

## Математическое моделирование и вычислительные методы Капырин И.В.

В рамках курса студенты знакомятся с методами численного решения алгебраических и дифференциальных задач, лежащих в основе математических моделей физических процессов. Курс включает методы интерполяции и численного интегрирования, решения линейных и нелинейных систем, дискретизации обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

№	Тема	Содержание
1	Вычислительные методы	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Проблемы точности и погрешности вычислений.</li> <li>2. Методы численного решения ОДУ.</li> <li>3. Алгебраическая интерполяция функций. Ортогональные многочлены.</li> <li>4. Квадратурные формулы в одном, двух и трех измерениях.</li> <li>5. Методы решения систем линейных уравнений: прямые и итерационные.</li> <li>6. Методы решения нелинейных уравнений.</li> <li>7. Базовые методы дискретизации по пространству: методы конечных разностей, конечных элементов, конечных объемов.</li> </ol>
2	Математическое моделирование	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Наиболее часто встречающиеся уравнения математической физики: физические основы, их вывод. Математические модели физических процессов.</li> <li>2. Модель насыщенной фильтрации.</li> <li>3. Модель адвективно-диффузионного переноса.</li> <li>4. Модель насыщенно-ненасыщенной фильтрации.</li> <li>5. Концепции построения моделей фильтрации и переноса в сильно неоднородных средах с переменной насыщенностью.</li> <li>6. Моделирование гидрогеологических процессов в коде GeRa, техники визуализации результатов моделирования.</li> </ol>

### Вопросы по курсу

1. Точность и вычислительная погрешность. Пример вычислительно неустойчивого и устойчивого алгоритмов.
2. Методы аппроксимации первых и вторых производных, порядок их точности.
3. Метод Эйлера для решения задачи Коши для ОДУ. Оценка погрешности, порядок точности, устойчивость явной схемы Эйлера.
4. Одношаговые методы (методы Рунге-Кутты) для численного решения ОДУ.
5. Неявные одношаговые методы интегрирования ОДУ. Устойчивость неявной схемы Эйлера и схемы Кранка-Николсон.
6. Многошаговые методы численного решения ОДУ. Пример – метод Адамса.
7. Постановка задачи интерполяции функции. Интерполяция полиномами.
8. Интерполяция функций с помощью полиномов Лагранжа. Оценка погрешности интерполяции.
9. Интерполяционный полином в форме Ньютона.
10. Общее понятие об интерполяционном полиноме Эрмита.
11. Интерполирование кусочно-кубическими сплайнами.
12. Квадратурные формулы интерполяционного типа.
13. Формулы Ньютона-Котеса: формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Алгебраический порядок точности. Свойство симметрии коэффициентов.
14. Ортогональные многочлены: многочлены Лежандра и Чебышева. Их свойства.
15. Квадратурные формулы Гаусса: построение и анализ. Алгебраический порядок точности квадратурных формул Гаусса.
16. Многочлены Чебышева и квадратурные формулы Гаусса-Чебышева.
17. Решение СЛАУ: метод Крамера. Вычислительная сложность.
18. Решение СЛАУ: метод Гаусса. Вычислительная сложность.
19. Решение СЛАУ: метод Холецкого. Вычислительная сложность.
20. Решение СЛАУ: метод отражений. Вычислительная сложность.
21. Решение СЛАУ: метод вращений. Вычислительная сложность.
22. Норма матрицы. Число обусловленности матрицы. Неравенства для невязки и ошибки.
23. Системы с трехдиагональной матрицей. Метод прогонки.
24. Метод простой итерации (одношаговый итерационный метод) для решения СЛАУ. Сходимость метода простой итерации.
25. Обобщенный метод простой итерации. Достаточное условие его сходимости для симметричных положительно определенных матриц.

26. Методы Якоби и Гаусса-Зейделя для решения СЛАУ. Сходимость.
27. Метод верхней релаксации для решения СЛАУ. Сходимость.
28. Метод сопряженных градиентов для решения СЛАУ.
29. Решение нелинейных уравнений методом вилки (деления пополам).
30. Метод простой итерации для решения нелинейных уравнений.
31. Метод касательных (метод Ньютона).
32. Модели, основанные на уравнении диффузионного типа: теплопроводность, фильтрация, диффузия.
33. Метод конечных разностей на примере уравнения диффузии.
34. Метод конечных элементов на примере уравнения диффузии.
35. Метод конечных объемов на примере уравнения диффузии.
36. Метод конечных разностей для решения нестационарных задач адвекции-диффузии.
37. Метод конечных элементов для решения нестационарных задач адвекции-диффузии.
38. Модели напорной и насыщенно-ненасыщенной фильтрации.
39. Дискретизация одномерной модели насыщенно-ненасыщенной фильтрации.
40. Концепции моделей фильтрации-переноса: однородная среда, мобильно-немобильная жидкость, двойная пористость, двойная проницаемость.

### **Литература**

1. Чижонков Е.В. Лекции по курсу «Численные методы». М.: МГУ 2006г. 168с.
2. Вводные лекции по численным методам. Д.П.Костомаров, А.П.Фаворский. М.: Логос, 184с.,2004.
3. Численные методы. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. М.:Бином.Лаборатория знаний, 640 с, 2008.
4. Вабищевич П.Н. Численное моделирование, 152 с. Москва: МГУ. 1993
5. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей, 264 с. Москва: МГУ. 1983.
6. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., «Наука», 1980 г. 325 стр.

### **Учебные пособия**

Василевский Ю.В., Капырин И.В. Практикум по современным вычислительным технологиям и основам математического моделирования.- М.: МАКС Пресс, 2009.