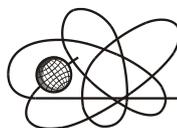




*Российская Академия Наук*

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ  
БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ  
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**



**ИБРАЭ**

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**NUCLEAR SAFETY  
INSTITUTE**

Препринт ИБРАЭ № ИБРАЭ-2002-15

Preprint IBRAE-2002-15

**В. М. Головизнин, С. А. Карабасов, И. М. Кобринский**

**БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ С  
РАЗДЕЛЕННЫМИ КОНСЕРВАТИВНЫМИ И  
ПОТОКОВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ**

Москва  
2002

Moscow  
2002

Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М. БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ С РАЗДЕЛЕННЫМИ КОНСЕРВАТИВНЫМИ И ПОТОКОВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ. Препринт № ИВРАЭ-2002-15. Москва: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2002. 25 с. — Библиогр.: 15 назв.

#### Аннотация

Предложен новый подход к построению сеточных алгоритмов высокой разрешающей способности для уравнения конвективного переноса с учетом диффузии, основанный на введении двух различных типов вычисляемых переменных – «консервативных» и «потокосых», отвечающих за выполнение закона сохранения и корректный учет характеристической области влияния соответственно. Процесс построения новых алгоритмов состоит из двух этапов. На первом – строятся линейные однородные консервативные разностные схемы с улучшенными диссипативными и дисперсионными характеристиками на минимальном вычислительном шаблоне. На втором – используется консервативный алгоритм минимальной коррекции вычисленных величин для выполнения достаточных условий соблюдения принципа максимума.

Построены конкретные монотонные алгоритмы, имеющие второй порядок точности на гладких решениях и устойчивые при числах Куранта, меньших единицы. Показано, что новые алгоритмы имеют заметные преимущества над известными TVD-схемами, базирующимися на ограничении потоков.

©ИВРАЭ РАН, 2002

Goloviznin V.M., Karabasov S.A., Kobrinsky I.M.. BALANCE-CHARACTERISTIC SCHEMES WITH SEPARATED CONSERVATIVE AND FLUX VARIABLES. (In Russian). Preprint IBRAE-2002-15. Moscow: Nuclear Safety Institute RAS, July 2002. 25 p. — Refs.: 15 items.

#### Abstract

The new approach is suggested for the development of difference methods with high resolution for the equation of convection with regard to diffusion. It is based on the introduction of two different types of variables – “conservative” and “flux”, corresponding to the realization of the conservation law and correct calculation of characteristic region of influence respectively. The process of creation of new algorithms consists of two stages. At the first stage, linear uniform conservative difference schemes with improved dissipative and dispersion characteristics are constructed on the minimal computing stencil. At the second stage, conservative algorithm of minimal correction of the calculated values is used for the realization of the sufficient conditions of the principle of maximum.

Explicit monotone algorithms were developed, that are stable in the case of the Courant number is less than unity and have the second order of accuracy on the smooth solutions. It is shown that new algorithms have noticeable advantages in comparison with the well-known TVD-schemes, based on the limitation of fluxes.

©Nuclear Safety Institute, 2002

# Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными

*В.М. Головизнин, С.А. Карабасов, И.М. Кобринский*

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

113191, Москва, ул. Б. Тульская, 52

тел: (095) 958-14-12, факс: (095) 2302029, эл. почта: [gol@ibrae.ac.ru](mailto:gol@ibrae.ac.ru)

## Содержание

Введение .....	3
1 Схема «КАБАРЕ».....	4
2 Двухслойное представление схемы «КАБАРЕ».....	5
3 Нелинейная коррекция потоковых переменных .....	6
4 Нелинейная коррекция консервативных переменных .....	7
5 Четырехэтапный алгоритм для схемы «КАБАРЕ» с нелинейной коррекцией консервативных и потоковых переменных. ....	8
6 Примеры тестовых расчетов .....	9
7 Балансно - характеристическая интерпретация схемы «КАБАРЕ».....	11
8 Балансно – характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными. 12	
9 Диссипативные и дисперсионные свойства новых схем .....	14
10 Отбраковка паразитного корня и стартовая процедура .....	17
11 Сравнительные расчеты.....	17
12 Переменное поле скоростей .....	19
13 Нелинейная коррекция консервативных и потоковых переменных.....	21
14 Уравнение конвекции-диффузии.....	23
Комментарии.....	24
Литература.....	25

## Введение

Многие типичные проблемы вычислительной гидродинамики проявляются уже на простейшем уравнении конвективного переноса с постоянной скоростью:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 ; c = const > 0 ; \quad (1)$$

Можно сказать, что в настоящее время тестирование новых вычислительных методик на уравнении (1) является обязательным элементом всех публикаций. При этом различные алгоритмы, существенно отличающиеся друг от друга на уравнениях газовой динамики, при их сведении к задаче (1), зачастую оказываются одинаковыми. Таким образом, число базовых аппроксимаций уравнения (1) оказывается много меньше предлагаемых вариантов аппроксимаций для более сложных уравнений.

Классические линейные разностные схемы [1] для уравнения (1) приводят к амплитудным и фазовым ошибкам, не укладывающимся в современные требования к точности расчетов для решений с сильными разрывами. Желаемое увеличение точности в последние десятилетия достигается за счет нелинейной коррекции потоков - направления, начало которому положила работа [2] и приведшего к созданию MUSCL (Monotone Upwind Scheme Conservation Low) [3], TVD (Total Variation Diminishing) [4], TVB (Total Variation Bounded)[5] и ENO (Essential Non-Oscillation ) [6] схем. Следует отметить, что заметный вклад в развитие этого направления внесли также работы российских математиков [7,8].

Настоящая работа посвящена новому подходу к построению монотонных алгоритмов высокой разрешающей способности, имеющих определенные преимущества перед перечисленными ранее. Новый подход объединяет позитивные черты, присущие консервативным и характеристическим разностным

схемам и позволяет строить явные однородные монотонные алгоритмы на неизменном минимально возможном вычислительном шаблоне. Новые алгоритмы имеют второй порядок аппроксимации на гладких решениях и допускают наглядную физическую интерпретацию, облегчающую их распространение на более сложные и содержательные случаи.

## 1 Схема «КАБАРЕ»

Для уравнения (1) рассмотрим начально – краевую задачу в области  $G: \{x \in [0,1], t \in [t_0, T]\}$ . Будем считать, что

$$\varphi(x, t_0) = f_1(x), \quad \varphi(0, t) = f_2(t) \quad (1.1)$$

Покроем область  $G$  равномерной расчетной сеткой с шагами  $h = const_1$ ,  $\tau = const_2$  по пространству и времени соответственно и узлам этой сетки (рис. 1) поставим в соответствие индексы  $(i, n)$ .

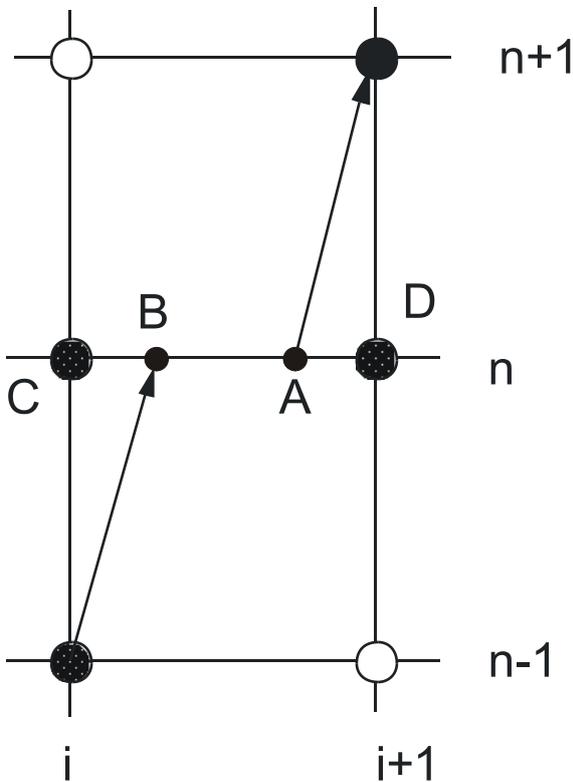


Рис. 1

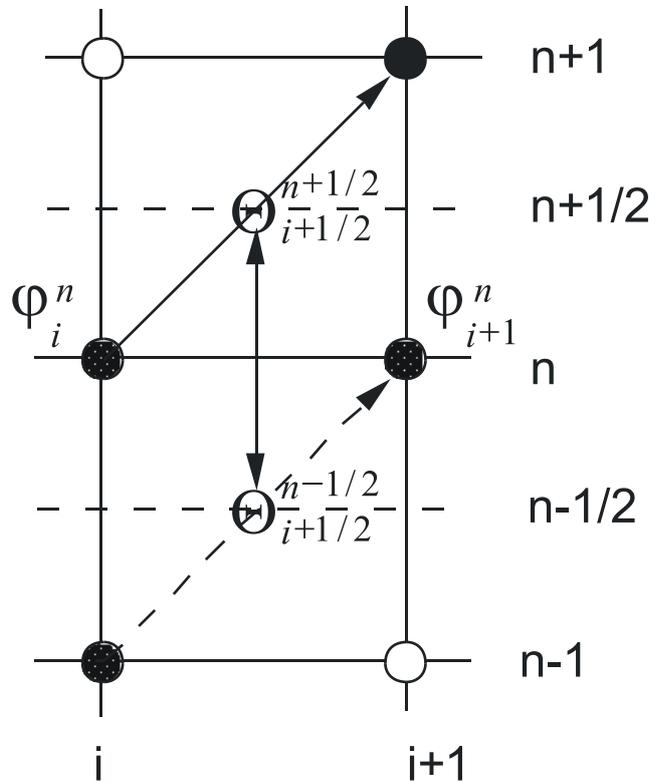


Рис. 2

В соответствии с уравнением (1) значение величины  $\varphi_{i+1}^{n+1}$  в узле расчетной сетки с номером  $(i+1, n+1)$  переносится по характеристике из точки А, лежащей на предыдущем временном слое (рис. 1):  $\varphi_{i+1}^{n+1} = \varphi(A)$ . Для определения значения  $\varphi(A)$  воспользуемся квадратичной интерполяцией по известным значениям  $\varphi$  в точках В, С и D, первая из которых соответствует пересечению с текущим временным слоем характеристики, выпущенной из узла с номером  $(i, n-1)$ , две остальных – соответственно узлам с номерами  $(i, n)$  и  $(i+1, n)$ . Если ввести безразмерную координату  $\xi: \{\xi(D) = 0, \xi(C) = 1, \xi(A) = r, \xi(B) = 1-r\}$ , где  $r = c \cdot \tau / h$  - число Куранта, то соответствующий полином Лагранжа имеет вид:

$$P(\xi) = p_D(\xi) \cdot \varphi_{i+1}^n + p_C(\xi) \cdot \varphi_i^n + p_B(\xi) \cdot \varphi_i^{n-1} \quad (1.2)$$

где

$$p_D(\xi) = -\frac{(\xi-1) \cdot (\xi-1+r)}{(r-1)}, \quad p_C(\xi) = \frac{\xi \cdot (\xi-1+r)}{r}, \quad p_B(\xi) = \frac{\xi \cdot (\xi-1)}{r \cdot (r-1)} \quad (1.3)$$

Отсюда находим

$$\varphi_{i+1}^{n+1} = \varphi(A) = P(r) = \varphi_i^{n-1} + (1-2r) \cdot (\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n) \quad (1.4)$$

что эквивалентно трехслойной разностной схеме с расщепленной по пространству временной производной, получившей название схемы «КАБАРЕ» [9-10]

$$\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_{i+1}^n}{\tau} + \frac{\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1}}{\tau} \right) + c \cdot \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} = 0 \quad (1.5)$$

Ввиду трехслойности этой схемы, для начала регулярного счета необходима стартовая процедура, в качестве которой было предложено использовать хорошо известную двухслойную позитивную схему первого порядка точности «уголок» (simple upwind):

$$\frac{\varphi_{i+1}^1 - \varphi_{i+1}^0}{\tau} + c \cdot \frac{\varphi_{i+1}^0 - \varphi_i^0}{h} = 0, \quad \varphi_k^0 = f_1((k-1) \cdot h) \quad (1.6)$$

В работах [9-10] было показано, что схема «КАБАРЕ» имеет ряд свойств, заметно отличающих ее от широко известных схем, а именно:

- схема явная, линейная и однородная;
- имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях;
- устойчива при числах Куранта, меньших единицы;
- консервативна (дивергентна);
- сохраняет на решениях однопараметрическое семейство положительно определенных квадратичных форм (полностью консервативна);
- обладает свойством «транспортности» [11];
- является точной при двух числах Куранта ( $CFL = 0.5$ ;  $CFL = 1$ );
- бездиссипативна;
- имеет улучшенные дисперсионные свойства.

## 2 Двухслойное представление схемы «КАБАРЕ»

Одним из недостатков схемы (1.5) является ее трехслойность, что в совокупности с зависимостью вычислительного шаблона от направления скорости переноса сильно затрудняет ее обобщение на случай переменных скоростей. Непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что трехслойная схема (1.5) эквивалентна двухслойной схеме (рис. 2):

$$\frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + c \cdot \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} = 0 \quad (2.1)$$

$$\varphi_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot \Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \varphi_i^n \quad (2.2)$$

Величины  $\Theta_{i+1/2}^{n+1/2}$ , относящиеся к серединам расчетных ячеек, можно рассматривать, наряду с величинами  $\Phi_i^n$ , как самостоятельные физические переменные. При этом уравнение (2.1) имеет вид разностного закона сохранения, а (2.2) – условия линейной экстраполяции (рис. 2).

При противоположном направлении скорости переноса ( $c < 0$ ) направление экстраполяции изменится и вместо (2.2) будет выполняться соотношение:

$$\Phi_i^{n+1} = 2 \cdot \Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Phi_{i+1}^n \quad (2.3)$$

Стартовую процедуру (1.6) можно представить в эквивалентном виде:

$$\frac{\Theta_{i+1/2}^{1/2} - \bar{\Theta}_{i+1/2}^0}{\tau/2} + c \cdot \frac{\Phi_{i+1}^0 - \Phi_i^0}{h} = 0 \quad (2.4)$$

$$\Phi_{i+1}^1 = 2 \cdot \Theta_{i+1/2}^{1/2} - \Phi_i^0 \quad (2.5)$$

где

$$\bar{\Theta}_{i+1/2}^0 = 0.5 \cdot (\Phi_{i+1}^0 + \Phi_i^0) \quad (2.6)$$

Здесь первичными являются величины  $\Phi_i^n$ , которые в дальнейшем будем называть «потокowymi» переменными. «Первичными» будем считать переменные, которые необходимо задавать в начальный момент времени.

Вместо (2.4), на равных основаниях, можно использовать стартовую процедуру в форме:

$$\frac{\Theta_{i+1/2}^{1/2} - \Theta_{i+1/2}^0}{\tau/2} + c \cdot \frac{\bar{\Phi}_{i+1}^0 - \bar{\Phi}_i^0}{h} = 0, \quad (2.7)$$

$$\Phi_{i+1}^1 = 2 \cdot \Theta_{i+1/2}^{1/2} - \bar{\Phi}_i^0$$

где

$$\bar{\Phi}_i^0 = 0.5 \cdot (\Theta_{i+1/2}^0 + \Theta_{i-1/2}^0) \quad (2.8)$$

$$\Theta_{i+1/2}^0 = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_1(x) \cdot dx$$

В этом случае «первичными» оказываются величины  $\Theta_{i+1/2}^{n+1/2}$ , которые в дальнейшем будем называть «консервативными» переменными. Хотя консервативные переменные относятся к полуцелым временным слоям, их начальные значения задаются на «целом», нулевом временном слое.

Уравнение баланса (2.1) естественным образом обобщается на случай неравномерных пространственно – временных расчетных сеток:

$$\frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau_n} + c \cdot \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{i+1/2}} = 0, \quad \tau_n = 0.5 \cdot (t_{n+1} - t_{n-1}), \quad x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i \quad (2.9)$$

Экстраполяционные процедуры (2.2)-(2.3) при этом не изменяются.

### 3 Нелинейная коррекция потокowych переменных

Схема (1.5) имеет второй порядок точности и согласно теореме Годунова не является монотонной. Это, в частности, означает, что для потоковых переменных не всегда выполняется условие:

$$\Phi_{i+1}^{n+1} \in [\Phi_{i+1}^n, \Phi_i^n] \quad (3.1)$$

Если в эквивалентной (1.5) системе (2.1)-(2.2) вместо второго уравнения взять  $\Phi_{i+1}^{n+1} = \Theta_{i+1/2}^{n+1/2}$ , то получится монотонная схема «уголок» (Simple Upwind). Составим линейную комбинацию схемы «КАБАРЕ» и «уголок»

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + c \cdot \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h} &= 0; \\ \Phi_{i+1}^{n+1} &= \omega_{i+1}^{n+1/2} \cdot 2 \cdot (\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Phi_i^n) + (1 - \omega_{i+1}^{n+1/2}) \cdot \Theta_{i+1/2}^{n+1/2}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\omega_{i+1}^{n+1/2}$  - неотрицательные весовые параметры, изменяя значения которых в пределах от нуля до единицы, мы получаем возможность управлять диссипативными свойствами вычислительного алгоритма. Можно построить в некотором смысле наилучший монотонный алгоритм исходя из требования наибольшей близости параметров  $\omega_{i+1}^{n+1/2}$  к единице, что, в данном случае, отвечает принципу наименьшей диссипации. Это приводит к следующему относительно простому и весьма эффективному алгоритму нелинейной коррекции:

$$\Phi_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \tilde{\Phi}_{i+1}^{n+1} & \text{if } (-\Phi_{i+1/2}^n < \tilde{\Phi}_{i+1}^{n+1} < +\Phi_{i+1/2}^n) \\ +\Phi_{i+1/2}^n & \text{if } (\tilde{\Phi}_{i+1}^{n+1} \geq +\Phi_{i+1/2}^n) \\ -\Phi_{i+1/2}^n & \text{if } (\tilde{\Phi}_{i+1}^{n+1} \leq -\Phi_{i+1/2}^n) \end{cases} \quad (3.3)$$

где

$$-\Phi_{i+1/2}^n = \min(\Phi_{i+1}^n, \Phi_i^n); \quad +\Phi_{i+1/2}^n = \max(\Phi_{i+1}^n, \Phi_i^n); \quad \tilde{\Phi}_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot (\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Phi_i^n) \quad (3.4)$$

Следует обратить внимание на то, что конкретные значения оптимальных параметров  $\omega_{i+1}^{n+1/2}$  при этом не используются. Суммарный алгоритм будет иметь первый порядок аппроксимации в тех ячейках, где осуществляется нелинейная коррекция, и второй – во всех остальных. Коррекция потоковых переменных не приводит к нарушению консервативности схемы.

## 4 Нелинейная коррекция консервативных переменных

Если распространить принцип максимума также и на консервативные переменные, то соответствующие ограничения следует наложить и на новые значения консервативных переменных:

$$-\Phi_{i+1/2}^n \leq \Theta_{i+1/2}^{n+1/2} \leq +\Phi_{i+1/2}^n \quad (4.1)$$

Результат, следующий из уравнения баланса (2.1), может этому условию не удовлетворять, поэтому будем его считать предварительным и обозначать как  $\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2}$ . Новые значения консервативных переменных, минимальным образом подправленные с учетом ограничений (4.1) и требования консервативности суммарного алгоритма находятся из обобщенного уравнения баланса:

$$\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} = \tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} - (W_{i+1}^{n+1/2} - W_i^{n+1/2}) \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} &= \Theta_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{c \cdot \tau}{h} \cdot (\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n) \\ W_{i+1}^{n+1/2} &= \begin{cases} 0 & \text{if } (-\varphi_{i+1/2}^n \leq \tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} \leq +\varphi_{i+1/2}^n) \\ (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} - +\varphi_{i+1/2}^n) & \text{if } (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} > +\varphi_{i+1/2}^n) \\ (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} - -\varphi_{i+1/2}^n) & \text{if } (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} < -\varphi_{i+1/2}^n) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Величины  $W_{i+1}^{n+1/2}$  будем называть возвратно-транзитными потоками. При  $c > 0$  их можно представить в следующем, эквивалентном (4.3) виде:

$$W_{i+1}^{n+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{if } (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} \in [+\varphi_{i+1/2}^n, -\varphi_{i+1/2}^n]) \\ (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} - \varphi_i^n) & \text{if } (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} \notin [+\varphi_{i+1/2}^n, -\varphi_{i+1/2}^n]) \end{cases} \quad (4.4)$$

При  $c < 0$  - можно записать как:

$$W_{i+1}^{n+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{if } (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} \in [+\varphi_{i+1/2}^n, -\varphi_{i+1/2}^n]) \\ (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} - \varphi_{i+1}^n) & \text{if } (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} \notin [+\varphi_{i+1/2}^n, -\varphi_{i+1/2}^n]) \end{cases} \quad (4.5)$$

Таким образом, если новые значения консервативных переменных выходят за пределы диапазона, отвечающего принципу максимума в форме (4.1), то они подправляются за счет потоков, выходящих из данной ячейки.

Погрешность, вносимая консервативной монотонизацией, имеет дивергентный характер, что обеспечивает первый порядок суммарной аппроксимации [12].

## 5 Четырехэтапный алгоритм для схемы «КАБАРЕ» с нелинейной коррекцией консервативных и потоковых переменных.

Итоговый алгоритм, реализующий двухслойную схему «КАБАРЕ» с нелинейной монотонизацией консервативных и потоковых переменных, при  $c > 0$ , удобно представить в виде следующих четырех этапов:

Первый этап – стартовая процедура. Задание начальных данных для консервативных переменных на нулевом временном слое и их согласование с начальными значениями потоковых переменных:

$$\Theta_{i+1/2}^0 = \frac{1}{h_{i+1/2}} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_1(x) \cdot dx, \quad \bar{\varphi}_i^0 = 0.5 \cdot (\Theta_{i+1/2}^0 + \Theta_{i-1/2}^0) \quad (5.1)$$

вычисление консервативных переменных на половинном слое:

$$\frac{\Theta_{i+1/2}^{1/2} - \Theta_{i+1/2}^0}{\tau_0} + c \cdot \frac{\bar{\varphi}_{i+1}^0 - \bar{\varphi}_i^0}{h_{i+1/2}} = 0, \quad \tau_0 = 0.5 \cdot (t_1 - t_0) \quad (5.2)$$

и потоковых переменных на первом слое:

$$\frac{\Phi_{i+1}^1 - \Phi_{i+1}^0}{\tau} + c \cdot \frac{\Phi_{i+1}^0 - \Phi_i^0}{h} = 0 \quad (5.3)$$

Второй этап – вычисление предварительных значений консервативных переменных на основе дискретного уравнения баланса:

$$\frac{\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau_n} + c \cdot \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{h_{i+1/2}} = 0, \quad \tau_n = (t_{n+1/2} - t_{n-1/2}) \quad (5.4)$$

Третий этап – вычисление и монотонизация новых значений потоковых переменных:

$$\Phi_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \Phi_{i+1}^* & \text{if } (-\Phi_{i+1/2}^n < \tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} < +\Phi_{i+1/2}^n) \\ +\Phi_{i+1/2}^n & \text{if } (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} \geq +\Phi_{i+1/2}^n) \\ -\Phi_{i+1/2}^n & \text{if } (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} \leq -\Phi_{i+1/2}^n) \end{cases} \quad (5.5)$$

где

$$\Phi_{i+1}^* = 2 \cdot \tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} - \Phi_i^n \quad (5.6)$$

Четвертый этап – коррекция консервативных переменных при нарушении монотонности консервативных и потоковых величин в пределах каждой ячейки:

$$\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} = \tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} - [W_{i+1}^{n+1/2} - W_i^{n+1/2}] \quad (5.7)$$

где

$$W_{i+1}^{n+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{if } (-\Phi_{i+1/2}^n \leq \tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} \leq +\Phi_{i+1/2}^n) \\ (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} - +\Phi_{i+1/2}^n) & \text{if } (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} > +\Phi_{i+1/2}^n) ; \\ (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} - -\Phi_{i+1/2}^n) & \text{if } (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} < -\Phi_{i+1/2}^n) \end{cases} \quad (5.8)$$

Замечание: при  $c < 0$  изменится ориентация шаблонов в выражениях (5.5),(5.6),(5.8).

Алгоритм (5.1)-(5.8) обладает следующими свойствами:

- Устойчив при числах Куранта меньших единицы и обеспечивает соблюдение принципа максимума, т.е. обладает свойством монотонности.
- Аппроксимирует исходное уравнения с первым порядком точности в окрестностях сильных разрывов и со вторым – в областях достаточной гладкости .
- Определен на неизменном минимально возможном вычислительном шаблоне - оперирует величинами с двух соседних временных слоев в пределах одной расчетной ячейки.
- Является явным – не требует процедур решения систем линейных уравнений, в том числе и процедуры «бегущего счета».
- Обладает свойством консервативности (дивергентности).

## 6 Примеры тестовых расчетов

Проиллюстрируем свойства алгоритма (5.1)-(5.8), который будем обозначать как «CABARET» на задаче о переносе трех различных начальных профилей, отличающихся степенью гладкости.

Первый профиль представляет собой единичную ступеньку, занимающую 10 расчетных ячеек.

Второй профиль – всюду гладкая функция с большими градиентами:

$$\Theta_{i+1/2}^0 = \exp\left\{-\frac{(i+1/2-10)^2}{7}\right\} + \exp\left\{-\frac{(i+1/2-20)^2}{7}\right\}$$

Третий профиль описывается положительной частью синусоиды, определенной на 50 расчетных ячейках:

$$\Theta_{i+1/2}^0 = \begin{cases} 0 & \text{if } (i < 10) \\ \sin\left(\frac{\pi}{50}[(i+1/2)-10]\right) & \\ 0 & \text{if } (i \geq 60) \end{cases}$$

Результаты расчетов, приведенные на рис. 3-8 соответствуют числу Куранта 0.4 и двум различным моментам времени с числом временных шагов  $NT = 300$  и  $NT = 3000$ .

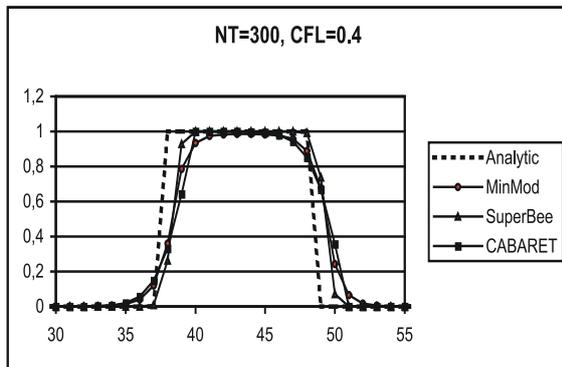


Рис. 3

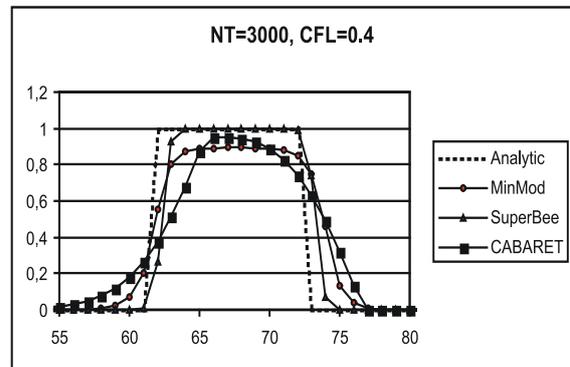


Рис. 4

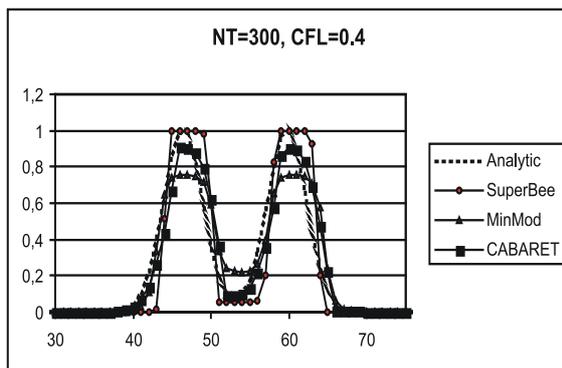


Рис. 5

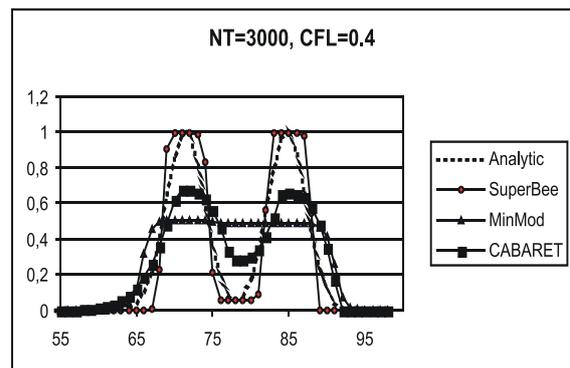


Рис. 6

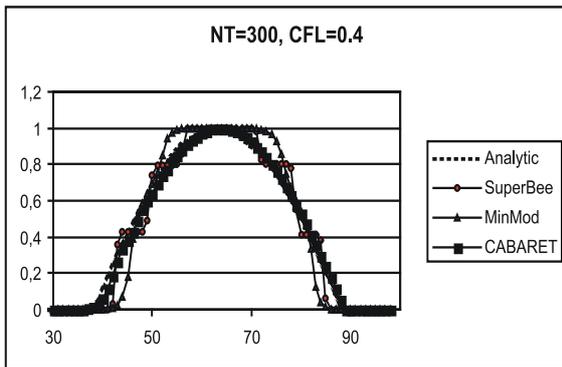


Рис. 7

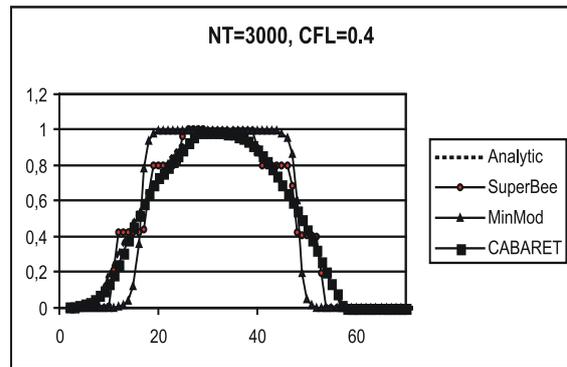


Рис. 8

На представленных графиках для сравнения приведены также расчеты по схеме TVD с лимитерами MinMod и SuperBee [5]. На гладких профилях преимущество алгоритма CABARET выражается наиболее ярко.

## 7 Балансно - характеристическая интерпретация схемы «КАБАРЕ»

При сведении трехслойной схемы (1.5) к двухслойной (2.1), количество подлежащих определению сточных переменных возрастает в два раза. При этом переменные делятся на два типа, консервативные и потоковые. Консервативные переменные удовлетворяют сеточному уравнению баланса, в то время как потоковые переменные играют вспомогательную роль и находятся линейной экстраполяцией, обеспечивающей на гладких решениях второй порядок аппроксимации.

Систему уравнений (2.1) можно получить также непосредственно из балансово-характеристических соотношений.

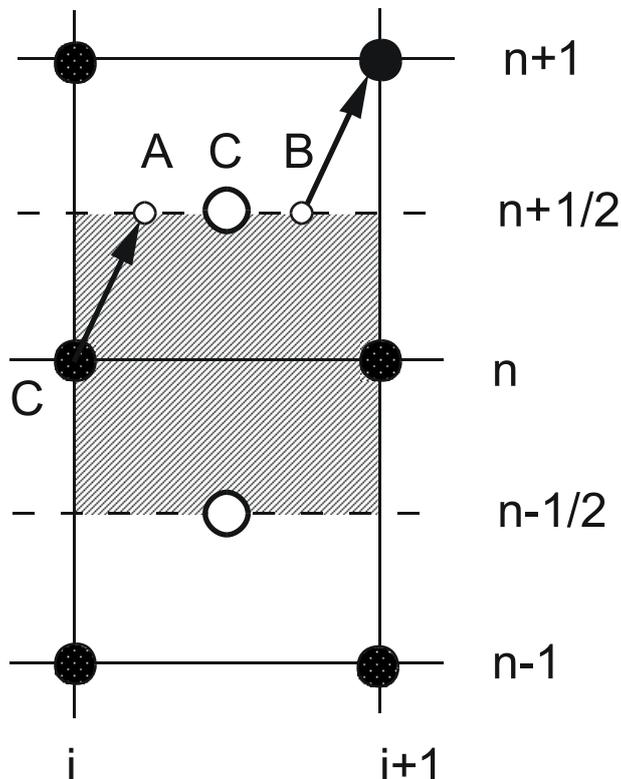


Рис. 9

Действительно, если проинтегрировать уравнение (1) по контрольному объему, который представлен на рис. 9, получаем:

$$\frac{\Psi_{i+1/2}^{n+1/2} - \Psi_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + \frac{Flux_{i+1}^n - Flux_i^n}{h} = 0 \quad (7.1)$$

где

$$\Psi_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x, t_{n+1/2}) \cdot dx, \quad Flux_i^n = \frac{c}{\tau} \cdot \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \varphi(x_i, t) \cdot dt \quad (7.2)$$

На достаточно гладких решениях с точностью до членов второго порядка малости можно положить

$$\begin{aligned} \Psi_{i+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{h} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x, t_{n+1/2}) \cdot dx = \Theta_{i+1/2}^{n+1/2} + O(h^2) \\ Flux_i^n &= \frac{c}{\tau} \cdot \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \varphi(x_i, t) \cdot dt = c \cdot \varphi_i^n + O(\tau^2) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Будем считать, что значения потоковых переменных  $\varphi_{i+1}^{n+1}$  на новом временном слое переносятся по характеристикам (рис. 9) из точки В промежуточного слоя с номером  $(n+1/2)$ . Пусть А – точка пересечения с этим слоем характеристики, выходящей из узла с номером  $(i, n)$ . Точки А и В расположены симметрично относительно центра ячейки С, поэтому с точностью до величин второго порядка малости, можно записать:

$$\frac{\varphi(A) + \varphi(B)}{2} = \frac{\varphi_{i+1}^n + \varphi_i^n}{2} = \Theta_{i+1/2}^{n+1/2} \quad (7.4)$$

Нетрудно видеть, что соотношения (7.1)-(7.4) эквивалентны системе (2.1).

## 8 Балансно – характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными.

Значение искомой функции в точке В (рис. 10), переносимое по характеристике в узел  $(i+1, n+1)$ , можно также определить как результат квадратичной интерполяции по точкам А, С и D на промежуточном временном слое, где точка D соответствует пересечению характеристики, выходящей из узла  $(i+1, n)$  с временным слоем  $(n+1/2)$ .

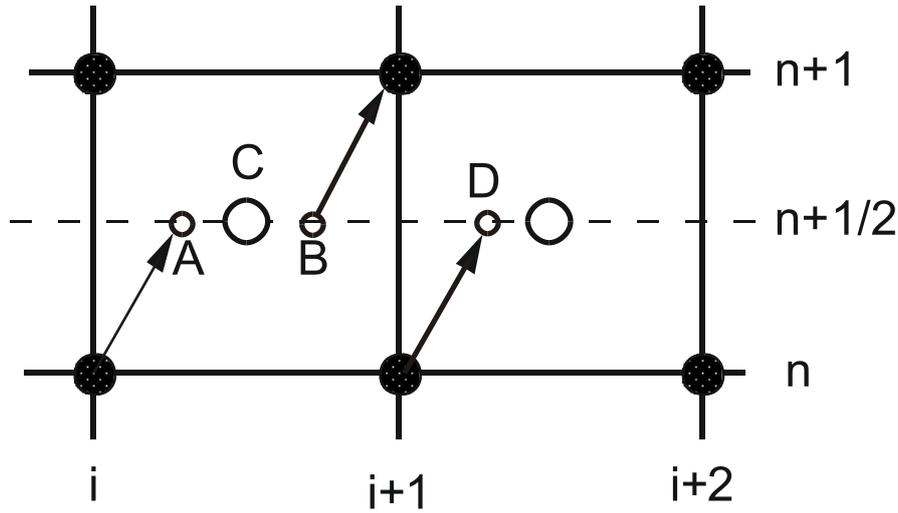


Рис. 10

Если на этом слое ввести безразмерную координату  $\xi: \{\xi(C) = 0, \xi(A) = -0.5 \cdot (1-r), \xi(D) = 0.5 \cdot (1+r)\}$ , где  $r = c \cdot \tau / h$  - число Куранта, то соответствующий полином Лагранжа имеет вид:

$$P(\xi) = p_A(\xi) \cdot \varphi(A) + p_C(\xi) \cdot \varphi(C) + p_D(\xi) \cdot \varphi(D) \quad (8.1)$$

где

$$p_A(\xi) = \frac{\xi \cdot [2 \cdot \xi - (1+r)]}{(1-r)}, \quad p_D(\xi) = \frac{\xi \cdot [2 \cdot \xi + (1-r)]}{(1+r)}, \quad (8.2)$$

$$p_C(\xi) = -\frac{[2 \cdot \xi - (1+r)] \cdot [2 \cdot \xi + (1-r)]}{(1+r) \cdot (1-r)}$$

Новое значение потоковой переменной определяется выражением:

$$\varphi_{i+1}^{n+1} = \varphi(B) = P[0.5 \cdot (1-r)] \quad (8.3)$$

Учитывая, что  $\varphi(A) = \varphi_i^n$ ,  $\varphi(C) = \Theta_{i+1/2}^{n+1/2}$ ,  $\varphi(D) = \varphi_{i+1}^n$ , приходим к новой системе балансно – характеристических сеточных уравнений :

$$\frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + c \cdot \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} = 0 \quad (8.4)$$

$$\varphi_{i+1}^{n+1} = -r \cdot \varphi_i^n + \frac{(1-r)^2}{(1+r)} \cdot \varphi_{i+1}^n + \frac{4r}{(1+r)} \cdot \Theta_{i+1/2}^{n+1/2} \quad (8.5)$$

которую будем в дальнейшем обозначать аббревиатурой BCSSCFV-2 (Balance and Characteristic Scheme with Staggered Conservative and Fluxes Variable)

Первое уравнение системы (8.4) можно трактовать как схему «крест» [1] (leap frog), аппроксимирующую на гладких решениях исходное уравнение со вторым порядком точности, второе соотношение (8.5) – как полулагранжеву [13] схему, также обладающую вторым порядком аппроксимации.

Представляет интерес также схема первого порядка, когда вместо полинома второй степени, для нахождения значения  $\Phi(B)$ , используется линейная интерполяция по точкам C и D:

$$\Phi_{i+1}^{n+1} = \frac{2 \cdot r}{(1+r)} \cdot \Theta_{i+1/2}^{n+1/2} + \frac{(1-r)}{(1+r)} \cdot \Phi_{i+1}^n \quad (8.6)$$

В дальнейшем будем обозначать ее аббревиатурой BCSSCFV-1 .

Системы (8.4)-(8.5) и (8.4)-(8.6) соединяют в себе основные черты, присущие как консервативным, так и характеристическим разностным схемам.

## 9 Диссипативные и дисперсионные свойства новых схем

Частными решениями уравнений (8.4),(8.5) и (8.4),(8.6) являются бегущие волны:

$$\begin{aligned} \Theta_{j+1/2}^{n+1/2} &= R_1 \cdot \exp\left\{i\left[\omega \cdot \tau \cdot (n+1/2) - k \cdot h \cdot (j+1/2)\right]\right\} \\ \Phi_{j+1}^{n+1} &= R_2 \cdot \exp\left\{i\left[\omega \cdot \tau \cdot (n+1) - k \cdot h \cdot (j+1)\right]\right\} \end{aligned} \quad (9.1)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  произвольные амплитуды. Подставляя (9.1) в (8.4),(8.5), приходим к системе уравнений, связывающей значения амплитуд:

$$\begin{aligned} R_1 \cdot e^{-ikh/2} \cdot (q^{1/2} - q^{-1/2}) + R_2 \cdot r \cdot (e^{-ikh} - 1) &= 0 \\ R_1 \cdot 4r \cdot q^{1/2} \cdot e^{-ikh/2} - R_2 \cdot \left[ (1+r) \cdot q \cdot e^{-ikh} + r \cdot (1+r) - (1-r)^2 \cdot e^{-ikh} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (9.2)$$

Здесь  $q^{1/2} = e^{i\omega\tau/2}$ .

Приравняв детерминант этой системы к нулю, приходим к характеристическому уравнению:

$$a \cdot q^2 + b \cdot q + c = 0 \quad (9.3)$$

где

$$\begin{aligned} a &= (1+r) \cdot e^{-ikh}, \quad c = -\left[ r \cdot (1+r) - (1-r)^2 \cdot e^{-ikh} \right] \\ b &= -\left[ (1+r) \cdot (2-3 \cdot r) \cdot e^{-ikh} - r \cdot (1-3r) \right] \end{aligned} \quad (9.4)$$

Можно показать, что для обеих корней уравнения (9.3)

$$\begin{aligned} |q_1| = |f_1(r, kh)| \leq 1, \quad |q_2| = |f_2(r, kh)| \leq 1, \quad \{r \in [0, 1], kh \in [-\pi, \pi]\} \\ f_1(r, kh) = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad f_2(r, kh) = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4a \cdot c \end{aligned} \quad (9.5)$$

т.е. схема (8.4),(8.5) устойчива при числах Куранта, меньших единицы.

Полное представление о диссипативных свойствах схемы BCSSCFV-2 можно составить по поведению амплитудных поверхностей обеих корней в области устойчивости  $\{r \in [0, 1], kh \in [-\pi, \pi]\}$ , представленных на рис. 11 и рис. 12.

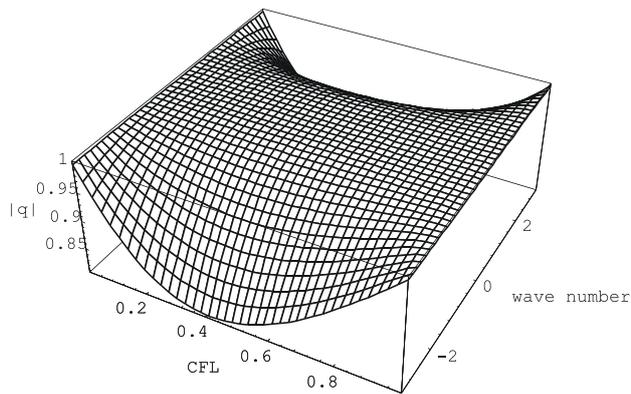


Рис. 11

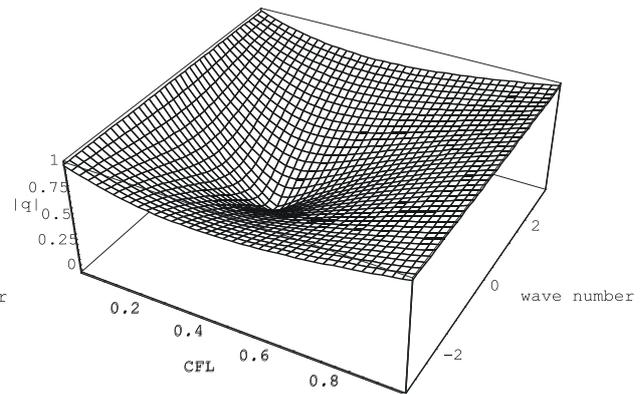


Рис. 12

Первый корень, представленный на рис. 11, приводит к относительно малым амплитудным ошибкам для длинноволновых компонент и весьма умеренно гасит коротковолновые гармоники. Это т.н. «хороший» корень. Диссипативная поверхность второго корня указывает на его аномальное поведение, что свидетельствует о его «паразитном» характере. У схемы «КАБАРЕ» диссипативные поверхности обоих корней одинаковы и представляют собой единичные плоские поверхности.

Зависимость фазовых ошибок от приведенного волнового числа  $kh$  и числа Куранта  $r$  можно проследить по степени отклонения фазовых поверхностей обоих корней от единицы. В соответствии с [9-10] под «фазовой поверхностью» мы понимаем поверхность

$$\gamma_{1,2}(r, kh) = \frac{\omega}{k \cdot c} = \frac{1}{r \cdot (kh)} \cdot \arctg \left[ \frac{\text{Im}(f_{1,2})}{\text{Re}(f_{1,2})} \right] \quad (9.6)$$

На рис. 13 и 14 приведены дисперсионные поверхности первого и второго корней характеристического уравнения (9.3),(9.4) соответственно:

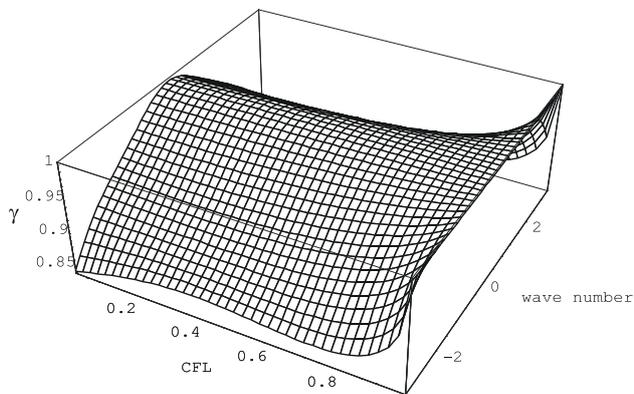


Рис. 13

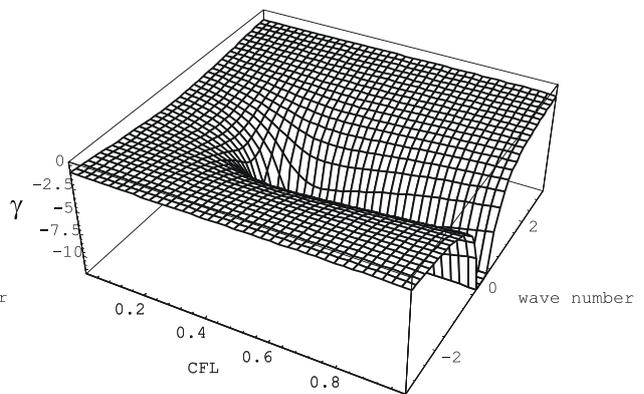


Рис. 14

На рис. 15 и 16 для сравнения представлены дисперсионные поверхности «хорошего» и «паразитного» корней схемы «КАБАРЕ»:

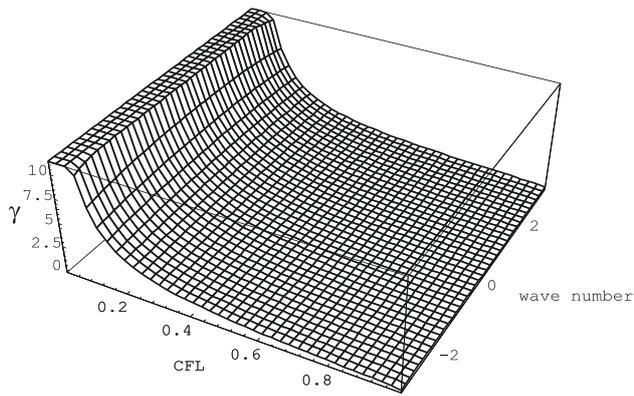


Рис. 15

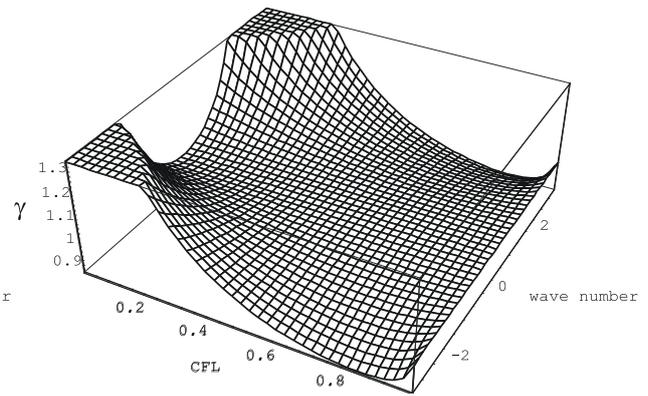


Рис. 16

Для схемы BCSSCFV-1 коэффициенты характеристического уравнения (9.3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 a &= 1, \quad c = 1 - \frac{2r}{1+r} \\
 b &= \frac{2r}{1+r} - 2 - \frac{4r^2}{1+r} \cdot i \sin\left(\frac{kh}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{kh}{2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{9.7}$$

На рис. 17 и рис. 18 представлены амплитудные поверхности обоих корней в области устойчивости  $\{r \in [0,1], kh \in [-\pi, \pi]\}$  для схемы BCSSCFV-1.

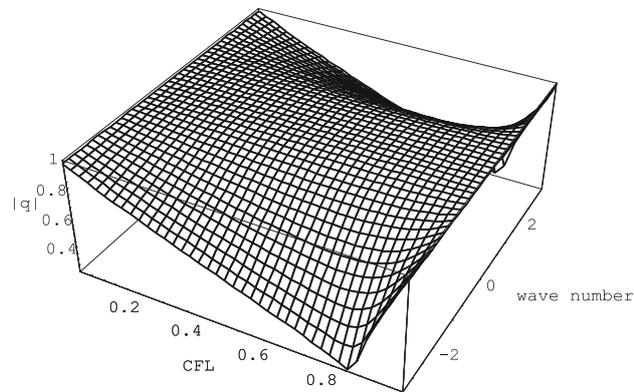


Рис. 17

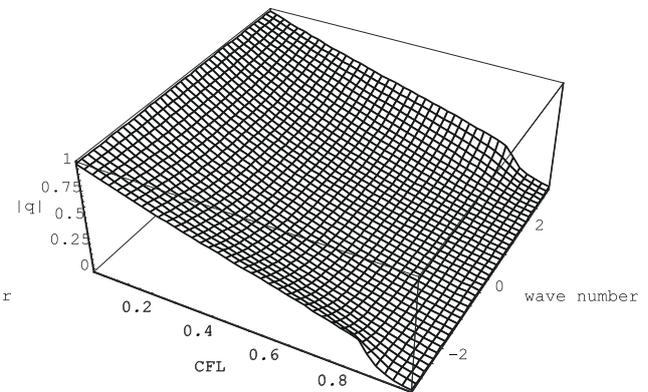


Рис. 18

Схема будет устойчива при числах Куранта, меньших единицы

На рис. 19 и 20 приведены дисперсионные поверхности первого и второго корней характеристического уравнения (9.3),(9.7) соответственно:

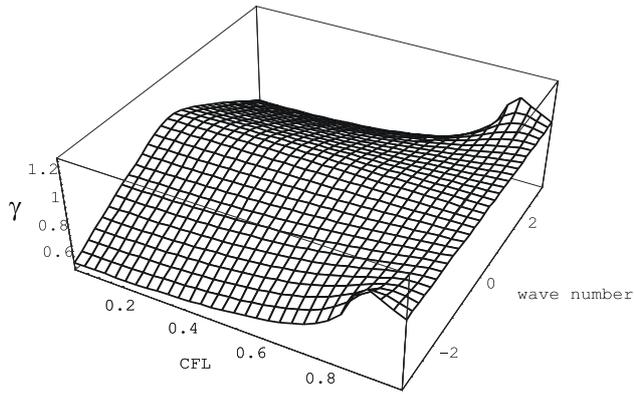


Рис. 19

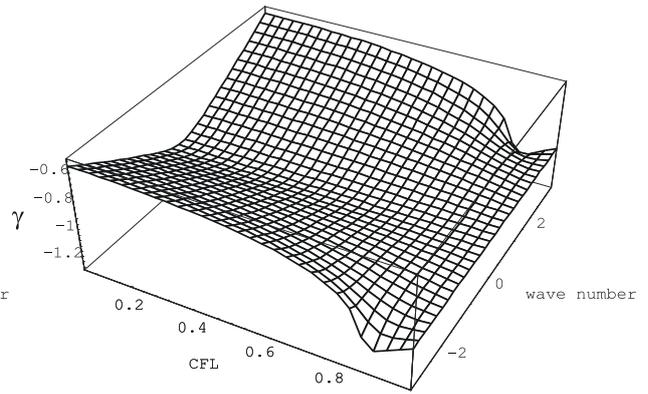


Рис. 20

## 10 Отбраковка паразитного корня и стартовая процедура.

Общее решение систем BCSSCFV-2 и BCSSCFV-1 можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Theta_{j+1/2}^{n+1/2} &= \sum_{k=0}^{2\pi/h} \left[ G_k^{(1)} \cdot (q_1)^{n+1/2} + G_k^{(2)} \cdot (q_2)^{n+1/2} \right] \cdot \exp[-i \cdot k \cdot h \cdot (j+1/2)] \\ \Phi_{j+1}^{n+1} &= \sum_{k=0}^{2\pi/h} \left[ g_k^{(1)} \cdot (q_1)^{n+1} + g_k^{(2)} \cdot (q_2)^{n+1} \right] \cdot \exp[-i \cdot k \cdot h \cdot (j+1)] \end{aligned} \quad (10.1)$$

Влияние паразитного корня будет тем меньше, чем меньше по абсолютной величине будут значения амплитуд  $G_k^{(2)}$  и  $g_k^{(2)}$ . Согласовывая надлежащим образом начальные данные для потоковых и консервативных переменных, можно добиться их полного обнуления.

Действительно, зададим на нулевом временном слое потоковые переменные и найдем коэффициенты их разложения в ряд Фурье. Предполагая, что в этом разложении отличны от нуля только амплитуды при «правильных» корнях, в соответствии с (10.1) вычислим значения потоковых переменных на следующем, т.е. первом временном слое. Затем, по формулам (8.5) или (8.6) определим начальные значения консервативных переменных на слое  $n = 1/2$ . Знание величин  $\Theta_{i+1/2}^{1/2}$  дает возможность однозначно определить коэффициенты  $G_k^{(1)}$  при условии  $G_k^{(2)} = 0$ .

При согласованном задании начальных данных для консервативных и потоковых переменных, диссипативные и дисперсионные свойства схем BCSSCFV-2 и BCSSCFV-1 целиком определяются свойствами их первых корней.

На практике, для исключения влияния паразитного корня, достаточно воспользоваться одной из стартовых процедур, описанных в одном из предыдущих разделов.

## 11 Сравнительные расчеты

Отсутствие особенностей у дисперсионной поверхности схемы BCSSCFV-2 и наличие аппроксимационной вязкости существенно отличает ее от схемы «КАБАРЕ». По поведению дисперсионной и диссипативных поверхностей схемы BCSSCFV-2 можно заключить, что при отключении нелинейной коррекции она должна обеспечивать более высокое качество решения при малых числах Куранта. Это подтверждают графики, представленные на рис. 21, 22 где приведено сравнение результатов расчета переноса второго профиля по схемам «КАБАРЕ» и BCSSCFV-2 без монотонизаторов и с монотонизаторами соответственно.

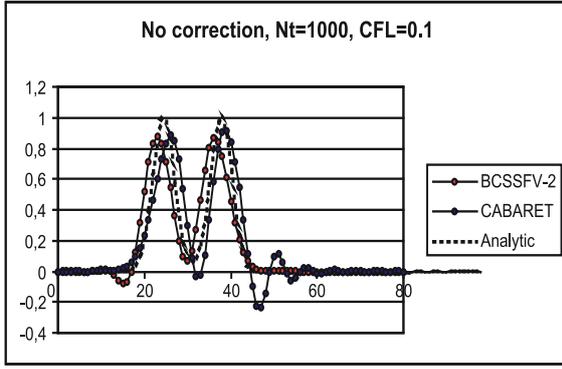


Рис. 21

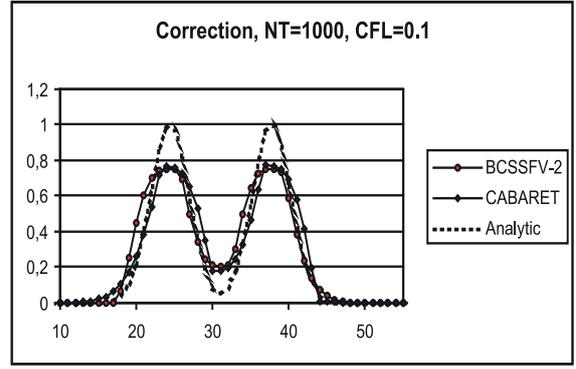


Рис. 22

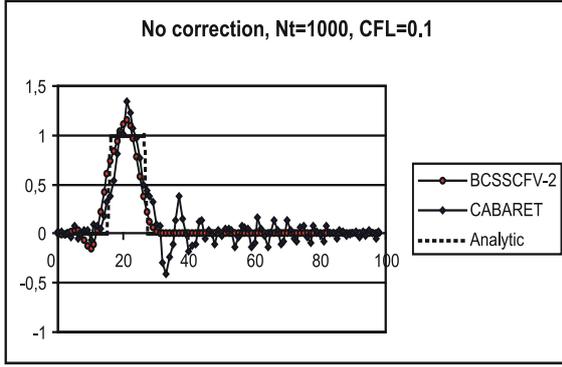


Рис. 23

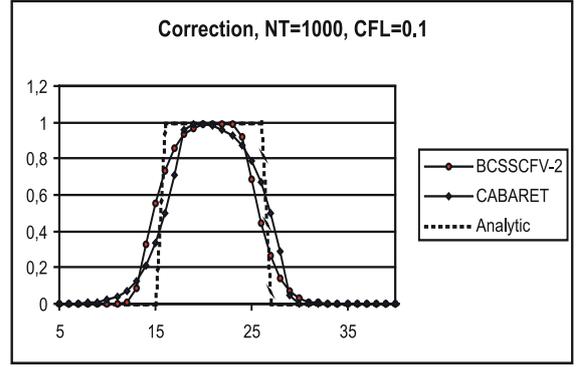


Рис. 24

Это же показывают и результаты расчетов прямоугольной ступеньки рис. 23-24, выполненные без коррекции и с коррекцией.

При  $r = 0.5$  схема «КАБАРЕ» является точной и поэтому в окрестности этого значения, в свою очередь, имеет заметные преимущества перед схемой BCSSCFV-2. При стремлении числа Куранта к единице дисперсионные свойства обеих схем оказываются практически одинаковыми. Такое положение вещей делает возможным дальнейшую оптимизацию дисперсионных свойств посредством гибридизации схем «КАБАРЕ» и BCSSCFV-2. Для этого достаточно новое значение потоковой переменной в узле  $(i+1, n+1)$  задавать выражением

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1}^{n+1} &= [1 - \sigma(r)] \cdot [\varphi_{i+1}^{n+1}]^{CABARET} + \sigma(r) \cdot [\varphi_{i+1}^{n+1}]^{BCSSCFV-2} \\ \sigma(r) &= 4\sigma_0 \cdot (0.5 - r)^2, \quad \sigma_0 \in [0, 1] \end{aligned} \quad (11.1)$$

где  $\sigma_0$  - настроечный параметр, величина которого подлежит определению.

Из приведенных графиков также следует, что нелинейная коррекция сводит имеющиеся различия в дисперсионных свойствах к минимуму. Дополнительные резервы кроются в переходе от достаточных условий монотонности (3.1), (4.1) к условиям типа

$$\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} \tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} & \text{if } (-\varphi_{i+1/2}^n \leq \tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} \leq \varphi_{i+1/2}^n) \\ \delta_1 \cdot \tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} + (1 - \delta_1) \cdot \varphi_{i+1/2}^n & \text{if } (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} < -\varphi_{i+1/2}^n) \\ \delta_1 \cdot \tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} + (1 - \delta_1) \cdot \varphi_{i+1/2}^n & \text{if } (\tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} > \varphi_{i+1/2}^n) \end{cases} \quad (11.2)$$

$$\varphi_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \tilde{\varphi}_{i+1}^{n+1} & \text{if } (-\varphi_{i+1/2}^n \leq \tilde{\varphi}_{i+1}^{n+1} \leq +\varphi_{i+1/2}^n) \\ \delta_2 \cdot \tilde{\varphi}_{i+1}^{n+1} + (1-\delta_2) \cdot -\varphi_{i+1/2}^n & \text{if } (\tilde{\varphi}_{i+1}^{n+1} < -\varphi_{i+1/2}^n) \\ \delta_2 \cdot \tilde{\varphi}_{i+1}^{n+1} + (1-\delta_2) \cdot +\varphi_{i+1/2}^n & \text{if } (\tilde{\varphi}_{i+1}^{n+1} > +\varphi_{i+1/2}^n) \end{cases} \quad (11.3)$$

где  $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(r) \in [0,1]$

Подробный анализ указанных возможностей выходит за рамки данной публикации.

## 12 Переменное поле скоростей

Схема BCSSCFV-2 допускает естественное обобщение на случай переменного поля скоростей  $c = c(x)$ .

Пусть скорость  $c(x)$  - достаточно гладкая функция, имеющая на ограниченном интервале конечное число точек с нулевыми значениями. В областях ее знакоопределенности уравнение переноса можно представить в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + c(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad F = c \cdot \varphi \quad (12.1)$$

откуда следует, что по характеристикам  $dx/dt = c(x)$  переносятся постоянные значения конвективных потоков  $F$ .

Скорости конвективного переноса будем относить к узлам расчетной сетки и считать их линейными функциями в пределах каждой ячейки. Уравнение характеристики, выходящей из узла  $(i, n)$  будет иметь вид:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} \frac{(c_{i+1} - c_i)}{h} \cdot x + c_i & \text{if } (c_i > 0) \\ \frac{(c_{i-1} - c_i)}{h} \cdot x + c_i & \text{if } (c_i < 0) \end{cases} \quad (12.2)$$

откуда, находим:

$$x = x_i + \begin{cases} \frac{h \cdot c_i}{(c_{i+1} - c_i)} \cdot \left\{ \exp \left[ \frac{(c_{i+1} - c_i)}{h} \cdot t \right] - 1 \right\} & \text{if } (c_i > 0) \\ \frac{h \cdot c_i}{(c_{i-1} - c_i)} \cdot \left\{ \exp \left[ \frac{(c_{i-1} - c_i)}{h} \cdot t \right] - 1 \right\} & \text{if } (c_i < 0) \end{cases} \quad (12.3)$$

Раскладывая (12.3) в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка малости, находим точку пересечения характеристики с промежуточным временным слоем  $(n + 1/2)$ :

$$x_A = x_i + \frac{c_i \cdot \tau}{2} + O(\tau^2) \quad (12.4)$$

Аналогичным образом (рис. 25) находится и точки пересечения с промежуточным слоем характеристики, приходящей в расчетный узел  $(n+1, i+1)$  и выходящей из узла  $(n, i+1)$

$$\begin{aligned} x_B &= x_{i+1} - \frac{c_{i+1} \cdot \tau}{2} + O(\tau^2) \\ x_D &= x_{i+1} + \frac{c_{i+1} \cdot \tau}{2} + O(\tau^2) \end{aligned} \quad (12.5)$$

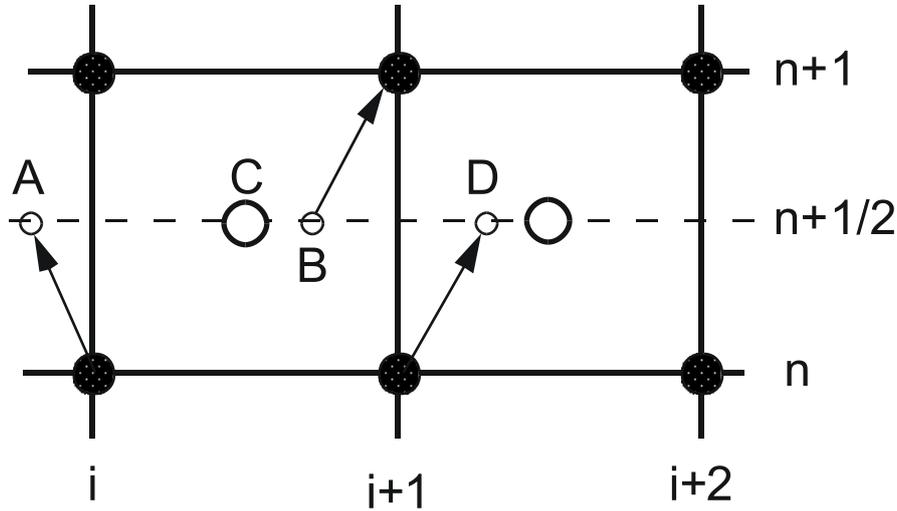


Рис. 25

Вводя на слое  $(n+1/2)$  безразмерную координату

$$\xi : \{ \xi(C) = 0, \xi(A) = -0.5 \cdot (1 - r_i), \xi(D) = 0.5 \cdot (1 + r_{i+1}) \},$$

где  $r_i = c_i \cdot \tau / h$  - число Куранта, запишем квадратичный полином, проходящий через точки  $x_A, x_C, x_D$ , в виде

$$P(\xi) = p_A(\xi) \cdot F(A) + p_C(\xi) \cdot F(C) + p_D(\xi) \cdot F(D) \quad (12.6)$$

где

$$\begin{aligned} p_A(\xi) &= \frac{\xi \cdot [2 \cdot \xi - (1 + r_{i+1})]}{(1 - r_i)}, \quad p_D(\xi) = \frac{\xi \cdot [2 \cdot \xi + (1 - r_i)]}{(1 + r_{i+1})}, \\ p_C(\xi) &= -\frac{[2 \cdot \xi - (1 + r_{i+1})] \cdot [2 \cdot \xi + (1 - r_i)]}{(1 + r_{i+1}) \cdot (1 - r_i)} \end{aligned} \quad (12.7)$$

Новое значение потоковой переменной определяется выражением  $F_{i+1}^{n+1} = F(B) = P[0.5 \cdot (1 - r_{i+1})]$ , откуда находим:

$$F_{i+1}^{n+1} = -\frac{r_{i+1} \cdot (1 - r_{i+1})}{(1 - r_i)} \cdot F_i^n + \frac{2 \cdot r_{i+1} \cdot (2 - r_{i+1} - r_i)}{(1 + r_{i+1}) \cdot (1 - r_i)} \cdot \Phi_{i+1/2}^{n+1/2} + \frac{0.5 \cdot (1 - r_{i+1}) \cdot (2 - r_{i+1} - r_i)}{(1 + r_{i+1})} \cdot F_{i+1}^n \quad (12.8)$$

где

$$F_i^n = c_i \cdot \Phi_i^n, \quad \Phi_{i+1/2}^{n+1/2} = 0.5 \cdot (c_i + c_{i+1}) \cdot \Theta_{i+1/2}^{n+1/2} \quad (12.9)$$

Соотношение (12.8) является замыкающим для сеточного уравнения баланса:

$$\frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{h} = 0 \quad (12.10)$$

Балансно -характеристическая система сеточных уравнений (12.8),(12.10) на гладких решениях аппроксимирует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial c \cdot \Phi}{\partial x} = 0, \quad c = c(x) \quad (12.11)$$

со вторым порядком относительно шагов расчетной сетки.

Схеме BCSSCFV-1 первого порядка аппроксимации будет отвечать характеристическое замыкающее соотношение в виде

$$F_{i+1}^{n+1} = \frac{2 \cdot r_{i+1}}{(1+r_{i+1})} \cdot \Phi_{i+1/2}^{n+1/2} + \frac{(1-r_{i+1})}{(1+r_{i+1})} \cdot F_{i+1}^n \quad (12.12)$$

При наличии у решения слабых разрывов в областях гладкости следует использовать схему второго порядка, а в тех ячейках, где происходит потеря гладкости решения - переходить на первый порядок. В частности, это относится к статически дивергентным ячейкам, для которых  $[(c_i < 0) \& (c_{i+1} > 0)]$ .

### 13 Нелинейная коррекция консервативных и потоковых переменных

Для уравнения переноса на переменном поле скоростей (12.11), в областях знакоопределенности скорости, принцип максимума выполняется для значений конвективных потоков  $F(x, t) = c(x) \cdot \Phi(x, t)$ . Численное решения системы (12.8),(12.10) будет в указанном смысле монотонным, т.е. новых локальных экстремумов в конвективных потоках не будет образовываться, если

$${}^{-}F_{i+1/2}^n \leq \Phi_{i+1/2}^{n+1/2} \leq {}^{+}F_{i+1/2}^n \quad (13.1)$$

и

$$\left. \begin{array}{l} {}^{-}F_{i+1/2}^n \\ {}^{-}F_{i+3/2}^n \end{array} \right\} \leq c_{i+1} \cdot \Phi_{i+1}^{n+1} \leq \left\{ \begin{array}{ll} {}^{+}F_{i+1/2}^n & \text{if } (c_{i+1} > 0) \\ {}^{+}F_{i+3/2}^n & \text{if } (c_{i+1} < 0) \end{array} \right. \quad (13.2)$$

где

$${}^{+}F_{i+1/2}^n = \max(F_{i+1}^n, F_i^n), \quad {}^{-}F_{i+1/2}^n = \min(F_{i+1}^n, F_i^n) \quad (13.3)$$

Если решение не удовлетворяет условиям монотонности, его следует подвергнуть минимально возможной консервативной коррекции. Считая величины, полученные из уравнений (12.8),(12.10) предварительными, т.е. полагая

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{i+1}^{n+1} &= -\frac{r_{i+1} \cdot (1-r_{i+1})}{(1-r_i)} \cdot F_i^n + \frac{2 \cdot r_{i+1} \cdot (2-r_{i+1}-r_i)}{(1+r_{i+1}) \cdot (1-r_i)} \cdot \Phi_{i+1/2}^{n+1/2} + \\
&+ \frac{0.5 \cdot (1-r_{i+1}) \cdot (2-r_{i+1}-r_i)}{(1+r_{i+1})} \cdot F_{i+1}^n; \\
\tilde{\Phi}_{i+1/2}^{n+1/2} &= \Phi_{i+1/2}^{n-1/2} - (F_{i+1}^n - F_i^n)
\end{aligned} \tag{13.4}$$

определим окончательные их значения по следующему алгоритму:

- для консервативных величин

$$\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} = \tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} - (W_{i+1}^{n+1/2} - W_i^{n+1/2}) \tag{13.5}$$

*if*  $((c_{i+1} > 0) \& (c_i > 0))$  *then*

$$W_{i+1}^{n+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{if } (\tilde{\Phi}_{i+1/2}^{n+1/2} \in [{}^+F_{i+1/2}^n, {}^-F_{i+1/2}^n]) \\ \left( \tilde{\Theta}_{i+1/2}^{n+1/2} - 2 \cdot \frac{c_i}{c_i + c_{i+1}} \cdot \Phi_i^n \right) & \text{if } (\tilde{\Phi}_{i+1/2}^{n+1/2} \notin [{}^+F_{i+1/2}^n, {}^-F_{i+1/2}^n]) \end{cases} \tag{13.6}$$

*if*  $((c_{i+1} < 0) \& (c_{i+2} < 0))$  *then* \tag{13.7}

$$W_{i+1}^{n+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{if } (\tilde{\Phi}_{i+3/2}^{n+1/2} \in [{}^+F_{i+3/2}^n, {}^-F_{i+3/2}^n]) \\ \left( \tilde{\Theta}_{i+3/2}^{n+1/2} - 2 \cdot \frac{c_{i+2}}{c_i + c_{i+1}} \cdot \Phi_{i+2}^n \right) & \text{if } (\tilde{\Phi}_{i+3/2}^{n+1/2} \notin [{}^+F_{i+3/2}^n, {}^-F_{i+3/2}^n]) \end{cases}$$

$$\text{if } (c_{i+1} = 0) \text{ then } W_{i+1}^{n+1/2} = 0 \tag{13.8}$$

- для потоковых переменных

*if*  $((c_{i+1} > 0) \& (c_i > 0))$  *then*

$$\Phi_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \tilde{\Phi}_{i+1}^{n+1} & \text{if } (-F_{i+1/2}^n < c_{i+1} \cdot \tilde{\Phi}_{i+1}^{n+1} < {}^+F_{i+1/2}^n) \\ \frac{{}^+F_{i+1/2}^n}{c_{i+1}} & \text{if } (c_{i+1} \cdot \tilde{\Phi}_{i+1}^{n+1} \geq {}^+F_{i+1/2}^n) \\ \frac{{}^-F_{i+1/2}^n}{c_{i+1}} & \text{if } (c_{i+1} \cdot \tilde{\Phi}_{i+1}^{n+1} \leq {}^-F_{i+1/2}^n) \end{cases} \tag{13.9}$$

if  $((c_{i+1} < 0) \& (c_{i+2} < 0))$  then

$$\Phi_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} \tilde{\Phi}_{i+1}^{n+1} & \text{if } (-F_{i+3/2}^n < c_{i+1} \cdot \tilde{\Phi}_{i+1}^{n+1} < +F_{i+3/2}^n) \\ \frac{+F_{i+3/2}^n}{c_{i+1}} & \text{if } (c_{i+1} \cdot \tilde{\Phi}_{i+1}^{n+1} \geq +F_{i+3/2}^n) \\ \frac{-F_{i+3/2}^n}{c_{i+1}} & \text{if } (c_{i+1} \cdot \tilde{\Phi}_{i+1}^{n+1} \leq -F_{i+3/2}^n) \end{cases} \quad (13.10)$$

*Замечание.* Если скорость конвективного переноса внутри расчетной ячейки обращается в ноль, то такая ячейка является статически дивергентной, т.е.  $[(c_i < 0) \& (c_{i+1} > 0)]$  и значение консервативной переменной коррекции не подвергается.

## 14 Уравнение конвекции-диффузии

Балансно -характеристический подход позволяет относительно просто учитывать диффузионные процессы. Для уравнения конвекции - диффузии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot [c(x) \cdot \varphi] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (14.1)$$

сеточное уравнение баланса в терминах консервативных и потоковых переменных естественно записать как:

$$\frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{h} = \Lambda \cdot \bar{\Theta}^{(\sigma)}, \quad \sigma \in [0,1] \quad (14.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda \cdot \bar{\Theta}^{(\sigma)} = & \frac{\sigma}{h^2} \cdot \left[ \mu_{i+1} \cdot (\Theta_{i+3/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^{n+1/2}) - \mu_i \cdot (\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i-1/2}^{n+1/2}) \right] + \\ & \frac{1-\sigma}{h^2} \cdot \left[ \mu_{i+1} \cdot (\Theta_{i+3/2}^{n-1/2} - \Theta_{i+1/2}^{n-1/2}) - \mu_i \cdot (\Theta_{i+1/2}^{n-1/2} - \Theta_{i-1/2}^{n-1/2}) \right] \end{aligned} \quad (14.3)$$

Наличие в (14.1) отличной от нуля правой части никак не скажется на уравнении для характеристики и точки  $A, B$  и  $D$  будут иметь те же координаты, что и в отсутствии диффузии.

Значения конвективных потоков, переносимых по характеристикам в точки  $A$  и  $D$  из-за наличия в (14.1) правой части изменятся, и с требуемым вторым порядком точности будут иметь вид:

$$F(A) = F_i^n + 0.5 \cdot c_i \cdot \tau \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad F(D) = F_{i+1}^n + 0.5 \cdot c_{i+1} \cdot \tau \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2} \quad (14.4)$$

где

$$Q_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{h^2} \cdot \left[ \mu_{i+1} \cdot (\Theta_{i+3/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^{n+1/2}) - \mu_i \cdot (\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i-1/2}^{n+1/2}) \right] \quad (14.5)$$

Аналогично изменится и значение конвективного потока, переносимого характеристикой из точки  $B$  в узел  $(i+1, n+1)$

$$F_{i+1}^{n+1} = F(B) + 0.5 \cdot c_{i+1} \cdot \tau \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2} \quad (14.6)$$

Описанная балансно – характеристическая схема аппроксимирует исходное уравнение (14.1) с порядком  $O((0.5 - \sigma) \cdot \tau + \tau^2 + h^2)$  на гладких решениях и устойчива при условии

$$\tau \leq \min(\tau_c, \tau_d), \tau_c = \frac{h}{\max(c_i)}, \tau_d = \begin{cases} \infty & \text{if } \sigma \in [1/2, 1] \\ \frac{h^2}{2 \cdot (1 - 2\sigma) \cdot \max(\mu_i)} & \text{if } \sigma \in [0, 1/2) \end{cases} \quad (14.7)$$

Алгоритм минимальной коррекции для монотонизации численного решения, описанный в предыдущем разделе, останется практически неизменным, с той лишь разницей, что изменятся значения границ допустимых интервалов: вместо величин  ${}^+F_{i+1/2}^n, {}^-F_{i+1/2}^n$ , определенных выражениями (13.3) нужно брать их модифицированные значения:

$$\begin{aligned} {}^+F_{i+1/2}^n &= \max(F_{i+1}^n, F_i^n) + 0.5 \cdot c_{i+1/2} \cdot \tau \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2} \\ {}^-F_{i+1/2}^n &= \min(F_{i+1}^n, F_i^n) + 0.5 \cdot c_{i+1/2} \cdot \tau \cdot Q_{i+1/2}^{n+1/2} \\ c_{i+1/2} &= 0.5 \cdot (c_i + c_{i+1}) \end{aligned} \quad (14.8)$$

## Комментарии

Схемы «КАБАРЕ», BCSSCFV-1 и BCSSCFV-2 по существу являются трехслойными, хотя и имеют двухслойную форму записи. Трехслойность требует аккуратной процедуры согласования начальных данных для консервативных и потоковых переменных. Согласование необходимо для исключения влияния на решение паразитного корня характеристического уравнения. Наличие специальной стартовой процедуры – обязательный признак всех балансно – характеристических схем.

Балансно – характеристические схемы имеют постоянный компактный носитель, ограниченный размерами вычислительной ячейки. Взаимодействие с соседними областями происходит только по их общим границам. В расчетах не используется информация о геометрических размерах соседних ячеек, поэтому схемы «КАБАРЕ» и BCSSCFV-2 имеют второй порядок аппроксимации по пространственной переменной на произвольных неравномерных расчетных сетках. Эти свойства роднят их с конечными элементами, получившими широкое распространение для параболических и эллиптических уравнений. Характер вычислений в пределах каждого гиперболического конечного элемента зависит от направления характеристик, приходящих в их граничные узлы.

Еще одним характерным свойством балансно – характеристических схем является специализация переменных, разделение их на «консервативные» и «потоковые». Наличие консервативных переменных гарантирует безусловное выполнение сеточного закона сохранения. Выделение специализированных потоковых переменных позволяет использовать для их определения отличную от консервативной форму записи исходных уравнений, в данном случае, характеристическую.

Важной особенностью алгоритма монотонизации балансно – характеристических разностных схем является то, что он также использует только информацию, содержащуюся в данной расчетной ячейке – конечном элементе; коррекция не приводит к расширению вычислительного шаблона. Основанием для корректировки результатов расчетов по линейной схеме служит факт нарушения достаточных условий принципа максимума в пределах данного конечного элемента. Коррекция осуществляется в степени, минимально необходимой для восстановления достаточных условий монотонности. При этом коррекции подвергаются как конвективные потоки, так и сами переносимые величины. Безусловная консервативность коррекции обеспечивается ее дивергентной формой записи.

Область устойчивости рассмотренных балансно – характеристических схем совпадает с характерной для классических разностных схем ( $r \leq 1$ ) и нелинейная монотонизация не приводит к ее сужению.

Балансно характеристический подход обладает значительной гибкостью – допускает широкий выбор (с учетом физического смысла) интерполяционных алгоритмов, участвующих в определении новых значений потоковых переменных, и естественным образом обобщается на более сложные и физически содержательные случаи.

Следует отметить, что схема (1.5), по видимому впервые, была упомянута в работе [14] как одно из возможных обобщений схемы «крест», известной в западной литературе под названием «leapfrog» и в англоязычной литературе получила название «Upwind leapfrog» [14,15]. Значительно ранее, в середине пятидесятых годов прошлого века, она была достаточно подробно исследована в одной из неопубликованных работ А.А. Самарского. Работы [9-10], выполненные независимо от [14] [15], можно рассматривать как последующее ее развитие.

## Литература

1. Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. Системы квазилинейных уравнений. М: Наука, 1978, 688с.
2. J.P.Boris, D.L.Book, K. Hain. Flux-corrected transport: Generalization of the method. J. Comput. Physics. 1975. V. 31. pp. 335-350
3. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. J. Comput. Physics. 1979. V.32. pp.101-137.
4. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. J. Comput. Phys. 1983, V.49, pp. 357-393
5. Harten, S. Osher. Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes. I. SIAM. J. Numer. Anal. V. 24. N2. 1987.
6. Harten, B. Engquist, S. Osher and S. Chakravarthy, Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes III, J. Comput. Physics, 71, pp. 231-303, 1987.
7. Колган В.П. Конечно-разностная схема для расчета двумерных разрывных решений нестационарной газовой динамики. Уч. Зап. ЦАГИЮ 1972, т.3, №6, с. 68-77.
8. Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шапков М.Ю. Квазимонотонные разностные схемы повышенного порядка точности. М. Препринт ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша, 1983, №36, с. 27
9. В.М. Головизнин, А.А. Самарский. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной. //Журнал Математического моделирования, т.10 (1998), №1, с.86-100.
10. В.М. Головизнин, А.А. Самарский. Некоторые свойства разностной схемы “Кабаре”. //Журнал Математического моделирования, т. 10 (1998), №1, с.101-116.
11. Роуч Р. Вычислительная гидродинамика. М. Мир, 1976.
12. Самарский А.А. Теория разностных схем.
13. A. Tolstykh The response of a variable resolution semi-Lagrangian NWP model to changes in horizontal interpolation. Q.J. Meteorol. Soc. (1996), 122, pp. 765-778.
14. Iserles, A., “Generalized leapfrog methods”, IMA Journal of Numerical Analysis, 6,1986
15. Thomas, J.P. and Roe, P.L., “Development of non-dissipative numerical schemes for computational aeroacoustics”, AIAA Paper 93-3382, In AIAA 11 th Computational Fluid Dynamics Conference, 1995