжений (труба удлинилась на Δl распределённой однородной силой давления, действующей на торцы):

$$p_{\Delta}V = \sigma_{zz} 2\pi R h_{\Delta}l, \quad \Delta V = \pi R^2 \Delta l,$$

откуда получаем, что осевое напряжение вдвое меньше:

$$pR = 2h_{\sigma_{zz}}, \quad \sigma_{zz} = pR/2h. \quad (5.32)$$

Отметим ещё одно существенное предположение, которое делается при оценках – оболочка не сопротивляется изгибу при деформировании (т.н. безмоментная оболочка [10]). Это может быть существенным при локальных отклонениях от круговой симметрии.

Вопрос. Сравнить соотношения осевых и окружных напряжений в (5.30) ($=v$) и (5.32) ($=0,5$). В чём причина различий? Найти изменение длины трубы с доньями под действием внутреннего давления.

Вопрос. Зависит ли осевое напряжение от формы (осесимметричного) днища?

Задача о лопнувшей сосиске: Почему сосиски лопаются при варке преимущественно вдоль?

Задача может быть сведена к предыдущей, для чего вводятся дополнительные допущения:

- идеализация формы: длинный цилиндр с доньями;
- внешние условия: однородная температура;
- модель оболочки: форма – труба с полусферическими доньями; тонкая;
- модель среды (фарш) – слабоупругая (относительно свойств оболочки) сжимаемая жидкость: вода и пар, поэтому нагрузка на оболочку близка к равномерному давлению в трубе.

Количественные оценки напряжений по модели безмоментной оболочки

– Минимальная толщина корпуса реактора ВВЭР–1000 составляет около 0,2 м, радиус – около 2 м, рабочее давление – около 160 атм. Оценить толщину стенки главного циркуляционного трубопровода внутренним диаметром 0,85 м, исходя из концепции равнопрочности (принимаемый одинаковый предел прочности для элементов конструкций, работающих в одинаковых условиях).

– Определить полную площадь сечения канатов натяжения, создающих преднапряжение в цилиндрической части защитной оболочки АЭС с ВВЭР–1000. Считать, что напряжение в канатах равно пределу текучести стали с заданным коэффициентом запаса. Взять диаметр оболочки равным 50 м, эффективную толщину стенок 1, предельное давление 5 атм. Задаться другими необходимыми параметрами.

Приведённый выше упрощённый способ рассуждений по определению напряжений в тонкостенной оболочке очень прост, но формально пригоден только в случае её симметрии. В учебниках эта задача обычно решается путём рассмотрения локального равновесия сил натяжения в элементе оболочки при нормальном давлении. Такой подход может быть распространён и на более общий случай, предлагаемый здесь как упражнение:

Получить соотношение между величинами тангенциальных компонент напряжений в тонкой безмоментной оболочке, нагружаемой нормальным давлением, локально характеризуемой толщиной и радиусами кривизны R_1 , R_2 , относящимися к двум взаимоперпендикулярным касательным направлениям (уравнение Лапласа):

$$\sigma_1 \frac{h}{R_1} + \sigma_2 \frac{h}{R_2} = p. \quad (5.33)$$

Рассмотреть частные случаи цилиндра и сферы. Определить главные значения деформации на оболочке для этих случаев. Проверить на случай несжимаемости материала оболочки.

5.4. Термоупругие деформации и напряжения

Рассмотрим, как влияет на НДС тела изменение его температуры. При нагревании подавляющее большинство материалов расширяется, а при охлаждении – сжимается. (Контрпримеры – вода от 0°С до 4°С, мартенситный переход в аустенитной стали при закалке, проводимой быстрым охлаждением, лёд (вода), оксид кремния (SiO₂) и плутоний при плавлении.)

В случае однородного нагрева относительно исходной температуры $T_0(x,y,z)$:

$$\Delta T_0(x,y,z) = T_0(x,y,z), \quad T(x,y,z) - T_0(x,y,z) = \text{const}$$

Здесь и ниже "нагрев" и "расширение" будут означать также "остывание" и "сжатие". Экспериментальный факт состоит в том, что механически изотропные тела на малых температурных интервалах расширяются при нагреве пропорционально приращению температуры. Вводится тензор тепловых деформаций, который в *изотропном* теле – шаровой:

$$\varepsilon_{ij}^T = (\alpha \Delta T) \delta_{ij}. \quad (5.34)$$

Анизотропия этого тензора связывается с анизотропией коэффициента теплового расширения α – он тоже становится тензором. Этот множитель – свойство материала: коэффициент *линейного* теплового расширения (линейный КТР), т.е., расширения вдоль одного направления. Здесь и далее предполагается как механическая, так и термическая изотропия, поскольку одно, как правило, влечёт за собой другое, т.к. оба свойства обусловлены внутренним строением материала. Изотропный коэффициент линейного теплового расширения является скаляром. (Пример: сталь: $\alpha = (1-2) \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ в интервале температуры 300–1400 К.) Сворачивая равенство (5.34) получим для объёмной деформации

$$\varepsilon = 3\alpha \Delta T, \quad (5.35)$$

где 3α будет коэффициентом *объёмного* теплового расширения.

Отметим, что в справочниках для твёрдых тел, как правило, приводятся *линейные* КТР, а для газов и жидкостей – *объёмные*, что отвечает поведению среды.

При однородном нагреве тепловая деформация однородна, и, если при этом тело однородно и внешние нагрузки отсутствуют, то напряжения при свободном (нестеснённом) тепловом расширении отсутствуют. Это можно взять за постулат, основанный на опыте и здравом смысле – возникновение напряжений при нагреве ненагруженного тела может быть вызвано только:

- стеснением (защемлением) деформирования – неоднородностью граничных кинематических условий;
- неоднородностью нагрева (взаимовлиянием подобластей, нагретых по-разному);
- неоднородностью α (взаимовлиянием подобластей с разными свойствами).

Вследствие малости тепловых деформаций и полагаемого отсутствия какого-либо иного проявления нагрева, кроме увеличения объёма, его влияние на общее НДС, рассматриваемое как упругое, может быть учтено на основе принципа суперпозиции. (Отметим, что при пластическом деформировании изменение объёма обычно также упруго, поэтому и здесь тепловая деформация не зависит от механической, если пренебречь теплом работы пластической деформации.) Далее рассматривается упругий случай, когда применим принцип суперпозиции. Полная деформация в любой точке представляется суммой

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) = \varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}^* , \quad (5.36)$$

где ε_{ij}^* отвечает за деформацию, не связанную с нагревом. Эти деформации, вызванные сторонним нагружением, отвечают некоторым напряжениям. По закону Гука (см. (3.22)) :

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) .$$

Подставляя это в (5.36) и учтя (5.34), получим полную деформацию, выраженную через напряжения и приращение температуры в данной точке, что можно охарактеризовать как закон Гука для термоупругих напряжений:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \sigma \right) + \alpha \Delta T \delta_{ij} . \quad (5.37)$$

Обратно, если в закон Гука (3.23) для напряжений подставить величину деформации от только механического нагружения ε_{ij}^* :

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T \quad (5.38)$$

то в результате получим напряжения, выраженные через *полную* деформацию (т.е. ту, что реально измеряется) и приращение температуры:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij}^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^* \right) = \frac{E}{1+\nu} \left(\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon \right) - \left(\varepsilon_{ij}^T + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon^T \right) \right) = \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left(\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) - \delta_{ij} \alpha \Delta T \left(1 + \frac{3\nu}{1-2\nu} \right) \right) = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) - \frac{E}{1-2\nu} \delta_{ij} \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (5.39)$$

Здесь отделено слагаемое, заключающее в себе зависимость напряжённого состояния от температуры (коэффициенты полагаем постоянными).

При измерении деформации в частично закреплённом нагретом теле невозможно разделить её тепловую и механическую составляющие, но формально принцип суперпозиции позволяет записать такого рода соотношения (5.34)–(5.36). В полной аналогии с интерпретацией полной деформации как суммы "силовой" и "тепловой", выражение (5.39) для полного *напряжения* также можно истолковать как сумму механического и теплового воздействий:

- Напряжённое состояние (внутренние силы), отвечающее данному тепловому и деформированному состоянию при данных наложенных связях, обусловлено суперпозицией воздействий внешних сил и термического, вызванного изменением температуры относительно начального состояния.

Если при однородном нагреве внешняя граница однородного изотропного тела жёстко закреплена, полная деформация нулевая. Возникающие *термонапряжения* от термического воздействия даются вторым слагаемым правой части (5.39):

$$\sigma_{ij} = -\frac{E}{1-2\nu}\alpha \Delta T \delta_{ij} \equiv -3K\alpha \Delta T \delta_{ij} \equiv -K\alpha_{\nu} \Delta T \delta_{ij} . \quad (5.40)$$

Здесь K – модуль объёмного сжатия (3.12), α_{ν} – коэффициент *объёмного* теплового расширения.

Несколько иными словами сказанное можно переформулировать так. В уравнениях (5.33)–(5.34) термонапряжения формально играют роль некоего ограниченного "теплового давления", изотропной объёмной силы, возникающей при нагреве с жёстким закреплением. Понятие о тепловом давлении, введённое Н.Нейманом и др. в XIX в., достаточно широко использовалось в XIX–XX вв. при рассмотрении задач термоупругости. (Оно не лишено и физического смысла, если провести аналогию между газокинетическим давлением и тепловым давлением, в кристалле возникающим, с позиций физики твёрдого тела, вследствие тепловых колебаний атомов в решётке (поли)кристалла и смещения нулевого положения колебаний атомов при нагреве.)

Такая интерпретация облегчает понимание и решение задач термоупругости. Например, при определении НДС нагреваемого тела с наложенными связями можно рассуждать так: "Расширение первоначально незакреплённого тела под действием теплового давления, возникшего от нагрева, было, при наложении связей и возвращении части границ тела к их исходному положению, частично скомпенсировано воздействием со стороны связей. Реакция связей компенсирует тепловое давление". Тем самым задача ставится как чисто механическая. С этой точки зрения вполне прозрачен термин "тепловая нагрузка", иногда употребляемый в смысле "теплового давления", вызванного нагревом.

Тепловое давление поясняет и процесс, комплиментарный тепловому расширению: при адиабатическом сжатии образца внешней силой его температура возрастает. Это проявляется также как увеличение его "эффективной жёсткости" – при сжатии требуется противодействовать также тепловому давлению, возникающему при росте температуры. В опытах на упругое сжатие металла в адиабатических и изотермических условиях адиабатический модуль упругости будет несколько выше, чем изотермический. Отличие, однако, не превышает 1–2% (оценки см. в [10]), поэтому тепловые эффекты упругого деформирования в механике обычно не принимаются в расчёт.

Как правило, поле температуры можно полагать заданным извне, и в линейных задачах оно практически не зависит от НДС – решается *несвязанная задача термоупругости*. В численном расчёте с небольшими деформациями задача теплопроводности может решаться отдельно от задачи расчёта теплового НДС: рассчитанное на шагах по времени поле температуры в недеформированной конфигурации используется как параметр соотношения вида (5.37) для тепловых деформаций (но надо следить за тем, не изменяет ли деформация условия приложения тепловых нагрузок).

5.4.1. Примеры–задачи

Стыки между рельсами ж/д. Оценить для местных метеоусловий минимальный размер зазора в месте стыка рельсов железнодорожного полотна.

Бесстыковый рельс. Высокоскоростные ж/д магистрали не имеют больших зазоров в месте стыков. Как здесь решается вопрос о тепловом расширении? Оценить термонапряжения. Определить поперечную деформацию "бесстыкового" рельса.

Биметаллическая пластина. Определить прогиб биметаллической пластины терморегулятора в утюге; известны КТР и перегрев относительно нейтральной температуры (когда пластина прямая). Пластины биметалла считать параллельными, с небольшим зазором, закреплёнными на концах. Задаться КТР пластин, длиной, толщиной.

Задача о лопнувшем стакане.

Почему толстостенный стакан лопается при быстром наливании кипятка, причём, чаще чем тонкостенный?

Почему часто отлетает дно (особенно у тонких стаканов)?

Почему предварительное споласкивание стакана кипятком существенно снижает вероятность разрушения?

Оценить время прогрева и напряжения в цилиндрической части. Нарисовать качественный вид деформирования дна стакана и НДС в нижней части.

Определить давление, оказываемое водой при замерзании в сосуде сферической формы ("бомба"). Рассмотреть случаи: а) бесконечной жёсткости стенок сосуда; б) конечной жёсткости и: (1) малой толщины, (2) конечной толщины стенок сосуда. Зависимость давления от объёмной деформации (уравнение состояния) льда известна.

Закалённое стекло – это листовое стекло в преднапряжённом состоянии. Задавшись необходимыми предположениями о свойствах и форме листа стекла:

(а) определить качественный вид распределения напряжений по толщине;

(б) оценить внутренние напряжения, задавшись разницей в плотности в средней и наружной части сечения листа стекла;

(в) описать качественно поведение закалённого стекла при изгибе, ударе, пробивании отверстия.

(Закалённое стекло получается путём резкого охлаждения с границ, начиная с 600°C . Неоднородности температуры способствует малая теплопроводность стекла. Плотность быстро и медленно отожженных стекол различается на $20\text{...}30\text{ кг/м}^3$, что в терминах объёмной деформации даёт $\sim 1\%$ – очень много. При охлаждении листа стекла с внешних границ в средней части его толщины температура убывает медленнее, приграничные

области охлаждаются быстрее и оказываются более рыхлыми, т.е., в итоге – сжатыми. При отжиге, медленном охлаждении при почти однородной температуре, структура стекла уплотняется равномерно, остаточные напряжения малы).

5.4.2. Задача о термоупругих напряжениях в трубе

Общий вид напряжённого состояния в неоднородно нагретой трубе несложно рассчитать аналитически. Задача рассмотрена во многих руководствах по теории упругости, например, [Тимошенко], [Кац].

6. Элементарная теория изгиба: силовые характеристики

Решения практически важных задач теории упругости, полученные при достаточно общих предположениях, обычно трудны не только в получении, но и в использовании. С другой стороны, допуски, существующие в технике на размеры деталей, т.е. допустимые отклонения от проектных размеров, часто позволяют при решении этих задач применить упрощения, дающие возможность получить приближённое решение без обращения к общей теории. Одним из примеров может служить элементарная теория изгиба ("техническая теория изгиба"). Мы рассмотрим основные её посыпки и результаты, поскольку, во-1, это нам понадобится в методе конечных элементов, во-2, эти результаты интересны и поучительны сами по себе, поскольку изгиб – один из наиболее часто встречающихся видов нагружения. Здесь обсуждаются силовые характеристики изгиба. Перемещения при изгибе будут рассмотрены при построении изгибного конечного элемента.

6.1. Действие поперечной концевой силы, приложенной к стержню

Нижеследующее рассмотрение проведено по мотивам книги [10]. Рассмотрим стержень (призматическое тело), находящийся под действием приложенных к нему поперечных, т.е. перпендикулярных его оси, сил. Приближенно, действие системы сил можно рассматривать как сумму действий каждой из сил, взятых по отдельности. Поэтому мы предположим, что на конце стержня приложена одна единственная сосредоточенная сила P , а другой конец закреплён неподвижно (рис.6.1). Качественные выводы будут справедливы и для пластически деформируемых стержней при произвольной поперечной нагрузке. Предположим, что все поперечные размеры стержня имеют один и тот же порядок, характеризуемый величиной h , длина стержня есть l , его прогиб имеет порядок величины h , не более. Оценим величины компонент напряжений, возникающих в материале под действием приложенной нагрузки, чтобы сравнить степени опасности разрушения, связанной с её приложением.

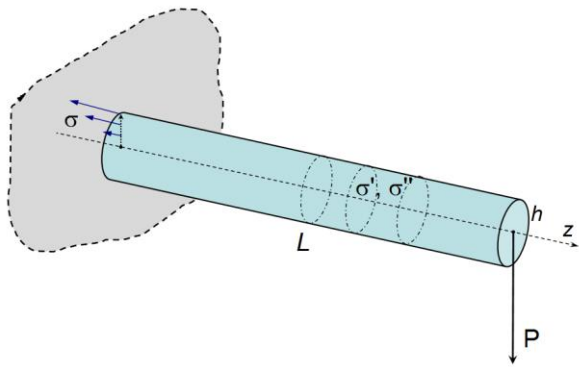


Рис. 6.1. Балка (консоль) под действием поперечных сил

Прежде всего, сила стремится "срезать" стержень по сечению, т.е. для уравнивания действия силы P в любом сечении необходимо приложить касательные напряжения σ' , которые распределены по сечению таким образом, что их равнодействующая уравнивает "срезающую" силу P . Эти напряжения называются *касательными напряжениями изгиба*; они показаны на рис.6.1, распределение их одинаково в сечениях по всей длине.

Далее, сила P , вообще говоря, вызывает кручение стержня вокруг продольной оси. Если стержень имеет продольную

плоскость симметрии, то, очевидно, напряжения кручения не возникнут только, если вектор силы лежит в этой плоскости. Если сила параллельна этой плоскости и перпендикулярна оси, то произведение силы на расстояние от линии её действия до плоскости симметрии называется *крутящим моментом*. Если нет плоскости симметрии, то в несимметричном сечении всегда можно найти точку, называемую *центром изгиба*. Когда поперечная сила действует в плоскости, содержащей в себе центры изгиба всех поперечных сечений, кручения не происходит, равнодействующая соответствующих внутренних сил равна нулю. Если это не так, и напряжения кручения существуют, мы обозначим их σ'' . Геометрическое место точек, центров изгиба, называется *центральной линией изгиба*.

Наконец, в поперечном сечении должны возникнуть нормальные напряжения σ , создающие момент, уравнивающий момент силы P относительно любой оси, лежащей в плоскости поперечного сечения. Эти напряжения называются *нормальными напряжениями изгиба*.

Оценим величины составляющих напряжения в поперечном сечении: "срезающей", "крутящей" и "изгибающей", σ' , σ'' и σ . Для этого заметим, что площадь сечения стержня имеет порядок величины h^2 . Понимая под касательным напряжением σ' среднее напряжение по сечению, мы получим для него оценку

$$\sigma' \sim P/h^2 .$$

Далее, очевидно, что порядок величины крутящего момента, создаваемого внешней силой, есть Ph . Возникающие касательные напряжения *кручения* приблизительно одинаковы в каждом сечении и, аналогично касательным напряжениям при изгибе, могут зависеть только от размера h , но не от длины l . Очевидно, что "напряжения кручения" – это те же касательные напряжения, определяемые в плоскости, параллельной вектору внешней силы, и в максимуме имеющие тот же порядок величины. Порядок величины крутящего момента, обусловленного внутренними силами, с плечом силы $\sim h$ будет $\sigma''h^3$, и условие равенства моментов внутренних и внешних сил для напряжений кручения σ'' даёт аналогичную же оценку –

$$\sigma''h^2 \cdot h \sim P \cdot h, \text{ откуда } - \sigma'' \sim P/h^2 .$$

Оценим нормальные напряжения. Рассмотрим момент приложенной силы относительно оси, ортогональной к направлению силы и лежащей в месте крепления стержня, как наиболее напряжённом (здесь наибольший момент) и потому опасном. Его величина есть Pl .

Момент внутренних сил, т. е. *нормальных* к поперечному сечению напряжений σ , уравнивающий в этом сечении момент внешней *продольной* силы, согласно принципу Сен–Венана может зависеть только от σ и h и также имеет порядок σh^3 . Поэтому условие равновесия будет –

$$Pl \sim \sigma h^3, \quad \sigma \sim P/h^2 l/h, \quad (6.1)$$

и полученная оценка напряжения σ отличается от σ' и σ'' множителем l/h . Если длина стержня l велика по сравнению с поперечным размером h , то касательные напряжения σ' и σ'' малы по сравнению с нормальным напряжением σ , т.е. отношение l/h может быть таким, что наибольшие касательные напряжения, которые уравнивают перерезывающие силы и крутящий момент, составляют сколь угодно малую долю от наибольших нормальных, связанных с изгибающим моментом. В теории изгиба, как правило, основное внимание обращается именно на нормальные напряжения, касательные же во внимание не принимаются. Исключения могут быть в следующих случаях.

а) *Полые тонкостенные стержни*. Если габарит поперечного сечения h много больше его минимального размера δ , то его площадь будет отличаться от величины $\sim h^2$ множителем порядка h/δ , и в правой части левого уравнения (6.1) появится этот числовой множитель. Если $h/\delta \sim l/h$, то касательные напряжения будут того же порядка, что и нормальные.

б) *Волокнистые материалы, такие как древесина*, имеют малое сопротивление межслойному сдвигу и отрыву, и для достаточно коротких балок существенно меньшие по величине касательные напряжения могут оказаться более опасными, чем нормальные (отслоение волокон). Именно в этой связи в середине XIX столетия была развита теория касательных напряжений при изгибе. Во второй половине XX в. учет касательных напряжений оказался необходимым при расчете пластиков, армированных высокопрочным волокном.

6.2. Силы, моменты и условия равновесия стержня

Поместим начало координат в место закрепления стержня – это неподвижная лабораторная система отсчёта. Вместе с неподвижной вводятся также местные системы, расположенные на разных расстояниях от неподвижной системы, получаемые в недеформированном состоянии параллельным переносом вдоль оси стержня. Вдоль оси стержня направим ось Oz , оси Ox и Oy – в перпендикулярной плоскости сечения. Координата z характеризует положение текущего сечения и местной системы координат. Сечение в точке z делит стержень на две части, левую и правую. Силовыми характеристиками изгиба в каждом сечении служат *перерезывающие силы* P_x, P_y , лежащие в плоскости данного сечения, и *изгибающие моменты* M_x, M_y относительно пары осей Ox и Oy . Полные момент и сила, приложенные в сечении с центром в точке z , связаны с распределёнными напряжениями в этом сечении, которые мы хотим найти. Возможные случаи приложения нагрузки на конце стержня приведены выше на рис. 5.4. Рассмотрим подробнее те из них, которые приводят к изгибу.

Случай *чистого изгиба* связан с приложением только изгибающего момента относительно оси, параллельной сечению, *оси изгиба*. Пусть это будет ось Oy . Рассматривается момент, взятый относительно оси, параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, от всех сил, приложенных справа от сечения, или сил, приложенных слева с обратным знаком (моменты взаимоуравновешены). Например, момент $M=M_y$ сил, приложенных в сечении, отмеченном на рис.6.2, будет отрицательным

(стержень закреплён слева) и направлен в вниз от плоскости чертежа. Момент, создаваемый внутренними силами в сечении закрепления стержня противоположен по знаку.

Случай *поперечного изгиба* связан с приложением *силы* поперёк оси Oz , в направлении, например, вдоль оси Ox . В этом случае *перерезывающей силой* P_x называется сумма проекций на ось Ox всех сил, приложенных слева от рассматриваемого сечения, или сумма сил, приложенных справа, взятая с обратным знаком.

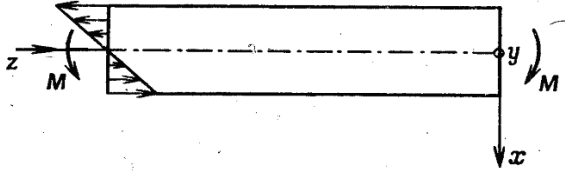


Рис. 6.2. Чистый изгиб

Как упоминалось выше, случай произвольного нагружения стержня на конце, включающий растяжение, изгиб и кручение, называется общей задачей Сен–Венана. Допущение (Сен–Венана), принимаемое для решения этой задачи, состоит в том, что "волокна" стержня в направлении продольной оси стержня (или: тонкие продольные призмочки) не оказывают друг на друга

никакого поперечного давления (поперечного сжатия или растяжения) и не передают в поперечном направлении никаких сил сдвига. Принимая это допущение можно положить в общих уравнениях равновесия

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0.$$

При равновесии вычисленные в каждом сечении стержня главный момент и главная сила равны нулю, что даёт в случае концевой нагрузки шесть уравнений, связывающих компоненты векторов момента и внешней силы, обусловленных внешней нагрузкой, с компенсирующими её внутренними силами, задаваемыми тензором напряжений. Как следует из вышеприведённого анализа, нас интересуют здесь только нормальные напряжения при изгибе, задаваемые компонентой σ_{zz} . Пусть внешняя нагрузка приведена к главной силе и главному моменту. Они равны и противоположны соответствующим интегральным величинам, вычисленным в поперечном сечении с площадью A :

$$P_x = \int_A \sigma_{zx} dA, \quad P_y = \int_A \sigma_{zy} dA \quad - \text{перерезывающие силы}, \quad (6.2)$$

$$F_z = \int_A \sigma_{zz} dA \quad - \text{продольная сила}, \quad (6.3)$$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA, \quad M_y = - \int_A \sigma_{zz} x dA \quad - \text{изгибающие моменты}, \quad (6.4)$$

$$M_z = \int_A (\sigma_{zy} x - \sigma_{zx} y) dA \quad - \text{крутящий момент}. \quad (6.5)$$

Знаки в определении моментов M_x и M_y отвечают определению (1.1), определению изгибающего момента как распределённой силы на рис. 6.2 и заданию силовых граничных условий (1.9).

В общем случае необходимо найти распределения компонент напряжения для всех сечений при внешней нагрузке, заданной векторами $-P$ и $-M$ (из контекста ясно, какие векторы имеются в виду, поэтому знак при векторах далее будет опускаться). В приводимом ниже элементарном решении задачи о чистом изгибе (нагрузка только изгибающим моментом, $P_x=0$, $P_y=0$, $M_z=0$, $F_z=0$) с помощью упомянутого допущения Сен–Венана устанавливается, что напряжённое состояние устроено в определённом смысле однородно по всему объёму. Это позволяет не решать дифференциальные уравнения равновесия, а

получить из интегральных соотношений (6.4) алгебраические соотношения для искомого распределения нормальных напряжений при изгибе.

При чистом изгибе стержня (рис.6.2) момент постоянен в каждом его поперечном сечении. Подобное состояние можно осуществить, например, согнув тонкий гибкий стержень в кольцо и срастив концы. В случае упругого изгиба небольшой величины относительно двух осей при изгибающих моментах M_x и M_y решение даётся линейной суперпозицией состояний, связанных с M_x и M_y . Отметим, что случай изгиба консоли – стержня, закреплённого на одном конце (рис. 5.3), силой, приложенной к другому концу, более сложен, поскольку, кроме изгибных напряжений, имеется перерезывающая сила, при этом момент и напряжения в сечении будут функциями местоположения сечения, т.е., координаты z . Чтобы увидеть это, рассмотрим условие равновесия моментов в некотором сечении $A(z)$ стержня длиной L , закреплённого в точке $z_0=0$, нагруженного справа поперечной силой $\mathbf{P} = \{0, P, 0\}$. В сечении с координатой z момент, создаваемый внутренними силами относительно центра изгиба, уравновешен моментом силы \mathbf{P} относительно этой точки и направлен вдоль оси x :

$$M_x(z) = M(z) = (L - z) P.$$

Как отмечалось выше, момент и нормальные напряжения будут максимальны в месте закрепления $z=0$, т.е., в упомянутом опасном сечении.

6.3. Напряжения при чистом изгибе

6.3.1. Общие допущения в задаче об изгибе

Для вычисления нормальных напряжений, возникающих при чистом изгибе сделаем следующие допущения о стержне и его деформировании, принимаемые также и в более общем случае изгиба произвольной нагрузкой, сводящейся к упомянутым главному моменту и главной силе:

- стержень имеет призматическую форму;
- малые деформации (линейная теория) и малое перемещение перпендикулярно оси (порядка толщины стержня) – пренебрежение изменением относительного направления стержня и приложенных сил при изгибе;
- материал стержня – упругий, однородный, изотропный.

Как отмечалось, в каждом плоском сечении существует точка, называемая его центром изгиба, которая будет центром тяжести (геометрическим центром при однородном материале). Линия, являющаяся геометрическим местом таких точек, называется центральной линией. Линия, вдоль которой нормальные напряжения при чистом изгибе – нулевые, называется *нейтральной линией*. Для однородного стержня центр изгиба находится в геометрическом центре тяжести сечения, и нейтральная линия совпадает с центральной линией. Для симметричных относительно оси Oz сечений эта линия лежит в плоскости симметрии. Форма этой линии при изгибе и подлежит определению. Она задаётся двумя перемещениями $u(z)$ и $v(z)$, т.е. x - и y - координатами отклонения положения линии от её исходного состояния $v_0(z)=0$.

Малый участок гладкой кривой можно приблизить окружностью некоторого радиуса с центром в точке, называемой центром кривизны, т.е., изгиб центральной линии локально может быть приближен дугой окружности. Связь изгиба центральной линии с перемещениями во всём сечении даётся основной гипотезой о деформированном состоянии при изгибе, принимаемой в элементарной теории.

Гипотеза плоских сечений. При чистом изгибе поперечные сечения стержня остаются плоскими, но поворачиваются на некоторый угол относительно оси изгиба. Принимается, что это с достаточной точностью выполняется при общем изгибе.

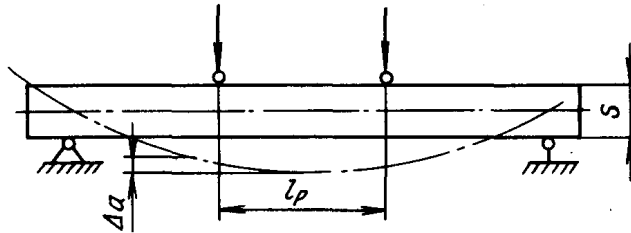


Рис. П2.5. Схема нагружения призматического образца чистым изгибом

Рис. 6.3. Схема испытаний на чистый изгиб [15]

Упражнение. Указать (качественно), при каких условиях на размерные характеристики образца схема испытаний на чистый изгиб, показанная на рис. 6.3, удовлетворяет условиям чистого изгиба.

6.3.2. Определение нормальных напряжений

Из гипотезы плоских сечений непосредственно следует геометрическое описание чистого изгиба. Введём два сечения, отстоящие друг от друга на расстояние dz . Найдём деформацию элемента длины, параллельного оси Oz и заключенного между этими сечениями. Считаем, что первое сечение (левое на рис.6.2) неподвижно, тогда как правое может перемещаться, оставаясь плоским. Равноотстоящие друг от друга поперечные сечения призматического стержня, равномерно нагруженного поперечным моментом, в силу продольной симметрии повернутся друг относительно друга на одинаковые углы. В рамках сделанных предположений общее малое движение сечения состоит из двух элементарных:

- поворот относительно оси Ox на малый угол $\Delta\theta_x = \kappa_x \Delta z$
- поворот относительно оси Oy на малый угол $\Delta\theta_y = \kappa_y \Delta z$.

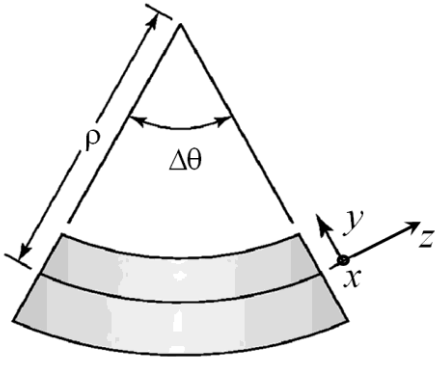


Рис. 6.4. Геометрия изгиба

Величины $\kappa_x = 1/\rho_x$ и $\kappa_y = 1/\rho_y$ представляют собою кривизны проекций изогнутой оси стержня с радиусами кривизны ρ_x и ρ_y , соответственно, на плоскости yOz и xOz .

Как отмечалось, положение нейтральной линии при изгибе, кривая изгиба, задаётся x - и y - координатами отклонения положения линии $u(z)$ от её исходного состояния $u(z)=0$. Рассмотрим изгиб относительно оси Ox . Из геометрических соображений нетрудно получить выражение для распределения вдоль направления Oy величины осевой деформации ε_{zz} , а с ней и продольного напряжения. Рассмотрим малый участок стержня длиной ΔL_0 , который при изгибе

относительно оси Ox принял форму дуги окружности углового размера $\Delta\theta$ (рис. 6.4), который полагаем малым. При изгибе верхняя часть стержня сжалась при повороте сечения, нижняя часть растянулась, а лежащая на нейтральной линии сохранила свою длину. Продольная деформация ε_{zz} на расстоянии y от нейтральной линии определяется из метрических соотношений на окружности:

$$\Delta L = (\rho + y)\Delta\theta, \quad \Delta L_0 = \rho\Delta\theta, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon = (\Delta L_0 - \Delta L) / \Delta L_0 = y / \rho_x \approx y / (\rho_x + y) \approx y / \rho = -\kappa_x y. \quad (6.6)$$

Здесь ρ – радиус кривизны линии, параллельной нейтральной. Деформация линейно распределена по толщине стержня. Вертикальное перемещение v нейтральной линии (перпендикулярно оси, в плоскости изгиба) будет функцией длины z : $v=v(z)$. Вспоминая выражение для кривизны кривой, задаваемой зависимостью $v=v(z)$, напомним –

$$\rho_x = 1/\kappa_x = (1 + v_z'^2)^{3/2} / v_z'' \approx 1/v_z''. \quad (6.7)$$

Приближённое равенство выполнено вследствие полагавшейся относительной малости изгиба, $v_z'^3 \ll 1$. Здесь, в отличие от часто принимаемого определения, вторая производная взята не по абсолютной величине, поэтому кривизна может быть отрицательной: различаются вогнутая ("загиб вверх") и выпуклая ("загиб вниз") линии $v=v(z)$, имеющие, соответственно, положительную или отрицательную кривизну. В соответствии с этим выбран знак в соотношении (6.6) и ниже, в формуле (6.8) для относительных удлинений, связанных с изгибом относительно осей Ox и Oy .

Общее относительное удлинение, т.е. деформация элемента данной длины, имеющего координаты x и y относительно центра изгиба, связано с поворотом сечения при изгибе относительно двух взаимоперпендикулярных направлений:

$$\varepsilon = -\kappa_x y - \kappa_y x. \quad (6.8)$$

В формуле (6.8) мы исключили возможность поворота сечения около оси z (кручение). Кроме того, в соответствии с гипотезой плоских сечений, мы исключили возможность поступательного перемещения при изгибе в направлении осей Ox и Oy . Предположение об относительной малости перемещений позволяет линейно суммировать деформации, связанные с углами поворота вокруг разных осей.

Исключая из рассмотрения особые случаи, связанные с приложением сосредоточенных нагрузок, далее будем считать, что напряжение и деформация связаны между собою

обычным законом Гука, причём, в силу относительной малости поперечных компонент напряжений, мы учитываем только нормальные к сечению –

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon . \quad (6.9)$$

Из (6.8)–(6.9) следует закон распределения нормальных напряжений по сечению:

$$\sigma_{zz} = -E(\kappa_x y + \kappa_y x) . \quad (6.10)$$

Вблизи тех сечений, где приложены сосредоточенные силы, формула (6.6) теряет силу. Однако принцип Сен–Венана позволяет утверждать, что область нарушения линейного закона распределения напряжений изгиба простирается на длину порядка поперечного размера сечения h . Таким образом, можно считать, что при чистом изгибе (с моментом, постоянным вдоль оси) длинного стержня распределение нормальных напряжений на большей части его длины не зависит от продольной координаты z .

Упомянем ещё несколько ситуаций, где полученный результат может быть неточным или неправильным:

- композитные материалы неоднородны, и для перехода от (6.8) к (6.9) нужно вводить усреднённые характеристики;
- неупругий материал может оставаться частично упругим в окрестности линии изгиба, где напряжение меньше, а в остальном сечении формула (6.9) некорректна;
- не прямые балки, или имеющие непостоянное сечение вдоль длины.

Эти и некоторые другие случаи требуют специального рассмотрения.

Для того, чтобы связать распределение напряжений с внешней нагрузкой (граничными условиями задачи об изгибе), рассмотрим стержень, нагруженный системой сил, не вызывающей кручения, т.е. положим, что линия действия каждой из них проходит через центр изгиба соответствующего сечения (но пока не обязательно перпендикулярна оси стержня). Рассматривая нормальные напряжения в поперечном сечении, поместим в этом сечении оси местной системы координат xOy . Внесём в интегральные уравнения равновесия (6.4) выражение (6.10) для нормального напряжения и проинтегрируем:

$$M_x = \int E(\varepsilon_0 - \kappa_x y - \kappa_y x) y dA = E \left(\int \varepsilon_0 y dA - \int \kappa_x y^2 dA - \int \kappa_y x y dA \right) = E(\varepsilon_0 y_c A - \kappa_x J_{xx} + \kappa_y J_{xy}) ,$$

$$M_y = - \int E(\varepsilon_0 - \kappa_x y - \kappa_y x) x dA = E \left(- \int \varepsilon_0 x dA + \int \kappa_x x y dA + \int \kappa_y x^2 dA \right) = E(-\varepsilon_0 x_c A - \kappa_x J_{xy} + \kappa_y J_{yy})$$

Здесь x_c , y_c – координаты центра тяжести фигуры – плоскости сечения, J_{yy} , J_{xy} , J_{xx} – моменты инерции относительно осей Ox , Oy – осевые и центробежный (см. [3]):

$$J_{xx} = \int y^2 dA , \quad J_{yy} = \int x^2 dA , \quad J_{xy} = - \int x y dA .$$

Известно, что направления осей Ox , Oy можно выбрать так, чтобы центробежный момент J_{xy} равнялся нулю – это две главные оси тензора моментов инерции, лежащие в поперечном сечении, а начало координат – расположить в центре тяжести, вследствие чего $x_c = y_c = 0$. Выбор несложно сделать в случае симметрии сечения. Тогда выписанные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} M_x &= -E \kappa_x J_{xx} , \\ M_y &= E \kappa_y J_{yy} , \end{aligned}$$

откуда получаются выражения для кривизн проекций линии изгиба κ_x , κ_y :

$$\kappa_y = 1/\rho_y = M_y / E J_{yy} , \quad \kappa_x = 1/\rho_x = - M_x / E J_{xx} . \quad (6.12)$$

Моменты M_y и M_x представляют заданную внешнюю изгибную нагрузку, и нормальное напряжение выражается через неё:

$$\sigma_{zz} = E (-\kappa_{xy} - \kappa_{yx}) = (M_x / J_{xx}) y - (M_y / J_{yy}) x . \quad (6.13)$$

Пусть, например, момент относительно оси Ox и растягивающая сила отсутствуют, тогда это соотношение принимает вид ("основная формула теории изгиба"):

$$\sigma_{zz} = - (M_y / J_{yy}) x . \quad (6.14)$$

Из соотношений (6.6)–(6.7), (6.9) можно также получить уравнение для распределения перемещений средней линии вдоль оси при изгибе:

$$M_y / E J_{yy} = v''_z / (1 + v''_z)^{3/2} \approx v''_z \quad (6.15)$$

Его решение – парабола второго порядка. Вследствие пренебрежения слагаемым $\sim v''_z$ уравнение (6.13) пригодно только для случая малых относительных поперечных перемещений линии изгиба. В случае чистого изгиба большого тонкого стержня следует учитывать это слагаемое.

Стержень, работающий на изгиб, часто называется балкой. Балки, подобно тонким стержням, работающим на растяжение, с однородным распределением напряжения по сечению, можно рассчитывать на прочность при изгибе по допускаемым напряжениям. Для этого нужно потребовать, чтобы наибольшее (по абсолютной величине) растягивающее или сжимающее напряжение не превышало допускаемого значения. Максимальное напряжение при изгибе возникает в точке y_m , наиболее удалённой от нейтральной линии. Величина

$$W_{\max} = J_{xx} / y_m \quad (6.16)$$

называется в технике *моментом сопротивления сечения при изгибе*. Она является геометрической характеристикой, её величины вычислены для всех распространённых профилей сечения балок и приводятся в таблицах. Максимальное напряжение при изгибе, которое обычно требуется оценить, равно:

$$\sigma_{\max} = M / W_{\max}$$

Для трубы, например, $W_{\max} = \pi R^3 / 4 (1 - r^4 / R^4)$, где r , R – её внутренний и наружный радиусы. Для прямоугольного сечения $b \times h$ $x_{\max} = h/2$, $J_x = bh^3/12$, $W_x = bh^2/6$. Следовательно, сопротивление бруса прямоугольного сечения зависит от квадрата толщины и лишь линейно – от его ширины, причем основная нагрузка приходится на наиболее удалённые от середины участки. Отсюда понятно широкое применение двутавровых балок и трубчатых конструкций.

Если выполнено условие $R = r + \delta$, $\delta \ll R$, то формулу можно приближённо записать как

$$\sigma_{\max} = M / (\pi R^3 / 4 (1 - r^4 / R^4)) \approx M / (\pi R^3 / 4 (1 - (1 - 4\delta/R))) \approx M / (\pi R^2 \delta),$$

т.е. для тонкостенной трубы максимальное напряжение обратно пропорционально толщине трубы и квадрату радиуса. Расход металла при той же длине пропорционален $R\delta$. Поэтому, если труба, как силовой элемент, работает только на изгиб, то при фиксированной массе на ед. длины в пределах определённого соотношения размеров труба с большим радиусом держит пропорционально большие распределённые нагрузки (ср. – полые стебли травы).

7. Неупругость: пластичность, ползучесть, разрушение

В настоящей главе рассмотрены основные особенности НДС, связанные с пластическим поведением. Пластичность – это один из видов неупругости. Упругость кристаллических и поликристаллических тел связана с наличием дальнего порядка в кристалле. В аморфных твёрдых телах нет регулярной структуры, но положение атомов в обоих случаях фиксировано, и при приложении достаточно малой нагрузки увеличение расстояния между атомами приводит к возвращающей силе. Возникающая реакция на нагружение – деформация и внутренние силы, исчезают при снятии упругой нагрузки и возвращении в исходное состояние.

Неупругость означает необратимость деформации. Она возникает, если соседство атомов в процессе нагружения необратимо изменяется, что после снятия нагрузки макроскопически проявляется как остаточная деформация. В предельном случае неупругость проявляется как разрушение – разделение на части нагружаемого тела. Неупругость можно наблюдать не менее или более часто, чем упругость.

Внутреннее строение материалов, применяемых в технике, весьма разнообразно, соответственно, различно и поведение материалов под нагрузкой. Примеры последовательно усложняющейся структуры твёрдого деформируемого тела:

- монокристалл;
- конструкционная сталь (поликристалл);
- стекло (аморфный материал);
- пластик (полимер);
- углепластик (полимерный композит);
- железобетон (композит сложного строения с металлической арматурой);
- грунт (скальный, глинистый, песчаный ...).

Несмотря на сильные различия, есть общие черты неупругого поведения ряда материалов при небольших деформациях, и их удаётся описать в рамках общих моделей. Естественно, упрощённое описание будет справедливо только с некоторой погрешностью, поэтому результаты соответствующих "теорий неупругости" на практике применяются только в области, где доступны экспериментальные данные по свойствам материала в заданных условиях работы. Основные модели неупругости, применяемые в технике, это – теория пластичности, теория ползучести и механика разрушения (механика трещин).

7.1. Где в технике изучают неупругость

В зависимости от характера работы изделия, потеря упругости может быть как нежелательным, так и необходимым явлением. Примеры, где применяется анализ напряжённого состояния на предмет его неупругости:

- оценка изменения формы и размера детали при наличии жёстких допусков на размеры (в двигателях, турбинах и др.) – неупругость (пластичность) недопустима;
- оценки предельного состояния конструкций под нагрузкой (часть материала может пластически деформироваться, но это не означает потери работоспособности всей конструкции, например, подземного газопровода при подвижках грунта) – неупруго (пластически) деформированное состояние, удовлетворяющее определённым

критериям, может быть допустимым как временное, например, до ремонта или как установившееся;

- оценка остаточных напряжений: а) вредных (например, при сварке); б) полезных – преднапряжение деталей, работающих на разрыв (автофретирование оружейных стволов, закалка стекла)
- процессы формовки, штамповки и т.п. (пластичность – условие работы);
- развитие процессов разрушения – эволюция упруго–пластического НДС в окрестности концентраторов напряжения (отверстия, трещины, ...);
- НДС при катастрофических и аналогичных процессах (деформирование и разрушение при разрыве, взрыве, ударе и т.п.).

Ниже нас будут интересовать те квазистатические процессы, в которых неупругость проявляется как пластичность.

7.2. Пластичность

Термин "пластичность" в механике используется в более узком смысле, чем в житейском понимании пластичности как некоторой "податливости". Пластичность в механическом понимании имеет вполне конкретные проявления и физическую природу. Отличительные свойства пластического деформирования суть независимость состояния от скорости деформации до относительная высокой её величины – "мгновенность" в масштабе времени 0,001–0,01с и "пороговость" – интенсивное пластическое деформирование происходит, когда возрастающая нагрузка достигает некоторого уровня порога пластичности (предела текучести). Для большинства металлов пластическое поведение в широком диапазоне условий проявляется единообразным и относительно простым образом, что позволило построить его достаточно общее описание. Созданная в 10–40-х гг. XX в. *теория пластичности* (ТП) представляет собой математическое описание механики пластически деформируемых тел. Она создавалась после теории упругости и является отчасти распространением по аналогии её законов в область нелинейного деформирования. Хорошее введение в теорию пластичности дано в книге [3].

Основной объект экспериментальных исследований, это – металлы, и они наиболее исследованы. Тому есть несколько причин, основные из которых следующие:

- а) в силу своей поликристаллической структуры большинство металлов ведёт себя при неупругом деформировании единообразно, в широком интервале температуры;
- б) это один из наиболее широко используемых типов конструкционных материалов;
- в) полученные для металлов закономерности пластического поведения достаточно просты для истолкования, проверки, использования и обобщения.

При описании ТП мы будем иметь в виду металлы, как объект исследования, но терминология и методы ТП могут быть использованы и для других (структурно) материалов, хотя и с необходимыми оговорками и проверками, например, для грунтов.

Зависимость пластических и упругих свойств металла от кристаллической структуры и сил сцепления атомов изучается физикой металлов. Задачи ТП как механического учения для наших целей могут быть сформулированы следующими:

Во-1, выделить существенные факторы, определяющие пластическое НДС – аксиоматизация формального аппарата;

Во-2, построить определяющие соотношения пластического деформирования – соотношения между напряжениями и деформациями, согласующиеся с опытными данными с необходимым уровнем точности;

В-3, развить технику расчёта НДС в рамках построенных соотношений.

С развитием численных методов часть теоретических разработок по задаче 3 потеряла своё значение – некоторые методы перестали быть единственным и простым способом получения количественных результатов. С другой стороны, в теории пластичности открылись новые возможности математического моделирования пластического НДС, например, при циклическом нагружении, или в окрестности трещины, недоступного ранее для детального теоретического анализа. Вытекающая отсюда задача ТП –

В-4, разработать эффективные математические модели, пригодные для расчётов упруго-пластического НДС численными методами.

Под эффективностью понимается точность и экономичность расчёта. К настоящему времени все сформулированные задачи решены с определённой точностью, хотя уточнения, детализация моделей и разработка альтернативных подходов идут непрерывно.

Близкий к пластичности по своим проявлениям класс явлений необратимого "пластичного" (без разрывов) деформирования, идущих, в отличие от пластичности, на конечном интервале времени и при меньших нагрузках, без выраженного порога текучести, относят к классу т.н. "реологических". Этот класс требует для своего описания более сложных моделей, которые строятся по аналогии с моделями теории пластичности, хотя физические механизмы этих явлений различны. В применении к металлам реологические свойства объединены термином "ползучесть", который, однако, иногда используется и для других материалов, например, бетона.

Дальнейшее изложение характерных особенностей описываемых явлений (пластичность и ползучесть), имеет целью пояснение мотивации математических моделей, на основе которых строятся численные алгоритмы. Изложение самих основ сведено к минимуму. Чтобы сделать мотивацию проще, а математический каркас модели более убедительным, далее кратко изложены основные физические факты, из которых непосредственно следуют предположения, принимаемые в качестве основ математической модели пластичности.

7.2.1. Физические представления

Главное экспериментально проверенное допущение об атомной структуре, которое помогает наглядно истолковать экспериментальные факты, положенные в основу теории пластичности металлов – это представление о *поликристаллическом* строении металла. Это, с одной стороны ("*поли-*"), позволяет в большинстве случаев считать металл макроскопически однородным и изотропным, с другой стороны ("*-кристаллической*") – объясняет ряд явлений пластичности как проявления дефектов кристаллического строения. В качестве физического введения при изложении основ феноменологии рассмотрим истолкование двух экспериментальных фактов из разряда фундаментальных для теории пластичности [3].

1. **Идеальная и фактическая прочность кристаллических тел.** Идеальный кристалл допускает упругие сдвиговые деформации большой величины, при которых порядок

расположения в идеальном кристалле не нарушается. Предельную деформацию можно оценить из опытов на растяжение. Максимальная величина предельной упругой деформации, при превышении которой идеальный кристалл разрушается, достигает величины $\varepsilon_{\text{perf}} \sim 0,1$. Такие величины были получены, например, при деформировании совершенных нитевидных кристаллов железа (металлические "усы"). Эту величину можно интерпретировать как предельную степень отклонения атомов от равновесия в идеальном кристалле, при которой сохраняется обратимость, т.е. упругость деформирования. Прочность на разрыв идеального кристалла σ_{perf} определяется, в основном, энергией межатомного взаимодействия, и во вторую очередь – типом кристаллической решётки. Упругий предел деформации кристалла оценивается как:

$$\sigma_{\text{perf}} = E \varepsilon_{\text{perf}} .$$

Реально у металлов неупругость (необратимость) можно наблюдать, начиная с $\varepsilon \sim 10^{-4}$, а пластическое деформирование – при деформациях $\varepsilon \sim 10^{-3}$. Отличие теоретического предела упругости от фактического по напряжениям составляет 2÷3 порядка.

Причина повышенной податливости кристаллической решётки, приводящей к снижению порога текучести, связана с дефектами атомного строения, дислокациями. Расположение атомов в окрестности дислокации таково, что небольшие напряжения в её окрестности вызывают необратимые относительные смещения атомов в её окрестности и перемещение дислокации как целого. Это перемещение приводит к необратимому скольжению – смещению атомных плоскостей друг относительно друга (рис. 7.1), т.е. к смещению целой части кристаллического зерна относительно другой части, что макроскопически проявляется как сдвиговая деформация материала, складывающаяся из деформаций отдельных зёрен.

При перемещении дислокации, как и при упругом растяжении всего кристалла, среднее расстояние между атомами и упругую энергию в каждый момент практически можно считать отвечающими упругому НДС, поскольку количество (плотность) дислокаций очень мало, и необратимые затраты энергии на перемещение дефектов в целом на порядки меньше запаса упругой энергии при нагружении. Поэтому необратимое деформирование неидеального кристалла требует меньшей внешней нагрузки и меньшей механической работы, т.е. не требует большой "энергии активации", как это могло бы быть при "единовременной" сдвиговой деформации идеального кристалла как целого, вдоль некоторой плоскости скольжения.

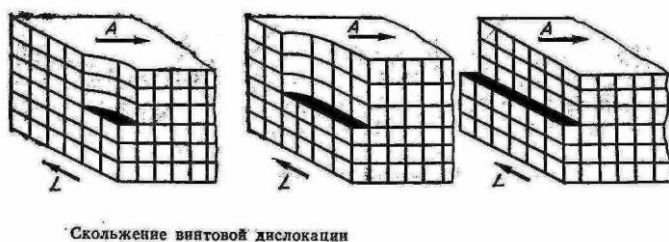


Рис. 7.1. Перемещение дислокации при сдвиговой нагрузке ([8])

2. Полосы скольжения (линии Чернова, линии Людерса) при одноосном растяжении.

В экспериментах по 1–осному растяжению поликристаллических образцов при травлении боковой поверхности деформированного металла выявляются структуры в виде тонких линий, направленных под углом 45° к направлению растяжения (рис. 7.2). Это соответствует плоскостям *максимальных касательных напряжений*. При заданном НДС касательные напряжения на площадке зависят от её ориентации, и, как отмечалось в п.1.5.1, в системе главных осей тензора напряжений экстремальные значения касательных напряжений достигаются в плоскостях, каждая из которых параллельна одной из главных осей напряжений и образует угол 45° с другими осями. При одноосном растяжении одна из главных осей параллельна направлению растяжения, остальные – перпендикулярны ей.

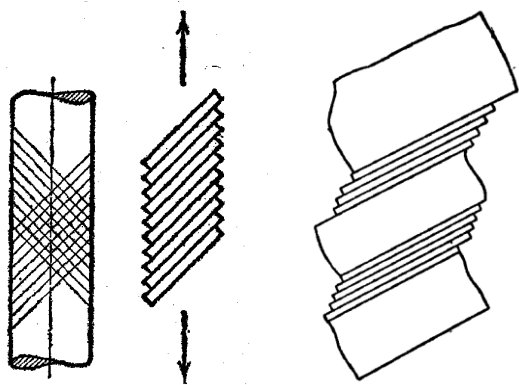


Рис. 7.2. Полосы скольжения при одноосном растяжении и схема скольжения атомных слоёв

Таким образом, утверждается, во–1, что пластическое деформирование кристалла связано с наличием дефектов структуры кристалла и с перемещением дефектов при приложении нагрузки, а во–2, основное влияние на страгивание и перемещение таких дефектов оказывают *сдвиговые напряжения* (рис. 7.2). Смещение групп атомов (тонких слоёв) друг относительно друга начинается там, где максимальна соответствующая нагрузка (внутренняя сила), в данном случае – касательное напряжение. Эти утверждения позволяют дать простое качественное объяснение большинству экспериментальных фактов. Они

используются при построении количественных теорий прочности.

Вспомним, далее, что поликристалл состоит из монокристаллических зёрен, ориентация которых часто, хотя и не всегда, имеет вполне случайное направление. Податливость относительно сдвигового напряжения, вызывающего движение дефекта, в определённых направлениях сильнее. Эти направления отвечают т.н. *плоскостям скольжения*. Известно, что в масштабе отдельного зерна неупругая деформация в значительной степени ограничена узкими полосами (скольжения), имеющими толщину порядка 100 межатомных расстояний. Плоскости, которым они параллельны, часто являются кристаллографическими плоскостями, в которых атомы упакованы плотнее, чем в перпендикулярном и близких к нему направлениях. Средний интервал между полосами скольжения имеет порядок ~ 1000 атомных расстояний, и решётка между полосами остаётся "нетронутой", т.е., деформирована после приложения нагрузки только упруго (рис.7.2 справа). Количество таких направлений – плоскостей скольжения для разных типов решётки фиксировано и невелико, обычно менее 10. Для любого направления плоскости скольжения относительно направления внешней силы найдётся приблизительно одно и то же количество зёрен, ориентированных по отношению к локальному направлению приложения силы наиболее "оптимально", т.е., податливо. Эти зёрна деформируются первыми. В опыте с одноосным растяжением локальный сдвиг в микрокристалле может происходить под углом, отличным от угла 45° относительно направления растяжения. Но в среднем эти сдвиги сосредоточены в окрестности этого угла, т.е. в направлении максимального касательного (макро)напряжения в образце. Подобная точка зрения на отдельный кристалл, вкупе с пониманием того, что мы имеем дело с поликристаллом, позволяет физически объяснить основные экспериментальные факты.

Отметим, что начало "теории неупругости" можно отсчитывать от 1864г., когда француз Треска опубликовал своё условие начала пластичности по максимальному касательному напряжению. Тем самым он ухватил суть явления: *пластическое течение металла связано с наличием сдвиговых напряжений достаточных* для сдвиговых деформаций, происходящих на микроскопическом и макроскопическом уровне.

То обстоятельство, что пластическая деформация необратима, т.е., что при обращении знака нагрузки исходная структура не восстанавливается, связывается с наличием взаимодействия дефектов кристаллического строения. Общее движение дислокаций зависит от деталей предыстории атомарного окружения каждой из них, которые невосстановимы при изменении знака нагрузки, и перемещение атомов при движении дислокаций и их взаимодействии становится в целом необратимым.

7.2.1.1. Эксперименты по пластическому деформированию и их истолкование

Рассмотрим другие важные явления при пластическом деформировании, многократно наблюдаемые на практике, и их "микроскопическое" истолкование:

- Упругость деформации кристалла и поликристалла на макроскопическом уровне имеет место до определенного уровня нагрузки, что проявляется как наличие *порога текучести* – при нарастании нагрузки, по достижении ею определённой величины упругое деформирование сменяется пластическим. На микроскопическом уровне это объясняется тем, что для страгивания дислокации в её окрестности должно существовать поле напряжений определённого уровня; этот уровень, однако, существенно меньше напряжения на разрыв в идеальном кристалле;
- Величина этого порога текучести – предел текучести поликристаллического тела, *близка к максимальному касательному напряжению* при заданном НДС; интерпретация этого обсуждалась выше;
- При превышении порога текучести пластический материал не разрушается, а необратимо "течёт" (до тех пор, пока не начинают появляться и расти микротрещины). Это связано с тем, что движение дефектов внутри кристаллов макроскопически незаметно, хотя и выявляется методами металлографии, при выходе же дефектов на межзёрненную границу возникают и растут микропустоты;
- При деформировании материала возрастающей нагрузкой изменение объёма наблюдается только при упругом деформировании до порога текучести, а при дальнейшем пластическом деформировании объёмные деформации практически отсутствуют, что позволяет *полагать сжатие материала, если оно есть, упругим*. Это является следствием того, что среднее расстояние между атомами при скольжении атомных слоёв не меняется;
- Поскольку страгивание и перемещение дислокаций требует, хотя и малого, но конечного времени, *предел текучести зависит от скорости деформации*;
- Модуль упругости материала после пластического деформирования не изменяется, поскольку кристаллическое строение при пластическом деформировании в целом нарушается очень слабо;

- Как и в других аналогичных случаях, порог активации движения дислокаций зависит от температуры, и практически всегда *предел текучести убывает с увеличением температуры*.

7.2.2. Характерные особенности диаграммы деформирования при пластичности

Рассмотрим далее, как соотносится напряжение с деформацией при пластическом деформировании. Интегрально это демонстрируется диаграммой деформирования: зависимостью измеряемого напряжения или его эффективной величины, от деформации. Она обычно снимается в экспериментах на одноосное растяжение (рис. 5.2) или, при изучении сдвиговых нагрузок, на тонких трубах (рис. 1.10). Испытание может идти при заданной последовательности шагов по нагрузке (т.е., приложенной силе или моменту), или по деформации (удлинению), что проще. Диаграмма одноосного деформирования снимается при монотонном растяжении (сжатии) и фиксируется сила, действующая на стержень. Пластическое деформирование происходит только в процессе изменения нагрузки, а при фиксированной нагрузке (растяжении) деформация и продольная сила не растут. Это справедливо с достаточной точностью в достаточно широком диапазоне скорости деформации. Исключения изучаются отдельно.

При вычислении продольного напряжения в образце сила обычно отнесена к начальному сечению образца, которое по мере растяжения локально уменьшается, поэтому график вычисленного указанным выше образом максимального напряжения как приложенная сила к площади сечения называется *условная диаграмма деформирования*. Диаграмма формируется не только напряжением и деформацией, но и текущими условиями испытания. Поскольку наблюдать изменение сечения на практике часто трудно, а сила – известна, большинство диаграмм строится и применяется таким образом. Если необходимо знать, какое фактическое максимальное напряжение выдерживает данный материал, то для этого строится *действительная диаграмма деформирования*, на которой напряжение определяется с учётом фактического минимального сечения образца, измеряемого при нагружении.

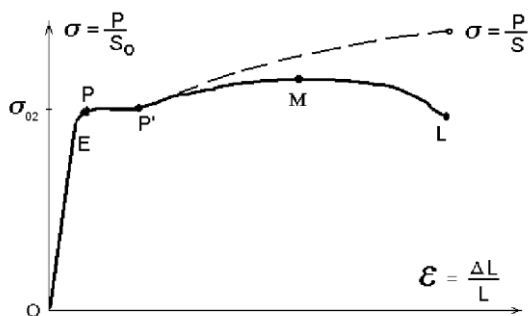


Рис. 7.3. Диаграмма 1-осного растяжения (условная и действительная)

Рассмотрим характерные точки и участки диаграммы.

Предел упругости: напряжение σ_E в точке E , до которого материал не получает сколько-нибудь заметных остаточных деформаций. Чисто упругая деформация в металлах обычно очень мала: 0,001–0,005%. Величина предела упругости определяется фактическим допуском на неупругую деформацию в данном узле, и в справочники её обычно не включают.

Условный предел текучести $\sigma_{0.2}$: напряжение в точке P , $\sigma_y = \sigma(0,002)$, при котором *остаточная* деформация при 1-осном растяжении $\varepsilon_p = 0,2\%$. В справочниках в качестве предела текучести приводится эта величина. Можно спросить,

справочниках в качестве предела текучести

почему фиксируется деформация и определяется напряжение текучести? Почему не применяется соответствующая "условная деформация текучести" ε_y при данном напряжении? Ответ понятен из диаграммы деформирования рис. 7.4: после начала пластичности наклон заметно снижается, причём при $\varepsilon=0,002$ напряжённое состояние большинства металлов пластическое. При этом:

- если заметная пластичность начинается, например, при $\varepsilon_y=0,1\%$, то при дальнейшем пластическом течении по достижении деформацией значения $\varepsilon_{02}=0,2\%$ приложенное в этот момент напряжение σ_{01} не сильно будет отличаться от условного предела текучести σ_{02} (рис.7.3);
- пластичность как отклонение от упругого поведения у разных материалов начинается при разной деформации. Но, если известен условный предел текучести, т.е. напряжение, при котором деформация заведомо неупруга, то в приближении идеальной пластичности, эту эффективную пороговую деформацию текучести несложно оценить из ε_y –на Гука, подставив в него табличные значения: $\varepsilon_y=\sigma_y/E$.

Таким образом, σ_{02} может служить характеристикой начала пластического течения, и эта величина может быть с достаточной точностью измерена на практике, например, в условиях заводской лаборатории.

Рассмотрим остальные области диаграммы –

"Площадка текучести" PP' – наблюдается не всегда. Она связана с постепенным распространением области пластической деформации на весь образец;

Возрастающий участок неупругого деформирования РМ (*участок упрочнения*) связан с *упрочнением* – увеличение предела текучести при пластическом деформировании; после разгрузки и при повторном нагружении измеряемый предел текучести, т.е. начало интенсивного пластического деформирования, будет отвечать достигнутой перед этим максимальной величине нагрузки;

Предел прочности или временное сопротивление на разрыв – напряжение в точке М ("временное" – т.к. при такой нагрузке образец уже долго не выдерживает и разрушается);

Спадающий участок МL (*зона местной текучести*) – связан с уменьшением сечения образца – образованием *шейки*. Деформирование становится неустойчивым – часть образца с малым сечением сильно растягивается при убывающем сечении, в то время как остальная часть образца упруго восстанавливается, при этом приложенная к сечению *полная* сила убывает с ростом продольной деформации, что и приводит к отрицательному наклону при использовании величины площади исходного сечения для вычисления условного напряжения.

7.2.2.1. Разгрузка и циклическое нагружение

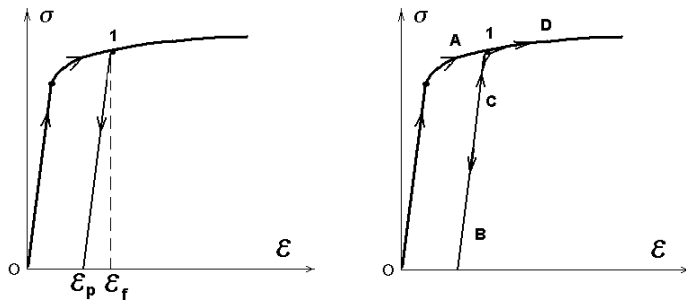


Рис. 7.4. Упрочнение, остаточная деформация, немонокотное нагружение

Если мы в точке 1 диаграммы деформирования (рис.7.4) после пластического растяжения станем уменьшать нагрузку, растянутый образец начнёт укорачиваться, но до известного предела – при нулевой нагрузке наблюдается *остаточная деформация*: ϵ_p , причём уменьшение удлинения после снятия нагрузки происходит упруго, деформация: ϵ_e . Полная деформация в точке 1 на пути OA1 складывается из суммы:

$$\epsilon_f = \epsilon_p + \epsilon_e ,$$

Если мы возобновим деформирование по той же программе, то на участке BC деформирование будет близким к упругому. Это означает увеличение предела текучести в результате неупругого деформирования, которое называют *упрочнением*. Участок монотонного роста после начала пластичности на диаграмме также иногда называется областью упрочнения. Почему рост предела текучести при пластическом деформировании называют "упрочнением"? Можно предложить следующее объяснение. Под прочностью вообще понимается способность противостоять нагрузкам. Поскольку в технике пластичность часто нежелательна, то "упрочниться" в данном случае означает увеличить свою способность *упруго* противостоять нагрузкам. При этом способность пластически деформироваться (т.е. максимальная достижимая деформация до разрушения после начала пластичности) в целом уменьшается.

Таким образом, в то время как модуль упругости, определяемый сортом атомов и кристаллическим строением, слабо зависит от предыстории деформирования и термообработки, предел текучести – это величина, зависящая от ряда факторов, в том числе от предыстории, и имеющая точность определения порядка 10%.

7.2.2.2. "Поликристаллическое" истолкование эффектов упрочнения

Природа явления упрочнения в металлах связана с их поликристаллическим строением. Выше говорилось, что перемещение атомов при необратимом пластическом деформировании происходит вдоль немногих выделенных направлений – плоскостей скольжения. При нарастании нагрузки в поликристаллическом образце в первую очередь начинают пластически течь те зёрна, в которых плоскости скольжения ориентированы в направлении наибольших касательных напряжений. По мере роста деформации данного зерна начинают сказываться его границы с соседними – дефекты строения начинают упираться в границы зерна (объяснение полос скольжения). После этого данное кристаллическое зерно деформируется упруго, т.е. его жёсткость возрастает и при увеличении нагрузки настаёт черёд пластической деформации других зёрен, где отклонение

от плоскости "45° к оси нагружения" первоначально было большим. Для их деформирования нужна ещё большая нагрузка. Когда их пластическое деформирование завершается, настаёт очередь следующих зёрен или других плоскостей пониженного сопротивления сдвигу. Это проявляется на диаграмме как медленный рост нагрузки, требуемой для деформирования – участок упрочнения.

После разгрузки возникают локальные остаточные напряжения в окрестности "сдвинутых" кристаллов (неупруго деформированных зёрен). При новом деформировании в прежней конфигурации сначала снимаются эти остаточные напряжения, затем должен быть достигнут предел упругости в ранее достигнутом состоянии, и только после этого начинается пластическое деформирование – эффективный предел текучести повышается. При разгрузке и перемене знака нагрузки (рис.7.5) напряжения вокруг "застопорившихся" дефектов складываются с вновь возникающим напряжением сопротивления внешней нагрузки обратного знака, и к данному кристаллику фактически оказывается приложенной большая внутренняя сила, заставляющая его при возрастании нагрузки пластически течь при меньшей внешней нагрузке. В результате предел эффективный текучести "в обратную сторону", т.е. при замене растяжения сжатием, может уменьшиться – т.н. *эффект Бушингера* (или *Баушингера*).

Таким образом, часть материала после пластического деформирования повышает свою способность сопротивляться пластическому сдвигу, что отвечает возрастанию предела текучести – "упрочнению" относительно начала пластического деформирования. При этом, однако, возникшие скопления дефектов на межзёрнных границах ослабляют связь атомов на этих границах, способствуя появлению микропустот, микро-, а затем и макротрещин – образец теряет способность непрерывно деформироваться – охрупчивается, и фактически становится менее прочным.

При отжиге образца дефекты и скопления дефектов за счёт диффузии частично исчезают, эффект упрочнения пропадает: металл становится мягким – "отожжённым".

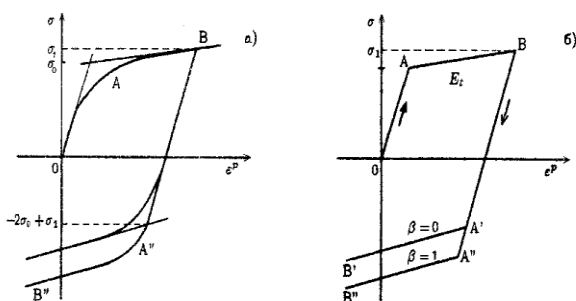


Рис. 7.5. Циклическое нагружение и эффект Бушингера

7.2.2.3. Схематизация диаграмм растяжения

Расчёты НДС разного уровня сложности всегда имеют дело с более или менее упрощённой диаграммой деформирования по отношению к реальной. Используемые в различных подходах идеализированные модели следующие (рис.7.6):

Жёстко–пластичность: (А): упругий участок деформирования не принимается в расчёт. Используется, когда упругая деформация пренебрежимо мала, например, в задачах о воздействии взрыва. Реально, например, в отожжённой меди предел текучести может быть очень малым, но участок упрочнения – большим (пунктирная кривая).

Идеальная пластичность (упруго–пластичность) (Б): упрочнение не принимается в расчёт, эффективное напряжение равно пределу текучести. Пример: чистое железо.

Упруго–пластичность с упрочнением.

а) Линейное упрочнение (В) – аппроксимация прямыми линиями участков диаграммы деформирования (упругого участка ОР и пластического РР'). При этом вводится т.н. *модуль упрочнения* (tangent modulus, касательный модуль) E_t , который не зависит от деформации:

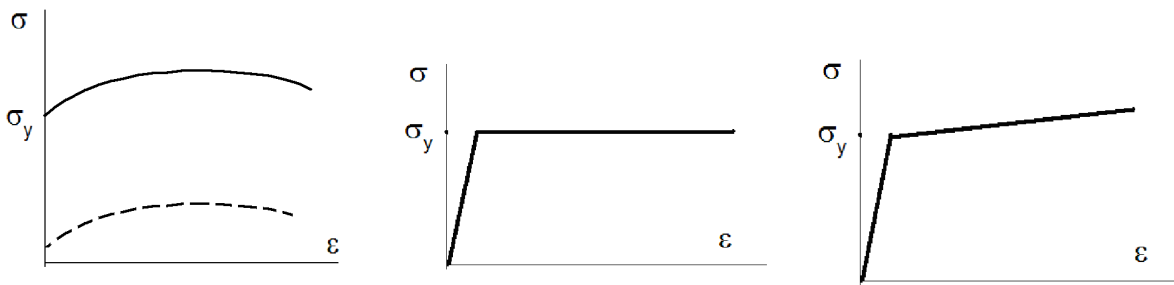
$$\sigma(\varepsilon) - \sigma_y = E_t (\varepsilon - \varepsilon_e)$$

б) Степенное (или иное нелинейное) упрочнение – возрастающий участок области пластичности аппроксимируется зависимостью

$$\sigma(\varepsilon) - \sigma_y = H(\varepsilon) (\varepsilon - \varepsilon_e),$$

где $H(\varepsilon)$ – степенная или иная функция.

Заметное упрочнение наблюдается, например, в легированных сталях.



А) Жёстко–пластичность, упругая деформация = 0

Б) Идеальная пластичность: при пластичности, $\sigma = \sigma_y$

В) Упруго–пластичность с линейным упрочнением: $\sigma = \sigma_y + E_t (\varepsilon - \varepsilon_y)$

Рис. 7.6. Схематизация упруго–пластического поведения при разных моделях пластического деформирования

Отметим, что в случае идеальной пластичности после достижения нагрузкой порога текучести несущая способность области, охваченной пластическим течением, нулевая, и целостность конструкции может поддерживаться только другими, ещё упругими, слоями материала. Простые примеры НДС в пластическом материале:

- 1–осное растяжение – сразу всё сечение становится пластичным
- труба под внутренним давлением – упругое сечение уменьшается с ростом нагрузки (вопрос – где первыми появляются пластические деформации?)
- упруго–пластический изгиб – имеется упругая окрестность нейтральной линии (плоскости)

В численных методах решения квазистатических уравнений МДТТ идеальная пластичность не моделируется, поскольку в расчётных методах необходимо, чтобы функция $\sigma(\varepsilon)$ при нагрузке была строго монотонной (в динамике монотонность

необязательна, т.к. пластическое деформирование на шаге по времени сдерживается инерцией). Для моделирования (почти) идеальной пластичности в численном расчёте вводится упрочнение минимальной величины, что соответствует действительности для большинства пластических материалов.

7.2.2.4. Влияние скорости деформации на предел текучести.

Зависимость предела текучести от скорости деформации для стали становится заметной при скоростях деформации порядка 1 с^{-1} или $100 \% \text{ с}^{-1}$ и более (100% деформация за 1с). Это отвечает уже ударным нагрузкам. При меньших скоростях деформации предел текучести и пластическое деформирование – мгновенные (в масштабе времени 1 с).

С другой стороны, имеются данные, в частности, для стали, основного конструкционного материала, о том, что при невысоких температурах приложение постоянной нагрузки, даже близкой к пороговой для пластичности, после первичного небольшого деформирования в течение длительного срока даёт скорость деформации, не превышающую 10^{-7} с^{-1} , а при меньших нагрузках пластическая деформация практически отсутствует [16]. Таким образом, в квазистатических задачах можно с хорошей точностью полагать, что пластическое деформирование начинается и оканчивается мгновенно в масштабе времени задачи, и предел текучести не зависит от скорости деформирования, что и предполагается в дальнейшем.

Отметим, что в численных расчётах зависимость предела текучести от скорости деформации может быть учтена непосредственной подстановкой: $\sigma_y = \sigma_y(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T)$. Выбирая различные зависимости на этом пути можно получить численные модели высокотемпературного и реологического поведения материала, в частности, ползучести.

7.3. Основные представления теории пластичности

7.3.1. Задачи и способы описания пластического деформирования

Сформулированные выше задачи теории пластичности подразумевают следующие функции вычислительной процедуры, основанной на теории –

- (1) Идентифицировать напряжённое состояние, возникающее под действием данной нагрузки, как упругое, либо пластическое;
- (2) Определить напряжения и деформации в (упруго–)пластическом состоянии.

Далее введены величины, удобные при количественном описании основных фактов и представлений о пластическом деформировании.

При нагружении материал сначала деформируется упруго, а при дальнейшем росте нагрузки – пластически. Разгрузка, т.е. деформирование при снятии нагрузки – всегда упруга. Пластическая деформация малого элемента, однородно пластически деформированного, может быть определена как остаточная деформация после снятия нагружения. В пластическом состоянии, поэтому, на шаге нагружения приращение деформации представимо в виде суммы упругой и пластической составляющих:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p .$$

При квазистатическом нагружении деформирование интерпретируется как поэтапное, т.е., переходы образца от состояния к состоянию. Введение скорости деформации $\dot{\varepsilon}_{ik}$ позволяет относить этапы нагружения к реальному времени. При её определении учитывается изменение компонент тензора деформации в местной системе координат данного малого объёма, т.е. не учитывается вращение этого малого объёма в процессе деформирования (возможность этого следует из обсуждения гл.2):

$$d\varepsilon_{ik} = \dot{\varepsilon}_{ik} dt .$$

Ввиду отмеченной выше упругости объёмной деформации при пластическом деформировании в теории пластичности основное значение имеют девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3e\delta_{ij}, \quad (7.1)$$

где $p = -1/3\sigma_{ij}\delta_{ij}$ – "давление", $e = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$ – объёмная деформация.

Составим вторые инварианты тензоров–девиаторов напряжений и деформаций:

$$I_2(s_{ij}) = 1/2(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ji}), \quad I_2(e_{ij}) = 1/2(e_{ii}e_{jj} - e_{ij}e_{ji}) . \quad (7.2)$$

Величина, пропорциональная корню квадратному из второго инварианта, взятого со знаком минус, называется, соответственно, *интенсивность напряжений* σ_i , и *интенсивность деформаций* ε_i . Ниже, для краткости, инварианты девиаторов в (7.2) будут подразумеваться взятыми со знаком минус. Соответственно, коль скоро для девиаторов $s_{ii}=0$, эффективное напряжение выражается через "квадрат" тензора:

$$\sigma_i = (3I_2(s_{ij}))^{1/2} = (3s_{ij}s_{ji}/2)^{1/2}, \quad \varepsilon_i = (4I_2(e_{ij})/3)^{1/2} = (2e_{ij}e_{ji}/3)^{1/2} \quad (7.3)$$

Величина σ_i фигурирует в критерии текучести Мизеса. В зарубежной литературе по теории пластичности также приняты названия *эффективное напряжение* и *эффективная деформация* (effective stress, effective strain). Определения интенсивности, даваемые различными авторами, могут отличаться множителем, в зависимости от принимаемой формулировки критерия текучести. В частности, различают просто интенсивность напряжений и интенсивность касательных напряжений [18], отличающуюся отсутствием множителя 3 при втором инварианте в (7.3).

Характеристики материала могут меняться во времени и от образца к образцу, поэтому любая теория пластичности будет справедлива лишь "с точностью, достаточной для практических целей". При построении теории делается ряд неявных и явных предположений, основанных на опытных данных, которые, в общем, выполняются только приближённо. Детали предположений могут быть разными, но существующие теории, из тех, что применяются в численных расчётах НДС, могут быть поделены на две основных группы, различающиеся записью определяющего закона – по скорости деформации (как в механике жидкости) или по деформации (как в теории упругости):

а) **Теория пластического течения.** Пластическое деформирование металла уподобляется течению вязкой жидкости. Считается, что физический закон пластичности связывает пластические напряжения и приращения напряжений с *приращениями деформаций* или *скоростями* деформации – *инкрементальная* теория пластичности.

б) **Деформационная теория пластичности.** Согласно деформационной теории напряжения и деформации связаны между собою *конечными* соотношениями, подобно тому, как в упругой области конечные напряжения и деформации связаны законом Гука.

Ряд основных представлений одинаков у обеих теорий, но есть существенные различия. В частности, деформационная теория недостаточно последовательно описывает явления разгрузки и плохо пригодна для расчётов немоного нагружения. В численном анализе более эффективна инкрементальная теория, и далее речь пойдёт о ней, но значительная часть сказанного может быть отнесена к обеим теориям.

При одноосном растяжении стержня его упруго–пластическое поведение описывается диаграммой деформирования. Теория пластичности позволяет распространить это описание на случай 3–осного нагружения достаточно общего вида. Приведём используемые для этого основные предположения – постулаты теории пластичности. Полагается, что рассмотрение ведётся в главных осях упругого НДС, если не оговорено противное, и в каждой точке напряжённое состояние задано тремя главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

7.3.2. Основные постулаты теории пластичности

Упомянутые выше результаты экспериментов, на которых основана теория пластичности, можно суммировать в виде нескольких постулатов (см. [17]), из которых могут быть выведены искомые *определяющие соотношения* между компонентами тензоров деформаций и напряжений.

1. Наличие *порога пластичности (текучести)* – при росте нагрузки деформирование идёт упруго только до некоторого предела нагрузки, характеризуемого величиной σ_y (yield stress), после чего наблюдается значительное отклонение от упругости – пластичность. Характер деформирования зависит от напряжённого состояния, описываемого в каждой точке главными напряжениями или 3–мя инвариантами тензора напряжений. Экспериментально измеряемый порог пластичности может быть соотнесён с некоторой скалярной функцией этих инвариантов:

$$\zeta \sigma_y = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \tilde{f}(J_1, J_2, J_3) . \quad (7.4)$$

Множитель ζ введён для нормировки величины σ_y в зависимости от принимаемого стандарта условий испытаний. Наиболее часто используется одноосное растяжение–сжатие.

Для введения зависимости σ_y от 3–го инварианта J_3 не найдено экспериментальных оснований. Независимость предельного состояния от первого инварианта следует из отмеченной выше упругости *объёмного* сжатия материала и формулируется в виде следующего постулата.

2. Всестороннее (гидростатическое) сжатие не приводит к пластической деформации. Обратно, если при пластическом деформировании наблюдается объёмное деформирование, оно может быть описано как упругое, законом Гука для первых инвариантов тензоров напряжений и деформаций. Первый инвариант пластической деформации –

$$J_1(\dot{\epsilon}^{(p)}) = \dot{\epsilon}_1^{(p)} + \dot{\epsilon}_2^{(p)} + \dot{\epsilon}_3^{(p)} = J_1(\dot{\sigma}^{(p)}) / K = 0 = const , \quad (7.5)$$

и, каково бы ни было объёмное сжатие, оно не влияет на переход в пластическое состояние. Отклонения от этого наблюдались только при больших давлениях и скоростях объёмной деформации. Вычлняя практически постоянный первый инвариант, эквивалент давления, из тензора напряжений получим его девиатор. Сказанное означает, что в критерии текучести нет зависимости от 1–го инварианта, и остаётся зависимость только от 2–го инварианта тензора *девиатора* напряжений в данной точке:

$$\zeta \sigma_y = f^*(I_2)$$

3. По аналогии с упругим нагружением изотропного материала предполагается, что главные оси тензора *скорости* деформации при пластическом течении совпадают с осями тензора напряжений. Это выглядит естественным в свете упомянутой выше изотропии поликристаллических тел.

Основное различие между упругим и пластическим деформированием состоит в том, что упругая деформация от начального до конечного состояния в любой момент полностью определяется действующим напряжением, что, как мы видели в гл. 3, приводит к линейно–упругому определяющему соотношению. При пластическом течении накапливаемая деформация необратима и не является функцией состояния, поскольку при снятии нагрузки пластически деформированное тело не возвращается к исходному состоянию. Но можно получить определяющее соотношение при пластичности для *приращений* с помощью следующего постулата:

4. При заданном пластическом течении материала напряжения распределяются таким образом, что *мощность пластического формоизменения принимает стационарное значение*. Здесь "стационарное" означает минимальное по затрачиваемой мощности на данный момент времени из возможных напряжённых состояний. Это аналог общего принципа виртуальных перемещений: стационарность пластической работы сил, приложенных к телу.

Мощность — это работа за единицу времени. При 1–мерном растяжении работа, отнесенная к единице объема, и соответствующая изменению деформации ϵ на величину $d\epsilon$, равна $\sigma d\epsilon$, следовательно, мощность равна $\sigma \dot{\epsilon}$. При трехосном напряженном состоянии эта мощность в главных осях тензора напряжений (которые по 3–му постулату совпадают с главными осями тензора деформаций) равна (ср. (3.2)):

$$W = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3 . \quad (7.6)$$

Потребуем для данного малого элемента, чтобы величина W , рассматриваемая как функция напряжений при заданных скоростях деформации, определяющих течение, принимала экстремальное значение. При этом должно выполняться условие текучести (7.5). Следуя методу Лагранжа поиска условного экстремума, вводим неопределенный множитель λ и составляем выражение

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3 - \lambda f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) .$$

Приравнивая нулю частные производные от функции Φ по аргументам σ_k , $k=1, 2, 3$, получаем для главных значений:

$$\dot{\epsilon}_k = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} . \quad (7.7)$$

Соотношение (7.7) называется *ассоциированным законом течения* для условия текучести (7.5). Оно говорит о том, что скорость деформации при пластическом течении определяется некоторой функцией напряжённого состояния, ассоциированной с функцией текучести, и играет роль, аналогичную закону Гука при упругости. Вид множителя λ уточняется далее.

В широко используемом критерии текучести Мизеса (см. ниже) функция текучести равна 2–му инварианту девиаторов напряжений, который может быть записан в виде квадратичной формы от главных напряжений:

$$f(I_2) = I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2) .$$

Отсюда видно, что производные (7.6) линейно выражаются через девиаторы напряжений

$$\dot{\epsilon}_k = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_k} = \lambda(\sigma_k - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) = \lambda s_k .$$

Рассуждения можно распространить на произвольную декартову систему координат:

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \lambda s_{ik} . \quad (7.8)$$

Как следует из 2-го предположения, при пластическом деформировании материала объёмная деформация нулевая, поэтому $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{e}_{ij}^p$, т.е. пластическая составляющая тензора деформации совпадает со своим девиатором, и пластическая деформация будет зависеть только от девиаторной части тензора напряжений:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{e}_{ij}^p = \lambda s_{ij} . \quad (7.9)$$

Деформация сжатия может быть описана через модуль объёмного сжатия: $p = -Ke$. Нагружение, при котором выполняется соотношение (7.9), называется *пропорциональным нагружением*. Заметим, что это соотношение аналогично соотношению для девиатора напряжений в ньютоновской вязкой жидкости. Предел текучести σ_y для данного материала полагается универсальной величиной, независимой от (пропорционального) нагружения. Величина σ_y находится из опытов, независимость σ_y от нагружения отчасти проверена экспериментально.

Таким образом, при пропорциональном нагружении должна существовать единая диаграмма деформирования для всех путей нагружения с параметром t , имеющих одинаковые зависимости интенсивности деформаций и интенсивности напряжений: $I_{2e}(t)$, $I_{2s}(t)$. Параметрическая зависимость ($I_{2e}(t)$, $I_{2s}(t)$) для данного пути нагружения и может служить этой диаграммой. Далее рассмотрены следствия, вытекающие из первых двух постулатов теории пластичности при конкретных выражениях для функции текучести.

7.3.3. Функция текучести, геометрическая интерпретация

Вид условия текучести задаётся экспериментально проверенными условиями текучести, основные из которых следующие два: критерий Мизеса, налагающий условие на 2-й инвариант девиаторов напряжений:

$$I_2 = (s_{ij}s_{ij} - s_{jj}s_{ii})/2 = \sigma_y^2/3, \quad (7.10)$$

и силовой критерий (Треска) – по максимальному касательному напряжению. Он выражается через главные значения напряжений:

$$\tau_{\max} = 1/2(\sigma_1 - \sigma_3) < \sigma_t, \quad (7.11)$$

где σ_t – константа материала. Обратим внимание на то, что (7.11) записано относительно компонент тензора напряжений, а (7.10) – относительно девиатора напряжений.

Соображения Мизеса при формулировке условия (7.10) носили чисто формальный характер: интенсивность напряжений представляет собою простейшую симметрическую функцию главных касательных напряжений (см. [6]). Позднейшая интерпретация В.В.Новожилова (см. [17], [18]) делает условие (7.10) более физически наглядным:

интенсивность напряжений с точностью до множителя равна средне-квадратичному значению касательного напряжения на поверхности малой сферы. Таким образом, если в каждом кристаллическом зерне наступление текучести определяется величиной касательного напряжения в определенной плоскости и определенном направлении, то для поликристаллического агрегата, в котором всевозможные ориентации плоскостей скольжения зерен равновероятны, естественно связать наступление текучести во всем материале с величиной, представляющей собою среднее значение касательного напряжения на площадках всех возможных ориентаций, которые равномерно представлены поверхностью сферы. Это проясняет универсальность закона текучести Мизеса для металлов.

Запишем функцию текучести, отвечающую условию Мизеса при данном пределе текучести σ_y , в виде:

$$F(I_2, \sigma_y) \equiv I_2 - \sigma_y^2/3 = s_{ij}s_{ij}/2 - \sigma_y^2/3. \quad (7.12)$$

Условие текучести (7.10) примет вид $F(I_2, \sigma_y) = 0$. Его часто записывают через условное напряжение начала текучести σ_m , измеряемое при 1-осном нагружении, указываемое в справочниках как σ_{02} :

$$F(I_2, \sigma_y) \equiv I_2 - \sigma_m^2 = s_{ij}s_{ij}/2 - \sigma_m^2.$$

Здесь $\sigma_y^2/3 = \sigma_m^2$. Пластическое течение отвечает нулевому значению функции текучести: $F(I_2, \sigma_y) = 0$. При наличии упрочнения предел текучести возрастает, и с его новым значением $\sigma_y^{(+1)}$ условие пластичности записывается в том же виде: $F(I_2, \sigma_y^{(+1)}) = 0$.

В теории пластичности активно используется геометрическое представление условия текучести через т.н. *поверхность текучести*. Компоненты девиаторов напряжений откладываются как точки в некотором арифметическом пространстве девиаторов. Вследствие условий $s_{ik} = s_{ki}$, $s_{kk} = 0$ это пространство 5-мерно для 3-мерной геометрии тела. Условие текучести суть уравнение поверхности текучести в пространстве девиаторов.

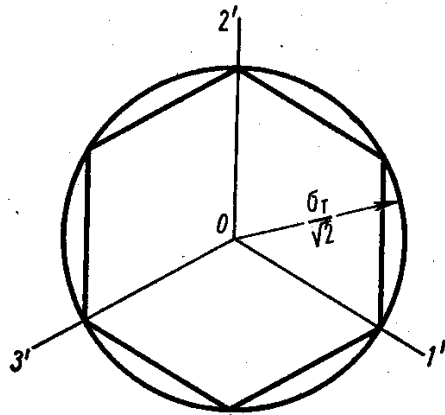
В главных значениях девиаторов (s_1, s_2, s_3) условие текучести Мизеса (7.10) имеет вид

$$I_2 = 1/2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \sigma_y^2/3 \quad (7.13)$$

Поверхность текучести в координатах (s_1, s_2, s_3) (проекция пятимерного пространства на трёхмерное подпространство диагональных компонент s_{ij}) представляет собой сферу радиуса $\sigma_y/\sqrt{3}$, а поскольку для девиаторов

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0,$$

то пересечение плоскости, задаваемой этим уравнение со сферой (7.13) даёт нам *окружность текучести* (рис. 7.7).



Следы пересечения поверхности текучести в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ с девиаторной плоскостью. Шестиугольник по условию пластичности наибольших касательных напряжений, окружность по энергетическому условию пластичности

Рис.7.7. Поверхность текучести и круг текучести радиуса $\sigma_r = \sigma_m$ (из [18]).

Поверхность текучести общего вида, задаваемая иным условием текучести, чем критерий Мизеса или Треска, очевидно, замкнута и, как показывается в теории пластичности, всегда выпукла, точнее, невогнута. В упругом напряжённом состоянии точка в пространстве компонент девиаторов, отвечающая напряжённому состоянию в данной материальной точке, всегда находится внутри поверхности текучести. Переход от упругого состояния к пластическому связан с однократным пересечением исходной поверхности текучести. Геометрическая интерпретация состояния *идеальной пластичности* в данной материальной точке заключается в том, что девиаторы напряжений в данной точке тела, связанные условием текучести, попадают на поверхность текучести и не покидают её при любом нагружении, пока не наступит разгрузка, в процессе которой значение функции текучести $F(I_2)$ становится отрицательным. В случае упрочняющегося упругопластического тела поверхность текучести изменяется в процессе пластического деформирования: выход компонент девиаторов напряжений за пределы первоначальной поверхности текучести влечёт изменение предела текучести и поверхности текучести (упрочнение).

7.3.4. Механическая интерпретация: силовой и энергетический критерии текучести

В критерии текучести Треска фигурирует максимальное сдвиговое напряжение, поэтому его называют *силовым* критерием текучести. Покажем, что критерий текучести Мизеса, в котором фигурирует квадрат эффективного напряжения, оказывается условием на энергию формоизменения. Выразим энергию формоизменения U_s (3.31) через напряжения и учтём, что $s_{ii} = 0$:

$$U_s = 1/2 s_{ij} e_{ij} = s_{ij} s_{ij} / 4G = (s_{ij} s_{ij} - s_{ij} s_{ii}) / 4G \equiv I_2(s_{ij}) / 2G,$$

т.е., второй инвариант девиатора напряжений $I_2(s_{ij})$ пропорционален энергии формоизменения. Условие Мизеса для второго инварианта девиатора напряжений, таким образом, эквивалентно условию для некоторого критического значения упругой энергии формоизменения в данной точке:

$$U_s^* = \frac{1}{6G} \sigma_y^2 = \frac{1}{2G} \sigma_m^2, \quad (7.14)$$

в чём состоит *энергетическая* интерпретация критерия Мизеса.

7.3.5. Критерии текучести при одноосном растяжении и сдвиговом нагружении

Критериальные параметры, входящие в условия текучести по Треска и по Мизесу, могут совпадать, а могут и различаться. Выразим 2-й инвариант девиаторов I_2 через главные напряжения. Обозначим $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, учтём, что для девиаторов $s_1 + s_2 + s_3 = 0$:

$$\begin{aligned} I_2 &= 1/2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = 1/18((3\sigma_1 - \sigma)^2 + (3\sigma_2 - \sigma)^2 + (3\sigma_3 - \sigma)^2) = \\ &= 1/18(9(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 6\sigma(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 3\sigma^2) = \\ &= 1/6(3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2) = 1/6((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2) \end{aligned} \quad (7.15)$$

При *одноосном растяжении* вдоль оси 1 при приложенной силе, отвечающей напряжению σ_1 , первое главное напряжение равно σ_1 , а остальные нулевые, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Критерий текучести Треска будет иметь вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_t,$$

т.е. по достижении напряжением величины σ_t начинается пластичность. Измеряемая величина σ_1 начала пластичности служит основой для определения критерия текучести, который хотелось бы определять независимо от вида испытания.

Критерий Мизеса (7.10) с учётом соотношения (7.15) даёт:

$$\sigma_y^2 = 3I_2 = \frac{3}{6}(\sigma_1^2 + \sigma_1^2) = \sigma_1^2,$$

т.е. и здесь критерий $\sigma_y = \sigma_1$. В качестве технического предела текучести σ_y используют величину

$$\sigma_{02} = \sigma(0,002). \quad (7.16)$$

Это приводимое в справочниках напряжение, при котором деформация в экспериментах по 1-осному растяжению достигает 0,2 %. Технический предел текучести не совпадает с пределом упругости, поэтому при задании параметров упруго-пластического закона для проведения расчётов следует изучить результаты испытаний на растяжение и др.

Рассмотрим далее *чистый сдвиг*, который реализуется, например, при кручении тонкой трубы (рис. 1.10): в отсутствии радиальных нагрузок радиальное напряжение нулевое (это будет отвечать у нас направлению 2), и локально имеем плоские напряжения (касательные направления к поверхности тонкой трубы, направления 1 и 3). Чисто сдвиговое нагружение отвечает нулевой гидростатической составляющей:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0,$$

при этом $\sigma_2 = 0$, откуда $\sigma_1 = -\sigma_3$. Критерий текучести Треска σ_t будет иметь вид:

$$\sigma_t = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sigma_1.$$

Критерий Мизеса, вычисленный по (7.15), в этом случае равен:

$$\sigma_y^2 = 3I_2 = 3(\sigma_1^2 + \sigma_1^2 + 4\sigma_1^2)/6 = 3\sigma_1^2.$$

При сдвиговом нагружении критерии отличаются: $\sigma_y/\sigma_t = 2/\sqrt{3} \approx 1,15$, или на 15%, что можно измерить экспериментально.

Экспериментальная проверка показала, что, в целом, более точные результаты даёт критерий Мизеса. В реальности на предел текучести образца из металла влияет

термообработка, прокатка, состав, размер и прочие факторы. Поэтому наблюдаемое в чистых экспериментах различие в 15% для технических расчётов может быть достаточно условным. В приближённых вычислениях критерий Треска более прост, поэтому его достаточно часто используют.

В общем случае 3–осного нагружения экспериментальная проверка выполнимости критериев текучести сложна вследствие трудностей определения компонент тензора напряжений. Большой частью проводились эксперименты при совместном действии кручения и растяжения–сжатия, где применимость критериев текучести в инвариантной форме была с определённой точностью установлена.

7.3.6. Уравнения теории пластического течения

Рассмотрим дальнейшие следствия 3–го и 4–го постулатов теории пластичности. В литературе соотношение (7.9) при формулировке уравнений пластического течения записывают часто не через скорость деформации, а через дифференциалы компонент тензора $e_{ij}^{(p)}$. Следуя этим обозначениям, множитель пропорциональности λ представим в дифференциальной форме $d\lambda$:

$$de_{ij}^{(p)} = s_{ij}d\lambda \quad (7.17)$$

Получим для величины $d\lambda$ несколько соотношений, нужных для дальнейшего. Сворачивая выражение (7.17) с s_{ij} , получаем слева работу пластических деформаций на шаге нагружения $dQ^{(p)}$, а справа будет 2–й инвариант девиатора напряжений, который выражается из условия текучести Мизеса:

$$dQ^{(p)} = s_{ij}de_{ij}^{(p)} = d\lambda s_{ij}s_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_y^2 d\lambda, \quad (7.18)$$

$$d\lambda = \frac{3}{2\sigma_y^2} dQ^{(p)}. \quad (7.19)$$

Отсюда можно выразить компоненты деформации –

$$de_{ij}^{(p)} = \frac{3s_{ij}}{2\sigma_y^2} dQ^{(p)}. \quad (7.20)$$

Свернём обе части полученного равенства с $de_{ij}^{(p)}$ и умножим на 2/3. Слева получим, в соответствии с определением (7.3), квадрат интенсивности для пластической деформации $d\varepsilon_i^{(p)}$, справа присутствует квадрат работы внутренних сил:

$$\frac{2}{3}de_{ij}^{(p)}de_{ij}^{(p)} = \frac{4}{3}I_2(de_{ij}^{(p)}) = dQ_{(p)}s_{ij}de_{ij}^{(p)} / \sigma_y^2 = (dQ^{(p)})^2 / \sigma_y^2. \quad (7.21)$$

После извлечения квадратного корня работа пластических деформаций (на единицу объёма) на шаге по нагружению выражается как

$$dQ^{(p)} = \sigma_y de^{(p)}, \quad (7.22)$$

где введено по определению приращение *эффективной пластической деформации*, т.е. интенсивности деформации в пластическом состоянии, коль скоро в этом состоянии приращение девиатора деформации обусловлено только пластической деформацией:

$$de^{(p)} = \left(\frac{2}{3} de_{ij}^{(p)} de_{ij}^{(p)} \right)^{1/2}.$$

Подставив выражение (7.22) для $dQ^{(p)}$ в (7.20), получим соотношение между приращениями компонент тензоров пластической деформации и девиатора напряжений, имеющее место при пластическом течении:

$$de_{ij}^{(p)} = \frac{3de^{(p)}}{2\sigma_y} s_{ij}. \quad (7.23)$$

Соотношение (7.19) примет вид:

$$d\lambda = \frac{3de^{(p)}}{2\sigma_y}. \quad (7.19a)$$

При упрочнении предел текучести изменяется с деформацией, и приращение $de^{(p)}$ может быть связано с приращением эффективного напряжения, вызывающего изменение предела текучести. В линеаризованной зависимости вводится пластический модуль E_t , представляющий собой экспериментально определяемую константу материала (рис. 7.6):

$$d\sigma_y = E_t de^{(p)}. \quad (7.24)$$

Соотношение (7.23) примет вид

$$de_{ij}^{(p)} = \frac{3d\sigma_y}{2E_t \sigma_y} s_{ij}. \quad (7.25)$$

Внося (7.22) в (7.19), с учётом (7.25) получим выражение для множителя $d\lambda$ в виде

$$d\lambda = \frac{3}{2E_t} \frac{d\sigma_y}{\sigma_y}, \quad (7.26)$$

что можно также получить непосредственно из (7.19a) и (7.24).

Вместе с приращением пластической деформации введём интегральный параметр её накопления в некоторой точке как интеграл по $de_{ij}^{(p)}$, взятый через параметр нагружения:

$$\varepsilon^{(p)} = \int_0^t \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)}(t) \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)}(t) \right)^{1/2} dt. \quad (7.27)$$

В теории линейного упрочнения $\varepsilon^{(p)}$ используется как параметр для оценки текущего предела текучести и, при больших деформациях – как одна из простейших характеристик накопленной поврежденности в элементе. Напомним, что все формулы приведены для единицы объёма.

7.3.6.1. Уравнения Прандтля–Рейсса с упрочнением

Собирая вместе выражения, описывающие упругое и пластическое деформирование, (7.1), (3.22), (3.25), (7.26), мы получим т.н. *уравнения теории пластического течения Прандтля–Рейсса*, описывающей пластическое деформирование, в которые введено линейное упрочнение (см. [14]). Эта теория оперирует с величинами приращений деформации на шаге нагружения. Способ вычисления приращения деформации зависит от того, отвечает ли нагружение в данной точке тела упругому или пластическому поведению:

$$de_{ij} = \frac{1}{2G} ds_{ij} + s_{ij} d\lambda, \quad (7.28)$$

$$d\varepsilon_{ii} = \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_{ii}, \quad d\lambda = \frac{3dS}{2\sigma_y E_t}, \quad (7.29)$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, σ_y – предел текучести, $S=(3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ – эффективное напряжение, E_t – модуль упрочнения. Коэффициент пропорциональности $d\lambda$ ненулевой при пластическом течении, когда положительна работа внутренних сил:

$$d\lambda = 0 \text{ при } S < \sigma_y, \text{ или при } s_{ij} de_{ij} < 0, \quad (7.30)$$

т.е. пластическая деформация, описываемая слагаемым с множителем $d\lambda$, отсутствует в уравнениях, если при нагружении не достигнут предел текучести или материал в процессе формоизменения разгружается (упруго), производя работу, так что приращение энергии (мощность) формоизменения отрицательна. Для идентификации пластического состояния в расчётах используются предел текучести и критерий (7.12).

В случае идеальной пластичности (отсутствие упрочнения, $E_t=0$, $dS=0$, множитель $d\lambda$ определяется по-другому) приращения девиаторов напряжений нулевые, и скорость пластической деформации, т.е., её приращение за ед. времени, пропорциональна только девиатору напряжений, который постоянен. Если при постоянной нагрузке *всё* работающее сечение идеально-пластического тела охвачено пластическим течением, статического равновесия нет – тело превращается в "механизм с одной степенью свободы" (Работнов [10]): процесс деформирования некоторое время ограничивается только силами вязкости и инерции при ускорении. Идеально-пластическое деформирование может быть остановлено только возросшим упругим сопротивлением остальной части сечения (например, при упруго-пластическом изгибе стержня), а, если такового нет (например, продольное деформирование стержня на разрыв), то деформирование идёт до разрушения. При наличии упрочнения сопротивление пластическому деформированию нарастает с ростом деформации и достижение равновесия возможно.

Теория течения, в принципе, содержит всё, что нужно для описания основных особенностей пластического поведения. В частности, она пригодна для описания немонокотонного нагружения, когда нагрузка сопровождается разгрузкой. Некоторое неудобство для аналитических решений связано с тем, что определяющие соотношения при пластическом течении сформулированы не в конечной форме, а через приращения, и система уравнений имеет разный вид при нагружении и разгрузке. Но для численного решения это не представляет принципиальной трудности, хотя и усложняет алгоритм расчёта. Как правило, для расчёта упруго-пластических задач используются модели, базирующиеся на теории течения. Соотношения (7.29) будут использованы при построении численной схемы расчёта пластического деформирования.

7.4. Пример: задача о пластической мембране

(См. [8]) Для определения давления во взрывной волне используются тонкие круглые свинцовые пластины, закреплённые по краю. По прогибу судят об амплитуде волны (**вопрос – почему – свинцовые?**). Требуется связать прогиб мембраны с амплитудой (максимумом) импульса давления. Пластина жёстко закреплена по краям (рис. 7.8).

Принимаем допущения:

- импульс давления – прямоугольный и достаточно длинный (условие стационарности);
- ускорением и инерцией пластины при растяжении пренебрегаем;
- изменение толщины пластины при деформации для оценок считаем малым;
- известна диаграмма деформирования свинца $\sigma = \sigma(\epsilon)$, она монотонно возрастающая;
- считаем пластину участком тонкой сферы с переменным во времени радиусом кривизны, краевыми эффектами пренебрегаем;
- при вычислении деформации принимается приближение жёстко–пластичности, т.е. упругой деформацией пренебрегаем.

При начале деформирования плоской пластины напряжения в ней "бесконечно велики". (нулевая стрела прогиба), она легко прогибается и деформируется пластически. По мере роста прогиба и уменьшения радиуса кривизны поверхности напряжение в пластине, вызываемое внешней нагрузкой, уменьшается, и в определённый момент наступает равновесие сил, форма пластины перестаёт изменяться.

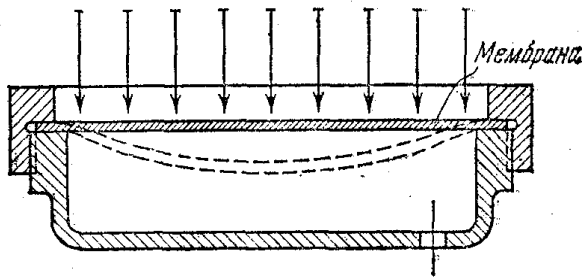


Рис. 7.8. К задаче о пластическом прогибе пластины [8]

напряжений в тонкой безмоментной оболочке (5.33) –

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} = p R(t) / 2h, \quad (7.31)$$

где h – толщина пластины, $R(t)$ – радиус кривизны, t – параметр нагружения.

Пусть φ – половина центрального угла сферического сегмента, a – радиус мембраны, тогда $a = R \sin \varphi$, и радиус кривизны –

$$R = a / \sin \varphi \approx a / \varphi.$$

Прогиб мембраны –

$$f = a \operatorname{tg}(\varphi/2) \approx a \varphi/2.$$

Подставляя отсюда значение угла через прогиб в выражение для радиуса кривизны и далее в формулу для напряжений, получим связь напряжения, приложенного давления и прогиба:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} = p R / 2h = p / 2h \cdot a^2 / 2f = p a^2 / 4h f.$$

Теперь надо независимо связать напряжения в пластине σ_{θ} и её деформацию. Это делается с помощью диаграммы деформирования. Интенсивность деформации ϵ_0 можно получить, уподобив деформацию пластины деформации плоского листа при сжатии. Коэффициент Пуассона несжимаемого материала = 0,5, и для деформаций имеем –

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_\varphi = 0,5\varepsilon_R, \quad \varepsilon_0 + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_R = 0, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_R - \varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_R - \varepsilon_\varphi)^2} = 2\varepsilon$$

Деформация вдоль поверхности оценивается через разность длин дуги и хорды, имеем

$$\varepsilon = R(\varphi - \sin\varphi) / R\sin\varphi = \varphi / \sin\varphi \approx \varphi^2 / 6 \approx 2f^2 / 3a^2$$

По величине ε из диаграммы растяжения свинца находим σ_0 , отвечающее пределу текучести, и по формуле (7.31) – давление, действовавшее на мембрану.

Вопрос – почему при вычислении напряжений можно пренебрегать утончением пластины, а при вычислении интенсивности деформаций – нельзя?

7.5. Температурные зависимости основных механических величин

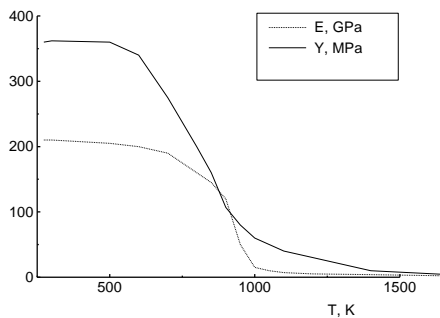


Рис. 7.9. Модуль упругости E и предел текучести Y стали SA533B1

Модуль упругости, предел текучести и модуль упрочнения характеризуют жёсткость материала, при росте температуры величины E , σ_y , E_t убывают по величине на порядок и более при гомологической температуре $T/T_{\text{плавления}} \approx 0,5$ [16]. Темп убывания с ростом температуры возрастает, если в данном интервале имеется структурное превращение, увеличивающее подвижность атомов. В качестве примера на рис.7.9 приведены данные для зарубежной аустенитной стали SA533B1 [19] в диапазоне температуры,

включающем аустенитное превращение (в окрестности $T=1000$ K). Величина коэффициента Пуассона при росте температуры растёт к значению $1/2$, характерному для состояния текучести материала.

Понижение предела текучести при нагревании позволяет проводить обработку материалов. Например, углеродистую сталь куют, когда она высокопластична – при температуре выше ~ 1000 K.

7.6. Ползучесть

Если металл держать при постоянной нагрузке, очень близкой к пределу текучести или при высокой температуре, то он медленно, но деформируется. Причина – не относительное скольжение (быстрое) участков зёрен поликристаллов вдоль атомных плоскостей, а диффузионное перемещение атомов, приводящее также к необратимой деформации, но физически несколько другим путём. Ползучесть (creep) – проявляется как зависимость деформации от времени: $\varepsilon = \varepsilon(t)$ при постоянной нагрузке.

Табл. 7.1. Сравнение свойств пластичности и ползучести

	Пластичность	Ползучесть

Скорость деформации s^{-1}	$\sim 10^{-3} - 0,1$	$\sim 10^{-12} - 10^{-5}$
Порог текучести	есть	нет
при объёмном сжатии	упруго	упруго
Характеристика	Независимая от времени диаграмма деформирования	Кривая ползучести – зависимость деформации от времени

Теория ползучести развивалась как обобщение большого числа результатов испытаний, полученных в разных странах, начиная с 20-х гг. XX в. Её основные представления во многом те же, что у развивавшейся параллельно теории пластичности.

7.6.1. Ползучесть при нормальной температуре

Для характеристики температурного режима ползучести различных металлов удобно использовать упомянутую выше гомологическую температуру металла, измеряемую в долях от абсолютной температуры плавления: $\theta = T/T_{\text{плав}}$. При достаточно низких температурах ($\theta < 0,5$) многие металлы ведут себя сходным образом. Зависимость деформации от времени при 1-осном растяжении даётся *кривой ползучести* (Рис. 7.10). В соответствии с поведением деформации на этой кривой выделяют три стадии ползучести.

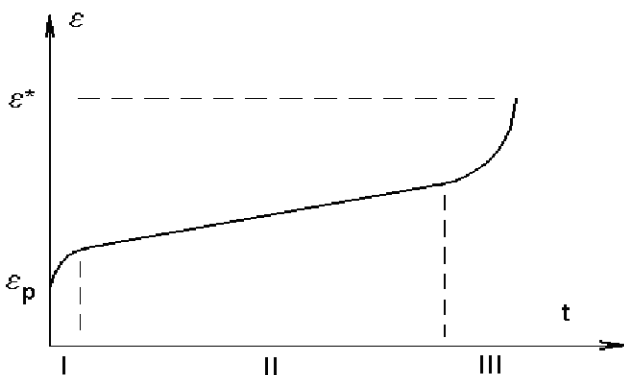


Рис. 7.10. Кривая ползучести: деформация от времени

1-я стадия – "упрочнение": идут структурные изменения, повышающие сопротивление деформированию: скорость деформирования убывает. После исчерпания способности к упрочнению наступает –

2-я стадия – установившаяся ползучесть, деформация с приблизительно постоянной скоростью. Обычно (но не всегда) она самая продолжительная, что позволяет пренебречь 1-й стадией и упростить количественное описание деформирования. Как отмечалось, физический механизм, способствующий деформированию ползучести, это диффузия (самодиффузия), вследствие чего ползучесть при нормальных и умеренно высоких температурах идёт медленно. Между приложенной нагрузкой и установившейся на 2-й

стадии скоростью деформации эмпирически установлены связи, наиболее распространённая из которых – это степенной закон Нортона для скорости эффективной пластической деформации:

$$\dot{\varepsilon}_p = d\varepsilon_p / dt = A(T)\sigma_e^n, \quad (7.32)$$

где σ_e – интенсивность деформации, $A(T)$ – температурно–зависимый множитель. Величина показателя степени высока: $n=4\div 10$.

Применяется также экспоненциальный закон:

$$\dot{\varepsilon}_p \sim (\exp(-\zeta\sigma) + \exp(\zeta\sigma)) = B \operatorname{sh}(\zeta\sigma). \quad (7.33)$$

3–я стадия – неустойчивая, относительно короткая: образование шейки, уменьшение сечения (площадь $=A$) и относительно быстрый рост напряжения в этом сечении $\sigma=P/A$. Если с вязким металлом проводить опыт при постоянном напряжении, снижая нагрузку пропорционально уменьшению сечения, то стадия неустойчивого роста может отсутствовать на кривой ползучести (опыты Эндрейда). Возможен случай, когда шейки не образуется, но при этом растут внутренние дефекты, образуются трещины, что эквивалентно уменьшению эффективного сечения.

В большинстве случаев допуск на деформации в технике не превышает $\sim 1\text{--}2\%$, часто гораздо ниже, и в этих пределах сечение можно считать постоянным. Большинство металлов и сплавов разрушается при деформации в пределах 10% . При определённых условиях, однако, деформация в стали на 3–й стадии может быть гораздо выше и получаемые кривые могут заметно отличаться от "стандартной" кривой (ср. рис. 7.11)

Ползучесть металлов представляет собой один из основных деформационных процессов, способствующих постепенному разрушению под постоянной нагрузкой. Изучение этих процессов обычно преследует следующие цели:

- (а) определение уравнения деформирования при ползучести;
- (б) определение времени разрушения под нагрузкой $t=t^*$ в разных случаях.

Наличие закона деформирования в инженерной практике позволяет оценивать деформацию и прогнозировать время t_0 достижения предельной (по допуску на режим работы конструкции) деформации ε_0 при данной нагрузке и температуре. Для степенного закона в случае полагаемой постоянной скорости деформации $\dot{\varepsilon}^*$ имеем:

$$\text{если } \dot{\varepsilon}^* = d\varepsilon / dt = A\sigma^n \approx \text{const}, \text{ то } \varepsilon_0 = t_0 \dot{\varepsilon}^* = t_0 A\sigma^n, \quad \text{и} \quad t_0 = \varepsilon_0 / A\sigma^n \quad (7.34)$$

По известному времени разрушения под данной нагрузкой оценивают для других аналогичных случаев *запас прочности по времени* $n = t^*/t$. Время до разрушения при фиксированной нагрузке и температуре, измеряемое обычно при 1–осном испытании, зависит от нагрузки, и эта зависимость близка к степенной, что следует также и из (7.34).

7.6.2. Высокотемпературная ползучесть

Диффузия атомов в кристалле требует энергии активации, вероятность смещения атома в ячейке зависит от температуры: $\sim(\exp(-U/RT))$. Поэтому повышение температуры заметно ускоряет деформирование при данной нагрузке. Отметим, что при высокой температуре стадии ползучести часто не выражены (рис.7.11). Вид кривой ползучести зависит от материала и температуры.

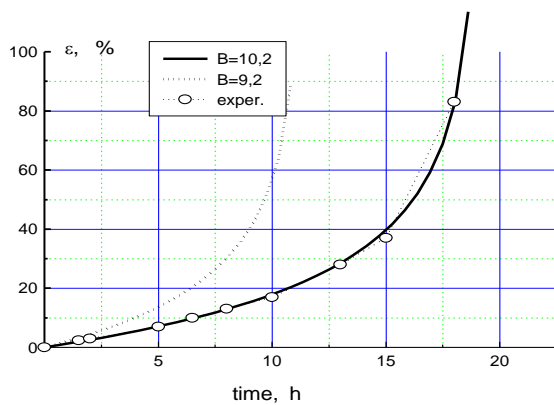


Рис.7.11 Кривая ползучести стали SA533B1 при одноосном растяжении. $T=1000\text{K}$, $p=56\text{MPa}$. “exp”– эксперимент, “B=10,2” и “B=9,2”– расчеты с разными параметрами модели [20]

решаемых МДТТ, входят оптимизация конструкций и расчёты на жёсткость и прочность. Первые две задачи часто могут быть поставлены и решены в рамках упругой постановки, что не требует моделей сплошной, иных, чем упругая, возможно, анизотропная. Расчёты же на прочность затрагивают вопрос целостности конструкции, т.е. её способности противостоять разрушению.

Понятие разрушения, даже в механике, весьма общее, и этому вопросу посвящена обширная литература. В применении к конструкционным материалам ниже под механическим разрушением понимается разделение материала конструкции на части в результате деформирования, появление трещин или иных дефектов, препятствующих её работе и приводящих со временем к разрушению. В этой главе обсуждается вопрос о том, что может дать механика при изучении процессов разрушения. Точно предсказать, на какие части распадётся конструкция, она не может, и обычно это не представляет интереса. Предмет МР состоит в изучении факторов, приводящих к разрушению, в предсказании его скрытого развития и разработке его критериев. В этом смысле, МР – это один из необходимых практических результатов развития механики твёрдого тела. Соответственно целям курса, ниже упомянуты некоторые основные процессы разрушения и приведена их минимальная классификация с целью последующего краткого пояснения роли механики в их изучении и разработке критериев разрушения разного рода. В большинстве случаев имеется в виду разрушение при квазистатическом воздействии.

7.7.1. Механическое разрушение и условия его развития

Первичная классификация возможна, в первую очередь, по характеру деформирования, при механическом разрушении. Выделяют два предельных случая:

Хрупкое разрушение – быстрое (“мгновенное”) разрушение без заметной предварительной деформации. Связано с возникновением и неустойчивым ростом трещин.

Вязкое разрушение – разрушение после заметной деформации; например, в образце на растяжение образуется местное утончение – шейка.

Различие между пластичностью и ползучестью при повышении температуры уменьшается и фактически исчезает при достаточно высоких температурах. В этом случае деформация растёт со временем уже при достаточно малой постоянной нагрузке. Температура, при которой начинаются эти явления, приблизительно соответствует величине гомологической температуры металла, равной $\theta=T/T_{\text{плавл}}\sim 0,6-0,7$ [16].

Примеры построения численных моделей пластичности и высокотемпературной ползучести будут рассмотрены при изложении численных методов.

7.7. Модели разрушения

В число практических общих задач,

Механизм разрушения определяется материалом конструкции и условиями её работы. Приблизительная классификация физических условий, активизирующих тот или иной механизм разрушения может быть такой (см. также [3]):

– По условиям работы, характеризуемым разными физическими факторами:

- (а) предельная механическая нагрузка пластичного материала в нейтральных условиях, например, при ударе или потере устойчивости (пластическое деформирование – хрупкое/вязкое разрушение);
 - (б) концентрация напряжений, невязкий материал (рост трещин, хрупкое разрушение);
 - (в) высокие температуры (высокотемпературная ползучесть, вязкое разрушение, возможны "горячие трещины");
 - (г) высокие давления (изменение характера разрушения);
 - (д) низкие температуры (хладноломкость – хрупкое разрушение);
 - (е) длительная высокая нагрузка (низкотемпературная ползучесть);
 - (ж) периодическая (знакопеременная) нагрузка (усталость – хрупкое разрушение);
 - (з) агрессивная среда (*стресс коррозия*, ..., каверны, трещины, хрупкое разрушение);
 - (и) облучение (накопление повреждённости – хрупкое разрушение);
- другие факторы ...

– По времени развития разрушения:

Говорят о *кратковременной* и *длительной* прочности. Параметр длительности весьма условен, требования к прочности меняются, в зависимости от назначения конструкции. В ракетном двигателе, например, необходимо обеспечить длительность работы на время порядка десятков минут, в мостостроении – на срок порядка ста лет. Время может измеряться также в циклах изменения нагрузки или условий работы. Масштаб времени в конкретных проблемах обычно известен.

Основные цели изучения процессов разрушения проистекают из общей задачи анализа прочности:

- определение внешних причин, вызывающих разрушение, и их следствий (нагрузки и концентрация напряжений, механическая неустойчивость; физические условия);
- изучение состояния материала, приводящего к разрушению (пластическое состояние, зависимость от температуры и др.);
- формулировка *критериев разрушения* для интенсивных кратковременных воздействий; для длительного нагружения – определение вероятного времени разрушения $t=t^*$, задающего запас прочности по времени на текущий момент.

Ряд перечисленных выше физических факторов, способствующих разрушению, имеет немеханическое происхождение и не может быть непосредственно учтён в механических моделях. Например, результатом воздействия агрессивной среды может быть полная деградация материала (растворение, окисление, распад) – такие процессы здесь не рассматриваются. Но часто эти факторы приводят к последствиям, допускающим механическую интерпретацию и феноменологию, например к снижению предела текучести, развитию трещин. Действие ионизирующего излучения в ядерных реакторах создаёт дефекты кристаллического строения, увеличивающие склонность к хрупкому разрушению. Результат такого рода физического воздействия часто может быть количественно смоделирован как изменение критериев предельных состояний, сами же состояния

по–прежнему могут быть описаны в терминах МДТГ. К разрушению могут также вести разного рода неустойчивости состояния, допускающие механическое описание. Ниже кратко обрисованы некоторые из существующих стандартных методов анализа механического разрушения.

7.8. Механика с учётом разрушения

7.8.1. Расчёты на прочность и предмет механики разрушения

С точки зрения оценки прочности элементов конструкций, линейная теория упругости и теория пластичности суть приближение к основной проблеме – анализ причин и формулировка критериев разрушения конструкций под нагрузкой. Пусть мы определили НДС в конструкции, т.е. поля вектора перемещений и тензора напряжений. Возникает вопрос – хороши ли они или плохи, т.е.: (а) выполняет ли конструкция свои функции и (б) разрушится ли она за период эксплуатации или нет? МДТГ как механика "сплошной" среды не может из своих постулатов сформулировать причины и критерии нарушения "сплошности" – разделения на части или иного разрушения. Необходимые критерии берутся из эксперимента. Они имеют вид предельного значения какой либо механической величины:

$$P < P_{max}, \quad (7.1)$$

где P_{max} может иметь различный смысл в различных обстоятельствах. Простейшие критерии – по (максимальному) *допускаемому напряжению* и *допускаемой деформации*:

$$\sigma < \sigma_{max}/n_{\sigma}, \quad \varepsilon < \varepsilon_{max}/n_{\varepsilon}, \quad (7.2)$$

где n – коэффициент запаса, зависящий от многих факторов. Эти допускаемые напряжения и деформации могут быть различными при разных условиях эксплуатации. В частности, ранее мы формулировали критерии текучести – начала заметной пластической деформации:

$$\sigma < \sigma_{02}.$$

Предел текучести σ_{02} с определённым запасом может служить критерием, если нам надо минимизировать остаточные деформации, безотносительно разрушения. При этом пластическое деформирование в малой области далеко не всегда ведёт к разрушению, максимальная деформация при разрыве для большинства металлов гораздо больше 0,2%, хотя и не для всех. Но, например, чугун, керамика, стёкла, бетон разрушаются хрупко, без заметной пластической деформации, и для них σ_{max} , ε_{max} отвечают предельным величинам (хрупкого) разрушения. Таким образом, в ряде случаев расчёты на прочность в теории упругости (по допускаемым напряжениям или деформациям) и расчёты по теории пластичности вплотную подводят к формулировке критериев разрушения или им аналогичных. Хотя и далеко не во всех случаях. Перед тем как обсуждать образ действий при оценке прочности укажем разделы механики, в которых теория упругости отвечает на вопрос о возможности разрушения прямым и непосредственным образом [10].

Потеря устойчивости. Критерий разрушения совпадает с критерием устойчивости конструкции под данным воздействием P :

$$P < P_{max},$$

Теория колебаний: определение резонансных частот упругих конструкций. Как правило, если при вынужденных колебаниях под действием внешней нагрузки (например,

сейсмической) частота внешней нагрузки близка к первым 1–4 собственным частотам системы, разрушение неминуемо.

Критерий прочности в простейшей форме здесь можно записать как ограничения на частоту воздействия для любых n из спектра вынуждающего колебания:

$$\omega_n > \omega_{max}, \quad \omega_n < \omega_{min}.$$

Линейная механика трещины, кратко охарактеризованная ниже. Для суждения о том, будет ли трещина распространяться, необходимо знать единственную константу материала – т.н. *вязкость разрушения* или эффективную поверхностную энергию J_C . Критерий разрушения, например, для трещины растяжения имеет вид

$$J < K_C = K_{IC},$$

Несмотря на то, что во всех этих случаях мы имеем дело только с моделью (сплошной) среды, специфика задачи позволяет сформулировать критерий прочности материала в рамках этой модели.

Уровень развития вычислительных средств и накопленный экспериментальный материал позволяет применять довольно изощрённые модели сплошной среды непосредственно при расчётах НДС конструкций сложной формы. Действия при оценке способности элемента конструкции противостоять механическому разрушению приблизительно таковы.

- Анализируются: *нагрузка* (статическая, циклическая, динамическая, колебательная, импульсная), свойства *материала* (жёсткий, пластичный, "ползучий", хрупкий, ...), *условия работы* (температура, среда (облучение, химия), длительность, ...);
- Выбирается модель материала и вычисляется НДС при заданных условиях (наличие пластичности, ползучести, термозависимости и других изменений свойств, ...);
- Определяются с учётом специфики условий наиболее вероятные физические механизмы разрушения, получаемое расчётное НДС уточняется, и вычисляются соответствующие механические критерии разрушения.

Указанная последовательность действий подходит под категорию "расчётов на прочность", название же "механика разрушения" (МР) употребляется в отечественной литературе в более узком смысле как механика трещин. Это название воплощено в соответствующем англоязычном термине – "fracture mechanics". При дальнейшем её развитии существенно использовались методы теории пластичности, и появилось обобщение – УПМР – упруго–пластическая МР [21].

В Приложении введены некоторые понятия УПМР, применяемые в оценках трещиностойкости, приведены численные примеры. Зарождение и развитие трещин, начиная с определённого уровня деформации, наблюдается, за небольшими исключениями, у большинства материалов. Основной теоретический и практический вопрос, на который отвечает УПМР, состоит в предсказании дальнейшей эволюции возникшей трещины при заданных условиях.

До определённого момента трещины могут быть небольшими и множественными, что не позволяет напрямую применять развитый аппарат УПМР. Уже сравнительно давно разработана простая феноменология долговременного разрушения материала под нагрузкой. Построенное качественное и количественное единообразное описание поведения материала при разных условиях суммируемое термином *длительная прочность*, может быть формализовано в критериальных оценках предельного механического

состояния и внедрена в методику расчёта НДС. Соответствующая процедура кратко охарактеризована ниже.

7.8.2. Длительная прочность

7.8.2.1. Основные понятия

Изложение рассмотренных ниже вопросов можно найти, например, в книге [18] и, более подробное, в [17]. Как отмечалось, разрушение под действием продолжительной нагрузки обычно есть следствие нескольких физических факторов. Основная информация о длительной прочности материала получается из совокупности испытаний на длительную прочность при растяжении. Образец нагружается растягивающей силой P , определяется время его разрушения t^* . Вводится т.н. *предел длительной прочности*

$$\sigma_{\text{дл}} = P/A^*, \quad (7.3)$$

где A^* – площадь сечения разрыва. Испытания проводятся при разных нагрузках, затем строится график зависимости оцененного среднего напряжения $\sigma_{\text{дл}}(t^*)$ от времени разрушения в осях $(\log \sigma_{\text{дл}}) - (\log t^*)$.

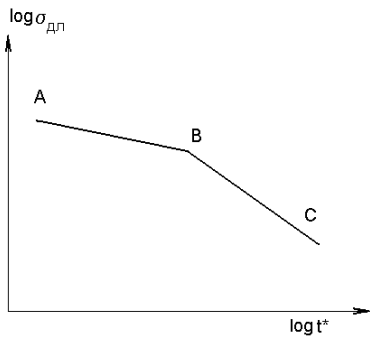


Рис.7.1. Диаграмма длительной прочности

Часто, хотя не всегда, эта зависимость имеет вид ломаной линии, состоящей из 2-х отрезков (рис.7.1). Участок АВ отвечает *вязкому* разрушению (ползучесть и заметное деформирование, если нагрузка выше), а ВС – хрупкому (разрушение без заметной предварительной деформации при меньшей нагрузке). Прямая линия означает наличие степенного закона $\sigma_{\text{дл}}(t^*)$. Его происхождение отчасти объясняется оценкой (7.34), сделанной для степенного закона для скорости деформации на второй стадии ползучести. Хрупкое разрушение подготавливается постепенным развитием и слиянием микродефектов: возникают микротрещины, которые растут, уменьшая эффективную площадь несущего сечения. Феноменологический закон $\sigma_{\text{дл}}(t^*)$ здесь также степенной, но с другим показателем. Графики, подобные приведённому на рис. 7.1, строятся для усталостной прочности (кривая Вёлера), для высокотемпературной прочности.

Запас прочности по времени $n = t^*/t$ выше был определён (7.34) при постоянной нагрузке. Обратная величина $\xi(t) = t/t^*$ называется *повреждённостью материала при данной нагрузке за время t*. Пусть величина t^* известна для данного диапазона условий. Если нагрузка нестационарна, то вычисляется *функция повреждённости* (т.н. закон линейного суммирования повреждённости):

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta t_i}{t^*(\sigma_i)} \quad \text{или} \quad \xi(t) = \int_0^{t_0} \frac{dt}{t^*(\sigma(t))}, \quad (7.4)$$

где Δt_i – интервал пребывания при напряжении σ_i . В момент, когда $\xi(t)=1$, запас прочности считается исчерпанным.

7.8.2.2. Температурно–временные зависимости длительной прочности

Степень повреждения, причиняемая механической нагрузкой, и, соответственно, время до разрушения, зависят от температуры. Если при работе конструкции увеличивается или уменьшается температура, то это можно считать эквивалентным в определённом смысле некоторому увеличению или уменьшению длительности нагружения. Поэтому температура должна быть введённой в аргументы функции времени разрушения: $t^*=t^*(\sigma_{дл}(t), T)$. Эти данные должны быть получены экспериментально.

Для того, чтобы получить сколько–нибудь представительные данные по длительной прочности в достаточно широком диапазоне нагрузок и температур, необходимо, например, для получения таблицы размером 10×10 провести порядка 100 испытаний только для одного материала. Требуемые значения срока службы изделия при повышенной температуре могут лежать в пределах от минут (материалы ракетных двигателей) до 10 лет (паровые турбины) и более (корпуса ядерных реакторов). Естественно желание иметь некую универсальную кривую, на которую бы ложились результаты этих испытаний, хотя бы приближённо, что позволило бы сократить их количество в конкретных случаях.

Для получения подобных аппроксимаций данных по длительной прочности, исходя из относительно небольшого набора испытаний, применяют гипотезы подобия "время–температура", проверяемые для металлов в различных комбинациях условий.

Зависимость скорости деформации ползучести от температуры и от нагрузки из общефизических соображений и опытных фактов может быть взята экспоненциальной:

$$\dot{\varepsilon}_p = d\varepsilon_p / dt = B \exp(-U(\sigma) / RT) . \quad (7.5)$$

Здесь $U(\sigma)$ – "энергия активации", соответствующая напряжению σ . Из опыта известно, что для многих металлов произведение скорости ползучести (скорости деформации) на время до разрушения приблизительно постоянно:

$$t^* \dot{\varepsilon}_p = e^*, \text{ или } \dot{\varepsilon}_p = e^* / t^* . \quad (7.6)$$

Это можно интерпретировать, как независимость предельной деформации от скорости деформирования, определяемой приложенной нагрузкой $\sigma = \sigma_{дл}$. Если не учитывать изменение сечения при деформации до разрыва, то, внося выражение для $\dot{\varepsilon}_p$ в (7.5) и логарифмируя, для момента $t = t^*$ получим соотношение, связывающее напряжение $\sigma_{дл}$ – предел длительной прочности, с временем разрушения и температурой испытания:

$$\log(e^*) - \log(t^*) = -U(\sigma_{дл}) / RT + \log B ,$$

что можно записать в виде

$$T \left(\log \frac{B}{e^*} + \log t^* \right) = \frac{U(\sigma_{дл})}{R}$$

или

$$T (C + \log(t^*)) = \Pi = f(\sigma_{дл}) , \quad (7.7)$$

где Π называется *параметром Ларсона–Миллера*. Время и температура входят в этот параметр в определённой комбинации. Предел длительной прочности $\sigma_{дл} = \sigma_{дл}(t^*)$ соответствует этому параметру:

$$\sigma_{дл} = U^{-1}(R \Pi(t^*, T)) .$$

Формула (7.7) – есть аппроксимационное соотношение (весьма приближённое), позволяющее объединить результаты испытаний на длительную прочность для условий различной температуры. Величина C – константа материала. В зависимости от единиц измерения и принятого стандарта у разных авторов логарифм может браться натуральным или десятичным. Существуют также другие соотношения (Мэнсона–Хафферда, Орра–Шерби–Дорна), которые имеют на одну константу больше, что позволяет осуществить подгонку точнее. Все они носят эмпирический характер.

Соотношения вида (7.4), (7.7) при недостатке экспериментальных данных применяют при экстраполяционных оценках запаса прочности в условиях изменяющейся температуры и нагрузки. Схема применения может быть следующей. Пусть в численном расчёте мы хотим оценивать запас прочности в конечном элементе – определять интеграл в функции $\xi(t)$ (7.4) в каждый момент времени при, например, переменном эффективном напряжении σ в элементе и температуре T . Предположим, что нам известны зависимость (7.7) и кривая длительной прочности (диаграмма рис. 7.1) при некоторой температуре T_0 . Последнее позволяет нам выразить для данного напряжения σ отвечающее ему время до разрушения t_0^* из (приблизительно логарифмической) зависимости $\sigma = \sigma_{\text{дл}}(t_0^*, T_0)$ и в соответствии с (7.7) записать аппроксимацию для неизвестного времени до разрушения t_1^* , соответствующего данным нагрузке σ и температуре T_1 :

$$T_0 (C + \log(t_0^*)) = T_1 (C + \log(t_1^*)) = f(\sigma_{\text{дл}}).$$

Отсюда выражается неизвестный параметр времени:

$$t_1^* = \exp(T_0 / T_1 (C + \log(t_0^*(\sigma))) - C).$$

Константа материала C в уравнении (7.7) приблизительно одинакова для ряда металлов. Описанная процедура реализована в коде HEFEST_M в комплексной процедуре моделирования последовательного разрушения под нагрузкой (но для более сложной модели повреждённости): вычисляется критерий разрушения конечного элемента, который по разрушении удаляется из расчёта, и, при необходимости, место приложения нагрузки переносится на неразрушенный элемент [22]–[23].

Литература

1. Н.И. Дробышевский, А.Е. Киселёв, В.Ф. Стрижов, А.С. Филиппов. HEFEST_M: программное средство для расчёта высокотемпературного нелинейного деформирования. // Математическое моделирование, 22 (2), 2010, стр. 45–63
2. А.С. Филиппов, Н.И. Дробышевский, А.Е. Киселёв, В.Ф. Стрижов. Расчёт термдеформирования корпуса реактора с расплавом с помощью кода HEFEST_M. Известия РАН, Энергетика, 6, 2010 стр. 92–104
3. Работнов, Соппротивление материалов, М., ГИФМЛ, 1962, 456 с.
4. Л.И.Седов, МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. Т. 1, М.: Наука, 1970 г., 492 стр.
5. MALVERN, L.E. – Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice–Hall, 1969
6. Х.Хан, Теория упругости. М., Мир, 1988.
7. Г.В. Коренев, Тензорное исчисление. М., Изд–во МФТИ, 1996., 240 с.
8. В.И. Феодосьев, Соппротивление материалов. М. Наука, 1986, 512 с.
9. С.Н. Коробейников, Нелинейное деформирование твёрдых тел. Новосибирск, Изд–во СО РАН, 2000, 262 с.
10. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела, М., Наука, 1988, 712с.
11. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория упругости
12. А.М. Кац, Теория упругости, М., ГТТИ, 1956, 207 с.
13. А.С. Монин, А.М. Яглом. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М., Наука, 1965, 640 с.
14. Р. Хилл, Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956, 407 с.
15. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных установок. М. 1989.
16. Тайра С., Отани Р.. Теория высокотемпературной прочности материалов. М., 1986.
17. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М. ГИФМЛ, 1966.
18. Н.Н.Малинин, Прикладная теория пластичности и ползучести, М., Машиностроение, 400 с. 1975 Rempre, J.L., S.A.Chavez, G.L.Thinnes et al. 1993. Light Water Reactor Lower Head Failure Analysis. NUREG/CR–5642. EGG–2618
19. Дробышевский Н.И., Филиппов А.С. Численный анализ высокотемпературной ползучести реакторной стали. Известия РАН, Энергетика, 3, 2004, с.27–34.
20. Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ. /Под ред. С. Атлури.—М.: Мир, 1990.—392 с.
21. *Filippov A.S., Drobyshevsky N.I., Strizhov V.Th.*, Simulation of Vessel–with–melt Deformation by SOCRAT/HEFEST Code, 17th Int. Conf. on Nucl. Eng., ICONE17, July 12–16, 2009, Brussels, Belgium

- 22 . A.S.Filippov, N.I.Drobyshevsky, D.D.Kamenskay, A.E.Kisselev, E.V.Moiseenko. End-to-end technology of modeling a melt-structure interaction during IVMR in VVER with HEFEST-URAN toolkit. Proceedings of the 22nd International Conference on Nuclear Engineering, ICONE22 July 7-11, 2014, Prague, Czech republic
- 23 . T. Belytschko. Finite Elements for Nonlinear Continua & Structures. 1998

Приложение. Механика упруго–пластических трещин и численные расчёты

Трещиностойкость материалов и элементов конструкций

Разрушение и трещины

При вязком разрушении материал испытывает значительные пластические (необратимые) деформации, приводящие к уменьшению несущего сечения. В качестве примера возьмём продольное растяжение стержня. В месте локального сужения (образования шейки) напряжение растёт, что способствует дальнейшей деформации и росту напряжения. Когда подобный рост напряжения при невозрастающей нагрузке продолжается и ускоряется, говорят о *пластической неустойчивости*, приводящей к разрушению. Но при этом мы, в принципе, можем фиксировать любой этап нагружения и в любой момент определить НДС, т.е. напряжения, действующие в любом сечении, по приложенной силе и размеру сечения. Это позволяет, в принципе, применять критерии предельного состояния типа (7.1), и возможные способы количественного описания вязкого разрушения в целом понятны.

Хрупкое разрушение происходит очень быстро, "катастрофически", и долго оставалось загадкой. О том, что хрупкость связана с трещинами, что существует концентрация напряжений в трещине, о возможности хрупкого разрушения нехрупких металлов знали уже сравнительно давно, но не было соответствующих понятий и параметров, которые бы позволяли надёжно классифицировать трещины на их склонность к неустойчивому росту, а материалы тестировать на хрупкое разрушение.

Наличием и развитием трещиноподобных дефектов с концентраторами напряжений объясняют низкую (относительно теоретической) прочность стёкол и подобных материалов. Идеальная прочность кристалла, как отмечалось выше:

$$\sigma_{\max} \sim E/\varepsilon_{\text{perfect}} \sim E/0,1 \text{ (железо: } \sim 10 \text{ ГПа)}$$

Есть эксперименты, демонстрирующие возможность прочности, близкой к теоретической:

- опыты Иоффе (1920) с каменной солью ;
- кристаллические нити ("усы") – бездефектные кристаллы;
- прочность стеклянных нитей (А. Гриффитс и др.), которая оказалась обратно пропорциональной толщине и может быть очень высокой.

Как отмечалось, фактическая прочность конструкционных материалов на 1–3 порядка ниже. В пластических материалах это объясняется наличием микродефектов, приводящих к поэтапному пластическому деформированию. В случае хрупкого разрушения этот дефект чаще поверхностный, сингулярный, т.е. является трещиной, которая неустойчиво и очень быстро растёт при нагружении. Она служит основным объектом изучения в механике разрушения (т.е. в механике трещин – "fracture mechanics").

Основные понятия и этапы развития линейной механики трещин

С некоторой точностью контур прямой внутренней трещины в пластине, в которой задано поле растягивающего напряжения перпендикулярного к трещине направления, может быть представлен эллипсом. Оценку концентрации напряжений в такого рода щели даёт задача о НДС в окрестности эллиптического отверстия с полуосями a и b , $a > b$, при внешнем приложенном напряжении σ : решение Колосова (1909г.) и Инглиса (1913г.). Концентрация растягивающего напряжения в крайних точках большой полуоси описывается т.н. формулой эллипса (см., например, [П.1]):

$$\sigma_{yy} = \sigma (1 + 2a/b). \quad (\text{П.1})$$

Ось Oy направлена вдоль малой полуоси b , вдоль которой приложена нагрузка. Предельный случай $a = b$ был рассмотрен выше в гл. 5. Заметим, что при $a \gg b$, в соответствии с принципом Сен-Венана, область большого напряжения должна быть мала и сосредоточена в окрестностях крайних точек, в которых расстояние между берегами щели заметно меньше $2b$.

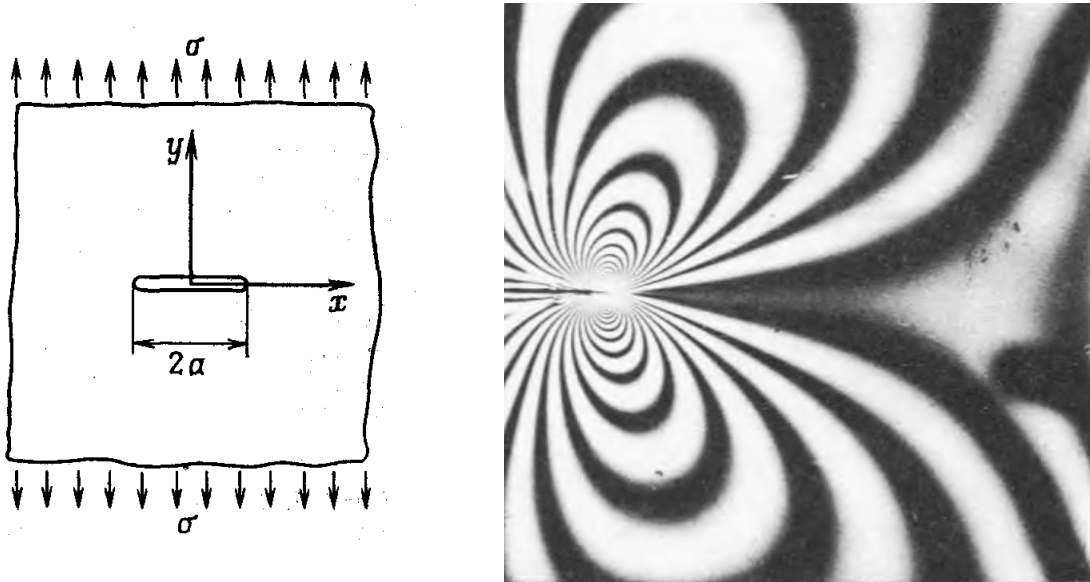


Рис.П.1. Трещина Гриффитса и поле напряжений в окрестности вершины ([2])

Предельный переход $b/a \rightarrow 0$ в задаче с эллиптическим отверстием даёт бесконечные напряжения у вершины трещины растяжения. Эллипс вырождается в математический разрез: "трещину Гриффитса" (Рис. П.1) по имени исследователя, впервые работавшего с ним. Решение будет иметь две особенности по краям разреза. Асимптотическое выражение для компонент поля напряжения в малой окрестности вершины трещины растяжения длиной $2a$ имеет вид (см. [П.1] и др.):

$$\sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \dots \right) \quad (\text{П.2})$$

$$\sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \dots \right) \quad (\text{П.3})$$

$$\tau_{yy}(r, \theta) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \dots \quad (\text{П.4})$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

где r, θ – полярные координаты. Параметр K_1 служит одним из *критериев трещиностойкости*. Визуализация поля напряжений методом фотоупругости показана на рис. П.1 справа (из [8]).

Подходы к решению проблемы хрупкого разрушения

В подходе А. Гриффитса (А.А.Griffith, Англия, 1921 г.) сформулирован *энергетический критерий* хрупкого разрушения, который вкратце можно свести к следующему:

- Трещина – концентратор напряжений под нагрузкой;
- Хрупко разрушающиеся материалы содержат микротрещины;
- Когда при приложении нагрузки трещина растёт, запасённая и высвобождаемая за счёт снижения деформации механическая энергия идёт, за счёт концентрации напряжений в концах трещины, на дальнейший разрыв материала;
- Если высвобождаемая при разрыве механическая потенциальная энергия превышает ту, что необходима для формирования новых участков поверхности трещины, то развитие трещины неустойчиво, и она неудержимо растёт.

Для практики необходимо количественное выражение условия неустойчивости роста трещины. Рассуждения Гриффитса при выводе критерия примерно таковы. Рассмотрим плоское НДС при 1–осном нагружении бесконечного образца единичной толщины, в котором выделим прямоугольную область $a_0 \times b_0$. Ось Ox и размер a_0 – по горизонтали, ось Oy и размер b_0 – по вертикали (Рис. П.1). Пусть образец растянут вдоль вертикальной оси, и в нём возникло однородное НДС. Пусть в середине возникла трещина длиной $2a \ll a_0$, достаточно малая, чтобы не рассматривать влияние границ.

Случаи плоских напряжений и плоских деформаций отличаются множителем в выражении энергии. Толщину образца полагаем единичной, краевыми эффектами пренебрегаем, и объёмные величины будут относиться к ед. площади.

Полагаем напряжение в пластине без трещины однородным, пусть оно равно $\sigma > 0$. Деформация: $\varepsilon = \sigma/E$. Плотность упругой энергии

$$U = \sigma\varepsilon/2 = \sigma^2/2E,$$

полная энергия в сечении $W = U a_0 b_0 = a_0 b_0 \sigma^2/2E$.

При возникновении трещины участок пластины площадью $\sim a^2$ разгружается, упругая энергия уменьшается на величину

$$\Delta W \sim U a^2 = C a^2 \sigma^2/2E, \quad C - \text{константа.}$$

С другой стороны, возникли две новые поверхности с поверхностной энергией

$$\Gamma = 4\gamma a.$$

Величина убыли объёмной упругой энергии растёт пропорционально квадрату длины, а прибыль поверхностной энергии – линейно. Образование новой поверхности – необходимое условие роста трещины, следовательно, пока убыль объёмной упругой

энергии не компенсирует прибыль поверхностной энергии, трещина подрастает устойчиво за счёт сторонних факторов.

Найдём критическую длину трещины, при которой "убыль"="прибыли". В точке равновесия при квазистатическом подрастании трещины на длину Δa (виртуальное перемещение) должно быть

$$\Delta W + \Delta \Gamma = 0 \quad \text{или} \quad 4\gamma \Delta a = C \sigma^2 / 2E \cdot 2a \Delta a, \quad \text{или} \quad 4\gamma = C a \sigma^2 / E. \quad (\text{П.5})$$

Взяв для константы её значение $C=2\pi$, полученное из точного решения задачи (см., например, [П.2], [П.3]), получим связь критической длина трещины с нагрузкой и константами материала в рассматриваемом случае плоской деформации:

$$a_C = 2\gamma E / \pi (1 - \nu^2) \sigma^2. \quad (\text{П.6})$$

При плоском напряжении –

$$a_C = 2\gamma E / \pi \sigma^2.$$

Концентрация напряжений у вершины трещины приводит к локализации потенциальной энергии деформирования: в литературе по МР говорится, что упругая механическая энергия, высвобождаемая при подрастании трещины, "стекает" к вершине трещины. Большая часть материала, у плоской части границы трещины, оказывается разгруженной (принцип Сен-Венана), и плотность энергии там почти нулевая. Величина

$$2\gamma = J_w = \frac{\partial W}{\partial a} \quad (\text{П.7})$$

называется иногда *трещиноподвижная сила* или *работа разрушения*. При хрупком разрушении это энергия образования поверхности (которую Гриффитс отождествлял с поверхностной энергией жидкости). Требуемый количественный *энергетический критерий* предельной устойчивости трещины схематически можно записать через критериальный параметр J_C в виде

$$J_w = J_C, \quad (\text{П.8})$$

где величина J_w может быть вычислена через упругую энергию конфигурации, а J_C – экспериментально измеряемая величина.

В случае, когда мы можем выразить J_w , критерий устойчивости может быть с помощью (П.6) сформулирован через некоторую критическую длину трещины или критическое напряжение для конфигурации с трещиной заданной длины:

$$a < a_C, \quad \sigma < \sigma_C.$$

Концепция Гриффитса первоначально не получила широкого признания из-за двух существенных недостатков. Во-1, предложенный критерий сложен для вычислений, поскольку требует вычисления упругой энергии во всей области трещины. Во-2, трещиноподвижная сила, вычисленная как мощность, идущая на увеличение поверхностной энергии, оказывается очень малой. Для металлов подход Гриффитса в первоначальной форме оказался неприменим, поскольку для роста трещины в металлах необходима на порядок–два большая работа разрушения.

Если мы попытаемся повторить мысленный эксперимент по подрастанию трещины для пластически деформируемого тела, то нам придётся включать работу при пластическом деформировании. Непосредственное вычисление работы разрушения по формуле (П.7) и

применение энергетического критерия разрушения возможно в этом случае только численно.

Различие между хрупким и квазихрупким (трещина в пластическом материале), как оказалось, и состоит в том, что работа разрушения идёт в основном на пластическое деформирование в окрестности вершины трещины и оказывается гораздо выше прироста поверхностной энергии. Соответствующие теоретические построения были развиты в УПМР. Применение и развитие механики трещин началось после формулировки более удобного *силового* критерия.

Силовой критерий разрушения

Критерий устойчивости трещины (П.8) в основе – энергетический, но его можно сформулировать через более удобную величину, характеризующую поле напряжений в окрестности вершины. Для получения своей формулы Дж. Ирвин прибегнул к полуколичественным рассуждениям, довольно простым, но которые мы не будем здесь воспроизводить [П.4]. Основная идея такова. Поскольку "упругая энергия стекает к вершине", и эта область – мала по сравнению с размером трещины, для вычисления критерия Гриффитса в виде (П.8) не надо интегрировать упругую энергию по всему объёму, но только – по окрестности вершины – области распространения трещины, где напряжения, даваемые асимптотическими соотношениями (П.2)–(П.4), вносят основной вклад в изменение упругой энергии. В остальной области как НДС, так и упругая энергия остаются неизменными. Подставив в формулу (П.7) значение упругой энергии, вычисленное с помощью (П.6)–(П.7), Ирвин получил связь трещиноводвижущей силы J и *коэффициента интенсивности напряжений* (КИН). Для случая трещины отрыва КИН обозначается K_1 , как коэффициент в формулах (П.4)–(П.4). Для этого случая *формула Ирвина*, связывающая K_1 с трещиноводвижущей силой, при плоской деформации имеет вид:

$$J_1 = (1 - \nu^2) \frac{K_1^2}{E} . \quad (\text{П.9})$$

Т.к. эта формула справедлива также и для критического состояния, когда трещина становится неустойчивой, можно ввести *критический коэффициент интенсивности* K_{1C} . По определению:

$$K_1 < K_{1C} . \quad (\text{П.10})$$

Этот критерий в приложениях удобней энергетического, поскольку поле напряжений как правило вычислить проще, чем величину (П.7). Критерий позволяет избавиться от первого недостатка первоначальной концепции Г.Гриффитса хрупкого разрушения. Существуют таблицы теоретически вычисленных для разных конфигураций коэффициентов интенсивности. Величину K_{1C} можно измерить экспериментально.

Формулы (П.7)–(П.10) фактически исчерпывают содержание собственно *линейной* механики разрушения, имеющей дело с хрупким разрушением, не учитывающей нелинейное пластическое деформирование.

Упруго–пластическая трещина

Начало развития УПМР связано с несколькими исследователями, среди которых упомянем Дж. Ирвина (США) и Е. Орована. Оба автора имели дело с разрушением металла и наблюдали при металлографических исследованиях, что пластические деформации

обычно наблюдаются в малой окрестности трещины, а большая часть материала разгружалась упруго. Это привело их к концепции *квасихрупкого разрушения*. В ней по прежнему утверждалось, что упругая энергия, высвобождающаяся при подрастании трещины, "стекает" к вершине трещины в место концентрации напряжений, но тратится не столько на образование новой поверхности, сколько на пластическое деформирование материала.

Второе предположение состоит в том, что асимптотическое выражение типа (П.2) для поля напряжений в окрестности вершины трещины сохраняет силу там, где нет пластических деформаций, а в пластической области все напряжения имеют величину порядка предела текучести материала. Следовательно, при квазихрупком разрушении можно применять силовой критерий разрушения (П.10), где величина K_{IC} вычисляется по формулам в случае хрупкого разрушения, для пластических же материалов измеряемая экспериментально величина K_{IC} оказывается на порядок большей. Для углеродистой стали при нормальных условиях: $K_{IC} \sim 100 \text{ МПа}\cdot\text{м}^{-1/2}$. Данные предположения позволили избавиться от вышеуказанного второго недостатка первоначальной концепции хрупкого разрушения.

Пластическая поправка – размер пластической зоны

Пластическая зона у вершины трещины фактически входит в область влияния внешней нагрузки, создающей концентрацию напряжений. Соответственно, Ирвин же предложил при вычислении K_{IC} использовать эффективную длину трещины, увеличенную на величину порядка размера этой пластической зоны. Оценка этого размера получается, если приравнять ему величину максимального напряжения из формулы (П.3), полагая все напряжения в области пластичности равными пределу текучести σ_y :

$$\sigma_y \approx \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}$$

откуда –

$$\delta_p = \xi \frac{K_1^2}{2\pi\sigma_y^2} = C \frac{K_1^2}{\sigma_y^2}, \quad C=0,015-0,1,$$

Коэффициент C отражает неопределённость параметра, поскольку уровень минимальной пластической деформации не вполне определён. Порядок величины δ_p для стали – миллиметр.

Проведённые в разных странах мира дальнейшие исследования по выяснению и измерению критических параметров трещиностойкости позволили разработать несколько методик, по которым можно оценить опасность трещин. Некоторые из этих методик приняты за стандарты испытаний, применяемые в разных странах мира, соответствующие величины и формулы входят в нормы расчётов на прочность (в РФ – КИН–критерий). Применение механики разрушения вошло в инженерную практику оценок трещиностойкости объекта под нагрузкой. Пусть, например, при обследовании объекта выявилась трещина известного расположения и размера. Решение практической задачи предотвращения разрушения может включать следующие шаги.

- Оценка возможных местных напряжений путём сведения задачи к известной конфигурации. Оценка КИН;

- Сравнение с табличными данными, оценка предельно возможной скорости роста;
- На основе анализа и принимаемого запаса можно, либо прекратить эксплуатацию объекта, либо, при необходимости и возможности, застопорить трещину (укрепить края, рассверлить концы).

В компетенцию анализа МР входят все три пункта. Кроме КИН существуют другие критерии, которые могут быть вычислены. Примеры приведены ниже. Дальнейшие сведения по УПМР можно почерпнуть в руководствах по механике трещин, приведённых в литературе к настоящему Приложению.

Параметры трещиностойкости

Для конкретизации введённых выше понятий механики трещин далее рассмотрены результаты численных расчётов некоторых параметров, существенных в оценках трещиностойкости. Они обсуждаются ниже. Нас будут интересовать только трещины растяжения, поскольку они типичны, и для них условия по напряжениям наиболее жесткие.

Рассмотренный выше подход к оценке трещиностойкости с использованием коэффициента интенсивности напряжений (КИН) основан на рассмотрении поля напряжений в малой окрестности вершины трещины, которое описывается с помощью сингулярных функций (П.2–П.4), что позволяет отвлечься от структуры поля вдали трещины. Коэффициент интенсивности K_I в малой окрестности вершины не зависит от координат (θ, r) . Для рассматриваемой простейшей конфигурации трещины Гриффитса $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$, и величина КИН есть функция двух основных переменных – нагрузки p и длины трещины a . В общем случае K_I включает в себе зависимости от нагрузки, формы образца, от длины трещины и её расположения относительно его границ, его записывают в виде

$$K_I = p\sqrt{\pi a} f(S) Y(a/b) , \quad (\text{П.11})$$

где p – нагрузка, $Y(a/b)$ – некоторая функция, b – длина остаточного сечения (нетто–сечение), $f(S)$ – функция других размеров.

Условие роста трещины при малых пластических деформациях, т.е. критерий (квази)хрупкого разрушения сводится к условию $K_I = K_{IC}$, где K_{IC} суть характеристика материала. Оценка состояния трещины сводится к определению K_I в зависимости от её размера и приложенной нагрузки. Условие разрушения задает некоторую кривую $F(p,a)=K_{IC}$ в координатах $a-p$.

Инвариантный интеграл – Г.П.Черепанов [П.5]: "В 1967г. автор получил основной инвариантный Γ –интеграл механики разрушения непосредственно из закона сохранения энергии

$$\Gamma = \oint_{S_c} ((W+T+H)n_1 - \sigma_{ij}n_j u_{i,1}) ds , \quad (i,j = 1,2) \quad (\text{П.12})$$

... Величина Γ – инвариантный параметр механики разрушения – равна потоку энергии в конец трещины, приходящемуся на ед. площади ... В качестве простейшего локального критерия разрушения на фронте трещины был предложен критерий $\Gamma=\Gamma_c$, где Γ_c – эмпирически определяемая характеристика материала, равная потоку избыточной диссипации энергии в конец трещины, не учитываемый принятой моделью тела."

Инвариантный интеграл Черепанова–Райса (чаще обозначаемый как " J -интеграл") широко используется в МР. Критерий $\Gamma = \Gamma_c = J_c$ до 80-х гг. обосновывался и применялся при монотонном нагружении, когда применима деформационная теория пластичности – нелинейно–упругое тело. В экспериментах по определению J для растущей трещины обычно используется монотонное нагружение образцов. При использовании инкрементальной модели пластичности в общем случае для достижения инвариантности в численном расчете к интегралу по контуру следует добавить некоторый интеграл по объему (см. [П.4]). Соотношение (П.9) линейной механики разрушения (ЛМР) – эквивалентность J и скорости высвобождения упругой энергии $\partial\Pi/\partial a$ выполнено для квазихрупкого разрушения и используется при экспериментальном определении J . Но при развитой пластичности согласно [П.4]: "утрачивается физический смысл J -интеграла в виде потенциальной энергии, необходимой для обеспечения распространения трещины ... Но считают что J -интеграл можно использовать в качестве параметра. Для использования J -интеграла как параметра, описывающего условия разрушения пластического тела, теоретических обоснований недостаточно. Тем не менее, эксперименты и численные расчеты показывают, что J -интеграл может быть использован в такой роли при проектировании." Интеграл (П.12) может быть определен численно в стандартных расчетах, например, методом конечных элементов. Критерий $J=J_c$ широко применяется на западе, в основном в США. Для его применения необходимы экспериментальные данные по J_c для материалов, которые пока не входят в число стандартных в нашей стране.

Другие величины, фигурирующие в критериях трещиностойкости элементов конструкций, это, вместе с коэффициентами K_I , J , величины

- C(T)OD (crack (tip) opening displacement: раскрытие трещины у вершины);
- δ_p (размер пластической области у вершины трещины) в образце из упруго–пластического материала в условиях плоских напряжений/плоских деформаций.

Линейная механика разрушения (ЛМР) дает формулы для оценок этих параметров. Для трещины растяжения основные используемые соотношения ЛМР:

$$J_1 = (1 - \nu^2) \frac{K_1^2}{E} \quad (\text{П.13})$$

$$\text{COD} = \delta = C \frac{K_1^2}{E\sigma_y}, \quad C=0,4-0,7 \quad (\text{П.14})$$

$$\delta_p = C \frac{K_1^2}{\sigma_y^2}, \quad C=0,015-0,1, \quad (\text{П.15})$$

В терминах этих величин обычно формулируются результаты исследований по трещиностойкости. При (квази)хрупком разрушении достаточно знать вязкость разрушения K_{Ic} . В условиях развитой пластичности поле напряжений также можно описывать асимптотическими соотношениями типа (П.2), но показатель степени может быть другим, а критерий начала роста трещины $K_{Ic} = K_{Ic}$ начинает зависеть от образца и теряет свою универсальную роль. В упруго–пластической механике разрушения для тела со степенным законом упрочнения $\varepsilon_p \propto \sigma^n$ было построено асимптотическое решение HRR (Хатчинсон–Райс–Розенгрэн) [П.4], аналогичное решению (П.2), которое вместо него может быть использовано для оценок вязкого разрушения:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_y \left(\frac{JE}{I\alpha\sigma_y^2} \right)^{1/(n+1)} \frac{1}{(r/a)^{1/(n+1)}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$$

где $I=3\div 6$ – безразмерный коэффициент, a – длина трещины, J – J -интеграл, $\sigma_y = \sigma_{0,2}$ – предел текучести. Оно применимо на расстояниях порядка нескольких COD от вершины трещины. Величина J_i , отвечающая началу роста трещины, при монотонном нагружении, как показали эксперименты, в определенных пределах не зависит от размера образца.

Примеры численных расчётов в механике трещин

Методика расчетов

Благодаря тому, что напряжения, деформации и факторы роста сосредоточены в вершине трещины, она (в идеализированной постановке с ровными берегами etc.) сравнительно проста для анализа, "одинакова" во всех конструкциях, и результаты для трещин в однородном материале обычно хорошо согласуются с экспериментом. При численном расчёте можно рассчитать на сетке величины, которые часто невозможно получить непосредственно из измерений, не говоря уже о влиянии на НДС 3–мерности конфигурации. Всё это обусловило успех численных методов в расчётах трещиностойкости.

Численные расчёты служат не просто поддержкой экспериментальных испытаний в механике разрушения, но фактически оказываются источником новых знаний о поведении конструкции. Например, в [П.6] широко использованы и рекомендованы для применения интерполяционные формулы, построенные по результатам численных расчётов для поведения прямых и изогнутых труб и сочленений труб, содержащих трещины, под всевозможными нагрузками (обоснование концепции "течь перед разрушением" (ТПР) [20] основанное на анализе поведения трещин). Ниже по тексту приведён простейший пример подобного расчёта. Основная цель расчётов состоит в максимально точном представлении трёхмерного поля напряжений в окрестности сингулярной вершины трещины. Для этого часто вводятся специальные сингулярные элементы (см., например, [П.7]). Но в двумерной постановке задачи могут достаточно точно решаться "минимальным МКЭ", использующим стандартные билинейные 4–узловые элементы.

Приводимые ниже результаты тестовых расчетов по 2–мерной программе HEFEST_M отчасти носят характер верификации методики, поскольку часть решённых задач имеет приближённо–аналитическое решение, или сравнивается с экспериментом, а отчасти – иллюстративный, наглядно показывающий введённые критерии трещиностойкости.

Применяемое расчётное средство – программа HEFEST_M, разработана в ИБРАЭ в 90–е гг. и модернизирована в 2008–2012 гг. [П.8], [П.9]. Она предназначена для решения методом конечных элементов в двумерной плоской и аксиально–симметричной геометрии нелинейных задач (термо)механики деформируемого твердого тела в условиях медленно меняющихся нагрузок, когда можно пренебречь ускорениями и рассматривать задачу в квазистатическом режиме. Её сильными сторонами являются:

- updated лагранжев подход, что дает возможность рассматривать геометрически нелинейные задачи с деформациями в десятки процентов и более;

- применение инкрементальных нелинейных моделей пластичности, благодаря чему возможно рассмотрение немонотонного и циклического нагружения;
- развитый аппарат решения нелинейных алгебраических уравнений, что позволяет надежно получать решение в условиях развитой пластичности;
- аппарат контактных линий (скольжение со смыканием и отделением) позволяет решать контактные задачи с переменными и несовпадающими границами взаимодействующих областей;
- совместимость с программой HEFEST [П.10] расчета задач нелинейной теплопроводности и наличие термо–упруго–вязко–пластических моделей материалов, что дает возможность решать широкий класс задач термомеханики.

Программа HEFEST_M успешно применялась для расчета остаточных сварочных напряжений [П.12], [П.13] экспериментов по высокотемпературной ползучести [П.8], преднапряженного состояния железобетонной защитной оболочки АЭС [П.14], высокотемпературной ползучести корпуса ВВЭР [П.11], [П.15], [П.16] и других задач с высокой степенью геометрической и физической нелинейности. В настоящей работе она прилагается к механике трещин. На примере нескольких модельных задач с помощью HEFEST_M определяется упруго–пластическое напряженно–деформированное состояние в образце с трещиной и вычисляются некоторые основные критерии механики разрушения: коэффициент интенсивности, раскрытие трещины и др. величины. Полученные численно значения хорошо согласуются с аналитическими оценками и точными решениями. Проведено также сравнение с экспериментом по определению пластической зоны в образце с трещиной, испытываемом на трехточечный изгиб.

Численное определение основных критериев механики разрушения

Трещина Гриффитса в линейно–упругой бесконечной области

Рассматривается плоскость Oxy сечения трещины плоскостью, перпендикулярной фронту. Ось Ox направлена вдоль берегов трещины. Начало координат – в вершине трещины. Приложено постоянное напряжение σ в направлении y . Профиль yy –компоненты тензора напряжений вдоль оси x дается следующей формулой [П.1], a – полуразмер трещины:

$$\sigma_{xx} = \sigma \left(\frac{1}{\sqrt{(1-a^2)/(x+a)^2}} - 1 \right), \quad x > 0 \quad (\text{П.16})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma}{\sqrt{(1-a^2)/(x+a)^2}}, \quad x > 0. \quad (\text{П.17})$$

Отметим, что, если разложить выражение (П.16) до второго знака по величине x/a , то получим уточнение соотношения (П.2) при нулевом угле θ , в котором $K_1 = \sigma \sqrt{\pi a}$:

$$\sigma_{yy} \approx \sigma \sqrt{\frac{a}{2x}} \left(1 + \frac{3x}{4a} \right) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + \frac{3x}{4a} \right) \quad (\text{П.18})$$

Максимальное вертикальное смещение в случае плоских деформаций равно $2(1-\nu^2)\sigma a/E$, соответственно, площадь раскрытия всей трещины равна $2\pi(1-\nu^2)\sigma^2 a^2/E$, где ν –

коэффициент Пуассона, E – модуль упругости. На рис. П.2 приведено распределение $\sigma_{yy}(x)$, аналитическое и полученное численно в чисто упругой постановке. Отличие появляется вблизи вершины трещины, где КЭ разбиение недостаточно мелкое, чтобы аппроксимировать особенность. Размер этой области – 1–2 расчетных ячейки.

Определение коэффициента интенсивности напряжений (КИН)

Рассмотрим внутреннюю трещину длиной $2a=4,8\text{мм}$ в стальной полосе шириной $2b=20\text{мм}$, растягиваемой нагрузкой σ . Для определения КИН взяты два способа –

1) сравнение с аналитическим решением: зависимости (П.16)–(П.17) для $\sigma_{xx}(r)$, $\sigma_{yy}(r)$ определяются численно и подставляются в (П.18);

2) метод податливостей как вариант *энергетического метода* [П.5].

Рассмотрим расчёт по первому методу. Положим в (П.2) $\theta=0$, тогда величина КИН определяется по расчетному распределению напряжений как $\tilde{K}_1(x) = \tilde{\sigma}_{yy}(x)\sqrt{2\pi x}$, где x – расстояние от вершины трещины. Оценим размер ячеек сетки, при котором точность определения КИН приемлема. Из сравнения приближенных соотношений (П.2)–(П.3), где $\sigma_{xx} \approx \sigma_{yy}$ и формул (П.16)–(П.17) для трещины Гриффитса, где $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} - \sigma$, видно, что зависимости (П.4)–(П.3) описывают распределение напряжений в малой окрестности $|x| < x_0$, в которой $\sigma_{yy}(r) \gg \sigma$. Отсюда мы получаем, что должно быть $\sqrt{a/2} \gg \sqrt{x_0}$. К примеру, для 10%–ной точности, если $\sqrt{a/2} > 10\sqrt{x_0}$, то должно быть $a > 50x_0$. Размер ячейки должен быть еще в несколько раз меньше величины x_0 . Таким образом, если не применять специально сконструированные сингулярные элементы, прямой метод определения КИН в общем трёхмерном случае предъявляет относительно высокие требования к сетке, поскольку в расчете НДС мы должны моделировать не только окрестность вершины трещины, но и нагруженную область, содержащую трещину.

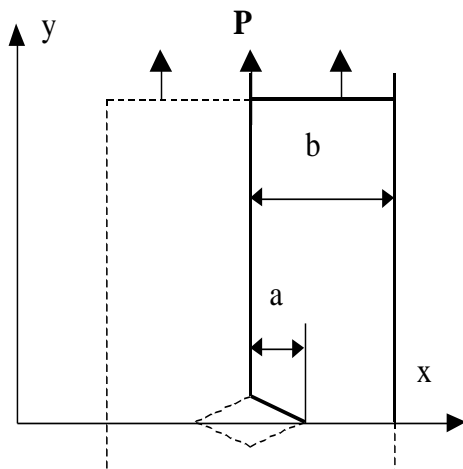


Рис. П.2. Расчетная область (правая половина трещины) при определении КИН.

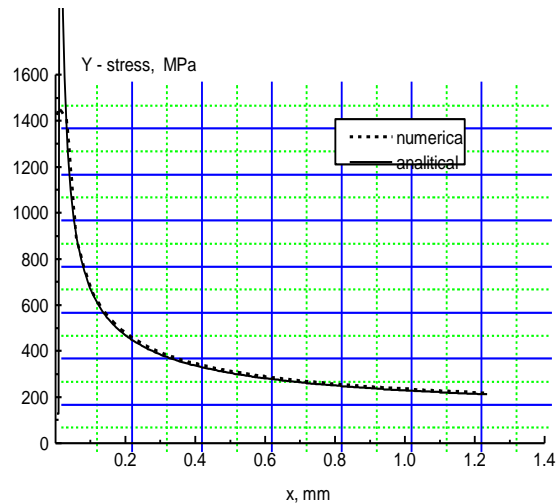


Рис. П.3. y –напряжение вдоль оси x в задаче о трещине Гриффитса, численный и аналитический расчёты.

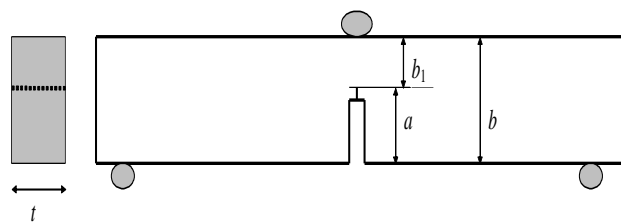
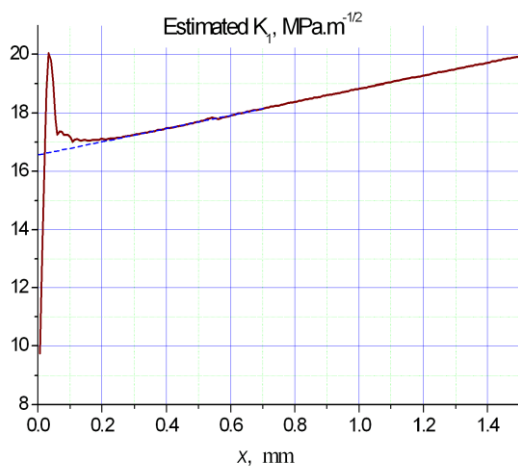


Рис. П.4. Определение КИН прямым методом Рис. П.5 Образец на трехточечный изгиб

В численном примере минимальный размер шага был $\Delta x = 0,025 \text{ мм} = a/200$. Геометрия отвечает показанной на рис.П.2. Ось Oz направлена вдоль направления трещины. Берется 1/4 поперечного сечения симметричного образца. Общий вид рассчитанной величины $\tilde{\sigma}_{yy}$ приведён на рис. П.3. На рис. П.4 дана рассчитанная численно функция $\tilde{K}_1(x) = \tilde{\sigma}_{yy}(x)\sqrt{2\pi x}$ при приложенном напряжении $\sigma = 128 \text{ МПа}$. Начальный пик кривой соответствует двум ячейкам, где нет аппроксимации. Последующий медленный рост с увеличением расстояния от вершины отвечает отклонению асимптотического представления (2) от формулы (П.17) в соответствии с оценкой (П.18). Искомую величину КИН определяется по точке пересечения касательной к прямому участку с осью ординат (показана на рис. П.4 прерывистой линией). Получим $\tilde{K}_1 = 16,5 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$. С точностью 0.3% КИН вычисляется по формуле [П.4], [П.17]:

$$K_1 = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{\cos(\pi a/2b)}},$$

из которой получаем $K_1 = 16,3 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$. На более грубой сетке в этой задаче получается близкая величина КИН, но труднее оценить точность, с которой графически определяется коэффициент интенсивности.

Идея второго метода, податливости, близка идее экспериментального метода с таким же названием [П.5]. Берется образец с трещиной, который начинает растягиваться из ненагруженного состояния 0 возрастающей нагрузкой P . В некоторый момент 1 трещина начинает квазистатически подрастать, нагрузку оставляют на постоянном уровне, и в последующий момент 2 начинают квазистатически разгружать образец, в результате чего он вернется в исходное (по перемещениям) состояние 0 (рис. П.6). Однородное нормальное напряжение σ , приложенное к поверхности образца, эквивалентно силе на единицу длины (вдоль оси Oz) $P = \sigma b$, которая при малом смещении поверхности $\delta v(x)$ совершает работу:

$$\delta A = \int_0^b \sigma \delta u(x) dx = \sigma \int_0^b \delta u(x) dx = P \tilde{u}, \quad (\text{П.19})$$

где \tilde{u} – некоторое среднее перемещение. В координатах P – u мы имеем замкнутый цикл 0–1–2–0. Работа, затраченная на образование трещины, равна площади гистерезисной петли и связана с величиной энергии образования поверхностей разрыва на единицу площади разрыва 2γ , что равно интенсивности высвобождения энергии J или трещиноводвижущей силой, соотношением (П.7)

$$J = 2\gamma = \frac{\partial A}{\partial \Sigma} \approx \frac{\delta A}{\delta \Sigma} \quad (\text{П.20})$$

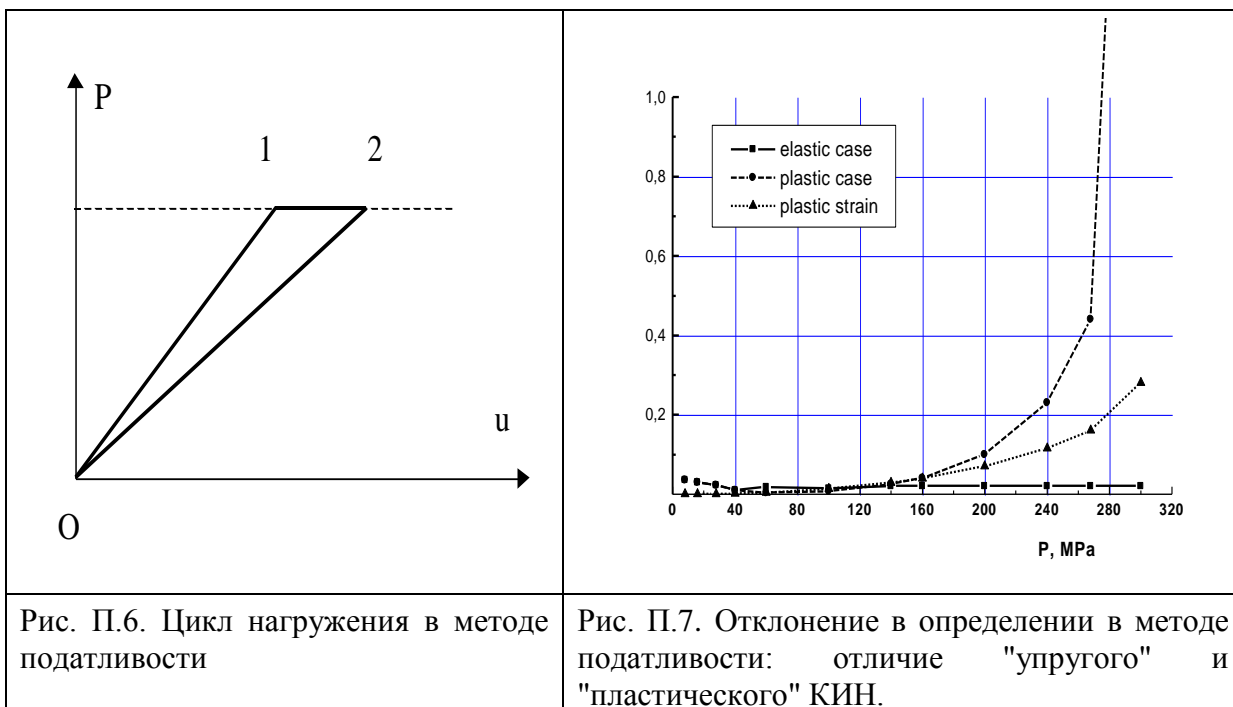
Величина G , которая в данном случае представляет собой механическую интерпретацию J –интеграла, связана с коэффициентом интенсивности формулой Ирвина (П.13):

$$J = \frac{K_1(1 - \nu^2)}{2E} \quad (\text{П.21})$$

Здесь E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, Σ – площадь поверхности разрыва.

В численной процедуре определения G методом податливости решаются последовательно две задачи для конфигурации с трещиной. Моделирование растущей трещины может осуществляться введением линии контакта с первоначально скреплёнными узлами, идущей вдоль линии трещины по направлению вглубь. Берега трещины свободны, а узлы расчётной сетки, идущие от вершины вдоль линии контакта первоначально жёстко скреплены. Но на практике применялся другой метод.

Сначала образец из исходного состояния 0 достигает состояния 1. Затем совершается «виртуальное перемещение»: раскрепляются один, или несколько узлов у вершины, увеличивая тем самым длину трещины на величину Δa , и определяется новое равновесное состояние и совершенная работа. В упругом материале данному распределению нагрузки в данной конфигурации узлов соответствует единственное НДС, не зависящее от пути нагружения. Следовательно, не обязательно разъединять узлы в одной конфигурации, а можно ввести две конфигурации – с исходной длиной трещины, где образец из состояния 0 переходит в состояние 1, и с подросшей трещиной, где совершается переход 0 – 2, и решать, соответственно, две задачи с одинаковой историей нагружения для двух конфигураций. Разность работ, совершенных внешней силой в этих двух конфигурациях, и отвечает работе, совершаемой в расчете с разъединением узлов, в замкнутом цикле 0–1–2–0. Необратимая работа совершается против «виртуальных» сил сопротивления разъединению трещины, которые при таком способе расчета только подразумеваются.



Этим последним способом определялся КИН для той же конфигурации рис. П.3. Работа определяется по перемещениям поверхности приложения нагрузки по (П.20). Численно из (П.20) определяется G , а затем из (П.21) величина КИН. Точность этого метода составляет 1–3%, и она существенно выше, чем у прямого, к тому же он пригоден на более грубых сетках. На рис. П.7. показана зависимость погрешности вычисления от нагрузки для случая чисто упругого материала и упруго–пластического. Там же нанесена зависимость безразмерной максимальной пластической деформации на расчетной сетке, которая здесь характеризует размер пластической области. При больших пластических деформациях “пластически” вычисленный КИН заметно отличается от “упругого”. Это связано с тем, что диссипация энергии при раскрытии трещины производится не только у её вершины, но и в протяженной пластической зоне.

Раскрытие трещины

Раскрытие трещины (crack opening displacement: COD) представляет собой смещение берегов трещины относительно её средней линии. Определение параметра COD обычно иллюстрируется схемой, приведенной на рис. П.8, где величина COD есть величина порядка удвоенного эффективного радиуса затупления трещины. Для идеальнопластического материала в условиях плоской деформации COD можно оценить по формуле (П.14). Уточненная формула, использующая т.н. модель Дагдейла [П.4]:

$$\delta = \frac{8a\sigma_y}{\pi E} \ln\left(\sec \frac{\pi \sigma}{2\sigma_y}\right). \quad (\text{П.22})$$

Величина COD может быть с определенной точностью измерена и служит в некоторых странах стандартным параметром трещиностойкости, хотя требует жёсткой стандартизации испытаний и вряд ли достаточно универсальна как константа материала [П.18].

В расчёте COD может быть получено численно как перемещение сетки в лагранжевой МКЭ модели, если сетка достаточно мелкая. Определение проводилось на рассмотренной выше задаче о поперечной трещине в стальной полосе. Отобразить детально при численном моделировании форму всей трещины трудно, и за COD принимается вертикальное перемещение узла, ближайшего к вершине трещины. Поскольку используемая методика предназначена для вычислений с нелинейными большими деформациями, определяемое так перемещение отвечает в некотором приближении фактической форме вершины трещины в упруго–пластическом материале, грубо представляемой двумя первыми элементами, окаймляющими разрыв. На нескольких сетках была проверена независимость так определяемой величины δ от шага сетки у вершины (вариация шага от 0,02 до 0,08мм). На рис. П.9. показана зависимость δ от приложенной нагрузки, полученная численно, и по формуле (П.22). Учитывая грубость модели COD результат вполне удовлетворителен.

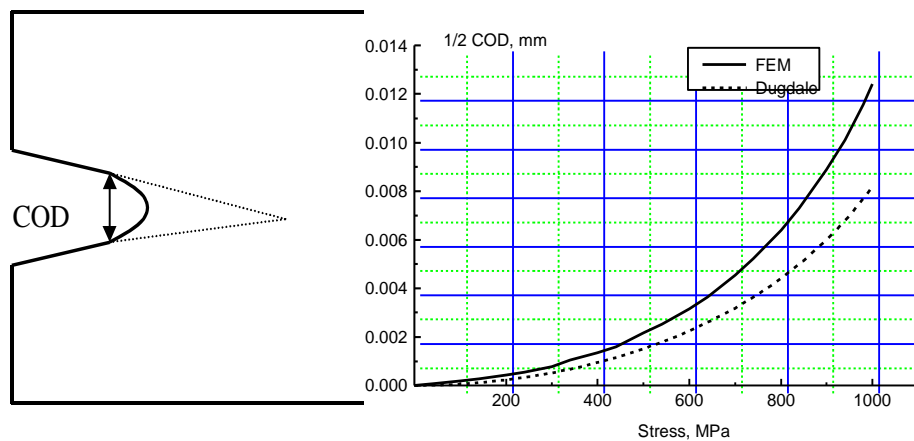


Рис. П.8. К определению раскрытия трещины

Рис. П.9. Раскрытие трещины в зависимости от приложенной нагрузки. FEM – численный расчет, Dugdale – по формуле

Форма и размеры пластической зоны

Аналитические оценки. Форма и размер пластической зоны зависят от геометрии образца и нагрузки. Экспериментальное их определение сопряжено с погрешностями. Расчетная величина зависит от принимаемой модели пластичности и точности самого расчета, поэтому точность расчётов также ограничена. Численные оценки формы и протяженности области пластического течения вблизи вершины трещины в условиях плоской деформации показывают [П.17], что она вытянута под углом 70° к оси абсцисс. Её (максимальный) размер в этом направлении оценивается по формуле (П.15):

$$\varepsilon_r = 0,15(K_1 / \sigma_t)^2, \text{ по оси } O_x : \varepsilon_x = 0,03(K_1 / \sigma_t)^2.$$

В рамках рассмотренной задачи о растяжении сравнение расчета и аналитических оценок проводится при растягивающей нагрузке $P_0=128\text{МПа}$. В численном расчете граница области ненулевой пластической деформации совпадает с границей области пластического состояния, где 2–й инвариант тензора девиаторов напряжений постоянен согласно используемому условию Мизеса, которое в главных напряжениях имеет вид:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_y^2$$

В проведенном расчете предел текучести $\sigma_y = 255 \text{ МПа} = 2R_0$, модуль упрочнения 0,01% от модуля упругости, т.е. материал почти идеально пластичен. Угол максимальной длины зоны оценивается в 60° с точностью до $10\text{--}15^\circ$ (рис. П.10). На рис.11 приведены распределения пластической деформации в направлениях Ox и Oz . Размеры пластической зоны, оцененные по этим кривым, приведены в табл. П.1. Пластическая зона вдоль Ox имеет 4–5 конечных элементов. Технический предел деформации, начиная с которого она считается неупругой, составляет 0,2%, и, если отмерять начало пластичности от этого уровня деформации, это отвечает расчетной длине пластической зоны как раз в 0,6мм.

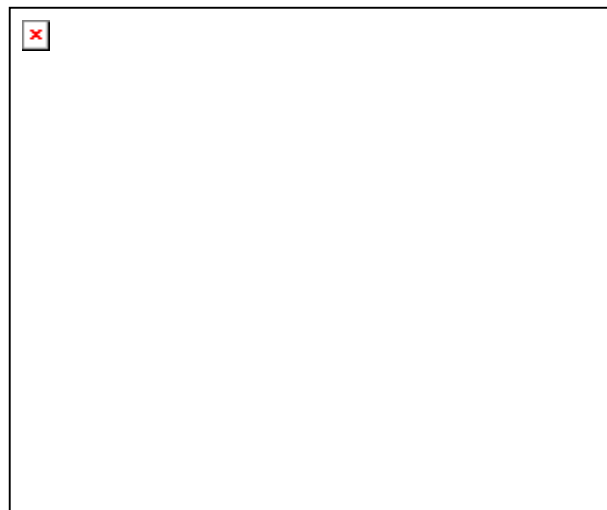
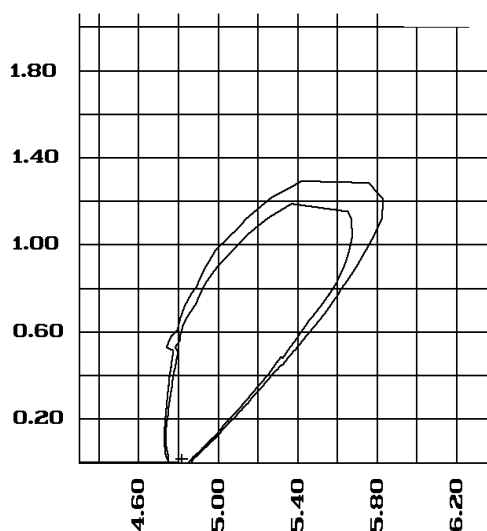


Рис. П.10. Область пластической деформации в задаче о трещине растяжения по уровню $\epsilon_p = 0,01\%$

Рис. П.11. Профили пластической деформации в двух направлениях

Табл.П.1. Размеры пластической зоны.

	Оценка (П.15)	По уровню 0,01%	По уровню 0,2%
ϵ_x	0,12мм	0,11мм	0,1мм
ϵ_z	0,6 мм	1,2 мм	0,6 мм

Моделирование эксперимента

В работе [П.19] приведены экспериментальные результаты по конфигурации пластической зоны у вершины трещины в образцах из малоуглеродистой стали, испытываемых трехточечный изгиб (рис. П.5) при монотонно возрастающей нагрузке. Для сравнения взят эксперимент с образцом, имеющим форму стержня $25 \times 25 \times 200$ мм, в котором выращена поперечная трещина длиной $a = 2,25$ мм. Начиная с некоторой величины нагрузки, у вершины трещины появляется пластическая деформация, которая растет с

ростом нагрузки. Визуализация пластической зоны осуществлялась на поверхности специальным методом.

Эти эксперименты были воспроизведены численно. Особенности и различия условий в эксперименте и расчете следующие –

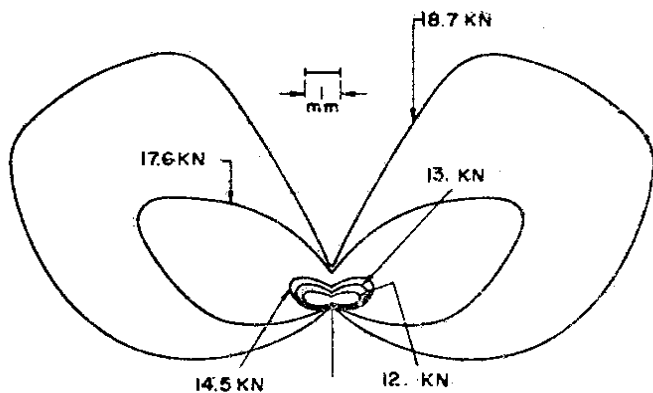
- В двумерном расчете с плоскими деформациями размер образца в направлении Oz перпендикуляра к плоскости напряжений неограничен, а в эксперименте – конечен.
- Размер пластической зоны оценивался по напряжениям на боковой поверхности образца согласно условию текучести Треска, которое в главных напряжениях записывается как

$$1/2(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \sigma_y \quad (\text{П.23})$$

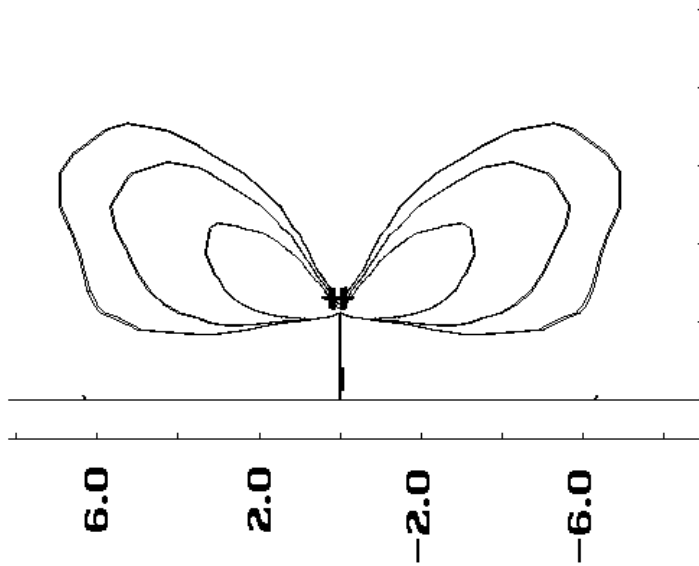
- Напряжения измерялись на наружной боковой поверхности образцов методом фотоупругости. Здесь может быть отличие за счет поверхностных эффектов (расширение зоны пластичности) и точности измерений.

В [П.19] приводятся рисунки с последовательными положениями границы области пластической деформации при последовательном росте нагрузки. На рис. П.12 воспроизводится один из этих рисунков и аналогичные линии, построенные по результатам численных расчетов для трех последовательных нагрузок $F=14,5\text{кН}$, $17,6\text{кН}$, $18,5\text{кН}$, соответствующим линиям, приведённым на рисунке. Линий границы пластической зоны для каждой нагрузки строились, исходя из двух разных условий – условия Треска (П.23) и условия "почти-нулевой" пластической деформации, что эквивалентно началу пластичности по условию Мизеса. Масштаб приведённых картинок одинаковый. Длина трещины составляет $2,25\text{мм}$. Основное отличие расчета и эксперимента состоит в характере расширения пластической зоны – в расчете с ростом нагрузки пластическая зона растет более плавно. Это различие может быть связано с деталями упруго-пластического поведения образца, с точностью измерений (визуальное определение), с трёхмерностью эксперимента при плоских напряжениях, моделируемого в 2-мерной постановке при плоских деформациях.

a)



b)



c)

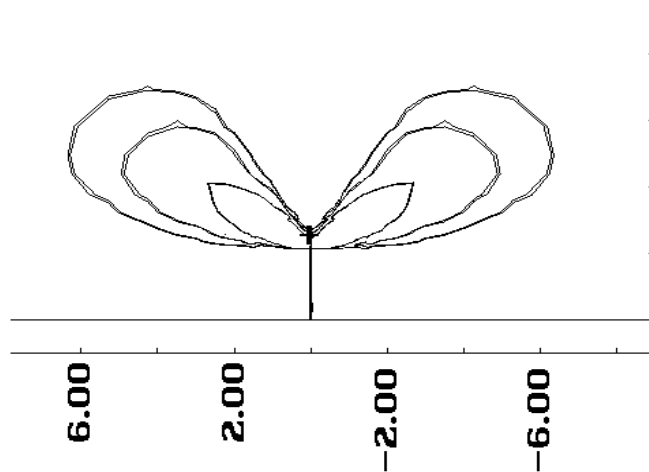


Рис. П.12. Пластическая зона при последовательных нагрузках в эксперименте и расчете: а) эксперимент; б) расчет– условие Треска; с) расчет– условие Мизеса

Площадь сечения трещины в главном циркуляционном трубопроводе ВВЭР–1000

При обосновании концепции "течь перед разрушением" в применении к трубопроводам первого контура водо–водяного реактора необходимо иметь проверенную методику, связывающую объём наблюдаемой утечки теплоносителя с размером предполагаемой трещины [П.20]. Один из основных этапов обоснования состоит в оценке площади трещины в трубе по её размеру. В линейной части трубы в первую очередь рассматриваются поперечные трещины, как наиболее вероятные при изгибных нагрузках.

Для расчётов площади раскрытия трещины широко применяются численные методы, а в инженерных методиках, которые должны быть по возможности быстрыми и простыми,

используются интерполяционные формулы. Одно из феноменологических соотношений – это формула Пэриса–Тады [П.21], [П.22], вычисляющая площадь по формуле для эллипса (малая полуось которого оценивается по деформации) с некоторой поправкой:

$$S = \frac{\sigma}{E} \pi R^2 I(\theta). \quad (\text{П.24})$$

Здесь σ – осевое растягивающее напряжение, E – модуль упругости, R – срединный радиус трубы, θ – половинный угловой размер трещины, т.е. половина сектора 2θ , который занимает трещина на полной окружности трубы. Полиномиальная функция $I(\theta)$ описывает отклонение от идеальной трещины на плоскости.

Соотношение (П.24) получено в предположениях тонкой стенки и отсутствия пластичности. Если трещина находится в условиях плоской деформации, вместо E подставляется эффективное значение $E(1-\nu^2)$, ν – коэффициент Пуассона. Наличие пластических деформаций в вершинах трещины учитывается через пластическую поправку Ирвина, вводящую эффективную длину трещины. Приложенное осевое напряжение может быть связано с внутренним давлением, или моментной нагрузкой.

Ниже приведены некоторые результаты тестовых расчётов, в которых ставилось целью, во–1, проверить КЭ–модель, а во–2, выяснить степень отклонения расчёта от формулы (П.24), привносимого геометрическим фактором для толстой трубы.

В расчёте, проведённом в начале 2000 г., использовался код ANSYS 5.5.1. Применялись 6–гранные 8–узловые элементы. При построении КЭ–модели ставилось целью обеспечить варьирование радиуса, толщины, длины трубы и длины трещины, не меняя топологии разбиения. Конфигурация трубы с трещиной предполагалась симметричной, и в расчёте участвовала 1/4 всей трубы (половина окружности с симметричным разбиением трещины). Структура КЭ–модели видна из рис. П.13. Ось Oz направлена вдоль оси трубы. Внутренний и внешний радиусы трубы: $R_i=0,4\text{м}$, $R_o=0,45\text{м}$, угловой размер трещины варьировался.

Граничные условия по перемещениям в плоскостях боковых срезов задавались по симметрии, в торцевом срезе трубы, содержащем трещину, аналогичные г.у. задавались везде вне поверхности трещины (с полным закреплением в одном узле). На другом торце трубы прикладывалось постоянное растягивающее осевое напряжение, однородное по всей поверхности, и равное 50МПа. Для упрощения сравнения материал трубы брался упругим.

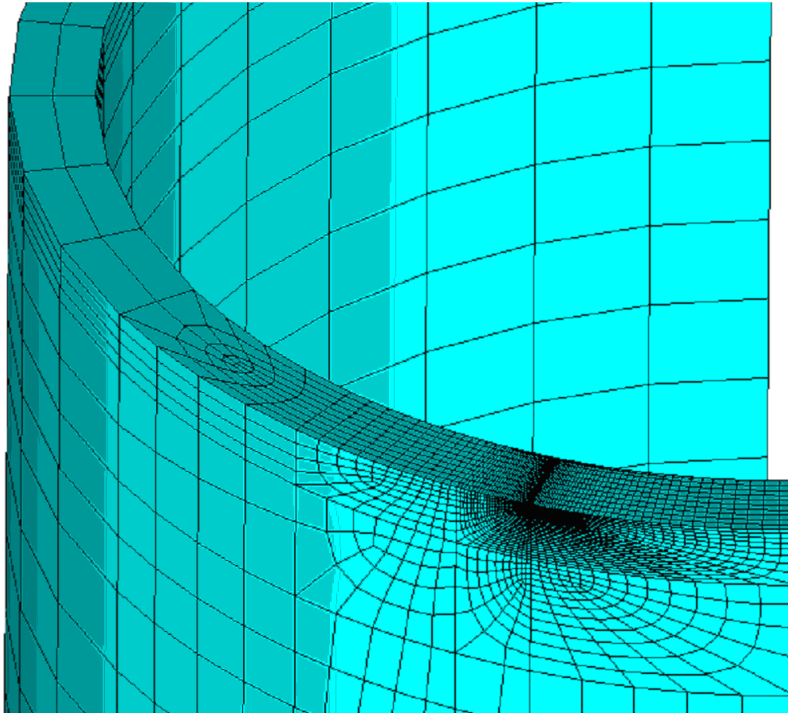


Рис. П.13. КЭ-разбиение

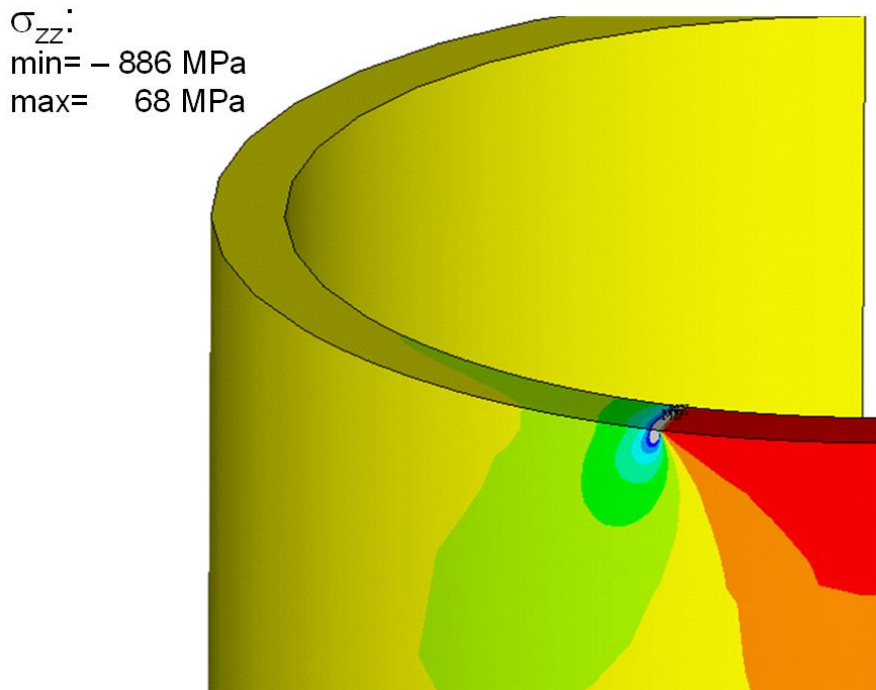


Рис. П.14. Осевое напряжение σ_{zz} (серым показана область вне цветовой шкалы)

При приложении нагрузки в окрестности вершины трещины возникает характерное распределение напряжений (рис. П.14). Контур раскрытия трещины даётся распределением $U_z(x)$ осевых перемещений её берега вдоль её полудлины (рис. П.15), которое близко к

эллипсу. Осьевые перемещения на рис. П.15 взяты при среднем радиусе $R_m=0,5(R_i+R_o)=0,425\text{ м}$, т.е. на срединной поверхности стенки трубы. Площадь всего сечения щели вычисляется как учетверённый интеграл от кривой рис. П.15: $S=4 \int U_z(x)dx$.

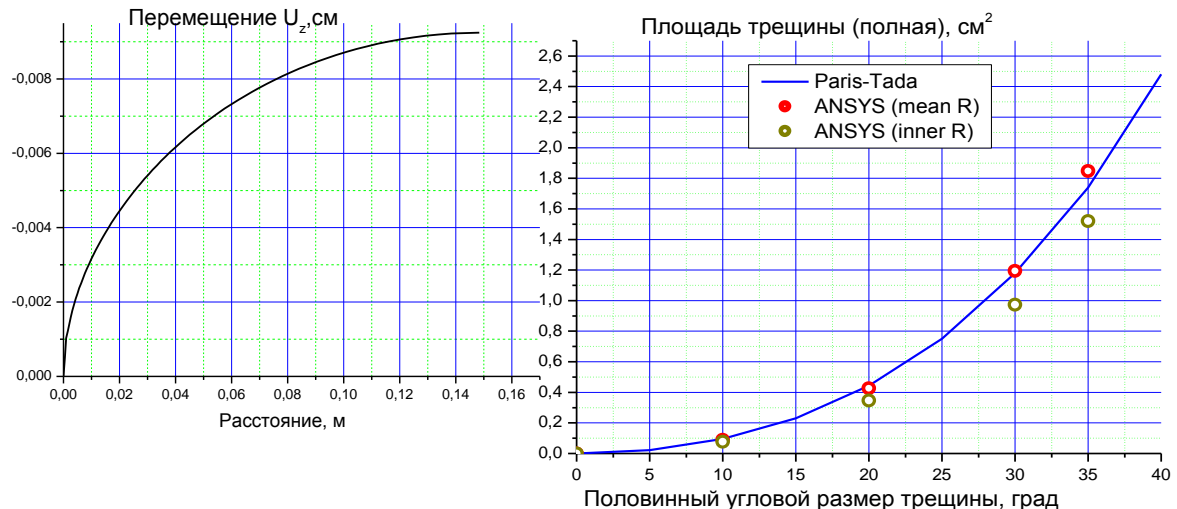


Рис. П.15. Распределение осевого перемещения (трещина с $\theta=20^\circ$)

Рис. П.16. Зависимость площади трещины от углового размера. "mean R" – на срединном радиусе, "inner R" – на внутреннем радиусе трубы.

На рис. П.16 приведены зависимости вычисленной таким образом площади от длины трещины. Сравняется зависимость, полученная по формуле Пэриса–Тады (при плоских деформациях), и полученные численно две зависимости площади: вычисленной на радиусе R_i (внутренняя граница) и на срединном радиусе R_m . Видно, что, во–1, полученная численно зависимость для срединной поверхности достаточно близка к формуле (П.24), а во–2, при взятых параметрах трубы относительное отклонение от формулы, связанное с расходимостью берегов трещины, не так велико, если сравнивать эту погрешность с той, что может появиться при переходе к реальным трещинам с нерегулярным сечением.

Литература к Приложению

1. Х.Хан. Теория упругости. М., Мир, 1990
2. E. J. Hearn. Mechanics of materials. An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials. Part 2. 3d edition. UK, 1997
3. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин.— М.: Наука. 1984. – 256 с.
4. Сиратори М. Нуёс Т. Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения. М. 1988
5. Г.П.Черепанов Механика хрупкого разрушения. М., 1974
6. IPRIG–2 Program. Final Report. NUREG/CR–6452 BMI–2195.
7. Вычислительные методы в механике разрушения. Под ред. С.Атлури. М.,Мир, 1990г.

8. Дробышевский Н.И., Филиппов А.С. Численный анализ высокотемпературной ползучести реакторной стали. Известия РАН, Энергетика, 3, 2004, с.27–34.
9. Н.И. Дробышевский, А.Е. Киселёв, В.Ф. Стрижов, А.С. Филиппов. HEFEST_M: программное средство для расчёта высокотемпературного нелинейного деформирования. // Математическое моделирование, 22 (2), 2010, стр. 45–63
10. А.С. Филиппов, Н.И. Дробышевский, А.Е. Киселёв, В.Ф. Стрижов. Расчёт термомодеформирования корпуса реактора с расплавом с помощью кода HEFEST_M. Известия РАН, Энергетика, 6, 2010 стр. 92–104
11. Филиппов А.С., Дробышевский Н.И., Киселёв А.Е., Стрижов В.Ф., Фокин А.Л. СОКРАТ/HEFEST: модели взаимодействия расплава активной зоны ВВЭР с конструкциями реактора при тяжёлой аварии. Известия РАН, Энергетика, 3, 2010, стр.4–24
12. Дробышевский Н.И., Филиппов А.С. Расчет сварочных напряжений в трубе и их снятия внешним давлением. Известия РАН, МТТ, 4, 1993.
13. Байшев Ю.П., Дробышевский Н.И., Филиппов А.С. Расчет напряжений и деформаций при ручной многопроходной сварке кожуха доменной печи. Деп. ВИНТИ. М., 1995, № 2892–В95, 33с.
14. Дробышевский Н.И., Зайцев М.А., Филиппов А.С. Моделирование напряженно–деформированного состояния защитной оболочки АЭС с ВВЭР–1000 при динамических нагрузках. Известия РАН, Энергетика, 3, 2004
15. Filippov A.S., Drobyshevsky N.I., Strizhov V.Th., Simulation of Vessel–with–melt Deformation by SOCRAT/HEFEST Code, 17th Int. Conf. on Nucl. Eng., ICONE17, July 12–16, 2009, Brussels, Belgium
16. A.S.Filippov, N.I.Drobyshevsky, D.D.Kamenskay, A.E.Kisselev, E.V.Moiseenko. End–to–end technology of modeling a melt–structure interaction during IVMR in VVER with HEFEST–URAN toolkit. Proceedings of the 22nd International Conference on Nuclear Engineering, ICONE22 July 7–11, 2014, Prague, Czech republic
17. Хеллан К. Введение в механику разрушения М.Мир 1988, 364с.
18. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела, М., Наука, 712с., 1988.
19. S.N. Bandyopadhyay, N.Singh, G.S.Murty. An experimental study of crack tip plastic flow in mild steel. Engineering fracture mechanics, 3, 14, 1981
20. А.Ф. Гетман. Концепция безопасности «Течь перед разрушением» для сосудов и трубопроводов давления АЭС. Москва Энергоатомиздат 1999
21. K.Hasegawa et al. / Fracture margin of pipe with detectable crack / Nucl. Eng. Des. 128(1991) p.29–34
22. P.C.Paris and H.Tada. The application of fracture proof design methods using tearing instability theory to nuclear piping postulating circumferential through wall cracks. NUREG / CR–3640 (1983).