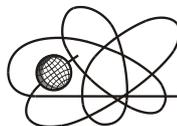




Российская Академия Наук

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ
БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**



ИБРАЭ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**NUCLEAR SAFETY
INSTITUTE**

Препринт ИБРАЭ № ИВРАЕ-1998-12

Preprint IBRAE- 1998-12

Д. А. Суходулов

**РАЗНОСТНАЯ СХЕМА «КАБАРЕ» ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ КОРТВЕГА – ДЕ ВРИЗА**

Москва 1998

Moscow 1998

УДК 519

Суходулов Д.А. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА «КАБАРЕ» ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРВЕГА — ДЕ ВРИЗА. Препринт № ИБРАЭ-98-12. Москва. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. Июль 1998. 21 с. — Библиогр.: 6 назв.

Аннотация

Построена и исследована новая явная трехслойная разностная схема второго порядка с пространственным расщеплением временной производной (схема «Кабаре») для уравнения Корвега — де Вриза. Проанализированы дисперсионные свойства представленной схемы. Показано, что схема «Кабаре» обладает улучшенными транспортными характеристиками на неравномерных пространственных сетках.

©ИБРАЭ РАН, 1998

Sukhodulov D.A. Difference scheme «Cabaret» for a Kortweg — de Vriez equation. Preprint IBRAE-98-12. Moscow. Nuclear Safety Institute. Jule 1998. 21 p. — Refs.: 6 items.

Abstract

The new obvious three--layer difference scheme of the second order with a space splitting temporary derivative (scheme «Cabaret») for a Kortweg — de Vriez equation have been constructed and investigated. The dispersion properties of the submitted scheme have been analyzed. It has been shown that the scheme «Cabaret» has the improved transport characteristics on non uniform space grids.

©Nuclear Safety Institute, 1998

Разностная схема «Кабаре» для уравнения Кортвега – де Вриза

Д. А. Суходулов

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

113191, Москва, ул. Б. Тульская, 52

тел.: (095) 955-26-20, факс: (095) 230-20-29, эл. почта: mnk@ibrae.ac.

Содержание

| | | |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1 | Введение..... | 3 |
| 2 | Уравнение Кортвега – де Вриза, задача Коши и ее возможные решения..... | 4 |
| 3 | Функционал действия для уравнение Кортвега – де Вриза..... | 5 |
| 4 | Дискретизация функционала действия и получение схемы «Кабаре» для уравнение Кортвега – де Вриза..... | 6 |
| 5 | Линейный анализ устойчивости и дисперсионных свойств тестируемых схем..... | 8 |
| 6 | Результаты расчетов и их анализ..... | 133 |
| 7 | Литература:..... | 21 |

1 Введение

Во многих областях современной науки возникают задачи, включающие в качестве существенного элемента уравнения газовой динамики. Уравнения газовой динамики нелинейны, поэтому единственным эффективным и универсальным способом их решения в настоящее время являются численные методы, основанные на использовании ЭВМ.

При численном решении задач газовой динамики или магнитной гидродинамики методом конечных разностей непрерывная среда заменяется некоторой дискретной моделью, а дифференциальные уравнения, описывающие исходную задачу, — конечной системой алгебраических соотношений (разностной схемой). Разностная схема, аппроксимирующая дифференциальную задачу, может быть построена неединственным образом. Поэтому возникает проблема конструирования оптимальных в определенном смысле разностных схем.

В работе [1] для модельного уравнения переноса с постоянными коэффициентами была предложена новая явная трехслойная разностная схема с пространственным расщеплением временной производной, названная схемой «Кабаре». Показано, что схема «Кабаре» имеет второй порядок аппроксимации, устойчива и бездиссипативна в диапазоне чисел Куранта от нуля до единицы, является точной при числах Куранта 0,5 и 1, обладает хорошими дисперсионными свойствами и имеет бесконечное множество законов сохранения [2]. Схема «Кабаре» обладает уникальными транспортными свойствами: на нерегулярных пространственных сетках эта схема переносит нетривиальные начальные распределения на расстояния на порядок больше, чем это позволяют классические схемы.

Квазилинейное уравнение переноса является классическим объектом, широко используемым для апробации и отработки как методов теоретического исследования систем нелинейных гиперболических уравнений, так и методов их численного расчета. Одним из обобщений квазилинейного уравнения переноса на случай диспергирующих сред является уравнение Кортвега – де Вриза:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0; \quad \beta = const.$$

В настоящей работе была построена аппроксимация уравнения Кортевега – де Вриза схемой «Кабаре», и проведено исследование ее поведения на равномерных и неравномерных пространственных сетках. Показано, что аппроксимация временной производной неоднозначна: в зависимости от вида входных данных, расщепление временной производной производится либо по потоку, либо против потока. Сравнение транспортных свойств схем "Крест" и "Кабаре" показало, что на неравномерных пространственных сетках схема "Кабаре" обладает большими преимуществами по сравнению с схемой "Крест".

2 Уравнение Кортевега – де Вриза, задача Коши и ее возможные решения

Уравнение Кортевега – де Вриза:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0, \quad \beta = const \quad (1)$$

является модельным для описания волн малой, но конечной амплитуды в средах, обладающих дисперсией, и впервые было выведено для задачи о распространении длинных волн на мелкой воде [3].

Изучению уравнения Кортевега – де Вриза посвящена обширная литература, достаточно подробная библиография по этому вопросу содержится, например, в [4, 5]. Решение данного уравнения однозначно определяется начальным возмущением $U(x, 0)$. Уравнение (1) при $\beta > 0$ имеет в зависимости от величины β два типа решения вида $U(x, t) = U(x - vt)$ — солитоны и периодические волны.

Когда эффект укручения фронта волны, связанный с нелинейностью, компенсируется дисперсионным уширением фронта, решением уравнения (1) будут солитоны (уединенные волны), которые описываются формулой

$$U(x, t) = A \cdot ch^{-2} \left[\frac{x - A \cdot t / 3}{l} \right]. \quad (2)$$

Здесь A — амплитуда солитона, $l = \sqrt{12 \cdot \beta / A}$ — эффективная ширина его основания. Солитон движется относительно фона со скоростью $v = A/3$. В общем случае в решении одновременно могут присутствовать несколько солитонов, причем солитоны с большей амплитудой являются более узкими и движутся быстрее.

В случае же большой дисперсии решением будет периодическая волна. Решение такого типа также имеет аналитическое представление:

$$U(x, t) = 2 \frac{a}{S} dn^2 \left[\sqrt{\frac{a}{6\beta}} \frac{x}{S} \right] + \gamma,$$

где $dn[\alpha]$ — эллиптическая функция Якоби с модулем $0 \leq S \leq 1$, a и γ — некоторые постоянные.

Удобно рассмотреть уравнение (1) в безразмерном виде. Введем безразмерные величины следующим образом:

$$\bar{U} = \frac{U}{A}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{A \cdot t}{l},$$

где A — амплитуда возмущения, а l — некоторый характерный размер, например полуширина начального возмущения. В этом случае задача Коши для безразмерного уравнения Кортвега – де Вриза выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \delta^{-2} \cdot \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial \bar{x}^3} = 0, \quad \bar{U}(\bar{x}, 0) = \bar{U}_0(\bar{x}), \quad \delta = \sqrt{A \cdot l^2 / \beta}. \quad (3)$$

Очевидно, размерные решения, соответствующие одной и той же безразмерной функции начальных данных $\bar{U}_0(\bar{x})$ и одинаковому значению параметра δ , будут подобны. Параметр δ играет важную роль в теории диспергирующих сред и характеризует отношение нелинейного конвективного члена к дисперсионному. Для решений солитонного типа существует критическое значение параметра подобия $\delta_* = \sqrt{12}$ [4]. При фиксированных начальных данных значения параметра $\delta \ll \delta_*$ и $\delta \gg \delta_*$ соответствуют качественно различные решения.

- В случае $\delta \gg \delta_*$ («малые» β) решение представляет собой цуг солитонов, причем с увеличением δ их количество будет увеличиваться, амплитуды возрастать и эффективная ширина уменьшаться.
- При $\delta \ll \delta_*$ («большие» β) решение (3) есть осциллирующий волновой пакет.
- При $\delta \sim \delta_*$ имеет место решение смешанного типа, состоящее из волнового пакета и системы солитонов. Поскольку скорость солитона пропорциональна его амплитуде, солитоны в решении располагаются в порядке убывания амплитуд. Впереди движется солитон с максимальной амплитудой, расстояние между последовательно расположенными солитонами увеличивается. Волновой пакет имеет отрицательную групповую скорость, пропорциональную коэффициенту β в (1) и движется в сторону, противоположную распространению солитонов.

Число солитонов и их амплитуды определяются величиной параметра подобия δ и формой начальных данных $\bar{U}_0(\bar{x})$. Формулы для определения числа солитонов N и их амплитуд a_n выглядят особенно просто для начальных данных специального вида:

$$U_0(x) = A \cdot ch^{-2}(x - x_0) + b, \quad (4)$$

где x_0 — координата положения середины начального возмущения. В этом случае

$$N < \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3} \cdot \Delta^2} \right), \quad a_n = \frac{3 \cdot A}{\Delta^2} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3} \cdot \Delta^2} - 2 \cdot n \right]^2, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

где $\Delta^2 = A / \beta$.

3 Функционал действия для уравнение Кортвега – де Вриза

Получим функционал для уравнения Кортвега – де Вриза. Для этого домножим уравнение (1) на $\partial \phi$, где $U = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, и проинтегрируем полученное уравнение по x и по t . В результате получим следующие уравнение,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \cdot \delta \phi + \phi_x \cdot \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \cdot \delta \phi + \beta \cdot \delta \phi \cdot \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} \right) \cdot dx \cdot dt. \quad (6)$$

Проинтегрируем полученный интеграл по частям, первый член по t , второй по x , а третий дважды по x . После чего получим:

$$\begin{aligned}
I = & \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \delta \phi \Big|_{t_1}^{t_2} \cdot dx + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \cdot \phi_x^2 \cdot \delta \phi + \beta \cdot \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \cdot \delta \phi \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \cdot dt - \int_{t_1}^{t_2} \beta \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \delta \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_1}^{x_2} \cdot dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \delta \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \cdot \delta \frac{\partial \phi}{\partial x} - \beta \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \delta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \cdot dx \cdot dt.
\end{aligned} \tag{7}$$

Теперь снова проинтегрируем интеграл (6) по частям, первый и второй член по x , а третий дважды по x . После чего получим:

$$\begin{aligned}
I = & \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \delta \phi \Big|_{x_1}^{x_2} \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \cdot \phi_x^2 \cdot \delta \phi + \beta \cdot \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \cdot \delta \phi \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \cdot dt - \int_{t_1}^{t_2} \beta \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \delta \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_1}^{x_2} \cdot dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \delta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \cdot \delta \frac{\partial \phi}{\partial x} - \beta \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \delta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \cdot dx \cdot dt.
\end{aligned} \tag{7a}$$

Сложив (7) и (7a), и разделив пополам, а так же учитывая, что $\delta \phi = 0$ и $\delta \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ при $x = x_1, t = t_1$ и $x = x_2, t = t_2$, получаем:

$$I = -\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \delta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \delta \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \cdot \delta \frac{\partial \phi}{\partial x} - 2 \cdot \beta \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \delta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \cdot dx \cdot dt. \tag{8}$$

Или аналогично можно записать:

$$I = -\frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^3 - \beta \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 \right] \cdot dx \cdot dt. \tag{8a}$$

То есть $\delta S = I$, где S есть аналог функционала действия для уравнения Кортвега – де Вриза:

$$S = -\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^3 - \beta \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 \right] \cdot dx \cdot dt. \tag{9}$$

Из этого функционала можно получить упомянутое уравнение, приравняв нулю первую вариацию функционала и, учтя, что $U = \frac{\partial \phi}{\partial x}$.

4 Дискретизация функционала действия и получение схемы «Кабаре» для уравнение Кортвега – де Вриза

Чтобы получить разностное уравнение нужно составить разностный аналог функционала на существующей сетке, после чего найти первую вариацию полученного разностного аналога и приравнять ее нулю.

В качестве сетки возьмем равномерную прямоугольную сетку.

В следствии аддитивности интеграла можно записать:

$$S_{\tau,h} = \sum_j \sum_{i=2n} S_i^j,$$

где S_i^j есть аппроксимация функционала в паре ячеек $i+1/2, j+1/2$ и $i-1/2, j+1/2$.

$$S_{\tau,h} = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_{i=2n} \frac{1}{2} \left[\frac{\widehat{\phi}_{i-1} - \phi_{i-1}}{\tau} \cdot \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h} \right)^3 - \beta \cdot \left(\frac{\phi_{i+1} - 2 \cdot \phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\widehat{\phi}_{i+1} - \phi_{i+1}}{\tau} \cdot \frac{\widehat{\phi}_{i+1} - \widehat{\phi}_i}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{\widehat{\phi}_{i+1} - \widehat{\phi}_i}{h} \right)^3 - \beta \cdot \left(\frac{\widehat{\phi}_{i+1} - 2 \cdot \widehat{\phi}_i + \widehat{\phi}_{i-1}}{h^2} \right)^2 \right]. \quad (10)$$

Равенство нулю первой вариации функционала (10) равносильно равенству нулю всех его частных производных, то есть:

$$\frac{1}{\tau \cdot h} \cdot \frac{\partial S_{h\tau}}{\partial \phi_i} = -\frac{\widehat{\phi}_{i-1} - \phi_{i-1}}{4 \cdot \tau \cdot h} - \frac{1}{4 \cdot h} \cdot \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h} \right)^2 - \frac{\beta}{h^2} \cdot \frac{\phi_{i+1} - 2 \cdot \phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} - \\ + \frac{\beta}{2 \cdot h^2} \cdot \frac{\phi_i - 2 \cdot \phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{h^2} + \frac{\widehat{\phi}_i - \widehat{\phi}_{i-1}}{4 \cdot \tau \cdot h} + \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{4 \cdot \tau \cdot h} + \frac{\widehat{\phi}_i - \phi_i}{4 \cdot \tau \cdot h} + \\ + \frac{1}{4 \cdot h} \cdot \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} \right)^2 + \frac{\beta}{2 \cdot h^2} \cdot \frac{\phi_{i+2} - 2 \cdot \phi_{i+1} + \phi_i}{h^2} + \frac{\phi_{i+1} - \widehat{\phi}_{i+1}}{4 \cdot \tau \cdot h} + \\ + \frac{1}{4 \cdot h} \cdot \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} \right)^2 - \frac{\beta}{h^2} \cdot \frac{\phi_{i+1} - 2 \cdot \phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{4 \cdot \tau \cdot h} - \\ - \frac{\phi_i - \widehat{\phi}_i}{4 \cdot \tau \cdot h} - \frac{1}{4 \cdot h} \cdot \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h} \right)^2 + \frac{\beta}{2 \cdot h^2} \cdot \frac{\phi_i - 2 \cdot \phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{h^2} - \\ - \frac{\widehat{\phi}_{i+1} - \widehat{\phi}_i}{4 \cdot \tau \cdot h} + \frac{\beta}{2 \cdot h^2} \cdot \frac{\phi_{i+2} - 2 \cdot \phi_{i+1} + \phi_i}{h^2} = 0. \quad (11)$$

Сгруппировав члены получим

$$\left(\frac{\widehat{\phi}_i - \widehat{\phi}_{i-1}}{2 \cdot \tau \cdot h} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{2 \cdot \tau \cdot h} \right) + \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{2 \cdot \tau \cdot h} - \frac{\widehat{\phi}_{i+1} - \widehat{\phi}_i}{2 \cdot \tau \cdot h} \right) + \frac{1}{2 \cdot h} \cdot \left[\left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} \right)^2 - \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h} \right)^2 \right] \\ \frac{\beta}{h^2} \cdot \left(\frac{\phi_{i+2} - 2 \cdot \phi_{i+1} + \phi_i}{h^2} - 2 \cdot \frac{\phi_{i+1} - 2 \cdot \phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} + \frac{\phi_i - 2 \cdot \phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{h^2} \right) = 0. \quad (11a)$$

Перейдя обратно к U и перегруппировав члены уравнения получим:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\widehat{U}_{i-1/2} - U_{i-1/2}}{\tau} + \frac{U_{i-1/2} - \widehat{U}_{i-1/2}}{\tau} \right) + \frac{1}{2h} \cdot (U_{i+1/2}^2 - U_{i-1/2}^2) + \\ + \beta \left(\frac{U_{i+3/2} - 3 \cdot U_{i+1/2} + 3 \cdot U_{i-1/2} - U_{i-3/2}}{h^3} \right) = 0. \quad (12)$$

Полученная схема называется схемой «Каbare». Шаблон схемы представлен на рис. 1

Если же функционал аппроксимировать следующим образом:

$$S_{\tau,h} = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_{i=2n} \frac{1}{2} \left[\frac{\widehat{\phi}_{i+1} - \phi_i}{\tau} \cdot \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} \right)^3 - \beta \cdot \left(\frac{\phi_{i+1} - 2 \cdot \phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\widehat{\phi}_{i-1} - \phi_{i-1}}{\tau} \cdot \frac{\widehat{\phi}_i - \widehat{\phi}_{i-1}}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{\widehat{\phi}_i - \widehat{\phi}_{i-1}}{h} \right)^3 - \beta \cdot \left(\frac{\widehat{\phi}_{i+1} - 2 \cdot \widehat{\phi}_i + \widehat{\phi}_{i-1}}{h^2} \right)^2 \right], \quad (10a)$$

то получим другое разностное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\tilde{U}_{i+1/2} - U_{i+1/2}}{\tau} + \frac{U_{i-1/2} - \tilde{U}_{i-1/2}}{\tau} \right) + \frac{1}{2 \cdot h} \cdot (U_{i+1/2}^2 - U_{i-1/2}^2) + \\ & + \beta \cdot \left(\frac{U_{i+3/2} - 3 \cdot U_{i+1/2} + 3 \cdot U_{i-1/2} - U_{i-3/2}}{h^3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (12a)$$

имеющее следующее шаблон, показанный на рис. 2.

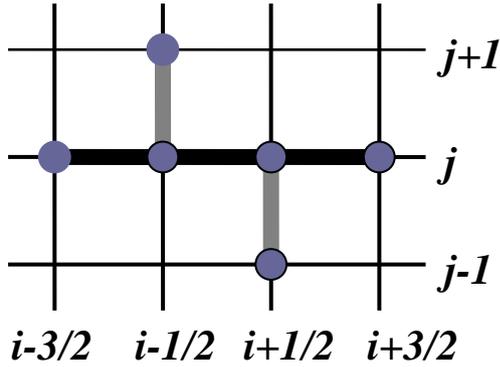


Рис. 1. Шаблон схемы «Кабаре» (12).

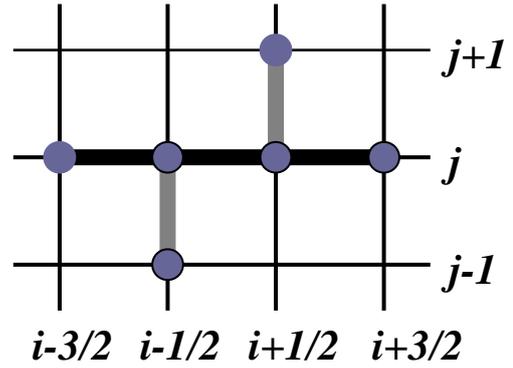


Рис. 2. Шаблон схемы «Кабаре» (12a).

5 Линейный анализ устойчивости и дисперсионных свойств тестируемых схем

Аппроксимируем уравнение Кортвега - де Вриза разностной схемой «Кабаре» (12a), определенной на шаблоне, представленном на рис. 2:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{U}_i - U_i}{\tau} + \frac{U_{i-1} - \tilde{U}_{i-1}}{\tau} \right) + \frac{U_i + U_{i-1}}{2} \cdot \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + \frac{\beta}{h} \left(\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} - \frac{U_i - 2U_{i-1} + U_{i-2}}{h^2} \right) = 0 \\ & h = x_{i+1} - x_i = const; \quad \tau = t_{j+1} - t_j = const; \quad \beta > 0, \end{aligned} \quad (12a)$$

где величины U, \hat{U}, \tilde{U} относятся к текущему, последующему и предыдущему временным слоям соответственно. Для исследования устойчивости спектральным методом, линеаризуем данную схему. Представим решение в виде $U_i^j = U_0 + \delta U_i^j$, где $U_0 = const$, а δU_i^j есть малые возмущения решения в окрестности U_0 . После подстановки в исходную схему, отбрасывая величины второго порядка, получим следующую линейную схему (для удобства символ δ опущен):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{U}_i - U_i}{\tau} + \frac{U_{i-1} - \tilde{U}_{i-1}}{\tau} \right) + U_0 \cdot \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + \frac{\beta}{h} \left(\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} - \frac{U_i - 2U_{i-1} + U_{i-2}}{h^2} \right) = 0.$$

Запишем полученное уравнение в безразмерном виде:

$$\hat{U}_i - U_i + U_{i-1} - \tilde{U}_{i-1} + 2R(U_i - U_{i-1}) + \frac{2R}{C}(U_{i+1} - 3U_i + 3U_{i-1} - U_{i-2}) = 0,$$

где $R = \frac{U_0 \tau}{h}$ — безразмерное число Куранта, а $C = \frac{h^2 U_0}{\beta}$ — число, характеризующее отношение конвективного члена к дисперсионному. Будем искать общее решение в виде суперпозиции частных решений – бегущих волн: $U_i^j = e^{i(\omega \bar{t} - kh i)} = q^j \xi^i$. Подставляя U_i^j , переходим к следующему квадратному характеристическому уравнению:

$$q^2 + \left[\xi^{-1} - 1 + 2R(1 - \xi^{-1}) + \frac{2R}{C}(\xi - 3 + 3\xi^{-1} - \xi^{-2}) \right] \cdot q - \xi^{-1} = 0,$$

где $q = e^{i\omega \tau}$, $\xi = e^{-ikh}$. Корни этого уравнения являются функциями «приведенного волнового числа» kh , принимающего значения от нуля до 2π , числа Куранта R , и характерного числа C :

$$q_1(kh, R, C) = \frac{-b + \sqrt{D}}{2}, \quad q_2(kh, R, C) = \frac{-b - \sqrt{D}}{2},$$

где

$$b = \xi^{-1} - 1 + 2R(1 - \xi^{-1}) + \frac{2R}{C}(\xi - 3 + 3\xi^{-1} - \xi^{-2});$$

$$c = -\xi^{-1}; \quad D = b^2 - 4c.$$

Схема будет устойчива при выполнении следующих неравенств для модулей временного перехода: $|q_1| \leq 1$ и $|q_2| \leq 1$.

Решение характеристического уравнения проводилось численно, при помощи пакета программ Mathematica Enhanced Version 2.2, Wolfram Research, Inc. Исследования поведения корней уравнения показали, что при

$$R \in [0, 1], \quad C \geq 4,$$

значения корней в комплексной плоскости лежат на дуге единичной окружности, т.е.

$$|q_1(kh, R, C)| \equiv 1, \quad |q_2(kh, R, C)| \equiv 1, \quad kh \in [0, 2\pi]$$

Другими словами схема является бездиссипативной и устойчивой. Т.к. $C \geq 4$, то для выполнения условия устойчивости необходимо, что бы $U_0 \geq \frac{4\beta}{h^2}$. Фактически это означает, что решение ограничено снизу, и для правильной работы схемы (12 а), во входных данных задачи необходимо задавать фон больше или равный $\frac{4\beta}{h^2}$, что было показано экспериментально. Дисперсионные свойства схемы характеризуются дисперсионной поверхностью: $\frac{\omega}{U_0 k} = \frac{\text{Arg}[q]}{r \cdot kh} = f(kh, R, C)$. Дисперсия для дифференциального уравнения имеет вид:

$$\frac{\omega}{U_0 k} = 1 - \frac{(kh)^2}{C}.$$

Вид дисперсионных поверхностей и дисперсионных кривых при $R=1$ первого корня при $C=4$ и $C=10$ представлен на рис. 3.

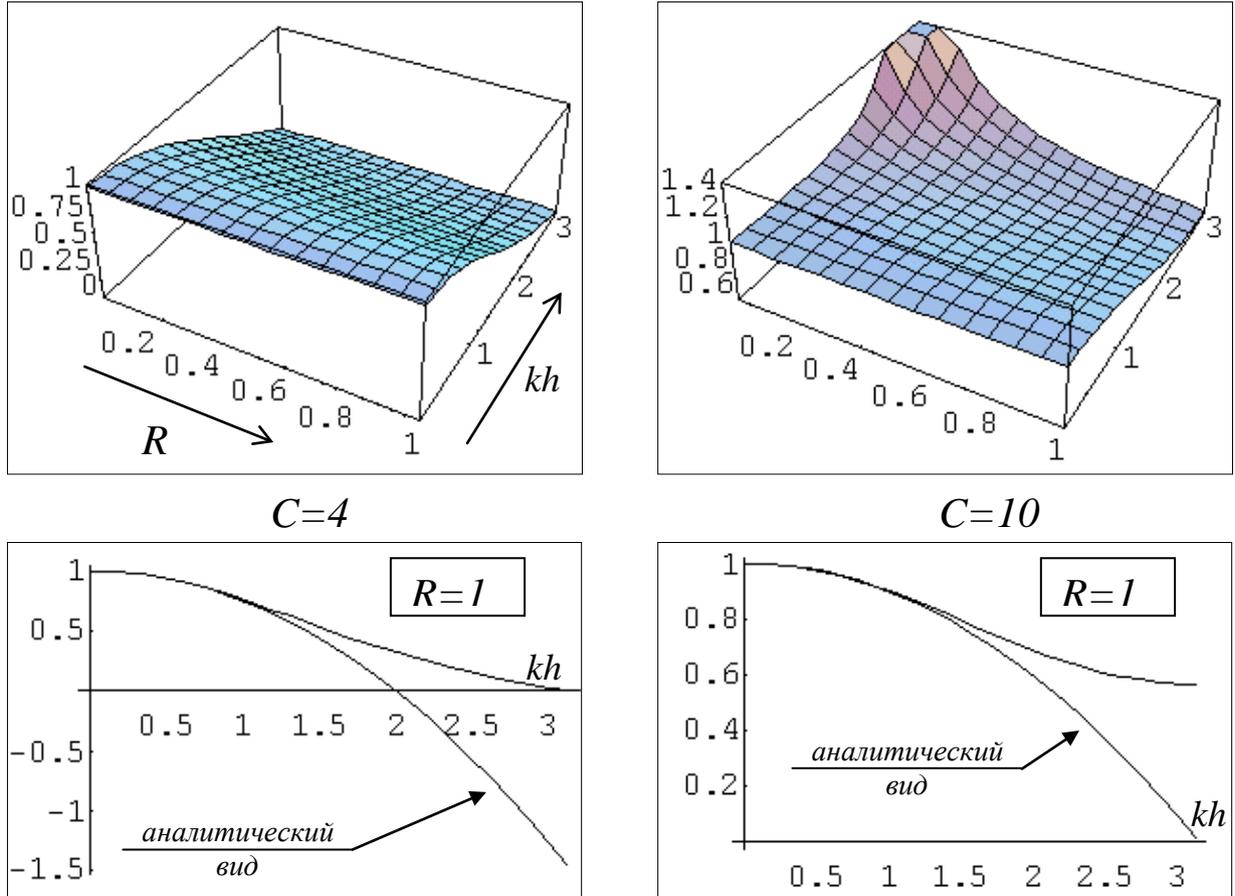


Рис. 3. Вид дисперсионных поверхностей при $C=4$ и $C=10$ и дисперсионных кривых при $R=1$ для схемы «Кабаре» (12).

Здесь по одной оси отложено значение «приведенного волнового числа» kh от нуля до π , а по другой — число Куранта R от нуля до единицы.

В расчетах по схеме (12 а) входные данные необходимо вводить с фоновым значением $U_0 \geq \frac{4\beta}{h^2}$, и временной шаг выбирать из условия $\tau \leq \frac{h}{U_0}$, где h — пространственный шаг.

Рассмотрим схему (12) (обозначения те же, что и выше):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{U}_i - U_i}{\tau} + \frac{U_{i+1} - \tilde{U}_{i+1}}{\tau} \right) + \frac{U_{i+1} + U_i}{2} \cdot \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + \frac{\beta}{h} \left(\frac{U_{i+2} - 2U_{i+1} + U_i}{h^2} - \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} \right) = 0,$$

шаблон которой представлен на рис. 1.

Линейный безразмерный аналог имеет следующий вид:

$$\hat{U}_i - U_i + U_{i+1} - \tilde{U}_{i+1} + 2R(U_{i+1} - U_i) + \frac{2R}{C}(U_{i+2} - 3U_{i+1} + 3U_i - U_{i-1}) = 0.$$

Подставляя частное решения вида $U_i^j = q^j \xi^i$ получаем характеристическое уравнение:

$$q^2 + \left[\xi - 1 + 2R(\xi - 1) + \frac{2R}{C}(\xi^2 - 3\xi + 3 - \xi^{-1}) \right] \cdot q - \xi = 0.$$

Численное решение показало, что при $C=2$ и $R \in [0,1]$ схема является бездиссипативной и устойчивой, т. е. $|q_1| \equiv |q_2| \equiv 1$. Т.к. $C=2$ и $R \leq 1$, то в нелинейной задаче временной шаг надо выбирать из условия: $\tau \leq \frac{h}{U_0} = \frac{h^3}{2\beta}$. Расчеты показали, что максимальное значение τ в два раза меньше: $\tau_{\max} = \frac{h^3}{4\beta}$.
Ниже, на рис. 4 приведены дисперсионная поверхность и дисперсионные кривые при различных числах Куранта

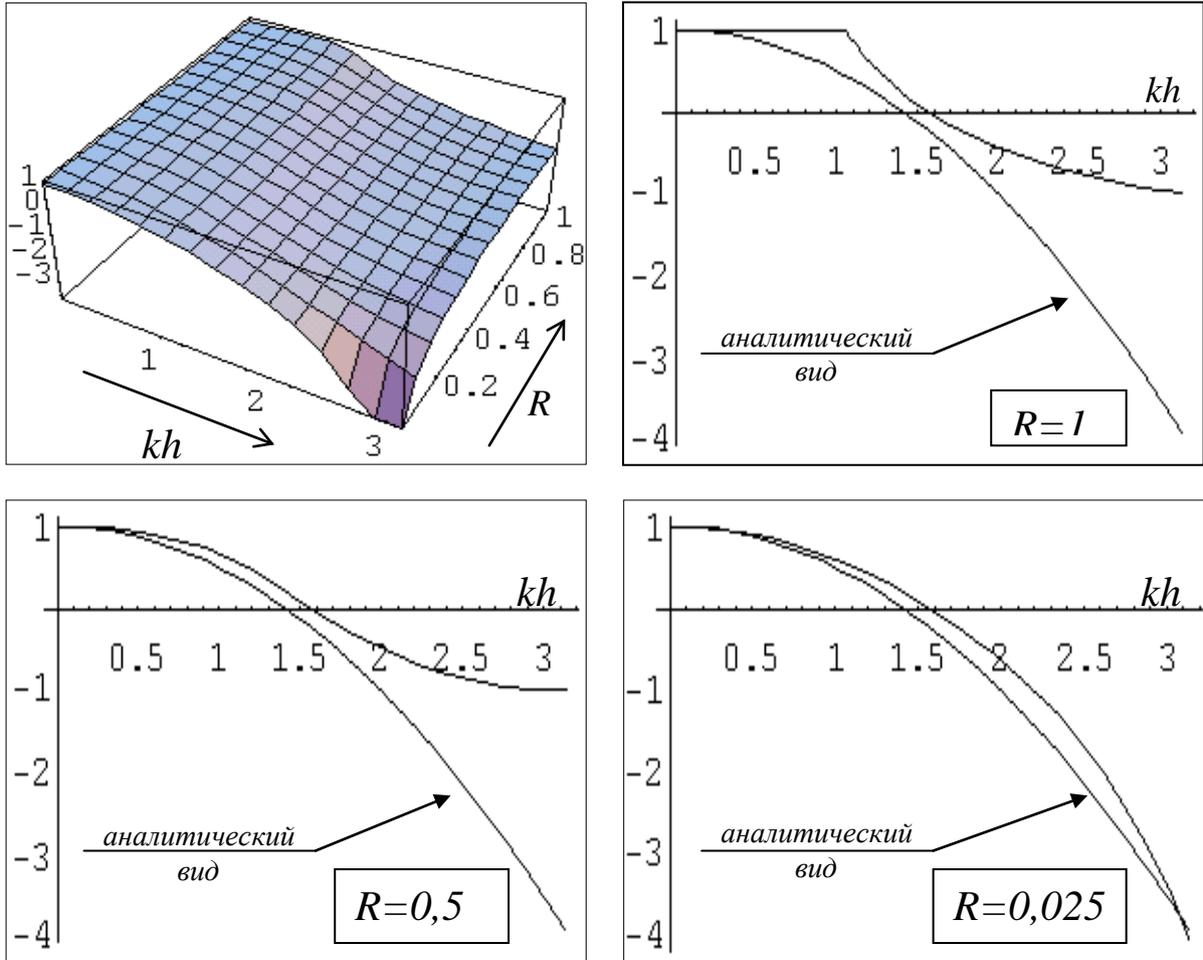


Рис. 4. Дисперсионная поверхность и дисперсионные кривые при различных числах Куранта для схемы «Кабаре» (12а).

В заключении рассмотрим разностную схему «Крест»:

$$\frac{\hat{U}_i - \check{U}_i}{2\tau} + \frac{U_{i+1} + U_{i-1}}{2} \cdot \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \frac{\beta}{2h^3} (U_{i+2} - 2U_{i+1} + 2U_{i-1} - U_{i-2}) = 0.$$

Шаблон имеет следующий вид, показанный на рис. 5. После линеаризации получим:

$$\frac{\hat{U}_i - \check{U}_i}{2\tau} + U_0 \cdot \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \frac{\beta}{2h^3} (U_{i+2} - 2U_{i+1} + 2U_{i-1} - U_{i-2}) = 0.$$

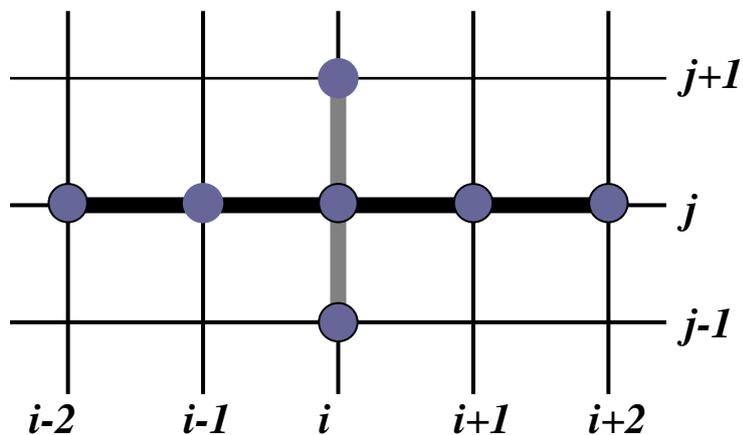
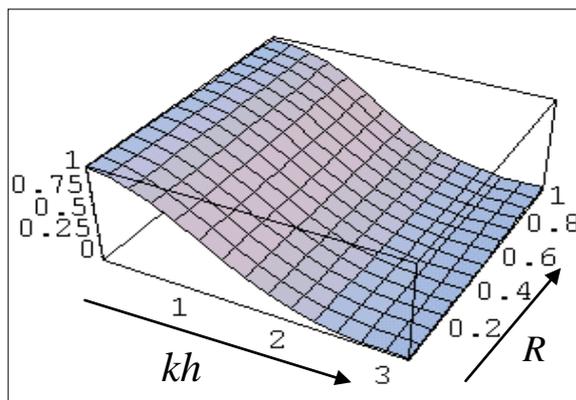


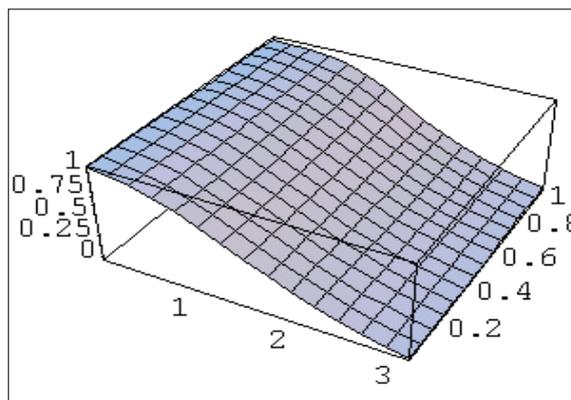
Рис. 5. Шаблон схемы «Крест».

Безразмерный вид:

$$\hat{U}_i - \check{U}_i + R(U_{i+1} - U_{i-1}) + \frac{R}{C}(U_{i+2} - 2U_{i+1} + 2U_{i-1} - U_{i-2}) = 0.$$



$C=4$



$C=10$

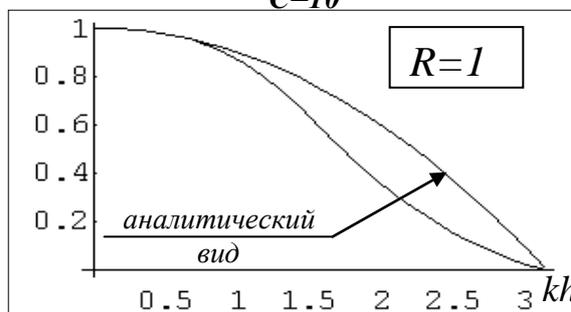
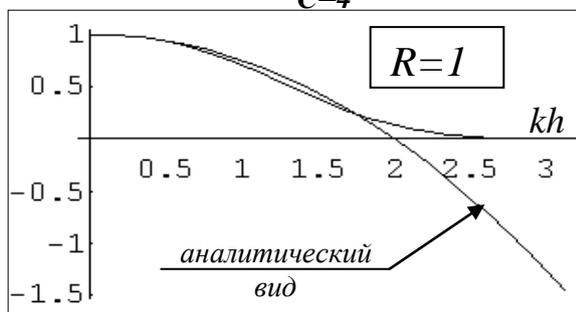


Рис. 6. Дисперсионные поверхности и дисперсионные кривые для схемы «Крест».

Схема «Крест» бездиссипативна и устойчива. Область устойчивости схемы: $kh \in [0, 2\pi]$, $R \in [0, 1]$, $C \geq 1,5$.

Дисперсионные поверхности и дисперсионные кривые при $C=4$ и $C=10$ приведены на рис. 6.

Из сравнения полученных данных видно, что наилучшими дисперсионными свойствами обладает схема «Кабаре» (12) при значении числа Куранта близким к нулю. Т. к. параметр слишком мал, то наиболее приемлемой схемой для решения линейного аналога уравнения Кортвега – де Вриза на равномерных сетках является хорошо известная схема «Крест», т. к. дисперсия этой схемы при параметрах $R=1$ и $C=10$ наиболее близка к дисперсии дифференциального уравнения.

6 Результаты расчетов и их анализ

Исследования транспортных свойств тестируемых схем проводились на равномерных и неравномерных пространственных сетках. В качестве входных данных бралось точное решение уравнения (1) солитонного типа (2) со следующими параметрами: $A=3$, $\beta=1$, $l=2$. Т. к. схемы являются трехслойными, то необходимо задавать дополнительное начальное условие на втором слое:

$$U_i^0 = Ach^{-2} \left[\frac{ih - x'}{l} \right];$$

$$U_i^1 = Ach^{-2} \left[\frac{ih - x' - A\tau/3}{l} \right];$$

$$A=3; \quad \beta=1; \quad l = \sqrt{12\beta/A} = 2; \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

где x' — координата положения середины солитона. Параметры равномерной сетки следующие: пространственный шаг $h=0,71$, временной шаг определялся из условия $\tau = \frac{h^3}{4\beta}$ - максимальное

значение τ при котором схема «Кабаре» является устойчивой, и имел значение $8,95 \times 10^{-2}$. Длина сетки составляла 6500 ячеек. Вид начального условия на описанной выше сетке приведен на рис. 7. На ширине основания солитона уместается порядка 20 ячеек. Этот размер в 20 ячеек будем называть «калибром» начального распределения.

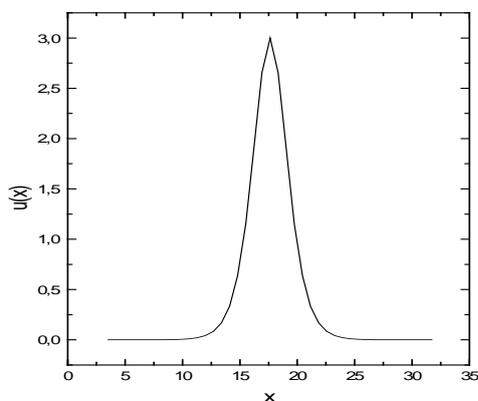


Рис. 7. Вид входных данных на равномерной расчетной сетке.

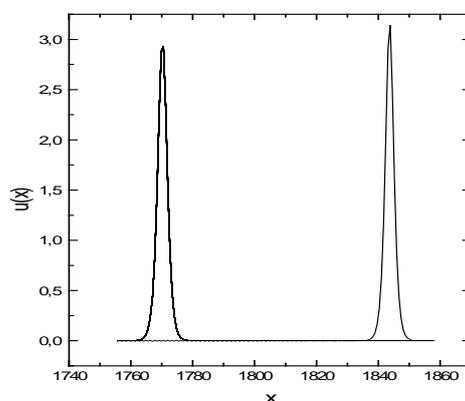


Рис. 8. Результат расчета по схеме «Кабаре» на расстоянии в 120 начальных «калибров».

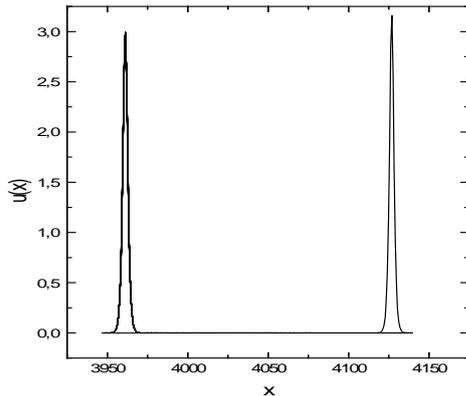


Рис. 9. Результат расчета по схеме «Кабаре» (12) на расстоянии в 270 начальных «калибров». Пунктиром отмечено точное решение.

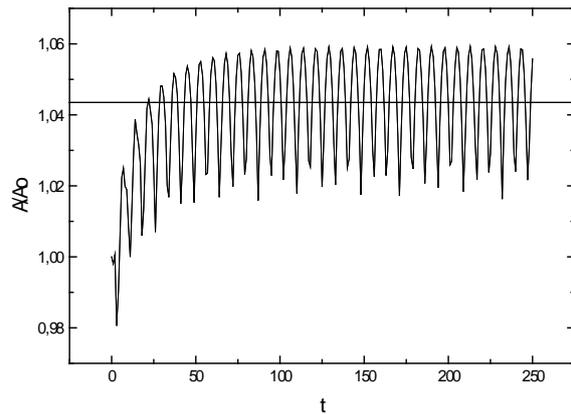


Рис. 10. График зависимости отношения расчетной амплитуды к амплитуде точного решения от числа временных шагов для схемы «Кабаре» (12). Пунктиром отмечено среднее значение.

Исследуем поведение схемы «Кабаре» (12) (рис.1), устойчивой при нулевом значении фона.

На рис. 8–9 приведены результаты расчета по схеме «кабаре» на расстоянии в 120 и 270 начальных калибров соответственно. В процессе счета произошло увеличение амплитуды в 1,045 раза (рис. 10), и соответственно увеличение скорости солитона. На момент времени времени $t = 3,9 \times 10^3$ (рис. 9) расстояние между расчетным и точным решением, отнесенное к ширине основания солитона составило примерно 11,6. Для сравнения на рис. 11 приведены результаты расчета по схеме «Крест» на расстоянии в 270 калибров на той же расчетной сетке и с теми же входными данными (рис.7). В процессе счета наблюдалось уменьшение амплитуды в 1,017 раза (рис. 12). После трансляции функции (2) на 270 начальных калибра, расстояние между точным и расчетным решением, отнесенное к ширине основания солитона составило 4,07.

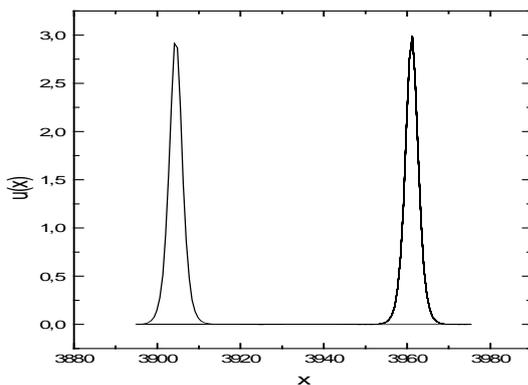


Рис. 11. Результат расчета по схеме «Крест» на расстоянии в 270 начальных «калибров». Пунктиром отмечено точное решение.

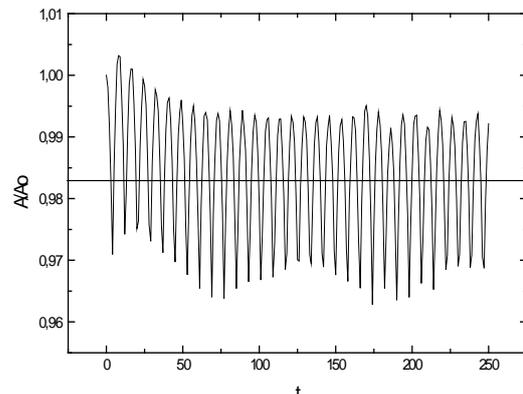


Рис. 12. График зависимости отношения расчетной амплитуды к амплитуде точного решения от числа временных шагов для схемы «Крест». Пунктиром отмечено среднее значение.

Из полученных данных можно сделать вывод, что на равномерной пространственной сетке, транспортные свойства хорошо известной схемы «Крест» лучше, чем у схемы «Кабаре». Изменение амплитуды, и как следствие «убегание» или «отставание» решения, связано с дисперсионной ошибкой,

которую мы допускаем при замене дифференциальных операторов некоторыми разностными выражениями.

Исследуем поведение схемы «Кабаре» (12) на нерегулярной пространственной сетке. Покроем область определения задачи расчетной сеткой с постоянным шагом по времени τ и переменными пространственными шагами h_i . Аппроксимируем уравнение (1) разностной схемой:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\widehat{U}_i - U_i}{\tau} + \frac{U_{i+1} - \widetilde{U}_{i+1}}{\tau} \right) + \frac{U_{i+1} + U_i}{2} \cdot \frac{U_{i+1} - U_i}{h_i} + \frac{\beta}{h_i} \left[\left(\frac{U_{i+2} - U_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{U_{i+1} - U_i}{h_i} \right) \frac{2}{h_i + h_{i+1}} - \left(\frac{U_{i+1} - U_i}{h_i} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \frac{2}{h_i + h_{i-1}} \right] = 0; \quad (13)$$

$$\tau = t_{n+1} - t_n = \text{const}, \quad h_i = x_{i+1} - x_i > 0, \quad i=1, \dots, N-2.$$

где величины U , \widehat{U} , \widetilde{U} относятся к текущему, последующему и предыдущему временным слоям соответственно. Для исследования транспортных свойств схемы (13) была выбрана случайная последовательность длин расчетных ячеек, распределенная по нормальному закону с заданным отношением размеров максимальной и минимальной ячеек (степень неоднородности) равным трем. На рис. 13 представлена гистограмма длин этих ячеек (всего 2500 элементов).

В качестве начальных условий возьмем точное решение уравнения Кортвега – де Вриза солитонного типа (2) со следующими параметрами: $A=3$, $l=2$, $\beta = 1$.

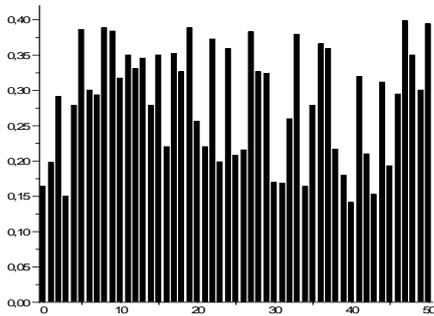


Рис. 13. Гистограмма длин расчетных ячеек.

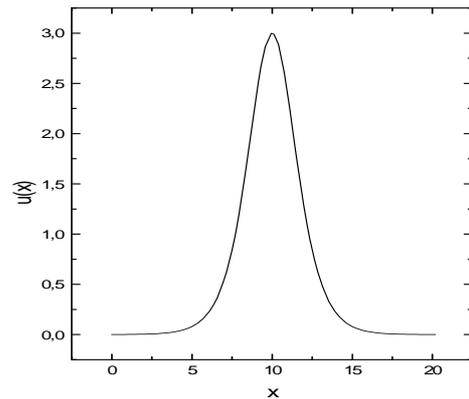


Рис. 14. Входные данные на неравномерной расчетной сетке.

Максимальный пространственный шаг примем равным $h_{max} = \frac{l}{5} = 0,4$, $h_{min} = \frac{h_{max}}{3} = 0,13$, шаг по времени находится из условия $\tau = \frac{h_{min}^3}{4\beta} = 5,9 \times 10^{-4}$. Аппроксимация начальных условий на данной сетке имеет вид:

$$U_i^0 = A \cdot ch^{-2} \left[\frac{x_i - x'}{l} \right], \quad U_i^1 = A \cdot ch^{-2} \left[\frac{x_i - x' - A\tau/3}{l} \right], \quad i = 0, 1, \dots, N;$$

$$x_0 = 0; \quad x_i = \sum_{k=1}^i h_{k-1}; \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где x' - координата положения середины солитона. Вид функции начальных условий на описанной выше сетке приведен на рис. 14. «Калибр» начального распределения равен 15.

Результаты расчета по схеме «Кабаре» на расстоянии в L начальных калибра приведены на рис. 15.

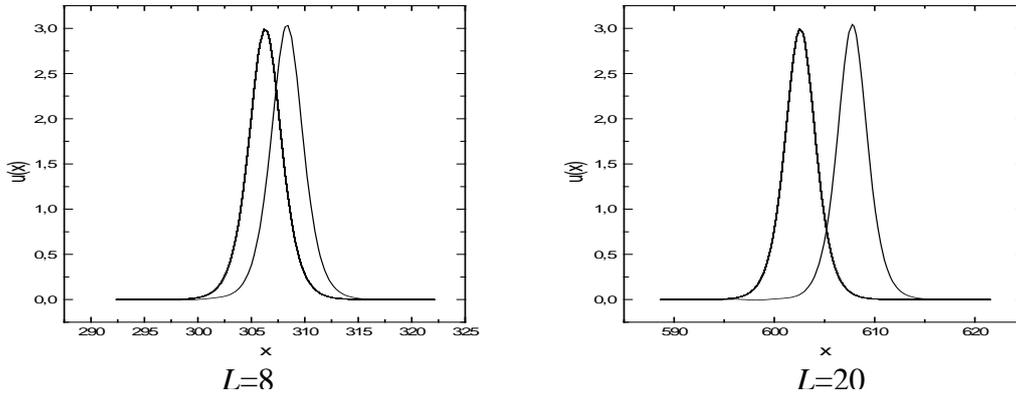


Рис. 15. Графики решения уравнения (1) по схеме «Кабаре» (12) на расстоянии в L начальных калибра на неравномерной пространственной сетке. Степень неоднородности равна трем. Пунктиром отмечено точное решение.

Попытка решить ранее поставленную задачу на неравномерной сетке по схеме «Крест» закончилась неудачей. Аппроксимация уравнения (1) для этого случая выглядит следующим образом:

$$\frac{\hat{U}_i - \check{U}_i}{2\tau} + \frac{L_+ + L_-}{2} = 0,$$

$$L_+ = \frac{U_{i+1}^2 - U_i^2}{2h_i} + \frac{\beta}{h_i} \left[\left(\frac{U_{i+2} - U_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{U_{i+1} - U_i}{h_i} \right) \frac{2}{h_i + h_{i+1}} - \left(\frac{U_{i+1} - U_i}{h_i} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \frac{2}{h_i + h_{i-1}} \right]$$

$$L_- = \frac{U_i^2 - U_{i-1}^2}{2h_{i-1}} + \frac{\beta}{h_{i-1}} \left[\left(\frac{U_{i+1} - U_i}{h_i} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \frac{2}{h_i + h_{i-1}} - \left(\frac{U_i - U_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{U_{i-1} - U_{i-2}}{h_{i-2}} \right) \frac{2}{h_{i-1} + h_{i-2}} \right]$$

$$\tau = t_{n+1} - t_n = \text{const}; \quad h_i = x_{i+1} - x_i > 0; \quad i=2, \dots, N-2.$$

В процессе счета наблюдалась высокоамплитудная «фаскачка» фона (рис. 16). Измельчение пространственной сетки и уменьшение временного шага не дало положительных результатов. Схема работала лишь при значении степени неоднородности сетки близкой к единице.

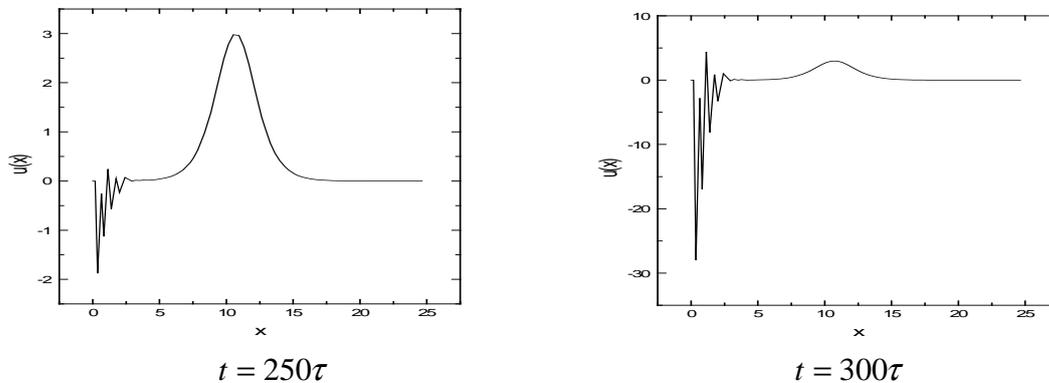


Рис. 16. Решение уравнения (1) по схеме «Крест» на неравномерной пространственной сетке в различные моменты времени.

Из полученных данных можно сделать вывод, что разностная схема «Крест», в отличие от схемы «Кабаре», непригодна для решения уравнения Кортевега – де Вриза на неравномерных пространственных сетках.

Рассмотрим задачу «о двух солитонах». Зададим входные данные в виде двух солитонов:

$$u_0(x,t) = A_1 \cdot ch^{-2} \left[\frac{x - x_1 - A_1 t / 3}{l_1} \right] + A_2 \cdot ch^{-2} \left[\frac{x - x_2 - A_2 t / 3}{l_2} \right],$$

$$l_1 = \sqrt{12\beta / A_1}, \quad l_2 = \sqrt{12\beta / A_2}, \quad A_1 > A_2. \quad (14)$$

Т. к. амплитуда первого солитона больше, чем у второго, то он является более узким, и движется быстрее. В некоторый момент времени, первый солитон догонит второй, каким-то образом с ним провзаимодействует, и будет двигаться дальше, причем амплитуды солитонов до и после взаимодействия должны быть одинаковыми. Параметры начальных условий имели следующие значения: $A_1 = 30$, $A_2 = 12$, $x_1 = 5,6$, $x_2 = 14,2$, $\beta = 1$. Вид начальных условий вида (14) изображены на рис. 17. Задача решалась по схеме «Кабаре» (12) на равномерной пространственной сетке с параметрами: пространственный шаг $h=0,07$, временной шаг $\tau = 0,0001$. Аппроксимация входных данных на этой сетке имеют следующий вид:

$$U_i^0 = \frac{A_1}{ch^2 \left[\frac{ih - x_1}{l_1} \right]} + \frac{A_2}{ch^2 \left[\frac{ih - x_2}{l_2} \right]}; \quad U_i^1 = \frac{A_1}{ch^2 \left[\frac{ih - x_1 - A_1 \tau / 3}{l_1} \right]} + \frac{A_2}{ch^2 \left[\frac{ih - x_2 - A_2 \tau / 3}{l_2} \right]};$$

$$i = 0, 1, \dots, N.$$

Рис. 17. Вид входных данных в задаче «о двух солитонах».

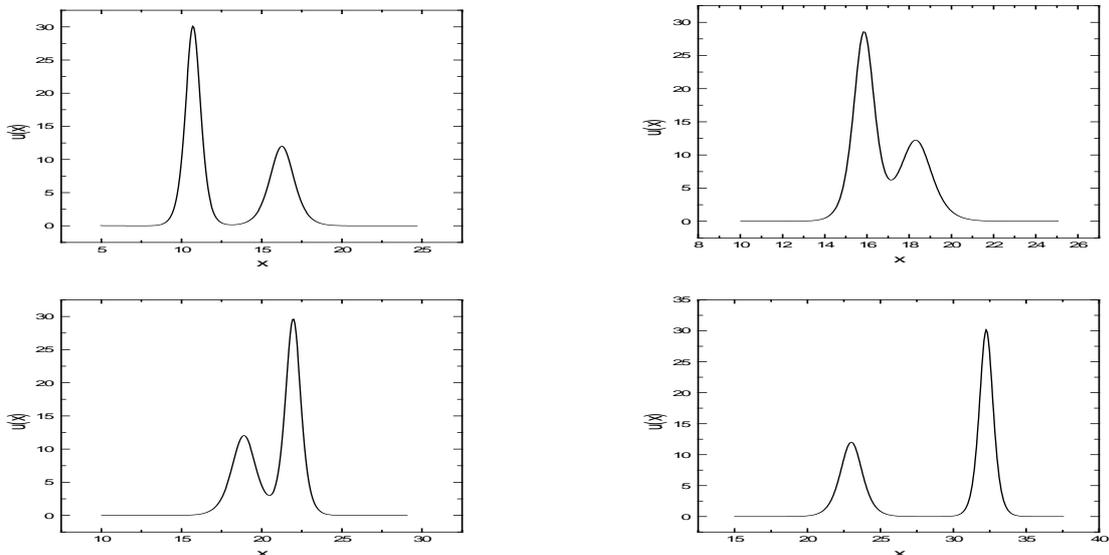
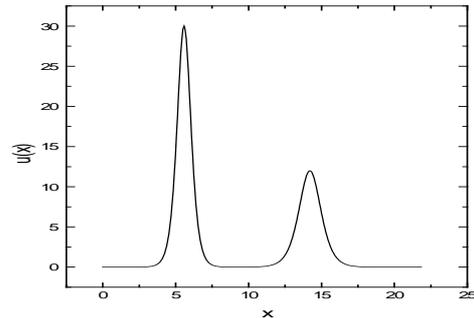


Рис. 18. Эволюция решения задачи «о двух солитонах».

Решение задачи «о двух солитонах» в различные моменты времени изображено на рис. 18. Амплитуды солитонов после взаимодействия, имели значения: $A_1 = 30,13$ и $A_2 = 12,01$.

Исследуем транспортные свойства схемы «Кабаре» (12 а), определенной на шаблоне, изображенном на рис. 2. Для корректной работы этой схемы необходимо задавать некоторое фоновое значение. Входные данные в этом случае имеют следующий вид:

$$u_0(x, t) = A \cdot ch^{-2} \left[\frac{x - x' - (A/3 + u_\phi)t}{l} \right] + u_\phi; \quad (15)$$

$$\beta = 1, \quad A = 3, \quad l = \sqrt{12\beta/A} = 2,$$

где u_ϕ — фон. Возьмем равномерную расчетную сетку с длиной пространственной ячейки $h = \frac{l}{5} = 0,4$. В этом случае $u_\phi = \frac{4\beta}{h^2} = 25$ и $\tau = \frac{h}{u_\phi} = 1,6 \times 10^{-2}$. Аппроксимация входных данных на равномерной сетке имеет вид:

$$U_i^0 = A \cdot ch^{-2} \left[\frac{ih}{l} \right] + u_\phi;$$

$$U_i^1 = A \cdot ch^{-2} \left[\frac{ih - (A/3 + u_\phi)\tau}{l} \right] + u_\phi;$$

$$i = 0, 1, \dots, N.$$

«Калибр» начального распределения порядка 40 ячеек. Вид функции (15), после ее трансляции на расстояние в 200 «калибров», и график зависимости отношения расчетной амплитуды к точному значению от шагов по времени для схем «Кабаре» (12 а) и «Крест» приведены на рис. 19

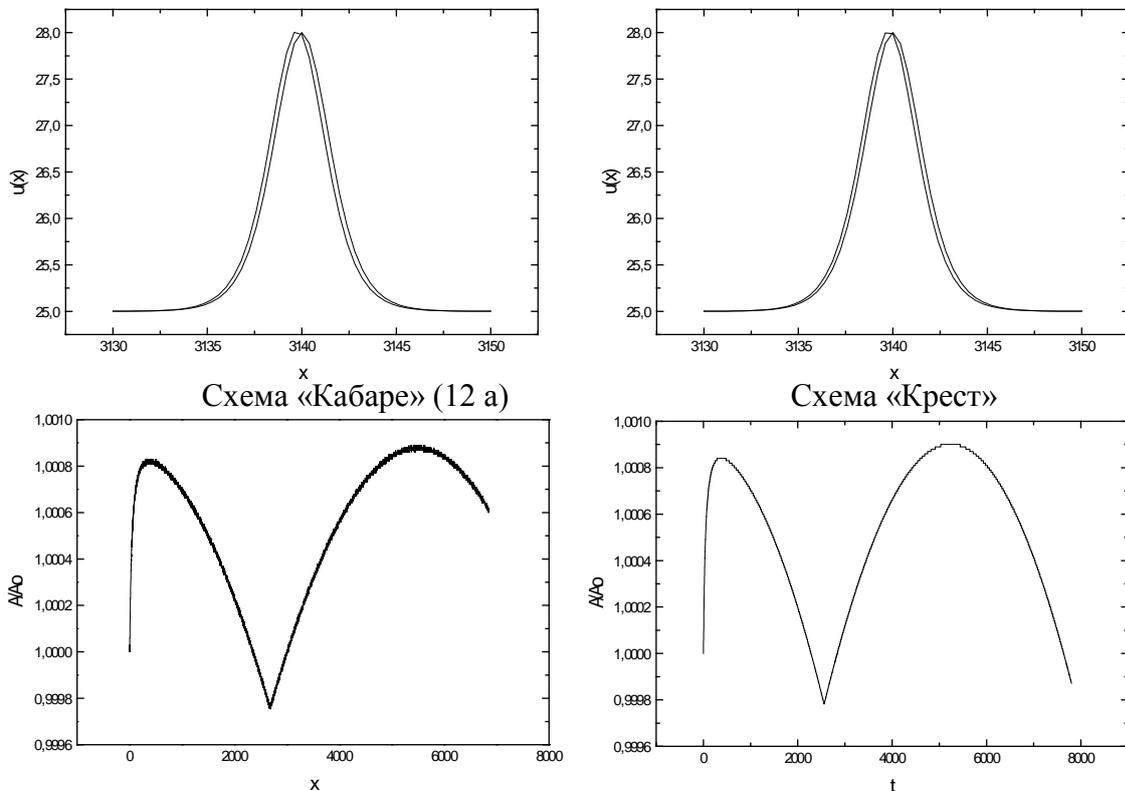


Рис. 19. Вид начальных данных, после их трансляции на расстояние в $L=200$ «калибров», и график зависимости отношения расчетной амплитуды к точному значению от шагов по времени для схем «Кабаре» (12 а) и «Крест».

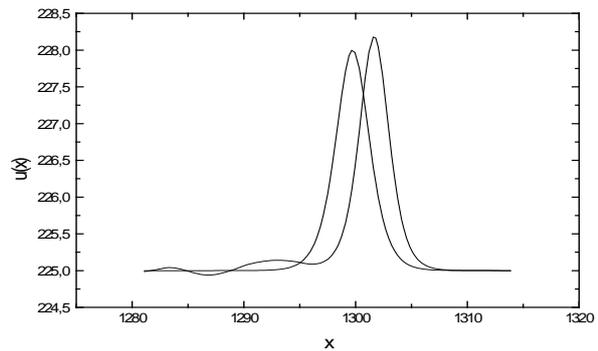
Возьмем нерегулярную сетку с такими же параметрами, как и при решении по схеме «Кабаре» (12): $h_{\max} = \frac{l}{5} = 0,4$; $h_{\min} = \frac{h_{\max}}{3} = 0,13$; $u_{\phi} = \frac{4\beta}{h_{\min}^2} = 225$; $\tau = \frac{h_{\min}}{u_{\phi}} = 5,9 \times 10^{-4}$. В этом случае входные данные будут иметь следующий вид:

$$U_i^0 = A \cdot ch^{-2} \left[\frac{x_i - x'}{l} \right] + u_{\phi}; \quad U_i^1 = A \cdot ch^{-2} \left[\frac{x_i - x' - (A/3 + u_{\phi})\tau}{l} \right] + u_{\phi}; \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

$$x_0 = 0, \quad x_i = \sum_{k=1}^i h_{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Вид решения после переноса входных данных на расстояние в 70 «калибров» показан на рис. 20.

Рис. 20. Вид входных данных после их трансляции на расстоянии в 70 «калибров» по схеме «Кабаре» (12a). Пунктиром отмечено точное решение.



Для сравнения на рис. 21 представлены графики решений после переноса тех же входных данных на расстояние в L «калибров» по схеме «Крест».

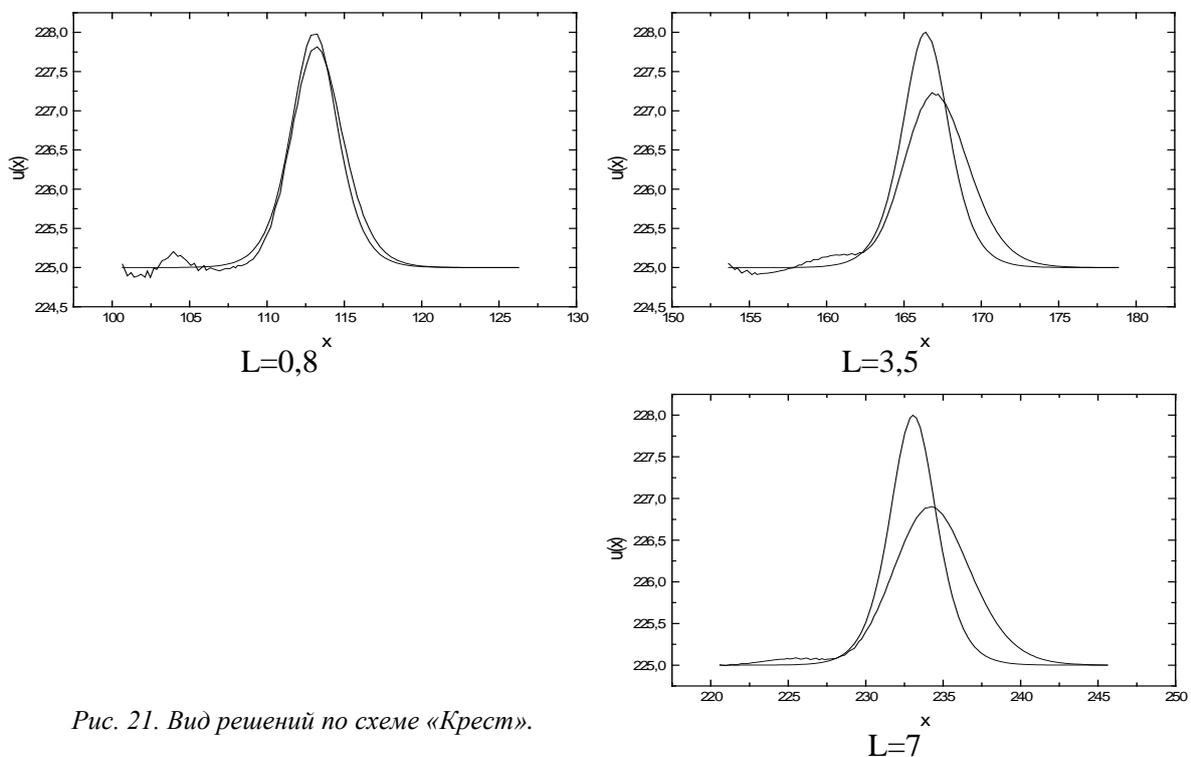


Рис. 21. Вид решений по схеме «Крест».

Как видно из рисунка, схема «Крест» на неравномерной сетке, с входными данными имеющими фоновое значение, обладает сильной диссипацией, и транспортные свойства схемы «Кабаре» (12 а) намного лучше, чем схемы «Крест».

Оценим характер решения с начальными условиями специального вида (4):

$$u_0(x) = Ach^{-2}(x - x_0) + b. \quad (4)$$

Параметры расчета имели следующие значения: $h = 0,07$; $\beta = 0,03$, $b = u_\phi = \frac{4\beta}{h^2} = 25$; $\tau = \frac{h}{u_\phi} = 2,8 \times 10^{-3}$; $A=3$, $l \approx 3$; $x_0 = 10,4$. Для параметра подобия $\delta = \sqrt{Al^2 / \beta}$ имеем $\delta \approx 30 \gg \delta_* = \sqrt{12}$.

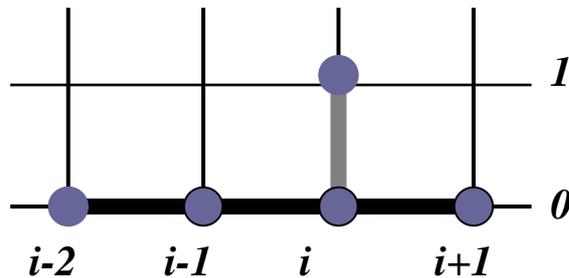
Следовательно решение задачи будет носить солитонный характер, и, применяя формулы (5), можно определить число солитонов N и их амплитуды a_n ($n=1,2, \dots, N$). Схема «Кабаре» является трехслойной, и требует задания начальных данных на двух временных сдоях. Для задания дополнительного начального условия использовалась схема первого порядка «Уголок» (рис. 22):

$$U_i^0 = Ach^{-2}(ih - x_0) + b; \quad i = 0, 1, \dots, N;$$

$$U_i^1 = U_i^0 - \tau \frac{U_i^0 + U_{i-1}^0}{2} \cdot \frac{U_i^0 - U_{i-1}^0}{h} - \frac{\tau\beta}{h^3} (U_{i+1}^0 - 3U_i^0 + 3U_{i-1}^0 - U_{i-2}^0); \quad i = 2, 3, \dots, N-1.$$

«Разгонная» схема «Уголок» обладает отрицательной диссипацией – ростом амплитуды решения в процессе счета, и по этому, при задании дополнительного начального условия вносится ошибка, которая сохраняется при последующих расчетах по схеме «Кабаре».

Рис. 22. Шаблон схемы «Уголок».



Эволюция решения представлена на рис. 23. Для рассматриваемого расчета $N=4$, а значения амплитуд указаны в таблице. Для сравнения здесь же приведены амплитуды солитонов, полученные в результате расчета по схеме «Кабаре».

Таблица. Теоретические и расчетные значения амплитуд солитонов.

| Метод | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 |
|-------------|-------|-------|-------|-------|
| Формула (5) | 4,699 | 2,458 | 0,937 | 0,135 |
| Расчет | 4,699 | 2,483 | 0,939 | 0,153 |

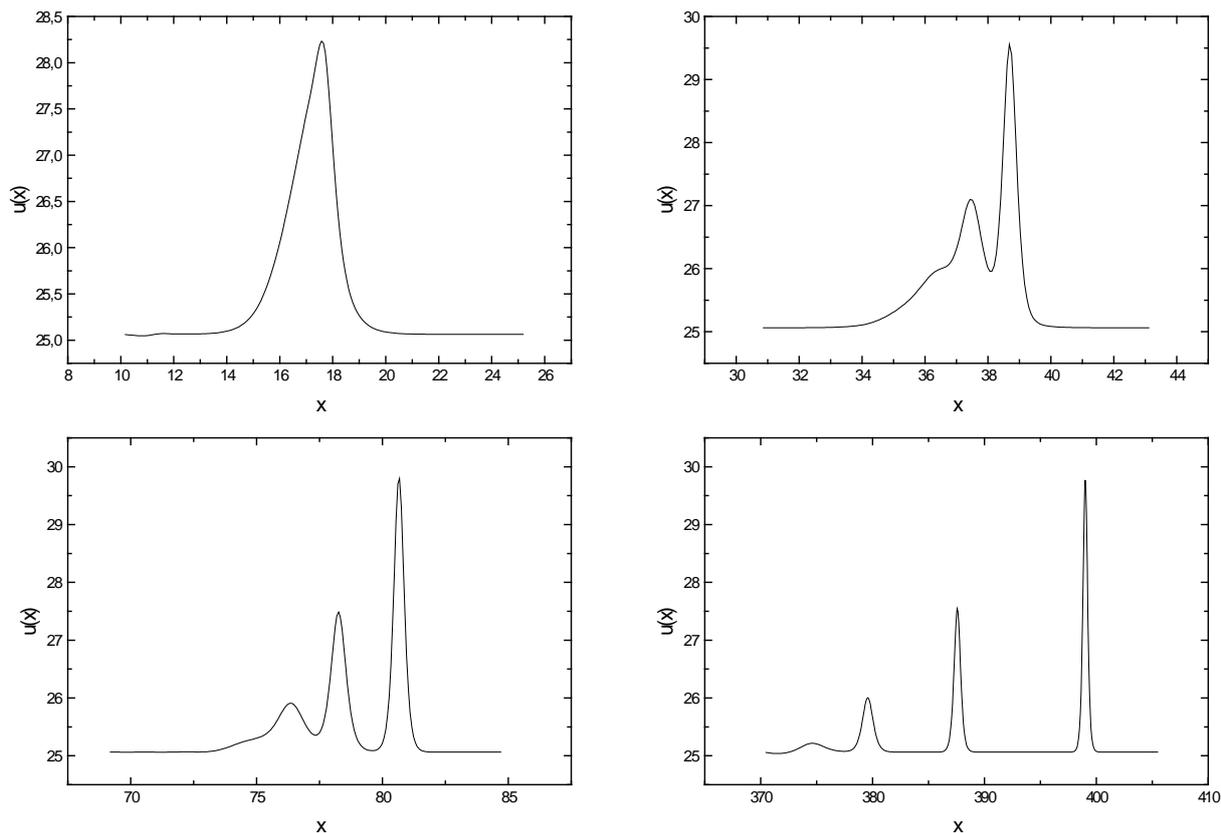


Рис. 23. Эволюция решения с входными данными специального вида (4). $\beta = 0,003$.

Таким образом численные результаты не только качественно, но и количественно хорошо совпадают с теоретическими оценками.

7 Литература

1. Головизнин В. М., Самарский А. А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной. - Математическое моделирование, 1998 г. т. 10, №1.
2. Головизнин В. М., Самарский А. А. Некоторые свойства разностной схемы «Кабаре». - Математическое моделирование, 1998 г. т. 10, № 1.
3. Kortweg D. J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves. - Phyl. Mag. – 1895. – V. 39, № 5.
4. Березин Ю. А. Численное исследование нелинейных волн в разреженной плазме. – Новосибирск: Наука, 1977.
5. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. – Москва: Наука, 1973.
6. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – Москва: Наука, 1992.