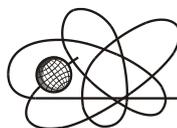




Российская Академия Наук

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ
БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**



ИБРАЭ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**NUCLEAR SAFETY
INSTITUTE**

Препринт ИБРАЭ № ИБРАЭ-1998-01

Preprint IBRAE-1998-01

**В. В. Демьянов, М.Ф. Каневский, Е.А. Савельева,
В.А. Тимонин, С.Ю. Чернов**

**СОВМЕСТНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ
ВАРИАБЕЛЬНОСТИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

^{90}SR И ^{137}CS

Москва 1998

Moscow 1998

Демьянов В.В., Каневский М.Ф., Савельева Е.А., Тимонин В.А., Чернов С.Ю. СОВМЕСТНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ВАРИАБЕЛЬНОСТИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ^{90}Sr И ^{137}Cs . Препринт № ИВРАЭ-98-01. Москва. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. Январь 1998. 27 с. — Библиогр.: 11 назв.

Аннотация

Работа посвящена совместному стохастическому моделированию пространственного распределения радиоактивного загрязнения ^{90}Sr и ^{137}Cs . Данные по дополнительной переменной ^{137}Cs значительно улучшают качество моделирования при недостаточном количестве измерений ^{90}Sr . Результаты совместного моделирования сравниваются с последовательным Гауссовым моделированием ^{90}Sr . В работе использованы реальные данные Чернобыльских выпадений.

©ИВРАЭ РАН, 1998

Demyanov V.V., Kanevski M.F., Savelyeva E.A., Timonin V.A., Chernov S.Yu. STOCHASTIC COSIMULATION OF SPATIAL VARIABILITY AND UNCERTAINTY OF ^{90}Sr AND ^{137}Cs . Preprint IBRAE-98-01. Moscow. Nuclear Safety Institute. January 1998. 27 p. — Refs.: 11 items.

Abstract

The work deals stochastic cosimulation of ^{90}Sr and ^{137}Cs soil contamination after the Chernobyl fallout. Cosimulation is to model spatial variability and uncertainty of the spatial distribution. Cosimulation results are significantly improved by additional data on the secondary variable ^{90}Sr , which has more measurements than ^{90}Sr . Cosimulations are compared with sequential Gaussian simulations of single ^{90}Sr . All the modelling is applied to real data on the Chernobyl fallout.

©Nuclear Safety Institute, 1998

Совместное стохастическое моделирование пространственной вариабельности и неопределенности ^{90}Sr и ^{137}Cs

В. В. Демьянов, М.Ф. Каневский, Е.А. Савельева, В.А. Тимонин, С.Ю. Чернов

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ
113191, Москва, ул. Б. Тульская, 52
тел.: (095) 955-26-10, факс: (095) 958-11-51, эл. почта: vasia@ibrae.ac.ru

Содержание

<i>Содержание</i>	3
<i>Введение</i>	3
<i>Теория последовательных Гауссовых косимуляций</i>	4
Практический алгоритм последовательных Гауссовых косимуляций.....	6
Особенности и преимущества метода.....	8
Линейная модель корегionalизации.....	9
<i>Совместное последовательное Гауссово моделирование ^{90}Sr и ^{137}Cs Чернобыльских выпадений</i>	11
<i>Выводы</i>	13

Введение

Загрязнение почвы радионуклидами в результате Чернобыльской аварии имеет крайне сложный пространственный характер. Основными отличительными чертами Чернобыльских выпадений являются пятнистость, высокая вариабельность, анизотропность, нестационарность, а также наличие пространственных структур на различных масштабах. Такой характер данных определялся многочисленными факторами, проявившимися во время выброса, переноса, выпадения и миграции радионуклидов. К ним относятся особенности динамики источника, климатические условия, орография и характеристики подстилающей поверхности, различные механизмы выпадения радионуклидов на поверхность, и т. п.

Для анализа радиоактивного загрязнения поверхности применяются многочисленные методы в том числе детерминистические, геостатистические, искусственные нейронные сети [1, 2, 3]. При картировании загрязнения все вышеперечисленные подходы дают единственную оценку загрязнения для одной выбранной модели.

Стохастическое моделирование является альтернативным подходом к пространственной интерполяции. Оно позволяет оценить пространственную вариабельность и неопределенность данных. В отличие от детерминистических интерполяторов и геостатистических оценщиков, которые усредняют и сглаживают вариабельность исходных данных, стохастические методы позволяют воспроизвести случайный пространственный процесс на основе определенных качественных и количественных критериев исходного распределения. В то время как интерполяционная оценка в точке единственна для заданных модели и ее параметров, результатом стохастического моделирования является набор оценок (реализаций) значения функции в точке для заданной модели.

Стохастическое моделирование позволяет сгенерировать большое множество равновероятных реализаций, обладающих свойствами исходного распределения:

- одинаковой плотностью распределения с исходным распределением;
- одинаковой пространственной структурой с исходным распределением.
- точное воспроизводство исходных данных.

Таким образом, цели моделирования и оценивания различны: стохастическое моделирование призвано оценить пространственную вариабельность и неопределенность данных, получить вероятностные оценки превышения заданного уровня, и оценки с заданным уровнем вероятности

превышения. Такие оценки крайне важны для поддержки принятия решения, как и анализ неопределенности пространственной оценки.

Стохастические методы основываются на предположении, что анализируемые данные являются реализациями случайного процесса. Это позволяет, используя имеющиеся измерения как зафиксированные значения (условное моделирование), получить бесконечно много значений (реализаций) переменной в точке оценивания. Построенные таким образом стохастические реализации обладают той же функцией распределения и такой же пространственной корреляционной структурой, что и исходные данные. Наличие нескольких равновероятных оценок в одной точке позволяет оценить неопределенность оценивания и построить вероятностные оценки – оценки вероятности превышения заданного уровня загрязнения или оценки, которые могут быть превышены действительными значениями загрязнения с заданной вероятностью. Один из стохастических методов – последовательное Гауссово моделирование успешно применялся к Чернобыльским выпадениям в [4, 5].

Основными долгоживущими загрязнителями почвы в Чернобыльских выпадениях являются ^{137}Cs и ^{90}Sr , которые сильно коррелированы между собой в силу особенностей источника и процессов переноса загрязнения. Как уже отмечалось [6], совместное рассмотрение ^{90}Sr и ^{137}Cs может значительно улучшить результаты оценки ^{90}Sr за счет дополнительной информации о ^{137}Cs . Целью настоящей работы является совместное стохастическое моделирование ^{90}Sr и ^{137}Cs . Они обычно сильно коррелированы друг с другом в рассматриваемой области, что обусловлено особенностями источника и характером выпадений. Проб ^{90}Sr обычно меньше, чем проб ^{137}Cs , поскольку последние значительно дешевле и проще в обработке. Такое положение затрудняет анализ загрязнения ^{90}Sr из-за недостаточного количества данных по ^{90}Sr и ограниченного размера области мониторинга ^{90}Sr . Совместное рассмотрение двух радионуклидов позволяет значительно улучшить пространственную оценку ^{90}Sr и уменьшить ее ошибку, а также перейти из области интерполяции (где есть измерения и ^{90}Sr и ^{137}Cs) в область экстраполяции (где есть только измерения ^{137}Cs). Такое исследование было проведено с помощью геостатистического оценщика – кокригинга [6]. Настоящая работа представляет собой продолжение многопеременного анализа Чернобыльских выпадений.

Метод последовательных Гауссовых косимуляций, примененный в работе, является развитием последовательного Гауссова моделирования для случая моделирования двух и более переменных непрерывно распределенных в пространстве. Этот метод воспроизводит одномерные распределения и авто- и кросс-вариограммы структуры переменных. Являясь одним из методов стохастического моделирования, он сохраняет основные аспекты стохастического подхода: условность (по отношению к исходным данным – их точное воспроизводство в точках измерений), анизотропию, разнообразие корреляционных структур. Универсальность метода позволяет применять его в общем случае в различных областях, например, горнорудное дело, гидрология, окружающая среда.

Теория последовательных Гауссовых косимуляций

Рассмотрим набор из K переменных, $[z_k(x), k=1, \dots, K]$, измеренных в точках x – в пространстве. Если $K=2$, то $z_1(x_0)$ и $z_2(x_0)$ являются значениями двух переменных в точке оценивания x_0 . Проблема состоит в генерации пространственных моделей эти переменных так, чтобы:

- были воспроизведены некоторые статистические параметры распределений переменных, взятых вместе или по отдельности;
- были точно воспроизведены значения переменных в точках, где они известны.

Геостатистика интерпретирует K переменных $[z_k(x), k=1, \dots, K]$, как реализации K случайных переменных, обозначенных $[Z_k(x), k=1, \dots, K]$. Этот набор случайных пространственных переменных составляет K случайных функций $[Z_k(x), k=1, \dots, K]$. В рамках такой системы проблема заключается в генерации совместных реализаций K случайных функций таких, чтобы:

1. были воспроизведены распределение и вариограмма каждой случайной функции;
2. были воспроизведены кросс-вариограммы между случайными функциями;
3. значения в точках измерений совпадали с исходными.

В основе генерации реализаций функции Z в N точках $[u_1, \dots, u_N]$ лежит выборка из условной функции распределения:

$$F(u_1, \dots, u_N; z_1, \dots, z_N | (n)) = \text{Prob}\{Z(u_1) \leq z_1, \dots, Z(u_N) \leq z_N | (n)\}$$

Принцип последовательного моделирования выражается далее следующим образом:

$$F(u_1, \dots, u_N; z_1, \dots, z_N | (n)) = F(u_N; z_N | (n+N-1)) \cdot F(u_{N-1}; z_{N-1} | (n+N-2)) \cdot \dots \cdot F(u_1; z_1 | (n))$$

где $F(u_j; z_N / (n+N-1))$ – условная функция распределения $Z(u)$, определяемая n исходными данными и $N-1$ реализациями $Z(u_j)=z(u_j), j=1, \dots, N-1$.

На первом этапе моделирования предполагается стационарность каждой случайной функции $Z_k(x)$ и существование случайной функции $Y_k(x)$ такой, что

$$Y_k(x) = \phi_k [Z_k(x)], \quad \text{и} \quad Y_k(x) \sim N(0,1),$$

где ϕ_k – однозначная функция Гауссова преобразования.

Преобразованные переменные называются нормальными (normal score). Функции $[Y_k(x), k=1, \dots, K]$ являются стационарными в строгом смысле и распределены по стандартному нормальному закону по построению. Как следствие, полный совместный вероятностный закон набора $[Y_k(x), k=1, \dots, K]$ известен, если известны среднее значение и авто- и кросс-ковариационные функции. Среднее значение равно нулю в силу стандартного нормального распределения. Авто- и кросс-ковариации выражаются через авто- и кросс-вариограммы следующим образом:

$$C_{kk'}(h) = C_{kk'}(0) - \gamma_{kk'}(h), \quad k = 1, \dots, K, \quad k' = 1, \dots, K,$$

где $C_{kk'}(h)$ – ковариация а $\gamma_{kk'}(h)$ – кросс-вариограмма между двумя переменными z_k и $z_{k'}$ разделенными расстоянием h .

Второй этап состоит в последовательных симуляциях (моделировании) нормализованных значений, проводящихся по следующему алгоритму:

1. Случайный выбор местоположения x_0 , которое еще не было промоделировано.
2. Использование кригинга (простого или обычного) для расчета оценки в точке x_0 , используя нормальные (normal score) значения из окрестности – как измеренные так и *уже промоделированные*.
3. Построение нормального закона распределения на основе оценки и вариации кригинга, взятых в качестве соответственно математического ожидания и вариации нормального распределения.
4. Случайный выбор реализации из условного функции распределения, определяющей вектор промоделированных нормальных значений.
5. Алгоритм повторяется до получения реализаций во всех требуемых точках.

После прохождения всех точек сетки промоделированные нормальные значения преобразуются обратно, используя обратное Гауссово преобразование.

K случайных функций $[Y_k(x), k=1, \dots, K]$ распределены совместно мультинормально. Это подразумевает, что мультинормально распределенный случайный вектор состоит из

- случайных переменных из окрестности x_0 ;
- промоделированных случайных переменных в точке x_0 .

Для простоты введем следующие обозначения:

X_1 – вектор, состоящий из случайных переменных из окрестности x_0 . Этот вектор состоит из $N \cdot K$ компонент, где N число точек “измерений” в окрестности x_0 , а K число переменных. В большинстве случаев число компонент будет меньше NK , поскольку не все K переменных имеют “измерения” во всех N токах. Под “измерениями” понимаются как измеренные, так и уже промоделированные переменные.

X_2 – случайный вектор, компонентами которого являются случайные переменные моделируемые в точке x_0 . Этот случайны вектор может иметь до K компонент, поскольку некоторые переменные могут быть уже измерены в данной точке.

X – случайный вектор, для которого: $X^T = (X_1^T, X_2^T)$.

Многопеременное распределение случайного вектора X определяется следующим образом:

$$X \sim N(\mu, C),$$

где среднее значение вектора $\mu=0$ по построению, а компоненты ковариационной матрицы C определяются с помощью авто- и кросс-ковариационных функций $[C_{kk'}(h), k, k'=1, \dots, K]$. Разделение X на X_1 и X_2 , и среднего значения вектора и ковариационной матрицы соответственно приводит к:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left(\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \right)$$

Условное распределение X_2 , определяемое известными значениями $X_1(x_1)$, является мультинормальным:

$$\left(X_2 | X_1 = x_1 \right) = X_{2|1} \sim N \left(\mu_{2|1} = C_{21} C_{11}^{-1} X_1, C_{22|1} = C_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} C_{12} \right), \quad (1)$$

где $\mu_{2|1}$ – условное среднее значение вектора и $C_{22|1}$ – ковариационная матрица.

Реализация условного случайного вектора $X_{2|1}$:

$$x_{2|1} = L_{22|1}r_2 + C_{21}C_{11}^{-1}x_1, \quad (2)$$

где r_2 – вектор независимых стандартных Гауссовых значений, и $L_{22|1}$ – нижний треугольник матрицы LU декомпозиционной ковариации $C_{22|1}$:

$$C_{22|1} = L_{22|1}U_{22|1}.$$

Уравнение (2) может быть упрощено до:

$$x_{2|1} = L_{22}^{-1}r_2 + A_{21}L_{11}^{-1}x_1, \quad (3)$$

где L_{22}^{-1} , A_{21} получаются из LU декомпозиционной ковариационной матрицы C :

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ A_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & B_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$$

Практический алгоритм последовательных Гауссовых косимуляций

На практике, в процессе последовательных Гауссовых косимуляций используется ряд необходимых но оправданных аппроксимаций.

Последовательный анализ пространственных данных имеет первостепенное значение и должен предшествовать моделированию. На этом этапе данные подготавливаются, проверяются на возможные ошибки и недостаток стационарности. Значительная нестационарность данных должна быть предметом особого внимания. Так например, области с различным статистическим описанием должны рассматриваться отдельно. При наличии трендов, они выделяются и рассматриваются отдельно, а затем по окончании моделирования добавляются. На этом же этапе проводится декластеризация, если этого требует сеть мониторинга.

1. Нормальное преобразование данных. K Гауссовых преобразований $[\phi_k, k=1, \dots, K]$ производятся путем постановки в соответствие кумулятивной функции распределения переменной кумулятивного стандартного нормального распределения:

$$G(y) = F_k(z) \Leftrightarrow y = \phi_k(z) = G^{-1}[F_k(z)] \Leftrightarrow z = \phi_k^{-1}(y) = F_k^{-1}[G(y)],$$

где $F_k(\bullet)$ – кумулятивное распределение частоты k -й переменной, а $G(\bullet)$ – кумулятивное стандартное нормальное распределение. Практическая реализация прямого и обратного нормального преобразования проиллюстрирована на рисунке А.

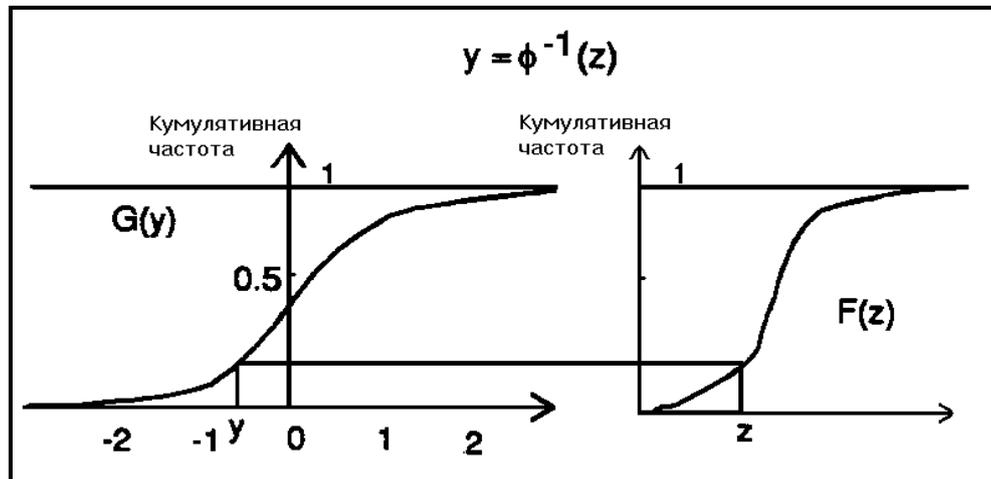


Рисунок А. Графическая иллюстрация преобразования функции $F(z)$ в стандартную нормальную функцию $G(y)$ посредством их кумулятивных функций распределения.

2. Проверка на мультиномальность. Следующим шагом является предположение совместной мультиномальности распределений K нормальных случайных функций $[Y_k(x), k=1, \dots, K]$. Полученная в результате нормального преобразования переменная распределена одномерно нормально по построению. Это, однако, является необходимым но не достаточным условием мультиномальности ее пространственного распределения. Следующим необходимым условием является бинормальность –

нормальность кумулятивной функции распределения любой пары значений $Y(x)$ и $Y(x+h)$. В наиболее распространенном случае неполных измерений на нерегулярной сетке не существует теста на мультинормальность. Однако, можно использовать несколько проверок на бинормальность, что является необходимым но недостаточным условием для мультинормальности.

Для проверки на бинормальность условной функции распределения любого набора пар данных $\{y(x_i), y(x_i+h), i=1, \dots, N(h)\}$ используется ковариация $C_Y(h)$. Существует аналитическое и табулированное соотношения между ковариацией $C_Y(h)$ и значением стандартной нормальной функции распределения:

$$Prob\{Y(x) \leq y_p, Y(x+h) \leq y_p\} = p^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{0-\theta}^{\arcsin C_Y(h)} \exp\left(-\frac{y_p^2}{1 + \sin\theta}\right) d\theta$$

где $y_p = G^{-1}(p)$ – стандартная нормальная p -квантиль а $C_Y(h)$ – коррелограм стандартной нормальной случайной функции $Y(x)$.

Бинормальная вероятность является нецентральной индикаторной ковариацией для порога y_p :

$$Prob\{Y(x) \leq y_p, Y(x+h) \leq y_p\} = E\{I(x, p) \cdot I(x+h, p)\} = p - \gamma(h, p)$$

где $I(x, p) = 1$, если $Y(x) \leq y_p$, $= 0$, в противном случае. $\gamma(h, p)$ – индикаторная полу-вариограмма для p -квантили отсечения y_p .

3. Вариография нормальных переменных. Следующим шагом является построение авто- и кросс-вариограмм для нормальных (normal score) значений переменных и их моделирование с использованием линейной модели корегionalизации. Эта задача достаточно просто решается при наличии хорошей программы моделирования вариограмм и достаточного количества измерений переменных. В случае значительного недостатка измерений по одной из переменных должен быть принят ряд предположений для соответствующих авто- и кросс-вариограмм.

Приведенный ниже алгоритм стохастического моделирования (п. 4-8) повторяется для построения каждой новой стохастической реализации..

4. Эффект экранирования. Алгоритм последовательного моделирования основывается на эффекте экранирования [8]. Эффект экранирования состоит в уменьшении веса точек попадающих между одной из точек измерения и точкой оценивания, что может привести к появлению отрицательных весов. На практике не обязательно использовать все существующие значения измерений для построения условного распределения в точке оценивания. Необходимо ограничить используемые условные измерения окрестностью точки оценивания. Практические испытания показали, что хороших результатов можно добиться при использовании 16 наиболее близких значений, или по 2 из каждой октанты при поиске соседей по октантам [8].

5. Выбор последовательности оценивания точек. По теории используется любой путь от одной точки оценивания к другой. На практике случайный путь предпочтительнее регулярного, для того чтобы избежать возможного распространения артефактов в результатах. Как следствие, невозможно ускорить моделирование из-за нерегулярности в конфигурации условных значений. Расчет условных векторов и матриц из уравнений (1), (2), (3) повторяется в каждой новой точке оценивания. Однако, возможно получить несколько реализаций “по цене одной”, если выбран один и тот же случайный путь и если различные наборы случайных чисел используются в уравнениях (2) или (3).

Если моделирование проводится на регулярной сетке, то имеет преимущества концепция “промежуточных” сеток, в частности при воспроизводстве вариограммных структур с очень длинными радиусами. При таком подходе каждая сетка дополняется следующей, причем последней является сеть на которой проводится моделирование. Моделирование начинается с самой грубой сетки, и продолжается пока не моделируется самая мелкая сетка. В каждой из сеток выбирается случайный путь следования от узла к узлу. Количество промежуточных сеток зависит от радиусов вариограмм и от конечного размера ячеек сетки. Преимуществами такой схемы является более высокая скорость и меньший объем требуемой памяти. Программа может быть оптимизирована в блоках поиска соседей, построения ковариационных матриц, и т. д. Другим преимуществом является большая стабильность моделирования и получаемых симуляций – после моделирования одной сетки условные значения (по крайней мере промоделированные) располагаются регулярно, что предотвращает возможную сильную кластеризацию.

6. Простой кокригинг. В каждой точке оценивания решается система уравнений простого кокригинга с использованием соседей из выбранной окрестности. При этом учитываются как измерения, так и уже промоделированные в предыдущих точках значения. Оценка простого кокригинга для случая двух переменных имеет следующий вид [11]:

$$Y_{SCK}^{(1)*}(x) - m_1 = \sum_{\alpha_1=1}^{n_1(x)} \lambda_{\alpha_1}^{SCK}(x) (Y_1(x_{\alpha_1}) - m_1) + \sum_{\alpha_2=1}^{n_2(x)} \lambda_{\alpha_2}^{SCK}(x) (Y_2(x_{\alpha_2}) - m_2)$$

где $Y_{SCK}^{(1)*}(x)$ – оценка простого кокригинга основной переменной z_1 в точке x .

Веса кокригинга вычисляются из следующей системы уравнений [11]:

$$\begin{cases} \sum_{\beta_1=1}^{n_1(x)} \lambda_{\beta_1}^{SCK}(x) \cdot C_{11}(x_{\alpha_1} - x_{\beta_1}) + \sum_{\beta_2=1}^{n_2(x)} \lambda_{\beta_2}^{SCK}(x) \cdot C_{12}(x_{\alpha_1} - x_{\beta_2}) = C_{11}(x_{\alpha_1} - x), & \alpha_1 = 1, \dots, n_1(x) \\ \sum_{\beta_1=1}^{n_1(x)} \lambda_{\beta_1}^{SCK}(x) \cdot C_{21}(x_{\alpha_2} - x_{\beta_1}) + \sum_{\beta_2=1}^{n_2(x)} \lambda_{\beta_2}^{SCK}(x) \cdot C_{22}(x_{\alpha_2} - x_{\beta_2}) = C_{21}(x_{\alpha_2} - x), & \alpha_2 = 1, \dots, n_2(x) \end{cases} \quad \text{где}$$

$C_{ij}(h)$ – соответствующие собственные и кросс-ковариации переменных основной y_1 и дополнительной y_2 для $h=x_i-x_j$:

$$C_{ij}^R(h) = E\{R_i(x) \cdot R_j(x+h)\} = E\{(Y_i(x) - m_i) \cdot (Y_j(x) - m_j)\} = C_{ij}(h)$$

Вариаца простого кокригинга вычисляется следующим образом:

$$\sigma_{SCK}^2(x) = C_{11}(0) - \sum_{\alpha_1=1}^{n_1(x)} \lambda_{\alpha_1}^{SCK}(x) \cdot C_{11}(x_{\alpha_1} - x) - \sum_{\alpha_2=1}^{n_2(x)} \lambda_{\alpha_2}^{SCK}(x) \cdot C_{21}(x_{\alpha_2} - x)$$

7. Построение нормальной функции распределения. Нормальная функция распределения строится в каждой точке оценивания на основе среднего значения и стандартного отклонения, в качестве которых берутся оценка $Y_{SCK}^*(x)$ и ошибка оценки σ_{SCK} простого кокригинга в данной точке, полученные в п. 5.

8. Выбор значения из функции распределения. Промоделированное значение в точке выбирается случайным образом из построенной функции распределения [11]:

$$Y^{(l)}(x) = Y_{SCK}^*(x) + E(x)$$

где компонента ошибки $E(x)$ независима от $Y_{SCK}^*(x)$, $E\{E(x)\}=0$ и $Var\{E(x)\}=\sigma_{SCK}^2$.

Далее оно добавляется в набор данных для участия в последующих оценках.

9. Обратное преобразование. После прохода через все точки оценивания полученные нормальные значения оценок $\{y^{(l)}(x), x \in A\}$ преобразуются обратно в абсолютные значения исходной функции: $\{z^{(l)}(x)=\phi^{-1}(y^{(l)}(x)), x \in A\}$.

Особенности и преимущества метода

Если модель согласуется с данными, то последовательные Гауссовы косимуляции воспроизводят следующий набор переменных:

- стандартное нормальное распределение для каждой преобразованной переменной;
- вариограммы преобразованных переменных;
- кросс-вариограммы между преобразованными переменными;
- значения преобразованных переменных в точках измерений.

При обратном преобразовании промоделированных значений воспроизводятся распределения и измерения исходных переменных. Это также предполагает воспроизводство авто- и кросс-вариограмм исходных переменных, которые не были построены.

Метод последовательного совместного Гауссова моделирования (косимуляций) имеет ряд преимуществ, наиболее явные из которых простота и универсальность. Простота метода основана на понятиях вариограммы и стохастического моделирования и может быть кратко изложен в этих терминах. Универсальность метода важна при его приложении к различным типам задач. Совместное моделирование приносит успех при применении к коррелированным переменным, и решение воспроизводит пространственную корреляцию между ними. Это, однако, не обязательно подразумевает непротиворечивость с физическими процессами, обуславливающими корреляцию.

Метод является интеграционным. Для введения анизотропии, усиление условности, или моделирования на нерегулярных сетках не требуется ни каких специальных модернизаций. Вычислительные преимущества моделирования на регулярных сетках оставляют в стороне моделирование на нерегулярных сетках, в особенности при неизменной поддержке (support) промоделированных значений.

Метод не ограничен двумя переменными – можно рассматривать три и более переменных. Увеличение количества рассматриваемых переменных ведет к усложнению модели корегionalизации и увеличению времени расчета. Независимо от количества переменных возможны следующие два подхода.

1. Улучшение моделирования одной или нескольких переменных, используя информацию по другим переменным.

2. Прямое моделирование всех переменных.

Совместное Гауссово моделирование воспроизводит уровень корреляции между переменными. В случае двух переменных, если они независимы, то их реализации тоже будут независимыми, как в случае отдельного моделирования каждой из них методом последовательного Гауссова моделирования. Если они полностью зависят друг от друга, то их реализации будут идентичными. Возможны все промежуточные случаи при различных уровнях корреляции между переменными. Это является преимуществом по сравнению с методом учета внешнего дрейфа, когда не учитывается уровень корреляции между оцениваемой переменной и внешним дрейфом.

Возможно моделирование реализаций различных коррелированных переменных, у которых разные масштабы вариабельности, например, одно распределение не такое гладкое как другое.

Между применением метода в двумерном и трехмерном случаях не существует принципиальной разницы. Это остается верным и при недостатке информации по одной из переменных в одном из направлений. Вариограмма, являясь в большой степени интуитивным инструментом, может быть промоделирована при недостатке информации на основе личной экспертизы.

У метода существует ряд ограничений. Во-первых предположение о стационарности. Эта проблема может быть решена путем разбиения области на зоны стационарности. Как это упоминалось выше, пространственный тренд может быть предварительно выделен из данных и рассмотрен отдельно и добавлен обратно после моделирования. Являясь принятой аппроксимацией, такой подход может быть не приемлем при зависимости между трендами коррелированных переменных. В некоторых случаях очевидный тренд может быть сохранен при наличии достаточного количества условных данных.

Вторым ограничением является гипотеза о мультиномальности. В случае неприемлемости мультиномальной гипотезы отдается предпочтение другим непараметрическим моделям, например Марковские-Баесовские индикаторные косимуляции.

Третьим ограничением является экраный эффект (screen effect). Может оказаться, что он не достаточно хорош, что, однако, случается не слишком часто.

Другое ограничение – модель корегionalизации для авто- и кросс-вариограмм. Может быть использована любая положительно определенная модель. На практике используется линейная модель корегionalизации. Такую модель не всегда просто подогнать, что требует применение хорошей программы вариограммного моделирования.

Линейная модель корегionalизации

Существует два подхода к сокращению анализа данных по многим переменным и замене его анализом одно переменного набора данных. В одном проводится анализ одной или более линейных комбинаций компонент, и требуется определить подходящие линейные комбинации. Другой подход представляет различные компоненты как линейную комбинацию некоррелированных частей, так что каждая из них может быть проанализирована отдельно. Оба этих несвязанных между собой подхода используются в современной геостатистике.

Линейная модель корегionalизации предполагает, что каждая компонента вектора случайной функции может быть представлена как линейная комбинация некоррелированных компонент. Они обычно представляются в виде моделей ковариации или вариограмм одного типа но с разными радиусами корреляции. Линейная модель корегionalизации имеет преимущество в том, что условие положительной определенности сводится к проверке положительной определенности постоянной матрицы и наиболее полезна при недостатке измерений. Недостатком модели является ограниченный выбор моделей кросс-вариограмм и кросс-ковариаций. Обобщая другими словами, если каждая компонента представлена как линейная комбинация некоррелированных компонент, то это соответствует диагонализации матрицы структурной функции [9].

Рассмотрим вектор значений случайной функции $Z(x) = [Z_1(x), \dots, Z_m(x)]$. Пусть $Y_1(x), \dots, Y_p(x)$ некоррелированные случайные функции, где p может быть больше или меньше m . Стационарность компонент Y следует из стационарности компонент Z и наоборот. Предположим, что:

$$Z_j(x) = \sum_k Y_k(x) \cdot a_{kj}(x), \quad j = 1, \dots, m \quad (4)$$

В матричной форме (4) представляется:

$$[Z_1(x), \dots, Z_m(x)] = [Y_1(x), \dots, Y_p(x)] A \quad (4a)$$

Пространственные функции Z соотносятся с пространственными функциями Y следующим образом:

$$C_Z(h) = A^T C_Y(h) A \quad (5)$$

$$\gamma_Z(h) = A^T \gamma_Y(h) A \quad (6)$$

где $C_Z(h)$ и $C_Y(h)$ – ковариационные матрицы с компонентами:

$$C_{st,Z}(h) = \text{Cov}\{Z_s(x+h), Z_t(x)\} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} C_{uv,Y}(h) &= \text{Cov}\{Y_u(x+h), Y_v(x)\} = \\ &= 0, \text{ при } u \neq v \end{aligned} \quad (8)$$

а $\gamma_Z(h)$ и $\gamma_Y(h)$ – матрицы вариограмм с компонентами:

$$\gamma_{st,Z}(h) = \text{Cov}\{Z_s(x+h) - Z_s(x), Z_t(x+h) - Z_t(x)\} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{uv,Y}(h) &= \text{Cov}\{Y_u(x+h) - Y_u(x), Y_v(x+h) - Y_v(x)\} = \\ &= 0, \text{ при } u \neq v \end{aligned} \quad (8a)$$

В уравнениях (7a) и (8a) используются стандартные кросс-вариограммы а не псевдо-кросс-вариограммы [10].

Применяя уравнения (7) и (8) или (7a) и (8a) получим:

$$C_{st,Z}(h) = \sum a_{su} C_{uv,Y}(h) \cdot a_{ut} = \sum b_{st}^u C_{uv,Y}(h) \quad (9)$$

или

$$C_Z(h) = \sum B^u C_{uv,Y}(h) \quad (10)$$

Линейная модель корегionalизации обычно записывается в виде (10). По этому построению коэффициенты B^u будут автоматически удовлетворять требуемому условию положительной определенности.

Для случая двух переменных U и V модели авто- и кросс вариограмм строятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_U(h) &= u_0 \gamma_0(h) + u_1 \gamma_1(h) + \dots + u_m \gamma_m(h) \\ \gamma_V(h) &= v_0 \gamma_0(h) + v_1 \gamma_1(h) + \dots + v_m \gamma_m(h) \\ \gamma_{UV}(h) &= w_0 \gamma_0(h) + w_1 \gamma_1(h) + \dots + w_m \gamma_m(h) \end{aligned} \quad (11)$$

где $\gamma_U(h)$, $\gamma_V(h)$, $\gamma_{UV}(h)$ – авто- и кросс-вариограммные модели для U и V соответственно. Базисные модели задаются $\gamma_0(h)$, $\gamma_1(h)$, ..., $\gamma_m(h)$; u , v , w – коэффициенты, возможно отрицательные.

Уравнения (11) можно записать в матричной форме:

Комбинация первых базисных моделей $\gamma_0(h)$.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{U,0}(h) & \gamma_{UV,0}(h) \\ \gamma_{VU,0}(h) & \gamma_{V,0}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 & w_0 \\ w_0 & v_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_0(h) & 0 \\ 0 & \gamma_0(h) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Комбинация вторых базисных моделей $\gamma_1(h)$.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{U,1}(h) & \gamma_{UV,1}(h) \\ \gamma_{VU,1}(h) & \gamma_{V,1}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ w_1 & v_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1(h) & 0 \\ 0 & \gamma_1(h) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Комбинация m -х базисных моделей $\gamma_m(h)$.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{U,m}(h) & \gamma_{UV,m}(h) \\ \gamma_{VU,m}(h) & \gamma_{V,m}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_m & w_m \\ w_m & v_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_m(h) & 0 \\ 0 & \gamma_m(h) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Для удовлетворения условия положительной определенности линейной модели (11), достаточно положительности коэффициентов u , v и w в уравнениях (12)-(14). Это достигается наложением на коэффициенты следующих условий:

$$\begin{aligned} u_i > 0, \quad v_i > 0, \quad \text{для всех } i=0,\dots,m \\ u_i \cdot v_i > w_i \cdot w_i, \quad \text{для всех } i=0,\dots,m \end{aligned} \quad (15)$$

Ограничение, накладываемое условиями (15), может значительно усложнить моделирование. Часто одна из авто- или кросс-вариограммных моделей не подгоняется под соответствующую экспериментальную вариограмму, в то время как другие модели подходят хорошо. В таком случае следует рассматривать каждую индивидуальную модель как часть общей модели и судить о качестве подгонки в соответствии с этим. Из уравнения (15) следует два полезных замечания для моделирования корегionalизации. Во-первых, базисная модель, содержащаяся в любой из авто вариограммных моделей, не обязательно должна быть включена в кросс-вариограммную модель. Во-вторых, любая базисная модель, содержащаяся в модели кросс-вариограммы, должна быть включена во все модели авто-вариограмм.

Совместное последовательное Гауссово моделирование ^{90}Sr и ^{137}Cs Чернобыльских выпадений

Радиоактивное загрязнение в результате Чернобыльской аварии образовалось на обширных территориях. Основными пространственными загрязнителями являются долгоживущие изотопы ^{90}Sr и ^{137}Cs . Среди пространственных особенностей загрязнения следует отметить их высокую вариабельность, пятнистость и наличие многочисленных крайних значений. Анализ и картирование пространственного загрязнения усложняется его комплексной структурой на различных масштабах, обусловленной различными факторами влияния (погодными условиями, типом подстилающей поверхности, орографическими эффектами, источником, и др.). Распределения ^{90}Sr и ^{137}Cs сильно связаны между собой в силу особенностей источника. Коэффициент корреляции между ними более 70%. Это позволяет применить совместные методы анализа пространственного распределения.

В исследовании были использованы данные по загрязнению ^{90}Sr и ^{137}Cs западной части Брянской области – наиболее загрязненной части России. Анализируемые данные состоят из 286 точек измерений ^{90}Sr и 680 точек измерений ^{137}Cs (см. Рис. 1, 2). Они уже применялись в различных исследованиях и их характер достаточно хорошо выяснен. Данные были подвергнуты нормальному преобразованию. Гистограммы и нормальная бумага для исходных и преобразованных данных представлены на рисунках 3-6. На нормальной бумаге данные, подчиняющиеся Гауссова закону распределения, располагаются вдоль прямой $y=x$.

Для принятия гипотезы о мультинормальности полученных распределений преобразованных данных был проведен тест на бинормальность. Были построены индикаторные вариограммы для трех отсечений – нижней и верхней квартилей и медианы – для модели вариограмм нормализованных данных (normal score) и исходных данных. Бинормальность иллюстрируется достаточно хорошим совпадением этих индикаторных вариограмм на рисунках 7, 8.

Проверка на бинормальность преобразованных данных также проводилась с помощью следующего качественного теста:

$$\frac{\sqrt{\gamma(h)}}{M(h)} = \sqrt{\pi} \quad (16)$$

где $\gamma(h)$ – вариограмма, а $M(h)$ – мадограмма, определяемые следующим образом для пространственной функции Z , имеющей значения $[Z(x_1), \dots, Z(x_N)]$:

$$M(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} |Z(x_i) - Z(x_i - h)|$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(x_i) - Z(x_i - h))^2$$

где h – расстояние между точками (лаг).

На рисунке 9 приведена зависимость $\sqrt{\gamma(h)}/M(h)$ от расстояния h (км). Можно говорить о бинормальности ^{90}Sr и несколько худшей бинормальности ^{137}Cs .

Дальнейший структурный анализ (вариография) проводился для нормализованных данных. После применения линейной модели корегionalизации были получены следующие модели авто- и кросс-вариограмм (см. Рис. 11, 12):

Таблица 1. Модели авто- и кросс-вариограмм для ^{90}Sr и ^{137}Cs .

Переменная	Наггет	Тип модели	Плато (sill)	Радиус
^{137}Cs nscore	0.04	Сферическая	0.96	75
^{90}Sr nscore	0.25	Сферическая	0.75	75
^{90}Sr nscore - ^{137}Cs nscore	0.05	Сферическая	0.4	75

Для всех моделей выполняется условие (15):

Для наггета:

$$\begin{vmatrix} 0.25 & 0.05 \\ 0.05 & 0.04 \end{vmatrix} = 0.0075 > 0$$

Для Сферической модели:

$$\begin{vmatrix} 0.75 & 0.4 \\ 0.4 & 0.96 \end{vmatrix} = 0.56 > 0$$

Далее было проведено совместное последовательное Гауссово моделирование 30-ти равновероятных реализаций пространственного распределения ^{90}Sr на регулярной сетке 42×70 с размером ячейки 2×2 км. Результаты моделирования были преобразованы обратно из нормального распределения в значения загрязнения при помощи таблицы прямого преобразования. Концы распределения были линейно аппроксимированы. После этого был проведен анализ результатов и их представление в виде различных карт. Результаты совместного моделирования сравнивались с результатами последовательного Гауссова моделирования, полученными в [5].

На рисунке 22 представлены равновероятные реализации совместного моделирования. Реализации были проанализированы на воспроизводимость распределения (гистограммы) и пространственной структуры (вариограммы) исходных данных. На рисунках 13-15 представлены гистограммы исходных данных и нескольких косимуляций в сравнении с гистограммами реализаций, полученных путем отдельного последовательного Гауссова моделирования ^{90}Sr . Статистическое описание распределений представлено в таблице 2. Они показывают большую близость реализаций совместного моделирования к исходным данным, чем реализаций отдельного моделирования ^{90}Sr (см. рис. 23). Совместное моделирование лучше воспроизводит пространственную корреляционную структуру данных. Вариограммы по всем направлениям для исходных данных и реализаций совместного и отдельного моделирования приведены на рисунке 10. Анизотропия пространственной структуры не моделировалась, что сказалось на результатах – реализации совместного моделирования обладают различной анизотропией, отображенной на вариограммах розах (см. Рис. 16-18). Реализации совместного моделирования обладают одинаковой структурой пространственного дрейфа в направлении N-S (см. Рис. 19-21).

Карты равновероятных реализаций косимуляций ^{90}Sr приведены на рисунке 22. На основе 30-ти равновероятных реализаций был проведен вероятностный анализ результатов. Были получены карты средних оценок E-типа (E-type) (см. 24); карты вероятности превышения уровней принятия решений 0.2, 0.5, 0.7 Ки/кв.км (см. Рис. 26); карты оценок с вероятностью превышения 0.1, 0.5, 0.8 (см. Рис. 28). Для

сравнения приведены соответствующие карты для результатов последовательного Гауссова моделирования одной переменной ^{90}Sr (см. Рис. 25, 21, 23). Из карт следует значительное улучшение результатов при использовании совместного подхода к моделированию. Дополнительные данные по ^{137}Cs позволяют получить более точную пятнистую картину распределений ^{90}Sr .

Таблица 2. Итоговая статистика реализаций косимуляций ^{90}Sr (^{90}Sr - ^{137}Cs) в сравнении с измерениями и реализациями последовательного Гауссова моделирования.

Статистика	^{90}Sr измерен ия	^{90}Sr косим. 1	^{90}Sr косим. 2	^{90}Sr косим. 3	^{90}Sr косим. 4	^{90}Sr симул. 1	^{90}Sr симул. 2
Количество точек	286	2940	2940	2940	2940	3150	3150
Среднее значение	0.2895	0.287672	0.289128	0.273314	0.319953	0.319536	0.302263
Медиана	0.2230	0.20235	0.2013	0.19895	0.22195	0.25455	0.233
Минимум	0.0180	0.018	0.018	0.018	0.018	0.0183	0.0172
Максимум	1.3610	1.361	1.361	1.361	1.361	2.4012	12.7427
Нижняя квартиль 25%	0.1460	0.12805	0.131	0.1257	0.141	0.174	0.155
Верхняя квартиль 75%	0.3710	0.37355	0.365	0.34805	0.389	0.389	0.374
Размах	1.343	1.343	1.343	1.343	1.343	2.3829	12.7255
Межквартиль ное расстояние	0.225	0.2455	0.234	0.22235	0.248	0.215	0.219
Вариация	0.0050	0.059692	0.06213	0.05254	0.079961	0.047561	0.098389
Стандартное отклонение	0.2231	0.24432	0.249258	0.229217	0.282774	0.218086	0.31367
Коэфф. симметрии	1.9867	1.931084	2.02949	2.070936	1.909248	1.989479	20.53436
Экссесс	4.9202	4.18158	4.46614	5.041856	3.46437	6.435103	786.3958

Выводы

1. Совместный подход к оцениванию радиоактивного загрязнения ^{90}Sr и ^{137}Cs существенно улучшает результаты анализа при недостатке информации по ^{90}Sr .
2. Метод совместного последовательного Гауссова моделирования примененный для получения равновероятных реализаций пространственного распределения ^{90}Sr имеет ряд преимуществ по сравнению с моделированием ^{90}Sr отдельно от ^{137}Cs :
 - лучшая воспроизводимость исходного распределения (гистограммы и статистических характеристик);
 - лучшая воспроизводимость пространственной корреляционной структуры (вариограммы) данных;
 - получение более варибельных средних оценок E-типа с присутствием пятен высокого загрязнения;
 - получение более репрезентативных оценок вероятности превышения уровней загрязнения.
3. Метод совместного стохастического моделирования хорошо работает в условиях высокой варибельности данных. С помощью него можно получить вероятностные оценки превышения заданного уровня загрязнения и оценки с заданной вероятностью превышения. Равновероятные реализации пространственного распределения позволяют оценить неопределенность оценки.

Благодарность. Работа была частично поддержана грантами ИНТАС 94-2361 и 96-1957.

Литература

1. Atlas on Caesium contamination of Europe after the Chernobyl nuclear power plant accident. Ed. M. De Cort, Yu. Tsaturov. EUR 16542 EN. 1996.
2. М.Ф. Каневский, Р.В. Арутюнян, Л.А. Большов, В.В. Демьянов, Е.А.Савельева, Т. Хаас. *Геостатистический подход к анализу чернобыльских выпадений*. Известия Академии Наук. Энергетика, номер 3, стр. 34-46, 1995.
3. M. Kanevsky, R. Arutyunyan, L. Bolshov, V. Demyanov, M. Maignan. Artificial neural networks and spatial estimations of Chernobyl fallout. *Geoinformatics*, 1996, vol. 7, nos. 1-2.
4. M. Kanevsky. Chernobyl Fallout: Stochastic Simulations of the Spatial Variability and Probability Mapping. Preprint NSI-23-94. Moscow 1994.
5. М.Ф. Каневский, В.В. Демьянов. Непараметрическая геостатистика, стохастическое моделирование и анализ радиоэкологических данных. Препринт ИБРАЭ 95-10, Москва 1995.
6. М.Ф. Каневский, В.В. Демьянов, С.Ю. Чернов. Совместный пространственный анализ ^{137}Cs и ^{90}Sr Чернобыльских выпадений. Препринт ИБРАЭ 96-04. Москва 1996.
7. G.W. Verly. Sequential Gaussian Cosimulation: A Simulation Method Integrating Several Types of Information. *Geostatistics Troia*, part 1. Ed. A. Soares, Kluwer Academic Publisher, 1992, pp.543-554.
8. E. H. Isaaks, R. M. Shrivastava. *Introduction to Applied Geostatistics*. Oxford University Press, 1989.
9. D.E. Myers. The Linear coregionalization and simultaneous diagonalization of the variogram matrix function. 1995, *Sciences de la Terre* 32, 125-139.
10. D. Mayers. Pseudo-Cross Variograms, Positive Definitess and Cokriging. *Hydraulic Engineering*, M.A. Ports (ed.), American Society of Civil Engineering, pp. 795-800.
11. P. Goovaerts. *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Oxford University Press, 1997.

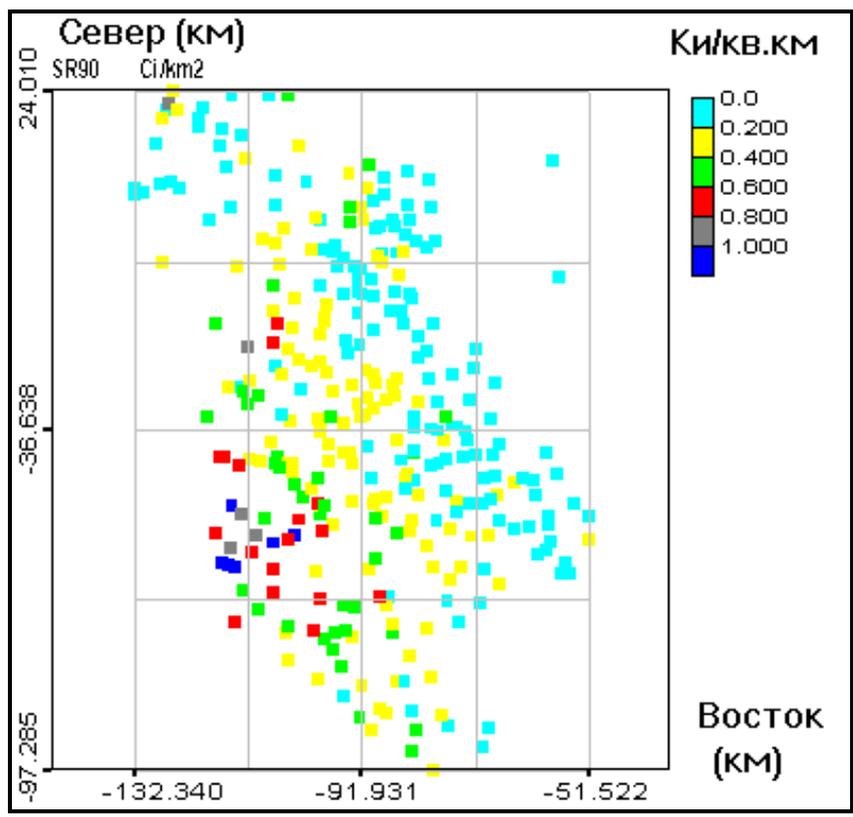


Рисунок 1. Данные по загрязнению ^{90}Sr западной части Брянской области.

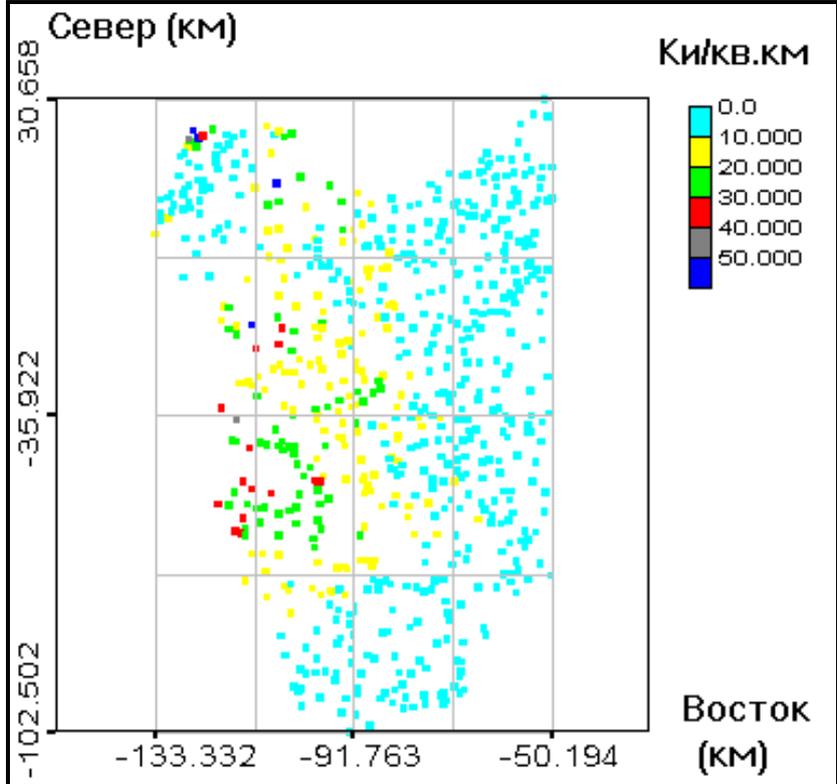


Рисунок 2. Данные по загрязнению ^{137}Cs западной части Брянской области.

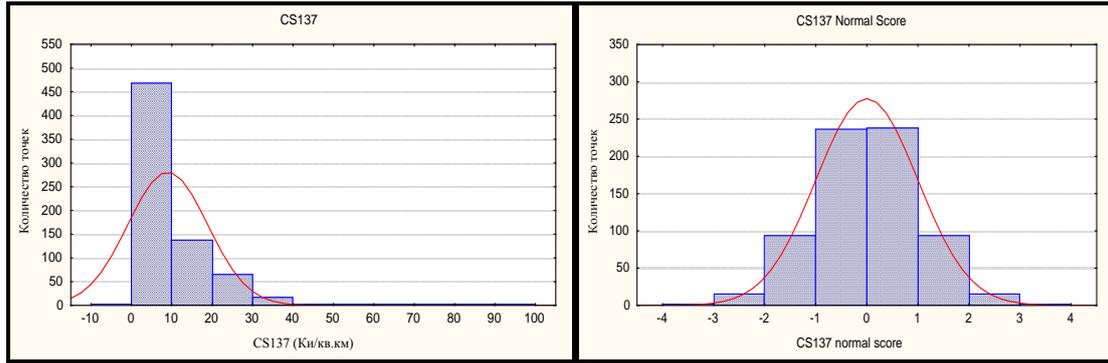


Рисунок 3. Гистограммы абсолютных и нормализованных значений ^{137}Cs .

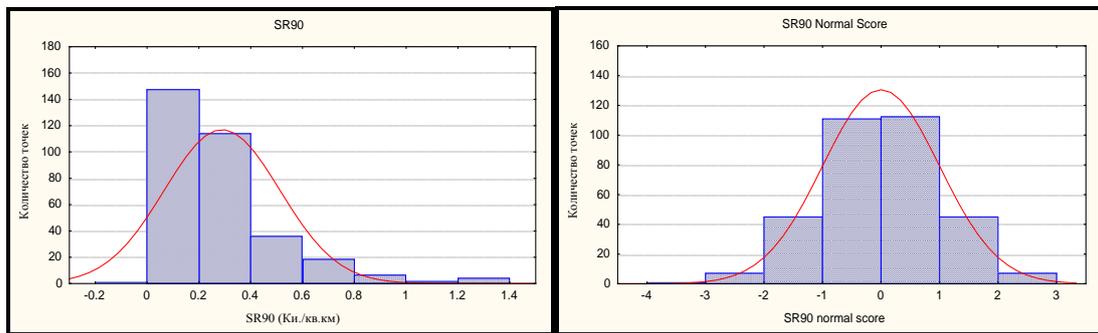


Рисунок 4. Гистограммы абсолютных (слева) и нормализованных (справа) значений ^{90}Sr .

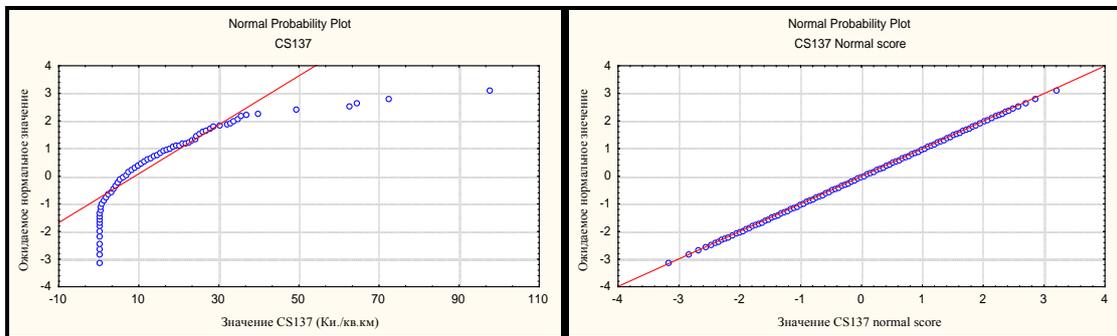


Рисунок 5. Нормальная бумага для абсолютных (слева) и нормализованных (справа) значений ^{137}Cs .

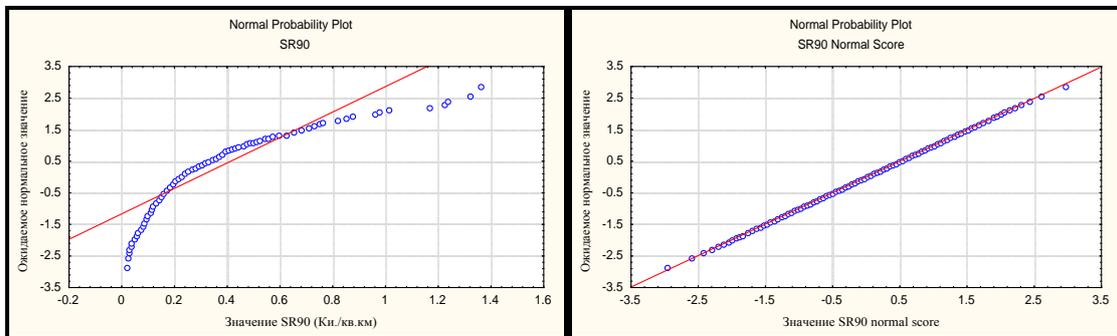


Рисунок 6. Нормальная бумага для абсолютных (слева) и нормализованных (справа) значений ^{90}Sr .

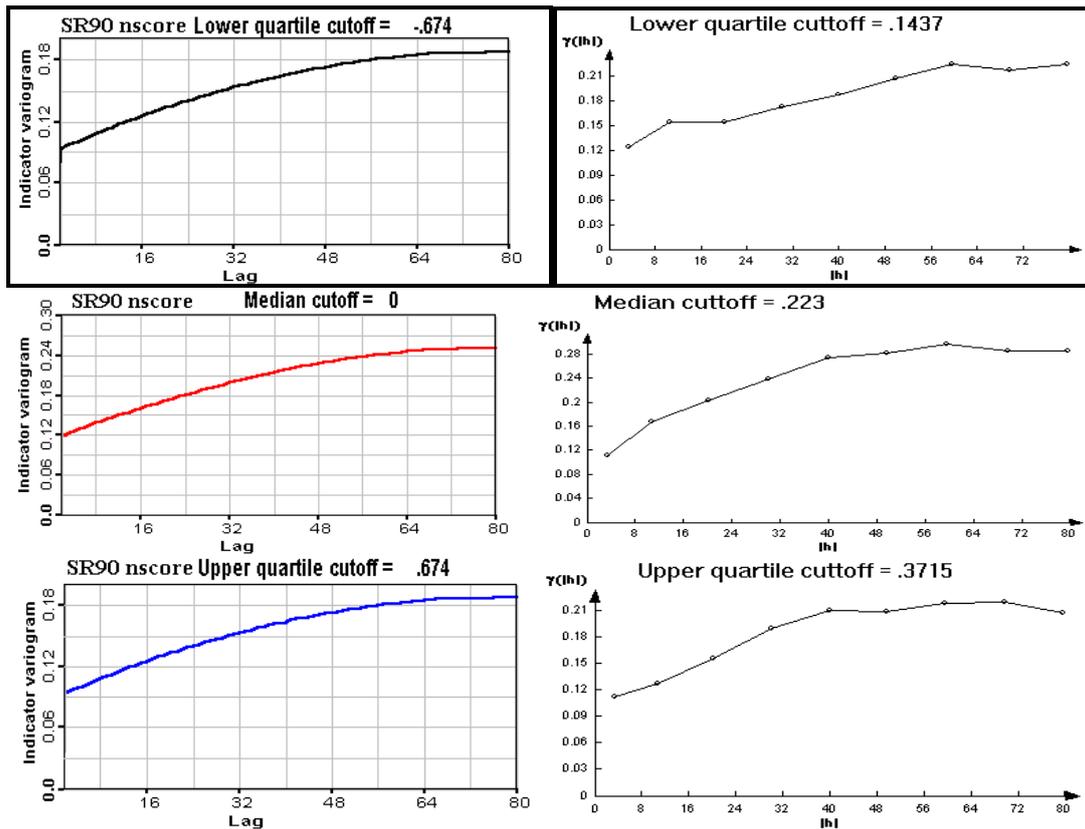


Рисунок 7. Тест на бинормальность ^{90}Sr : индикаторные вариограммы для нормализованных данных (слева) и для абсолютных значений (слева), отсечения по нижней квантиле (вверху), медиане (в середине), верхней квантиле (внизу).

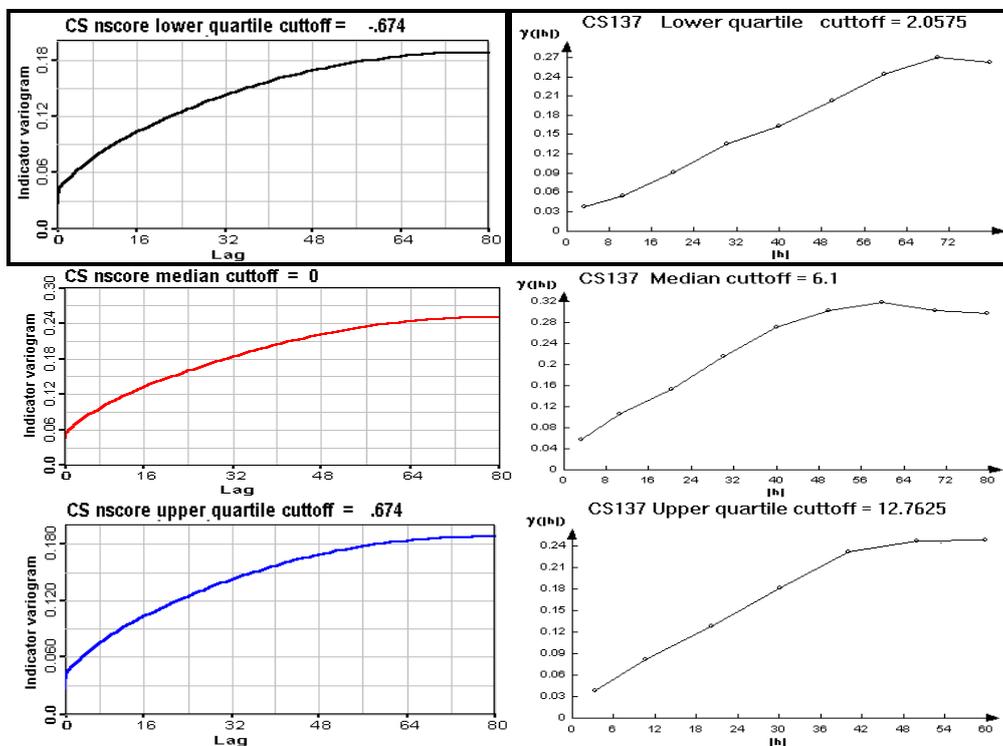


Рисунок 8. Тест на бинормальность ^{137}Cs : индикаторные вариограммы для нормализованных данных (слева) и для абсолютных значений (слева), отсечения по нижней квантиле (вверху), медиане (в середине), верхней квантиле (внизу).

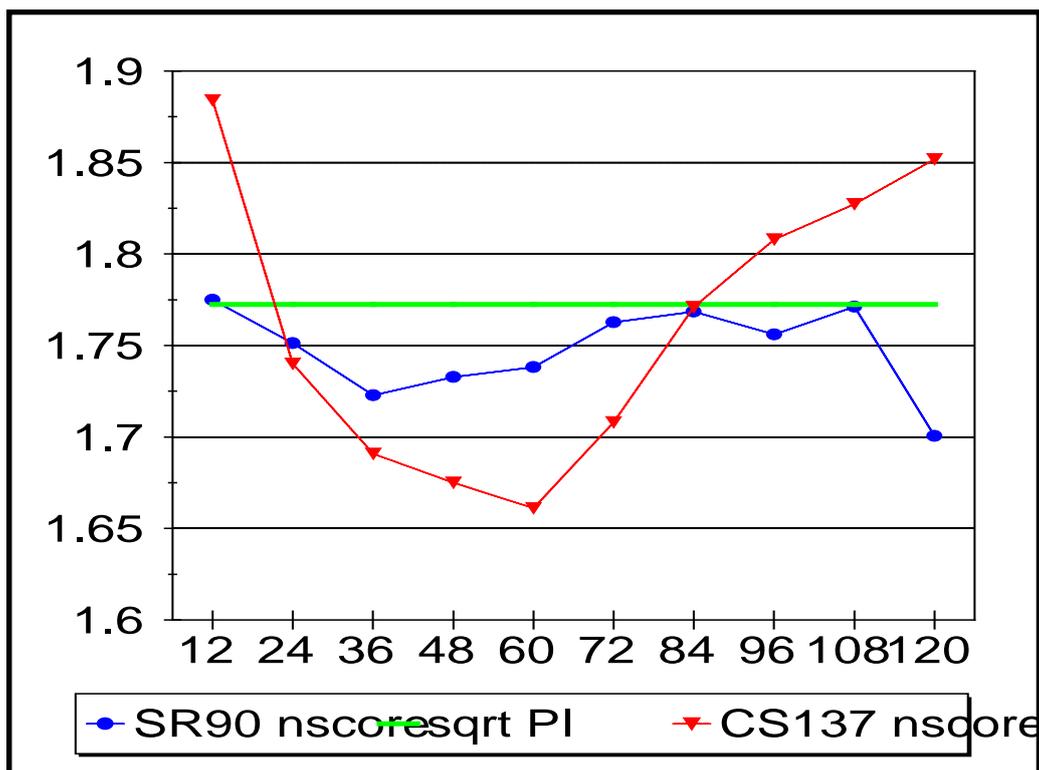


Рисунок 9. Тест на бинормальность нормализованных данных по ^{90}Sr и ^{137}Cs в сравнении с $\sqrt{\pi} \approx 1.772454$.

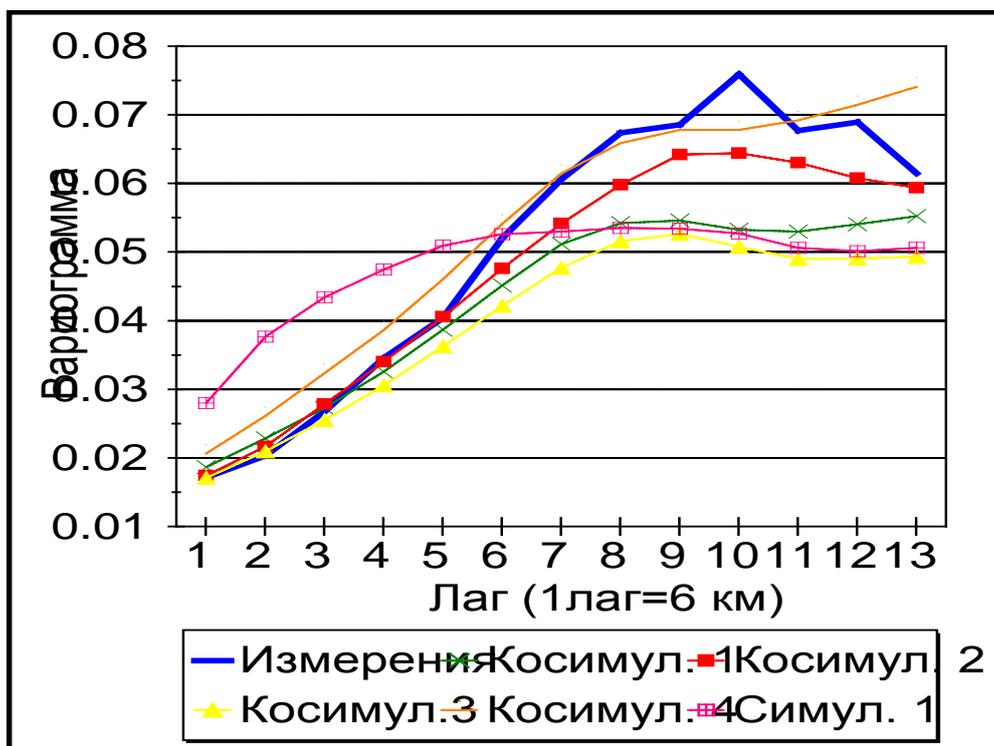


Рисунок 10. Вариограммы по всем направлениям для реализаций косимуляций ^{90}Sr в сравнении с вариограммой измерений и вариограммой реализации последовательного Гауссова моделирования.

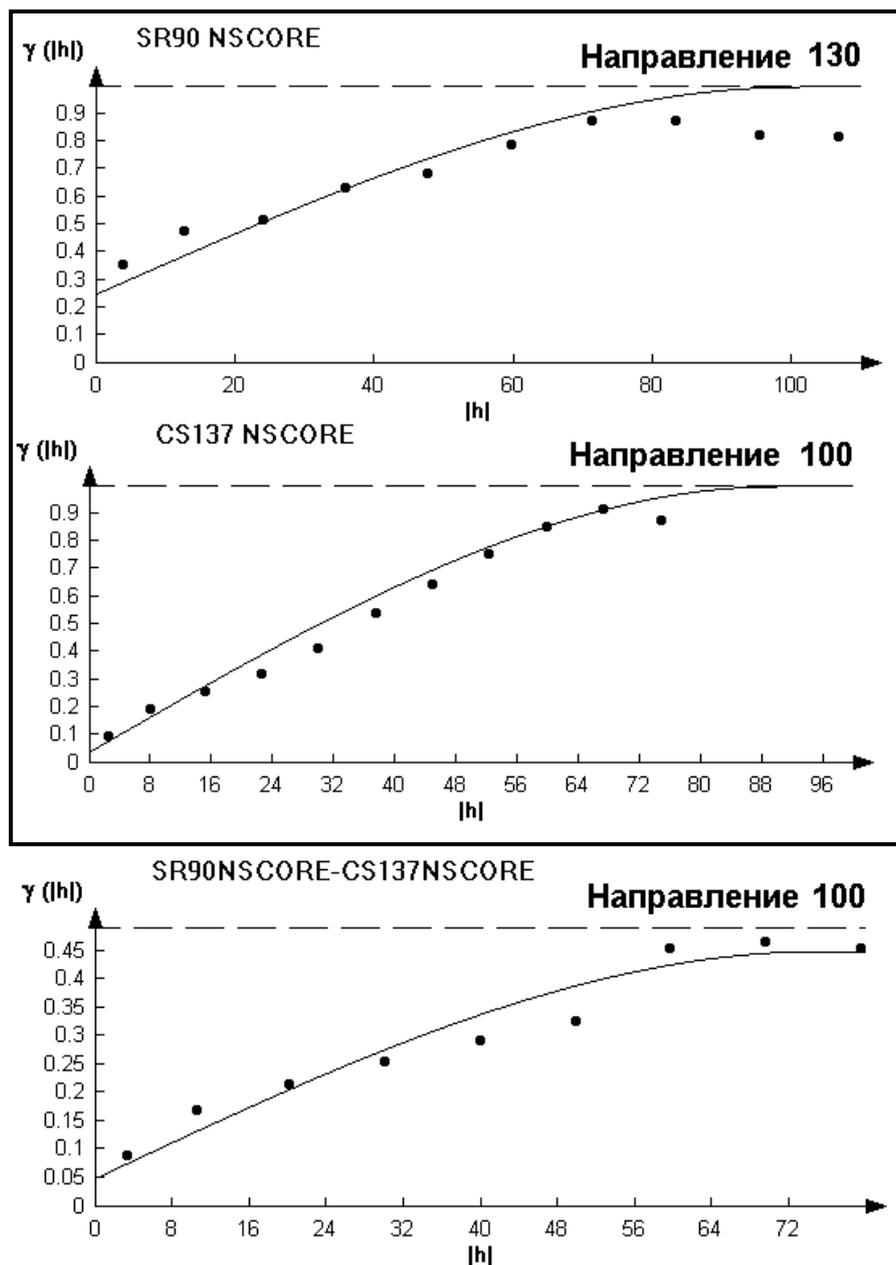


Рисунок 11. Экспериментальная вариограмма ^{90}Sr nscore (вверху), ^{137}Cs nscore (в середине), кросс-вариограмм ^{90}Sr nscore- ^{137}Cs nscore (внизу) и их модели, без применения линейной модели корегionalизации).

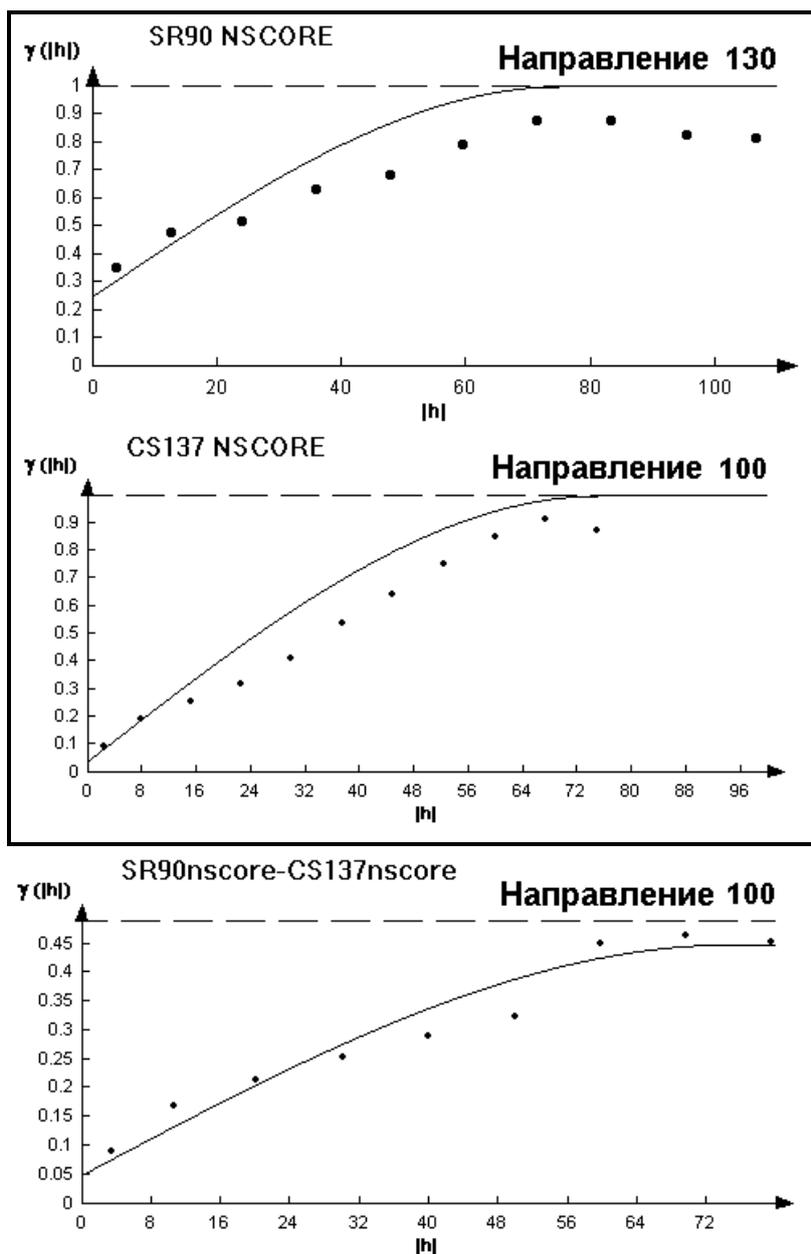


Рисунок 12. Экспериментальная вариограмма ^{90}Sr nscore (вверху), ^{137}Cs nscore (в середине), кросс-вариограмм ^{90}Sr nscore- ^{137}Cs nscore (внизу) и их модели с применением линейной модели корегionalизации).

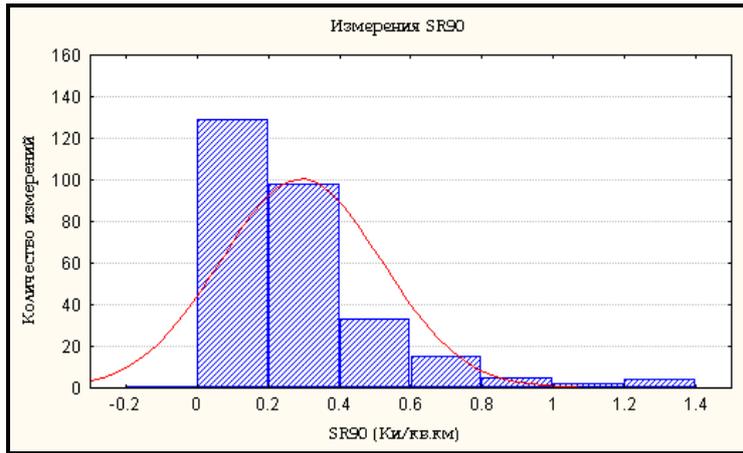


Рисунок 13. Гистограмма измерений ^{90}Sr .

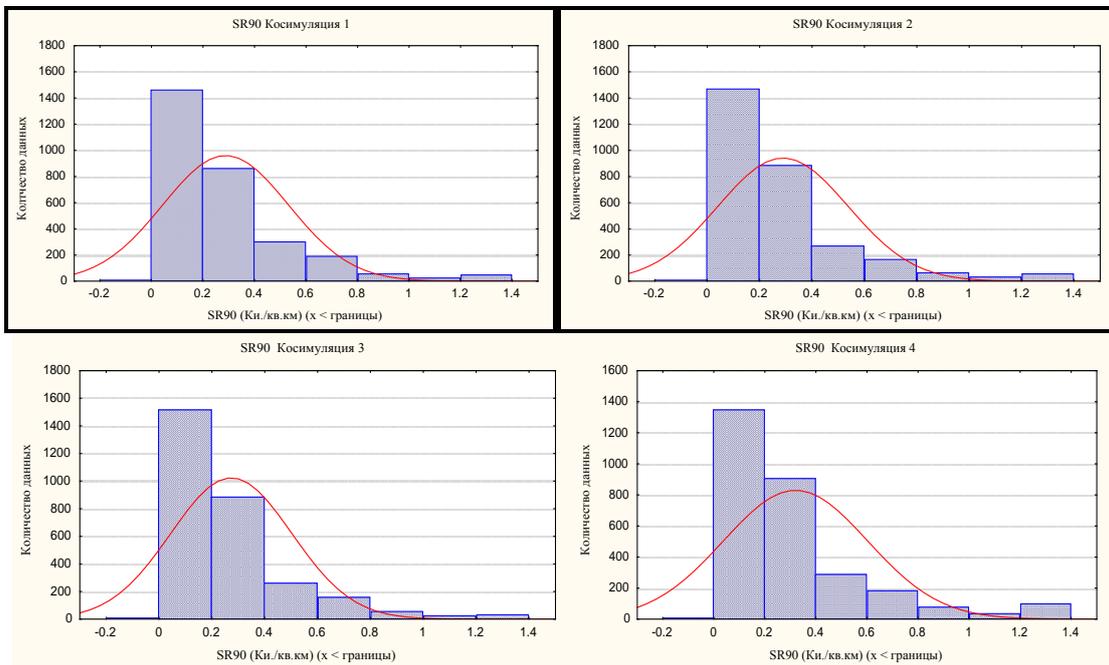


Рисунок 14. Гистограммы реализации косимуляций ^{90}Sr (совместного моделирования ^{90}Sr - ^{137}Cs).

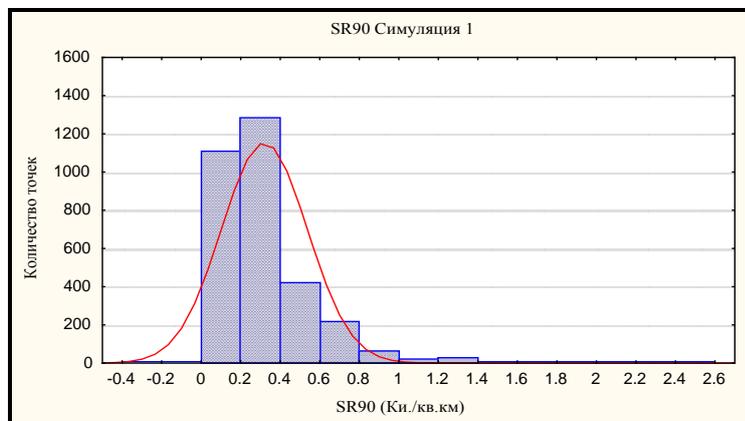


Рисунок 15. Гистограмма реализации ^{90}Sr последовательного Гауссова моделирования.

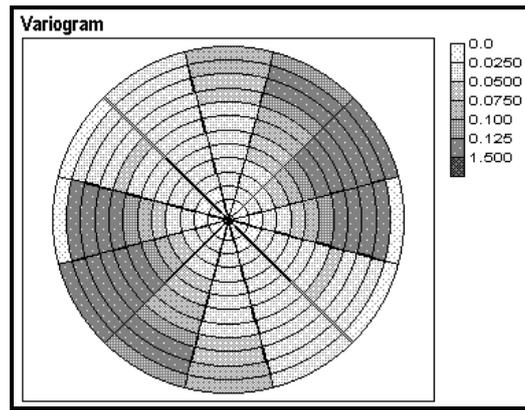


Рисунок 16. Вариограммная роза измерений ^{90}Sr .

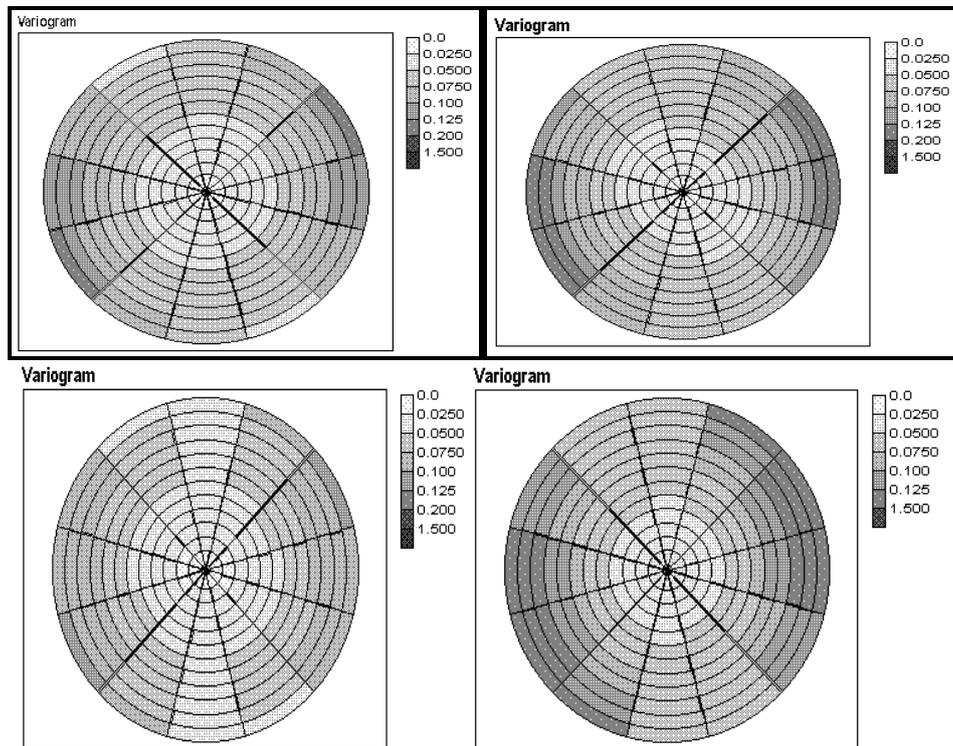


Рисунок 17. Вариограммные розы реализаций косимуляций ^{90}Sr .

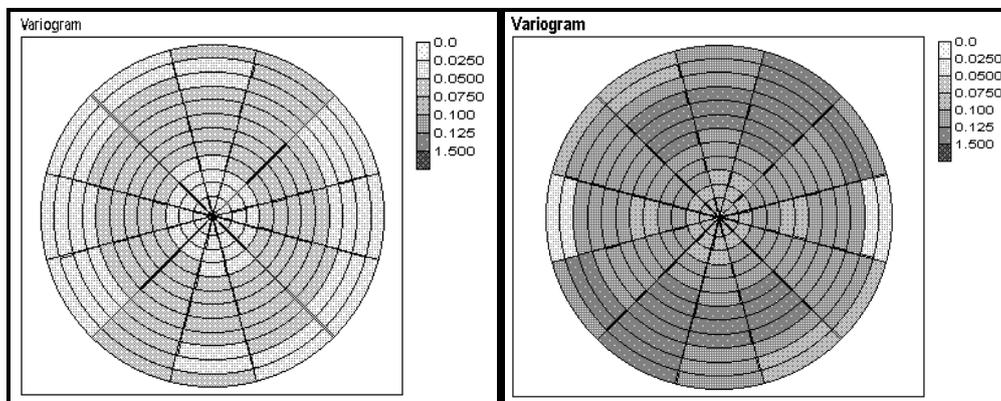


Рисунок 18. Вариограммная розы реализаций симуляций ^{90}Sr .

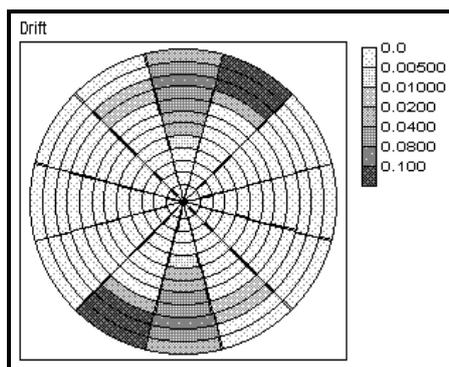


Рисунок 19. Роза дрейфа измерений ^{90}Sr .

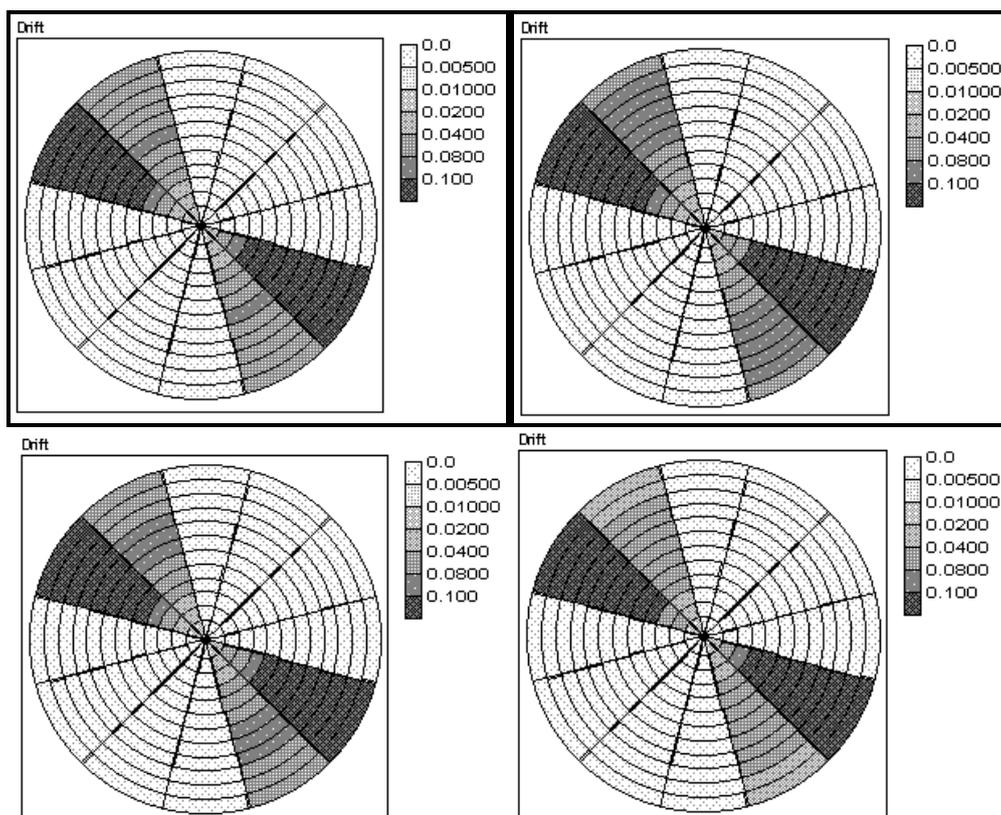


Рисунок 20. Розы дрейфа для реализаций косимуляций ^{90}Sr .

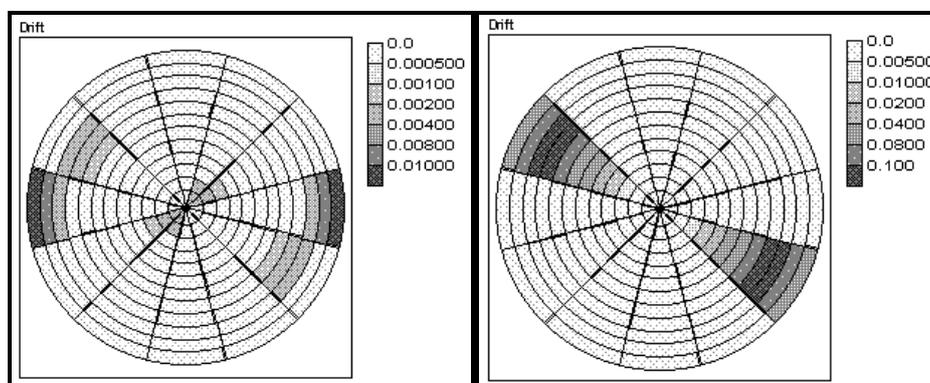


Рисунок 21. Розы дрейфа для реализаций симуляций ^{90}Sr .

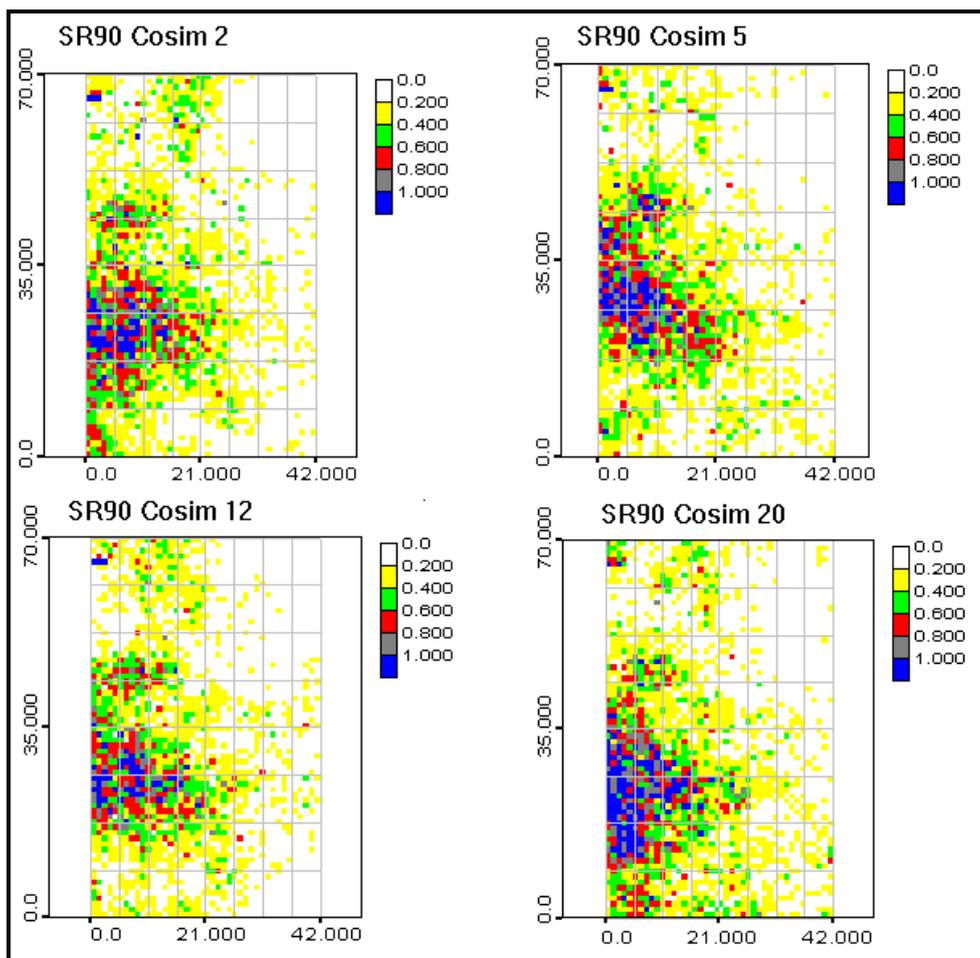


Рисунок 22. Равновероятные реализации распределения ^{90}Sr косимуляций ^{90}Sr - ^{137}Cs .

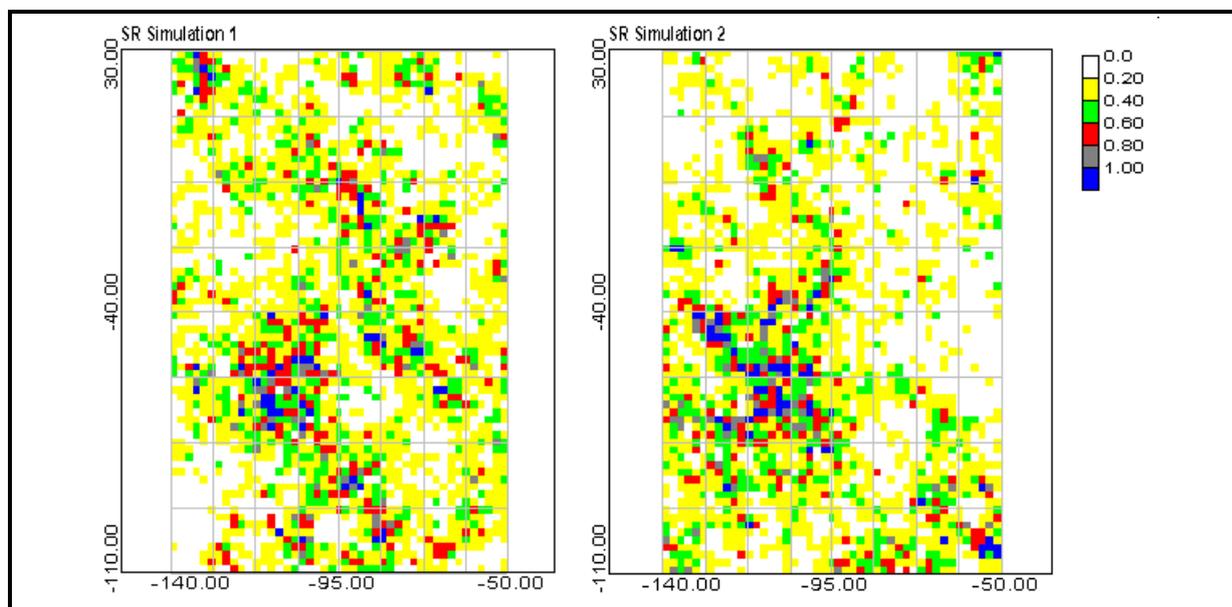


Рисунок 23. Равновероятные реализации распределения ^{90}Sr последовательных Гауссовых симуляций ^{90}Sr .

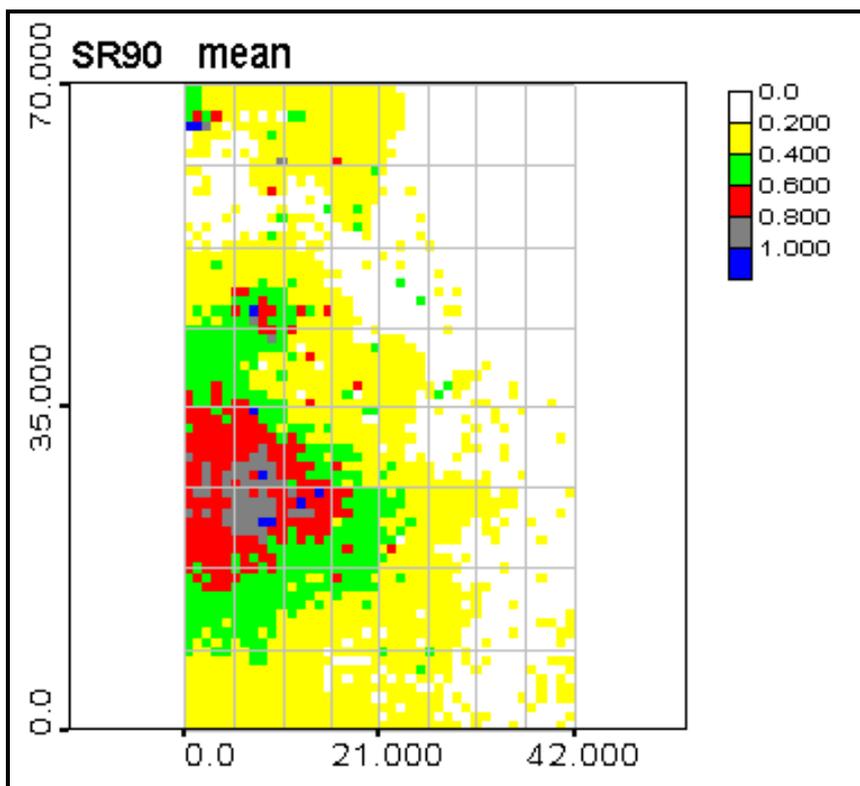


Рисунок 24. ^{90}Sr косимуляции ^{90}Sr - ^{137}Cs : ^{90}Sr последовательное Гауссово моделирование: средняя оценка E-типа (E-type).

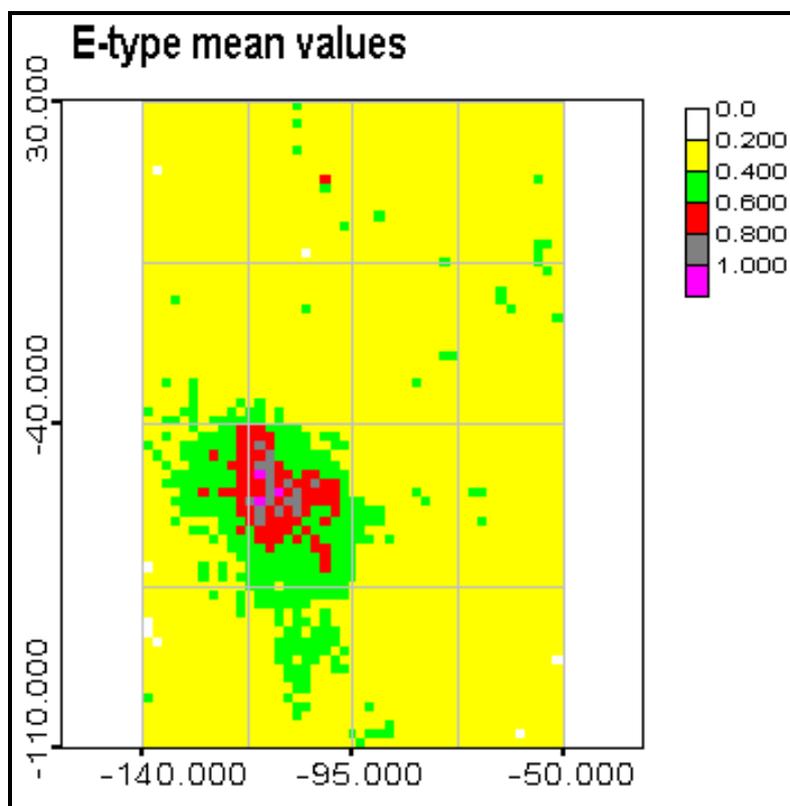


Рисунок 25. ^{90}Sr последовательное Гауссово моделирование: средняя оценка E-типа (E-type).

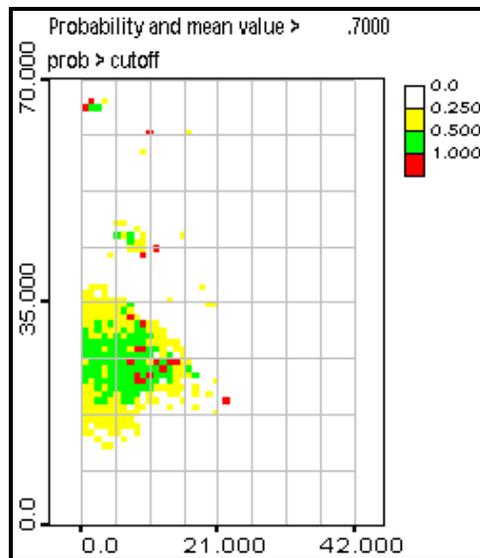
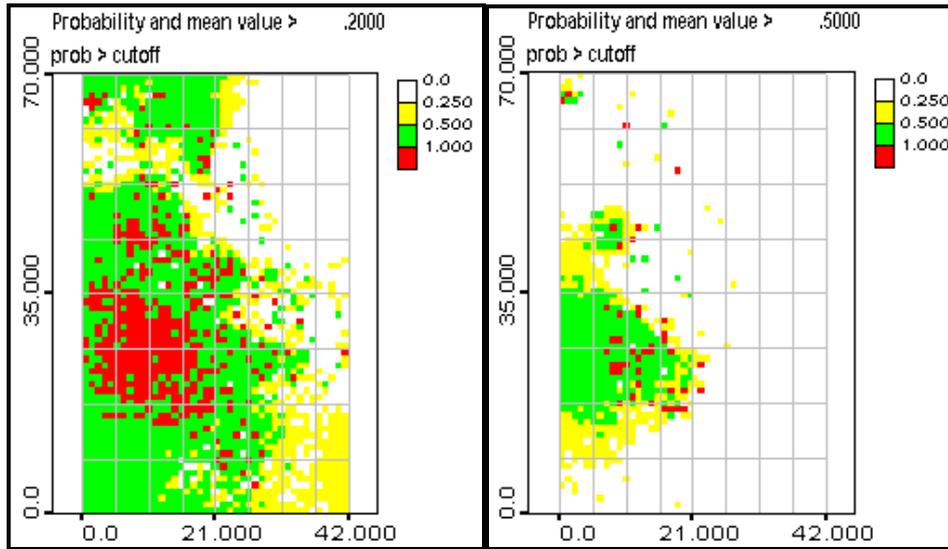


Рисунок 26. ^{90}Sr Косимуляции ^{90}Sr - Cs137 : вероятность превышения уровней: 0.2, 0.5, 0.7 Ки/кв.км.

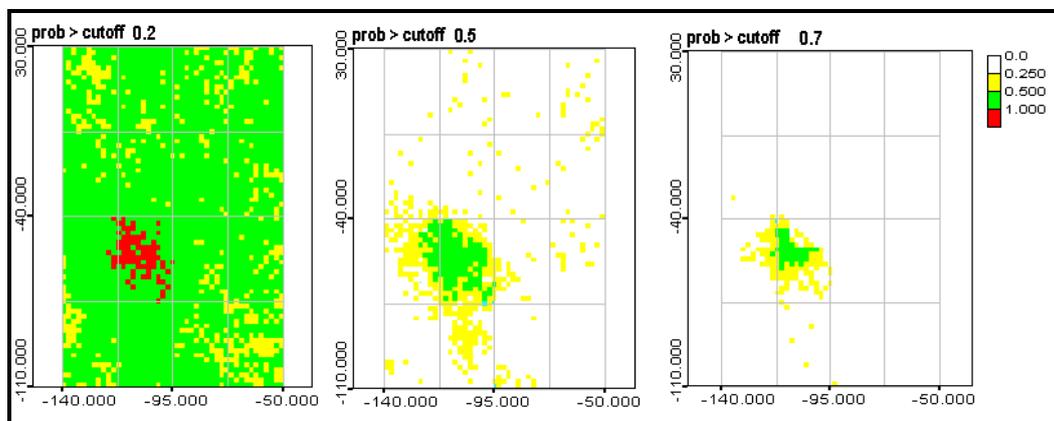


Рисунок 27. ^{90}Sr последовательное Гауссово моделирование: вероятность превышения уровней: 0.2, 0.5, 0.7 Ки/кв.км.

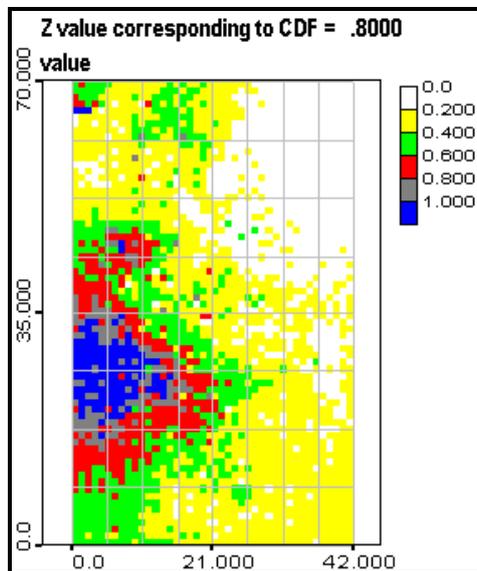
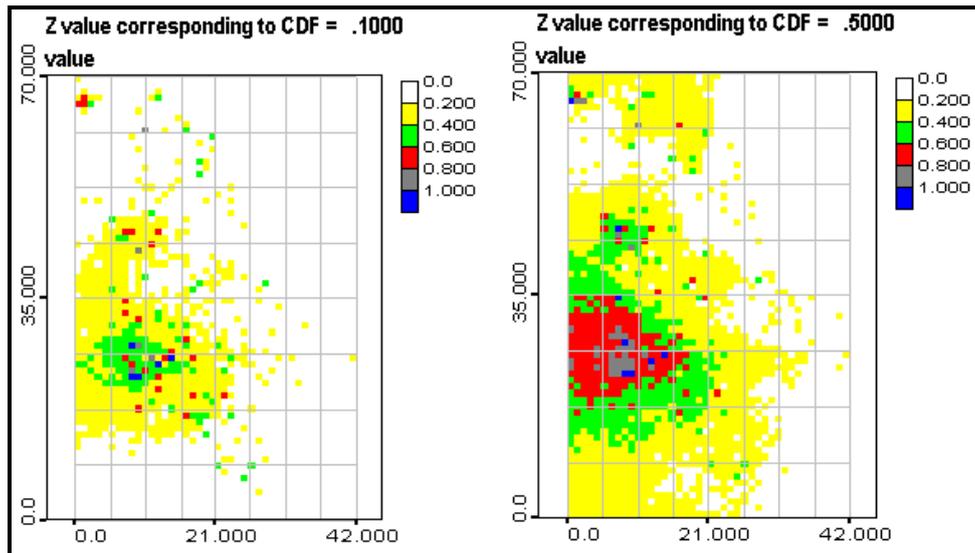


Рисунок 28. ^{90}Sr косимуляции ^{90}Sr - ^{137}Cs : оценки М-типа, соответствующие уровням вероятности 0.1, 0.5, 0.8. Эти оценки могут быть превышены действительными значениями с этой вероятностью.

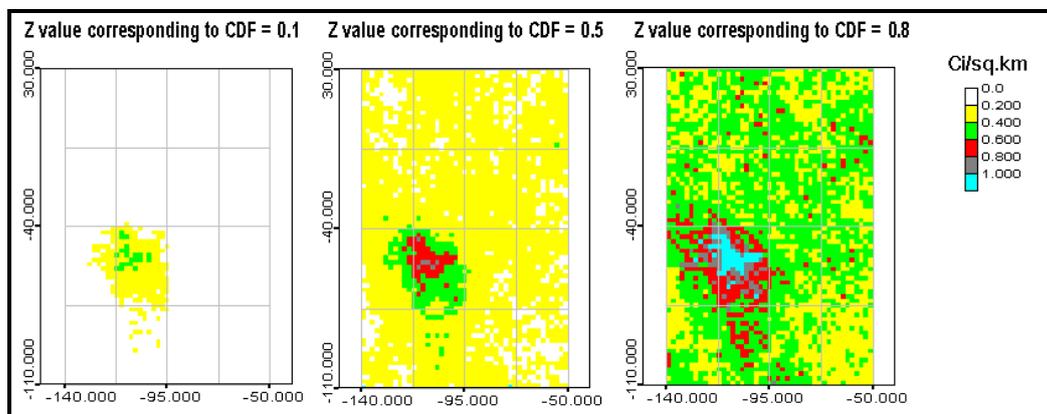


Рисунок 29. ^{90}Sr симуляции: оценки М-типа, соответствующие уровням вероятности 0.1, 0.5, 0.8. Эти оценки могут быть превышены действительными значениями с этой вероятностью.