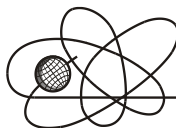




Российская Академия Наук

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ
БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**



ИБРАЭ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**NUCLEAR SAFETY
INSTITUTE**

Препринт ИБРАЭ № ИВРАЕ-1998-08

Preprint IBRAE-1998-08

В.М. Головизнин, С.А. Карabasов

НЕЛИНЕЙНАЯ КОРРЕКЦИЯ СХЕМЫ «КАБАРЕ»

Москва 1998

Moscow 1998

Головизнин В.М., Карабасов С.А. НЕЛИНЕЙНАЯ КОРРЕКЦИЯ СХЕМЫ «КАБАРЕ». Препринт № ИБРАЭ-98-08. Москва. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. Июнь 1998. 17 с. — Библиогр.: 8 назв.

Аннотация

Для линейной трехслойной разностной схемы «Кабаре» с пространственно-расщепленной временной производной, аппроксимирующей уравнения конвективного переноса со вторым порядком точности и обладающей улучшенными диссипативными и дисперсионными свойствами, предложен консервативный алгоритм нелинейной коррекции, монотонизирующий результаты расчетов при больших пространственных вариациях. Свойства нового алгоритма проиллюстрированы на серии тестовых расчетов уравнения переноса. Данная методика использована при решении гиперболической системы уравнений, возникающей при двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей в модели Бакли-Лаверетта.

©ИБРАЭ РАН, 1998

Goloviznin V.M., Karabasov S.A. NON-LINER CORRECTION OF «CABARET» SCHEME. Preprint IBRAE-98-08. Moscow. Nuclear Safety Institute. June 1998. 17 p. — Refs.: 8 items.

Abstract

This paper examines a conservative correction mechanism enforcing positivity under big-scale space variations for a linear three time layered finite-difference scheme named «Cabaret». The distinguished features of the latter one are a spatially split time derivative, the second order of consistency for convection transfer equation and enhanced dissipation and dispersion properties. Qualities of the new algorithm are illustrated by a set of test runs for transfer equation. This technique is implemented for classical hyperbolic system of equations for the Buckley-Leverett filtration problem. It is concluded that the proposed method is more accurate than the first-order upwind discretization depicting sharp saturation front and front inversion.

©Nuclear Safety Institute, 1998

Нелинейная коррекция схемы “Кабаре”

В.М. Головизнин, С.А. Карабасов

ИНСТИТУТ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

113191, Москва, ул. Б. Тульская, 52

тел.: (095) 958-14-12, эл. почта: gol@ibrae.ac.ru

Содержание

Содержание	3
1 Введение	3
2 Разностная схема “Кабаре”	4
3 Процедура нелинейной коррекции	5
4 Примеры численных расчетов	7
5 Численные примеры моделирования	7
6 Заключение	11
7 Литература	12
8 Приложение	13

1 Введение

В работах^[1,2] предложена и подробно исследована новая явная линейная разностная схема для уравнения конвективного переноса, названная схемой “Кабаре”. Характерной особенностью этой схемы является пространственное расщепление временной производной, определенной на трех временных слоях. Новая схема обладает рядом специфических черт, среди которых следует отметить свойство “транспортности”^[3], исключающее возможность переноса возмущений вверх по потоку, второй порядок аппроксимации на нерегулярных пространственных сетках и свойство полной консервативности^[4], заключающееся в том, что для разностного решения справедливы как линейные, так и квадратичные законы сохранения.

Схема “Кабаре” является бездиссипативной и обладает улучшенными по сравнению с классическими линейными схемами дисперсионными свойствами. Она устойчива при положительных числах Куранта не превышающих единицу и точна при числах Куранта 0.5 и 1.

Тестовые расчеты, приведенные в^[1,2], показывают, что транспортные характеристики новой схемы при переносе начальных распределений, не содержащих коротковолновой части спектра, на порядки превосходят транспортные характеристики известных линейных схем. Однако при наличии значительных пространственных вариаций у переносимого профиля решение теряет монотонность и в схему “Кабаре”, как и в любые другие малодиссипативные схемы, необходимо включать алгоритмы нелинейной коррекции, монотонизирующие получаемые решения.

В данной работе предложен простой и эффективный механизм нелинейной коррекции схемы “Кабаре”, использующий её “архитектурные” особенности и не нарушающий свойства консервативности. Свойства нового алгоритма иллюстрируются на стандартной системе тестов уравнения переноса с постоянными коэффициентами и на решениях гиперболической системы уравнений двухфазной фильтрации несжимаемых и несмешивающихся жидкостей и на примере задачи о вытеснении с постоянным напором и задачи о гравитационной сегрегации в обезвоженном пласте.

2 Разностная схема “Кабаре”

В работах^[1,2] была представлена схема “Кабаре” с детальным изучением её свойств, но там не были приведены соображения, на основе которых она была получена. Существует несколько способов построения схемы “Кабаре”, но здесь мы остановимся только на одном из них.

Рассмотрим одномерное уравнение конвективного переноса с постоянным значением скорости:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad c > 0. \quad (1)$$

Покроем плоскость (x,t) регулярной расчетной сеткой с шагами h и τ соответственно и построим разностную аппроксимацию уравнения (1) на трёхточечном шаблоне, представленном на рис.1. Покажем, что искомый разностный оператор можно однозначно определить из требования, чтобы решение разностного уравнения в точности совпадало с решением дифференциального уравнения при числах Куранта ($r=c\tau/h$) равных 1 и 0.

Действительно, если записать разностное уравнение в виде:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_{i-1}^n + (1-r)L_1, \quad (2)$$

где L_1 — неизвестный пока оператор, то при $r=1$ разностное решение (перенос по характеристике) будет в точности соответствовать дифференциальному. При $r=0$ точным решением будет:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n. \quad (3)$$

Подставляя это решение в (2), однозначно находим

$$L_1 = \varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n.$$

Таким образом мы получили хорошо известную схему “уголок”, аппроксимирующую уравнение (1) на на трёхточечном шаблоне с первым порядком точности:

$$\frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{\tau} + c \frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{h} = 0. \quad (4)$$

Разностная схема “уголок” обладает свойством “транспортности” и для нее справедлив принцип максимума^[3]. Последнее означает, что в области ее устойчивости значения вычисляемой функции на новом временном слое ($n+1$) мажорируется ее значениями на текущем слое, что приводит к невозможности появления новых локальных максимумов и минимумов.

Свойство монотонности схемы “уголок” является чрезвычайно привлекательным, благодаря чему, несмотря на довольно значительную аппроксимационную диффузию, эта схема до сих пор широко используется в вычислительной практике.

Следует отметить, что свойство “транспортности” заложено в структуре шаблона, на котором эта схема определена.

Сделаем следующий шаг и аналогичным образом построим новую разностную схему, которая обладала бы свойством “транспортности” и была бы точной при числах Куранта 1, 1/2 и 0. Для этого расширим исходный шаблон аппроксимации на одну точку, находящуюся левее и ниже точки i (рис.1) и запишем исходную схему в виде:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_{i-1}^{n-1} + (1-2r)L_2, \quad (5)$$

где L_2 — неизвестный пока оператор.

В силу выбранной формы записи схема (5) является точной при $r=1/2$. При $r=1$ получаем:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_{i-1}^{n-1} - L_2. \quad (5')$$

Схема (5) будет точной, если выполнено соотношение:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_{i-1}^n - \alpha(\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^{n-1}), \quad (6)$$

где α — произвольный параметр. Приравняв правые части (5') и (6) находим

$$L_2 = (1 - \alpha)\varphi_{i-1}^{n-1} + \alpha\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n. \quad (7)$$

При $r=0$ из (5) следует:

$$\varphi_i^{n+1} - \alpha\varphi_i^n = -[\varphi_{i-1}^n - (2 - \alpha)\varphi_{i-1}^{n-1}]. \quad (8)$$

Учитывая, что в данном случае должны выполняться равенства

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n; \quad \varphi_{i-1}^n = \varphi_{i-1}^{n-1};$$

находим неизвестное значение параметра α :

$$\alpha = 1;$$

$$L_2 = \varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n.$$

Выделяя в явном виде производные по времени и пространству, однозначно приходим к трехслойной разностной схеме “Кабаре”:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{\tau} + \frac{\varphi_{i-1}^n - \varphi_{i-1}^{n-1}}{\tau} \right) + c \frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{h} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, по способу построения, схему “Кабаре” можно рассматривать как обобщение схемы “уголок” на множество трёхслойных схем. С этой точки зрения, ее естественно представить в виде:

$$\frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{\tau} + c \frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{h} + Q_{i-1} = 0, \quad (10)$$

где

$$Q_{i-1} = \frac{\varphi_{i-1}^n - \varphi_{i-1}^{n-1}}{\tau} + c \frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{h}. \quad (11)$$

Величину Q можно трактовать как добавку к схеме “уголок”, полностью компенсирующую её аппроксимационную диффузию и не ухудшающую её дисперсионные свойства.

3 Процедура нелинейной коррекции

Наличие компенсирующей добавки Q в (10) кардинально меняет свойства схемы “уголок”. Как уже отмечалось выше, схема становится бездиссипативной и приобретает второй порядок аппроксимации, что автоматически приводит к утрате весьма ценного качества монотонности.

С другой стороны новая схема сохраняет “транспортности”, благодаря чему она наследует изначально неплохие дисперсионные свойства схемы “уголок”^[1]. Таким образом, схема “Кабаре” хороша в гладких решениях, схема “уголок” — в областях со значительными пространственными. Объединение их достоинств возможно в рамках процедуры нелинейной коррекции.

Простейший вариант нелинейной коррекции может быть реализован следующим образом.

При заданных значениях на текущем (n) и предыдущем ($n-1$) слоях вычисляется предварительное значение функции на слое ($n+1$) по схеме “Кабаре”:

$$\tilde{\varphi}_i = (1-r)\varphi_i^n + r\varphi_{i-1}^n - \tau Q_{i-1}^n. \quad (10')$$

Для каждого узла i вычисляются предельные значения:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(max)} &= \max(\varphi_i^n, \varphi_{i-1}^n); \\ \varphi_i^{(min)} &= \min(\varphi_i^n, \varphi_{i-1}^n). \end{aligned} \quad (11)$$

Окончательное значение функции на новом временном слое принимается равным:

$$\varphi_i^{n+1} = \begin{cases} \varphi_i^{(max)}, & \text{if } (\tilde{\varphi}_i > \varphi_i^{(max)}); \\ \tilde{\varphi}_i; & \\ \varphi_i^{(min)}, & \text{if } (\tilde{\varphi}_i < \varphi_i^{(min)}). \end{cases} \quad (12)$$

Хотя описываемая процедура и обеспечивает монотонность получаемого решения, она приводит к возникновению неконтролируемого дисбаланса переносимой величины. Для обеспечения свойства консервативности введем в рассмотрение т.н. функцию “запаса” G и определим ее как:

$$G_i^1 = 0, \quad G_i^{n+1} = \tilde{\varphi}_i - \varphi_i^{n+1}. \quad (13)$$

Таким образом, на каждом временном слое величина дисбаланса будет запоминаться в виде функции “запаса”, которая может быть учтена на следующем временном шаге, если выражение (10') подвергнуть следующей модификации:

$$\tilde{\varphi}_i = (1-r)\varphi_i^n + r\varphi_{i-1}^n - \tau Q_{i-1}^n + G_i^n. \quad (10'')$$

Таким образом, временно извлекаемая и добавляемая в процессе регуляризации часть переносимой субстанции снова возвращается в “оборот” и суммарная консервативность процесса не нарушается.

Введение функции “запаса” позволяет рассматривать различные алгоритмы этими запасами. Простейший алгоритм управления можно записать в виде:

$$\tilde{\varphi}_i = (1-r)\varphi_i^n + r\varphi_{i-1}^n - \tau Q_{i-1}^n + \alpha G_i^n + (1-\alpha)G_{i-1}^n, \quad (14)$$

где α — некоторый параметр.

Можно показать, что в этом случае для задачи Коши на множестве сеточных функций с ограниченным носителем будет справедлив следующий закон сохранения:

$$S = \sum 0.5(\varphi_i^{n+1} + \varphi_{i-1}^n) + \sum 0.5G_i^{n+1} = const \quad (15)$$

4 Примеры численных расчетов

В качестве тестов для новой разностной схемы была использована стандартная система тестов по переносу с постоянной скоростью на равномерной сетке начальных профилей с большими вариациями: прямоугольника, треугольника и двух гауссианов^[1,2]. На рис.3-8 представлены результаты при разных числах Куранта, отстоящих на единицу от “окон точности” схемы “Кабаре”: $r=0, 1/2$ и 1 на 1000 и 10000 шагах по времени.

Как и ожидалось, без консерватизации схемы введением активного запаса все начальные профили, хотя и неплохо переносимые поначалу, достаточно быстро теряют свой характерный вид и затем вовсе деградируют. Введение функции запаса в оборот кардинально меняет ситуацию. Решение выходит на асимптотику после 1000 шагов и потом почти не изменяется — тестовые расчеты проводились до 100000 временных шагов.

При исследовании управления запасами в виде (14) при разных значениях параметра регуляризации α оказалось, что наилучшие результаты по переносу достигаются, когда число Куранта r и параметр регуляризации соизмеримы. То есть для получения наименее искаженного переносимого решения нужно использовать малые α при малых r и соответственно большие α при больших r , например в виде соотношения $\alpha=r$, как продемонстрировано в серии примеров на рис.3-7.

Вводя функцию запаса мы полагали, что она затухает со временем. Данное условие очевидно необходимо для переноса решения и дальнейший его выход на асимптотику без заметных искажений. Это предположение подтверждается численными расчетами, показывающими, что данное условие затухания выполняется в данном случае, см. рис.8.

5 Численные примеры моделирования

Рассмотрим некоторые задачи двухфазной фильтрации как приложение схемы “Кабаре” для решения нелинейных задач газо-гидродинамики. Физической моделью выберем широко известную модель Бакли-Лаверетта^[5] несмешивающихся и несжимаемых жидкостей. Течение фаз считается независимым и подчиняющимся линейному закону Дарси. Капиллярные силы пренебрежимо малы.

Система уравнений, описывающая одномерную двухфазную модель, представлена ниже:

$$\begin{cases} m \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} J_1 = Q_1(x, t) \\ m \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} J_2 = Q_2(x, t) \\ S + \Psi = 1 \\ J_i = -K_i \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_i g \right) \end{cases} \quad \begin{matrix} \{0 < x < L, 0 < t < T\} \\ \\ i = 1, 2 \end{matrix} \quad (16)$$

где i — номер фазы, J_i — поток, K_i — подвижность, ρ_i — плотность, S и Ψ — насыщенности фаз, m — пористость, g — ускорение свободного падения, P — давление, Q_1 и Q_2 — внешние источники.

Несмотря на простоту данная модель может удовлетворительно описывать достаточно широкий круг физических процессов, таких как как нефтехимическое заводнение и распространение нефтепродуктов в почве (гравитационная сегрегация)^[6,7].

В духе классической постановки Бакли-Лаверетта граничные и начальные условия выберем для задачи о заводнении в виде:

$$S(0, t) = S_{max} \quad S = \begin{cases} S_{max}, & x = 0 \\ S_{min}, & x > 0 \end{cases},$$

где S_{max} и S_{min} максимальная и минимальная насыщенность.

Краевые и граничные условия возьмем в следующем виде ^[8]. Как обычно принимают в задачах с нагнетательной скважиной, положим

$$Q_1(x, t) = Q_0 \cdot \delta(x), \quad Q_2(x, t) = 0$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

В задаче о гравитационном просачивании внешних источников нет и граничным условием выберем условие непротекания $J_1(0, t) = J_2(0, t) = 0$, $J_1(L, t) = J_2(L, t) = 0$, а начальное условие возьмем в виде:

$$S = \begin{cases} S_{max}, & x < L/2 \\ S_{min}, & x > L/2 \end{cases},$$

где L — толщина пласта до водоупора.

Аналитическое решение одномерных задач о заводнении и просачивании (гравитационной сегрегации) можно получить приводя систему уравнений (16) к характеристическому виду ^[6]:

$$m \frac{\partial}{\partial t} S + \frac{\partial}{\partial x} F(S) = 0 \quad F(S) = \begin{cases} \frac{J_0}{m} \frac{K_1(S)}{K_1(S) + K_2(S)} & \text{заводнение,} \\ \frac{\rho g}{m} \cdot \frac{K_1(S) \cdot K_2(S)}{K_1(S) + K_2(S)} & \text{гравитационная сегрегация.} \end{cases}$$

Автомодельное решение имеет вид:

$$\frac{x}{t} = \xi = - \frac{\partial F}{\partial S}(S).$$

К характерным особенностям, возникающим при решении подобных задач о заводнении и сегрегации, относится скачок насыщенности переносимой фазы, возникающий при определенной комбинации начальных данных и вида функции F , так называемой функции Бакли-Лаверетта.

Для численного интегрирования системы уравнений (16) будем использовать метод конечных разностей с “Кабаре” аппроксимацией члена с временной производной. В рассматриваемой области $[0 < x < L] \times [t > 0]$ введём разностную сетку по пространству и по времени:

$$\omega_{hx} = \{x_i, i = 1, 2, \dots, N_x; x_0 = 0, x_{N_x} = L, h_i = x_i - x_{i-1}\}$$

$$\omega_{\tau} = \{t_k, k = 1, 2, \dots, M_{\tau}; t_0 = 0, t_{M_{\tau}} = T, \tau_k = t_k - t_{k-1}\}.$$

Аппроксимируем уравнения фильтрации явной разностной схемой с расщепленной по пространству временной производной, считая для простоты расчетную сетку равномерной по пространству и по времени:

$$\begin{cases} m \frac{1}{2} \left(\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\tau} + \frac{S_{i-1}^n - S_{i-1}^{n-1}}{\tau} \right) + \frac{J_1(S_{i+1/2}^n) - J_1(S_{i-1/2}^n)}{h} = 0 \\ m \frac{1}{2} \left(\frac{\Psi_i^{n+1} - \Psi_i^n}{\tau} + \frac{\Psi_{i-1}^n - \Psi_{i-1}^{n-1}}{\tau} \right) + \frac{J_2(S_{i+1/2}^n) - J_2(S_{i-1/2}^n)}{h} = 0 \\ S_i^n + \Psi_i^n = 1, \end{cases} \quad (17)$$

где потоки будем аппроксимировать направленными разностями:

$$J_j(S_{i-1/2}^n) = \begin{cases} -K_j(S_{i-1}^n) \left(\frac{P_i^n - P_{i-1}^n}{h} - \rho_j g \right), & J_j > 0 \\ -K_j(S_i^n) \left(\frac{P_i^n - P_{i-1}^n}{h} - \rho_j g \right), & J_j < 0. \end{cases} \quad j = 1, 2 \quad (18)$$

При решении системы дифференциальных уравнений (16) обычно складывают два верхних уравнения на насыщенности S и Ψ , получая интегрируемое эллиптическое уравнение на давление P . Естественно поступить аналогично и при решении разностной системы (17)-(18). Для каждого узла i сложим два первых уравнения, сдвигая так, чтобы в получающемся разностном шаблоне исчезла точка на новом временном слое ($n+1$):

$$\begin{cases} m \frac{1}{2} \left(\frac{\Psi_{i+1}^n - \Psi_{i+1}^{n-1}}{\tau} + \frac{S_{i-1}^n - S_{i-1}^{n-1}}{\tau} \right) + \frac{J_1(S_{i+1/2}^n) - J_1(S_{i-1/2}^n)}{h} + \frac{J_2(S_{i+3/2}^n) - J_2(S_{i+1/2}^n)}{h} = 0 \\ \Psi_i^n = 1 - S_i^n \\ t_k: k = 2, 3, \dots M-1 \\ x_i: i = 2, 3, \dots N-1 \end{cases}$$

Приводя подобные члены, можно получить систему алгебраических уравнений, являющуюся разностным аналогом эллиптического уравнения для давления. В случае вытеснения жидкой фазой 1 газообразной фазы 2 ($\rho_2=0$) она имеет следующий вид:

$$\begin{cases} A \cdot P_i + B \cdot P_{i+1} + C \cdot P_{i+2} = D \\ A = K_1(S_i) + K_2(S_{i+1}) \\ B = -K_1(S_i) - K_1(S_{i+1}) - K_2(S_{i+1}) - K_2(S_{i+2}) \\ C = K_1(S_{i+1}) + K_2(S_{i+2}) \\ D = \rho \cdot g \cdot h \cdot (K_1(S_{i+1}) - K_1(S_i)) + m \frac{h^2}{2} \left(\frac{\Psi_{i+1}^n - \Psi_{i+1}^{n-1}}{\tau} + \frac{S_{i-1}^n - S_{i-1}^{n-1}}{\tau} \right) \\ \Psi_i^n = 1 - S_i^n \\ t_k: k = 2, 3, \dots M-1 \\ x_i: i = 2, 3, \dots N-1 \end{cases} \quad (19)$$

В качестве граничных можно положить граничные условия первого рода на левом конце $x=0$ и второго на правом $x=L$ для задачи о сегрегации:

$$P_1^n = P_0, P_N^n - P_{N-1}^n = \rho \cdot g \cdot h \cdot K_1(S_{N-1}), \quad (20)$$

и в задаче о заводнении второго рода на левом конце и первого на правом:

$$P_N^n = 0, P_2^n - P_1^n = -h \cdot Q_0. \quad (20')$$

Система алгебраических уравнений (19)-(20), (20') решается прогонкой, после чего полученное решение подставляется в первое уравнение (17) и находится значение насыщенности на новом временном слое. Первый по времени шаг делается по монотонной схеме "уголок". Это позволяет получать достаточно гладкое решение для последующего включения схемы "Кабаре" начиная со второго шага.

Нелинейная консервативная коррекция может быть реализована аналогично (11), (12) следующим образом. Выбирается минимум и максимум из набора $\{S_i^{n-1}, S_{i-1}^{n-1}, \tilde{S}_i^n\}$, где S_i^{n-1}, S_{i-1}^{n-1} значения насыщенности из области зависимости решения, а \tilde{S}_i^n значение на новом слое, полученное с помощью схемы "уголок". Значение на новом временном слое $(n+1)$, полученное с помощью "Кабаре", подправляется если оно оказывалось выходящим за область $\{min, max\}$. Для сохранения консервативности вводится функция запаса G в соответствии с правилом (13), (10').

Для перехода от полученных реально переносимых значений разностным уравнением переноса (17) насыщенности к физическим "виртуальным" значениям переносимой субстанции — насыщенности необходимо перейти к такой сеточной функции Φ_i^n для которой справедлив разностный аналог закона сохранения массы

$$\sum_w \Phi_{i+1/2}^n = const.$$

В случае схемы "уголок" такой закон сохранения выполняется для:

$$\Phi_{i+1/2}^n = 0.5(S_i^n + S_{i+1}^n),$$

в случае "Кабаре" такой сеточной функцией является (15)

$$\Phi_{i+1/2}^n = \begin{cases} 0.5(S_i^n + S_{i+1}^n) + 0.5G_{i+1}^{n+1}, & J_j^n(S_{i+1/2}^n) \geq 0 \\ 0.5(S_i^{n+1} + S_{i+1}^n) + 0.5G_i^{n+1}, & J_j^n(S_{i+1/2}^n) < 0 \end{cases} \quad j = 1, 2$$

В качестве иллюстрации приведем примеры тестовых численных расчетов двух типичных задач вытеснения и гравитационной сегрегации. Модельные зависимости подвижностей фаз от насыщенности были подобраны так, чтобы получить поршневой характер фильтрации, чтобы получить более резкий и наглядный фронт насыщенности.

Для задачи поршневого заводнения были взяты предельные значения насыщенности $S_{min} = 0.2$ и $S_{max} = 0.9$ и использованы следующие подвижности с использованием зависимостей Чарного-Сень-Джунь-Сяна для вытесняющей фазы 1:

$$K_1 = \frac{K}{\mu_1} \cdot \begin{cases} \left(\frac{S-0.2}{0.8}\right)^{3.5}, & 0.2 < S \leq 1 \\ 0, & 0 \leq S \leq 0.2 \end{cases} \quad K_2 = \frac{K}{\mu_1} - K_1 \quad (19)$$

$$K = 1 \cdot e^{-12} \text{ м}^2, \mu_1 = 1.2 \cdot e^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$$

Автомодельное решение здесь имеет вид

$$\frac{x}{t} = \xi = -\frac{\partial F}{\partial S}(S) = \frac{35}{8} \cdot \frac{Q_0}{m} \cdot \left(\frac{S-0.2}{0.8} \right)^{5/2}.$$

Отсюда немедленно следует, что аналитическое решение имеет вид поршневого вытеснения со скоростью фильтрации на скачке

$$W = \frac{F(S_{max})}{S_{max} - S_{min}}.$$

Тестовые расчеты показали, что описываемая методика заметно меньше размывает скачок насыщенности, чем схема “уголок”, см. рис.9.

В качестве модельного примера решения задачи гравитационной сегрегации, приводящей к перевороту фронта насыщенности, приведем решение при следующих зависимостях фазовых подвижностей от насыщенности:

$$\begin{aligned} K_1 &= S, & K_2 &= 1 - S \\ S_{min} &= 0, & S_{max} &= 1. \end{aligned}$$

Автомоделное решение в этом случае имеет вид

$$\frac{x}{t} = \xi = -\frac{\partial F}{\partial S}(S) = \frac{\rho \cdot g}{m}(1 - 2S).$$

Таким образом, реализуется поршневой режим, при котором образующиеся два скачка насыщенности распространяются в противоположных направлениях со скоростью фильтрации:

$$W(S) = \begin{cases} -\frac{F(S_{max})}{S_{max} - \tilde{S}}, & S_{max} > S > \tilde{S} \\ \frac{F(\tilde{S})}{\tilde{S} - S_{min}}, & S_{min} < S < \tilde{S} \end{cases} \quad S_{max} = 1, \tilde{S} = 0.5, S_{min} = 0.$$

На рис.10 демонстрируется вариант тестового расчета, отвечающий моменту, когда уже вся более тяжелая фаза легла на дно водоупора $x=L$. Как видно из сравнения с “уголком” и аналитическим решением, методика расчета по схеме “Кабаре” способна достаточно точно описывать переворот фронта насыщенности.

6 Заключение

В настоящей работе предложен простой и эффективный алгоритм нелинейной коррекции для новой явной разностной схемы второго порядка точности “Кабаре” с пространственно расщепленной временной производной. Отличительными особенностями схемы “Кабаре” является то, что она бездиссипативна, точна при трех числах Куранта: 0, 1/2 и 1, обладает хорошими дисперсионными свойствами и допускает однопараметрическое семейство квадратичных законов сохранения для уравнения переноса с постоянными коэффициентами.

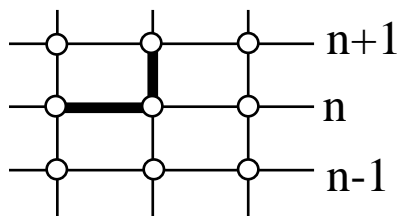
В работе показано, что использование особым образом введенной функции запаса позволяет консерватизировать алгоритм, и представлен простейший механизм управления запасами. Приведенные в работе примеры численных расчетов для стандартной системы тестов демонстрируют, что консервативный алгоритм позволяет переносить профили с большими пространственными вариациями на порядки дальше, чем классические линейные схемы, практически без искажений.

Данная методика использована для решения гиперболической системы уравнений фильтрации, описывающих двухфазную модель Бакли-Лаверетта. Сравнение результатов численных расчетов двух характерных задач фильтрации: одномерного вытеснения (нефтехимического заводнения) и гравитационной сегрегации с аналитическим решением и решением, полученным с помощью классических направленных разностей показало, что предлагаемый метод позволяет хорошо описывать такие характерные особенности вытеснения, как скачок насыщенности и переверот фронта.

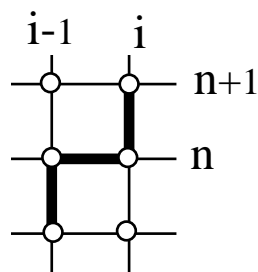
7 Литература

1. *В.М. Головизнин, А.А. Самарский.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной. //Журнал Матем. моделирование, т.10 (1998), №1, с. 86-100.
2. *В.М. Головизнин, А.А. Самарский.* Некоторые свойства разностной схемы “Кабаре”. //Журнал Матем. моделирование, т. 10 (1998), №1, с. 101-116.
3. *П. Роч.* Вычислительная гидродинамика. —М.: Мир, 1980, 616 с.
4. *А.А. Самарский.* Теория разностных схем. —М.: Наука, 1983, с. 31-42.
5. *S.E. Buckley and M.C. Laverett.* Mechanism of fluid displacement in sands. //Trans AIME, 146 (1942), pp. 107-116.
6. *Г.Е. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик.* Движение жидкости и газа в пористых пластах. —М.:Недра, 1984.
7. *А.И. Гриценко, Г.С. Аكوпова, В.М. Максимов.* Экология, Нефть и Газ. —М.: Наука 1997.
8. *А.Н. Коновалов.* Задачи фильтрации несжимаемой жидкости. —Новосибирск: Наука, 1987.

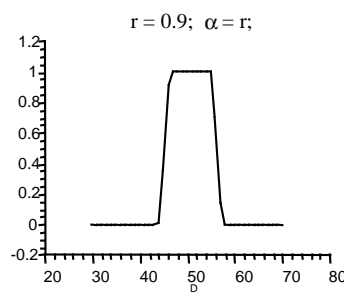
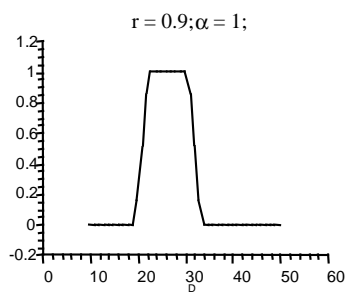
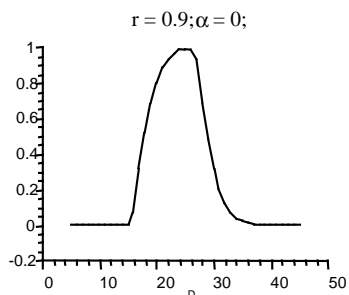
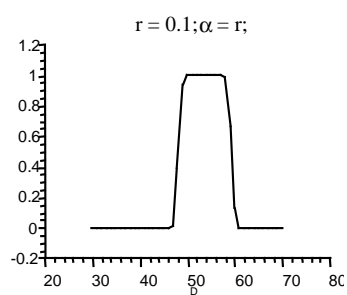
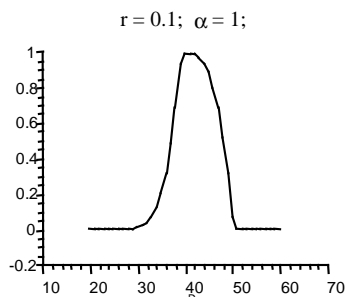
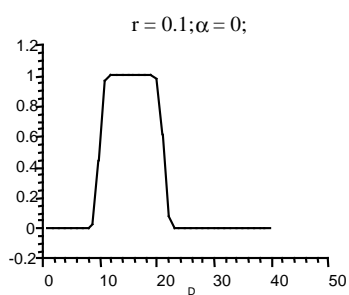
8 Приложение



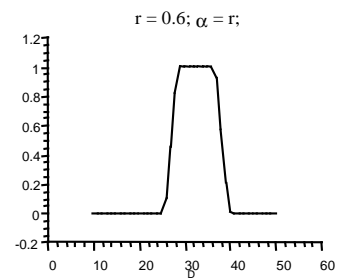
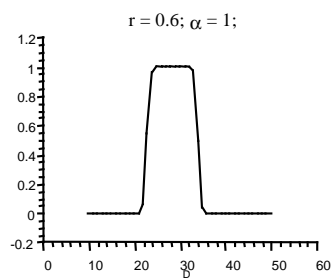
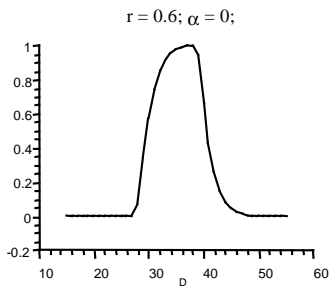
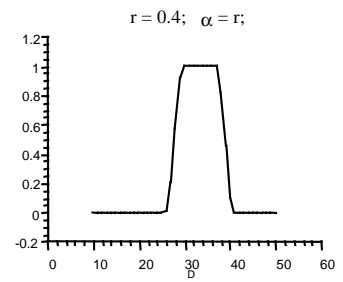
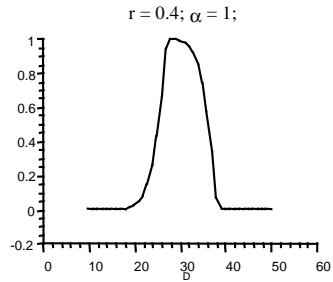
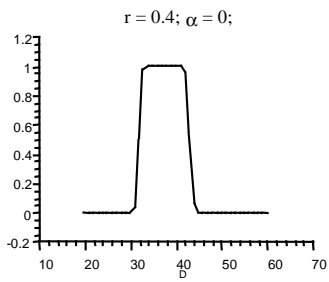
Puc.1



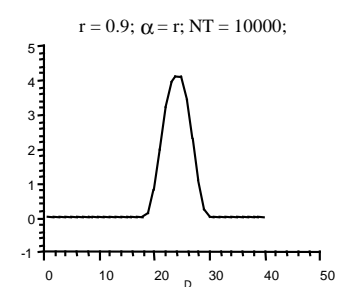
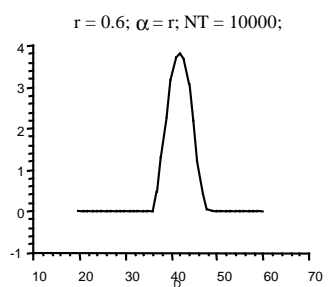
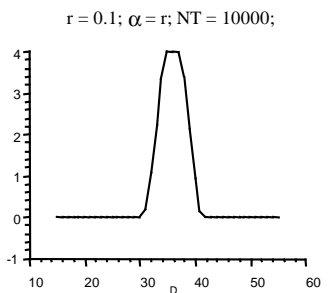
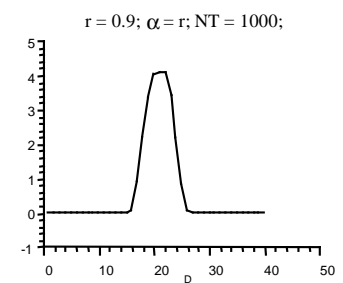
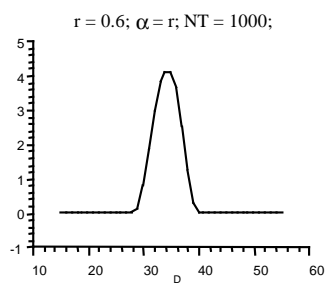
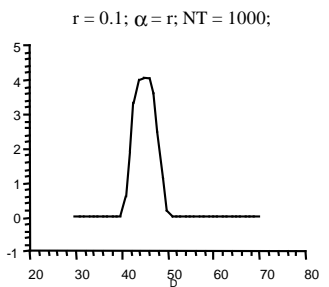
Puc.2



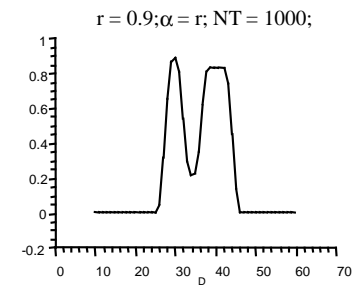
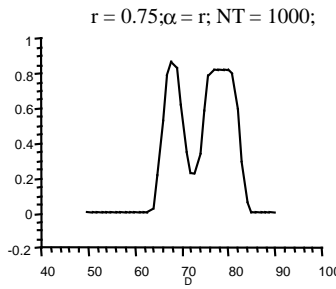
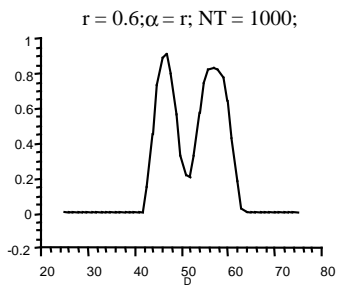
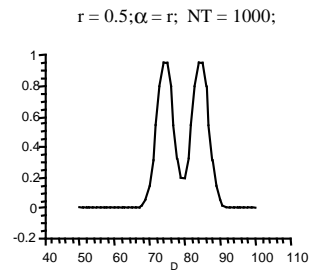
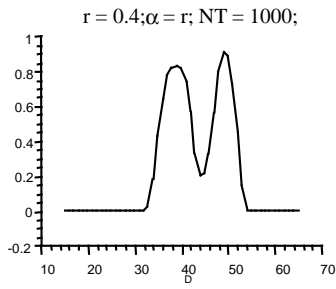
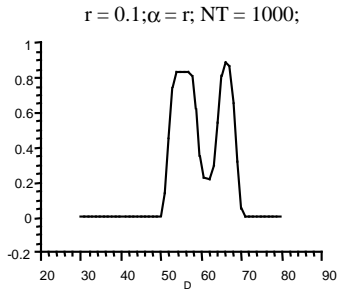
Puc.3



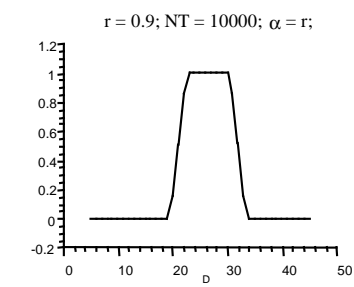
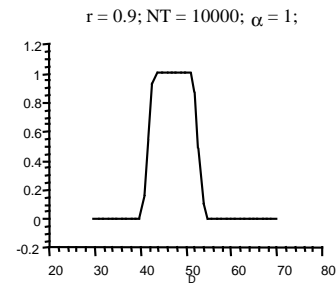
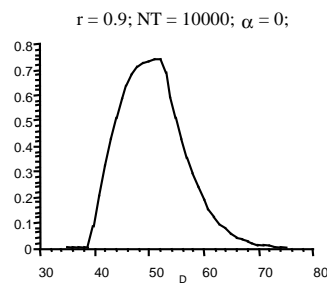
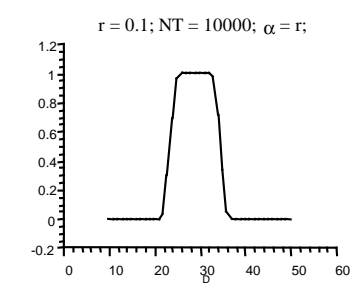
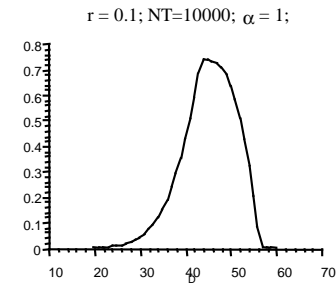
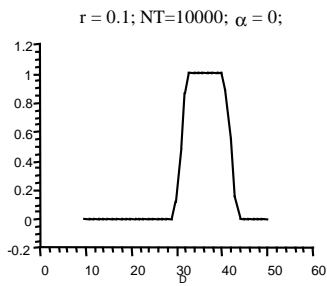
Puc.4



Puc.5



Puc.6



Puc.7

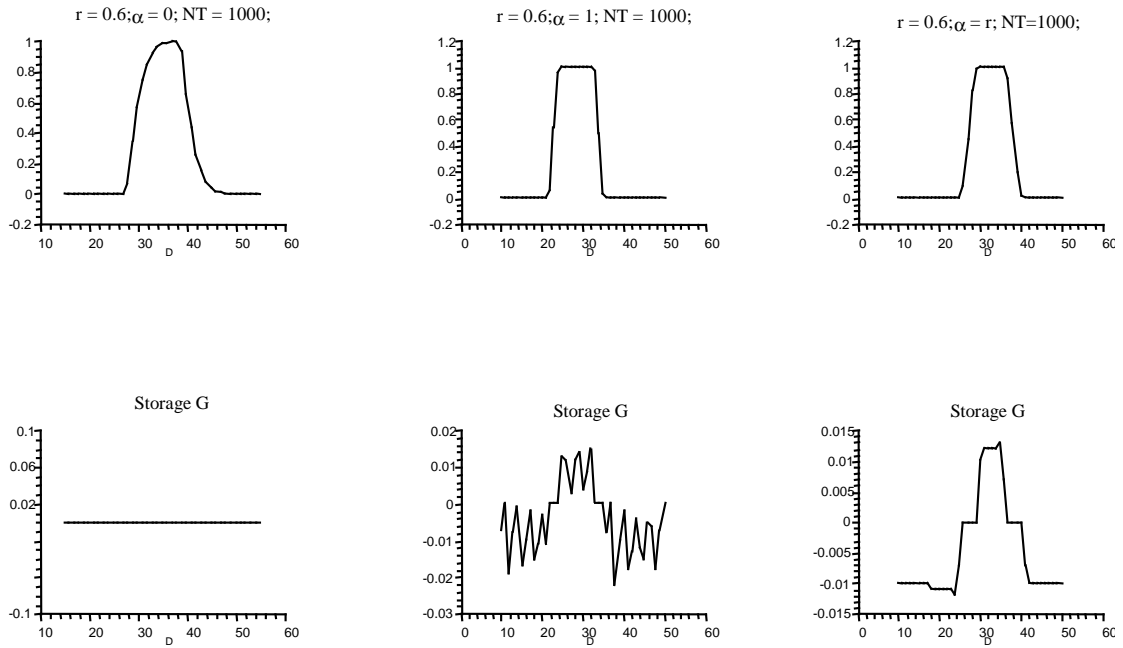


Рис.8

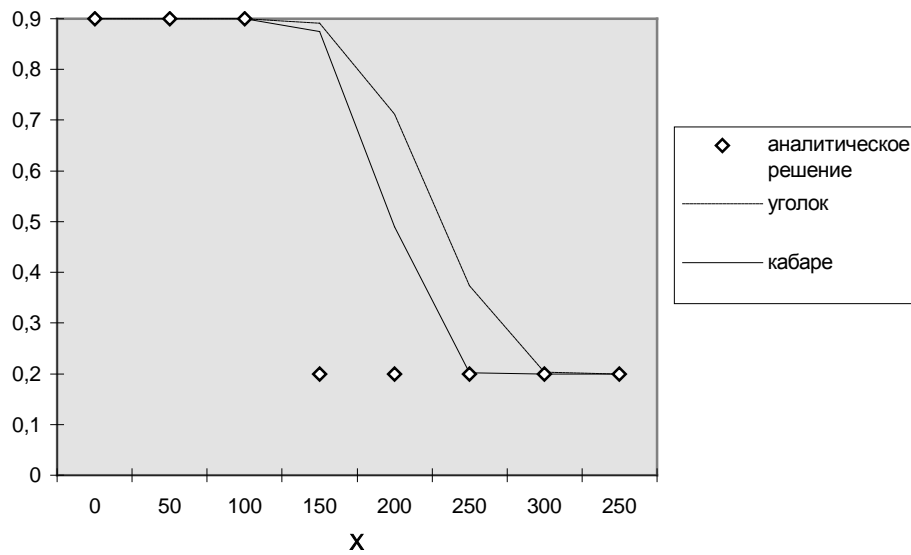


Рис.9.Поршиновая фильтрация при постоянном напоре с использованием соотношения Чарного-Чень-Чжунь-Сяня для подвижности нефти

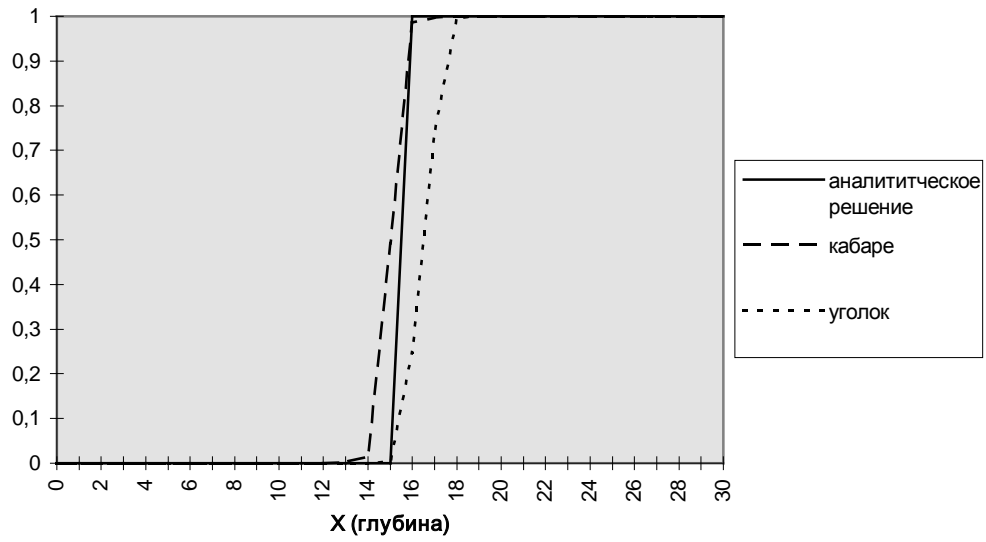


Рис.10. Модельное поршневое просачивание в сухой грунт в поле тяжести с подвижностями фаз, взятыми в виде $K_1=S$ и $K_2=1-S$