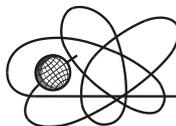




*Российская Академия Наук*

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ  
БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ  
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**



**ИБРАЭ**

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**NUCLEAR SAFETY  
INSTITUTE**

Препринт ИБРАЭ № ИБРАЭ-1999-02

Preprint IBRAE- 1999-02

**А.Н.Кархов**

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ИЗДЕЖКИ И РАВНОВЕСНЫЕ  
ЦЕНЫ В МИКРОЭКОНОМИКЕ**

Москва 1999

Moscow 1999

УДК 621.31

Кархов А.Н. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ИЗДЕРЖКИ И РАВНОВЕСНЫЕ ЦЕНЫ В МИКРОЭКОНОМИКЕ. Препринт № ИБРАЭ-99-02. Москва: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. Май 1999. 33 с. Библиогр.: 8 назв.

#### Аннотация

Роль предельных показателей современной микроэкономической теорией трактуется слишком широко, что приводит к значительному искажению качественных и количественных характеристик экономических процессов. Этот недостаток теории вызван использованием так называемого «закона убывающей доходности» и постулата о неизбежном возрастании средних издержек с ростом выпуска продукции. Показывается как построить теорию микроэкономики, основанную на невозрастающих издержках. Предложен единый подход к математическому описанию развивающихся монополии, дуополии и олигополии в условиях рынка с заданной функцией спроса, причем решения классических задач о монополии, дуополии Курно и Стэкельберга определяют всего лишь некоторые оптимизированные начальные условия их равновесного развития. Получены выражения рыночных цен основных и оборотных фондов развивающихся фирм (технологий). Рассмотрены модели финансирования развития посредством кредитования (инвестирования) и равновесие на финансовом рынке.

©ИБРАЭ РАН, 1999

Karkhov A.N. MARGINAL COSTS AND EQUILIBRIUM PRICES IN MICRO-ECONOMY (in Russian). Preprint IBRAE-99-02. Moscow: Nuclear Safety Institute. May 1999. 33 p. — Refs.: 8 items.

#### Abstract

The role of marginal parameters is treated by the modern micro-economic theory too widely, that results in significant distortion of the qualitative and quantitative characteristics of economic processes. This lack of the theory is caused by use so-called "the decreasing revenue law" and a postulate about inevitable increase of average costs with growth of output. In the given work is shown how to construct the theory of micro-economic, being based on not growing costs. The uniform approach to the mathematical description of evolution of monopoly, duopoly and oligopoly in conditions of the market with the given demand function is offered, and the decisions of classical tasks on monopoly, Cournot's and Stakelberg's duopoly determine only some optimized initial conditions of their equilibrium evolution. The expressions of the market prices basic and circulating capitals of developing firms (technologies) are received. The models of financing of their development by means of crediting (investment) and balance in the financial market are considered.

©Nuclear Safety Institute, 1999

# Предельные издержки и равновесные цены в микроэкономике

*А.Н.Кархов*

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ РАН  
113191, Москва, ул. Б. Тульская, 52  
тел: (095) 955-22-35, факс: (095) 958-11-51, эл. почта: ank@ibrae.ac.ru

## Оглавление

Краткое содержание.....	3
1 Предельные издержки в микроэкономической теории .....	4
1.1 Основные понятия и определения .....	5
1.2 Модель поведения фирмы, использующей только одну технологию .....	6
1.3 Модель поведения фирмы, использующей две и более технологии .....	7
2 Рыночное равновесие в моделях микроэкономики.....	9
2.1 Классические модели монополии, дуополии и олигополии.....	9
2.2 Поведение потребителей и функции спроса .....	10
2.3 Эволюция монополии .....	10
2.4 Эволюция дуополии .....	15
2.5 Дуополия Курно .....	18
2.6 Дуополия Стэкельберга .....	20
2.7 Эволюция олигополии .....	20
3 Предельные цены основных и оборотных фондов .....	24
4 Финансирование развития в рыночной экономике.....	25
4.1 Финансирование посредством кредитования и инвестирования .....	25
4.2 Равновесная цена капитала на финансовом рынке.....	26
5 Заключение. Рынок - инициатор научно-технического прогресса.....	28
Список литературы .....	28
Рис.1.1-2.8 .....	30-34

## Краткое содержание

В основу понятия предельных величин (показателей) в современной микроэкономической теории [1--4] положена оценка экономических показателей дополнительного (предельного) продукта в противовес общепринятым показателям среднего продукта фирмы (технологии). Этой теорией утверждается, что предельные показатели существенно отличаются от средних показателей по смыслу и величине, причем именно на поведение предельных показателей следует в первую очередь обращать внимание при планировании и управлении производством.

В настоящей работе показывается, что роль предельных показателей трактуется современной микроэкономической теорией слишком широко, причем до такой степени, что во многих важных для практики ситуациях это приводит к значительному искажению качественных и количественных характеристик экономических процессов, что препятствует использованию этой теории на практике. Вместе с тем, в действительности показатель предельных издержек всего лишь дополняет показатель средних издержек (т.е. обычную стоимость продукции), поскольку всегда совпадает по величине с показателем средних издержек наилучшей из присутствующих на рынке фирм (технологий).

Указанные недостатки современной микроэкономической теории вызваны использованием так называемого "закона убывающей доходности" для обоснования постулата о неизбежном возрастании средних издержек фирмы (технологии) с ростом выпуска продукции. В данной работе предпринята попытка более строго (чем это делает современная теория) обосновать последнее утверждение с помощью по возможности приближенного к практике рассмотрения фирмы, использующей две технологии и подпадаю-

шей под действие "закона убывающей доходности". Тем не менее, каких-либо доказательств справедливости современной микроэкономической теории получить не удалось. При этом показано, что и в самой теории наблюдаются отступления от упомянутого выше постулата.

В работах [1—4] и других решение задач с помощью известной модели теории фирмы ограничивается только лишь поиском условий получения максимальной прибыли. Принципиальный вопрос о том, какой экономический смысл имеет прибыль и соответственно как прибыль должна использоваться, даже не ставится и не обсуждается. Поэтому при исследовании монополии, дуополии и олигополии совершенно упускается из виду не менее важная (в первую очередь для покупателей) проблема — каким образом должна тратиться получаемая прибыль.

В данной работе утверждается, что прибыль всегда направляется исключительно на развитие. Принципиальные отличия в использовании прибыли могут состоять лишь в том, направляется прибыль на развитие того самого производства, где получена эта прибыль, или на развитие совершенно иных фирм (технологий). Здесь рассмотрение ограничивается наиболее интересным и важным для практики случаем использования прибыли именно для развития тех самых фирм (технологий), которые приносят эту прибыль.

Фактически покупатели непосредственно (т.е. без участия посредников в виде банков или других кредитных учреждений) кредитуют производителя, когда оплачивают не только стоимость продукции, но равновесную цену, включающую прибыль. Если прибыль направляется на развитие производства, со временем на рынок поступает больше товара и цена его снижается. Посредством снижения цен вплоть до уровня стоимости продукции производитель постепенно возвращает покупателям одалживаемые у них средства в виде прибыли.

Предложен единый подход к математическому описанию эволюции монополии, дуополии и олигополии в условиях рынка с функцией спроса достаточно произвольного вида. Показано, что в процессе равновесного развития всегда получают преимущества фирмы (технологии), имеющие меньшие, чем у конкурентов, средние издержки (стоимость) продукции, что в свою очередь является следствием научно-технического прогресса (НТП). Фирмы (технологии), у которых использование НТП недостаточно и вследствие этого средние издержки являются в данный момент предельными, первыми вытесняются с рынка в процессе развития. Таким образом, рынок выступает как инициатор и проводник НТП.

Решения классических задач о монополии, дуополии Курно и Стэкельберга определяют некоторые оптимизированные по критерию максимума прибыли начальные условия, которые далее могут быть использованы при математическом моделировании равновесного развития всех фирм (технологий), снабжающих данный рынок. Конечным стационарным равновесным состоянием этого рынка независимо от начальных условий в идеале всегда является монополия, имеющая средние издержки (стоимость продукции), совпадающие с рыночной ценой продукции.

Предложенная модель рыночного равновесия позволила также оценить рыночные цены основных и оборотных фондов развивающихся фирм (технологий) и в общих чертах объективно описать процесс рыночных спекуляций. Рассмотрены модели финансирования развития посредством кредитования и инвестирования. Предложены выражения стоимости и цены капитала. Исследована простейшая модель равновесного финансового рынка.

## **1 Предельные издержки в микроэкономической теории**

В современной зарубежной микроэкономической теории (например в работах [1-3]) наряду с традиционными средними величинами широко используется методология предельных ("маржинальных") издержек и других предельных показателей. В последнее время эта методология активно обсуждается также и в российских изданиях [3, 4].

В основу понятия всех предельных величин положена оценка экономических показателей дополнительного (предельного) продукта в противовес общеизвестным показателям среднего продукта. В теории утверждается, что предельные показатели существенно отличаются от средних показателей по смыслу и величине, причем именно на поведение предельных показателей должно в первую очередь обращать внимание при планировании и управлении производством.

Ниже показывается, что роль предельных показателей трактуется современной микроэкономической теорией слишком широко, причем до такой степени, что во многих важных для практики ситуациях это

приводит к искажению сути экономических процессов. Тем не менее, показатель предельных издержек, дополняя показатель средних издержек (т.е. стоимость продукции), играет важную роль в понимании рыночной экономики.

## 1.1 Основные понятия и определения

В микроэкономической теории принято использовать следующие основные понятия и определения:

- выпуск продукции данной фирмой  $Q$  за период времени наблюдения  $T_0$ , имеющий размерность [единиц продукции/период времени];
- фиксированные издержки  $FC$  (Fixed Costs) производства, [руб./период времени];
- переменные издержки  $VC$  (Variable Costs) производства, [руб./период времени];
- полные издержки  $TC$  (Total Costs), равные суммарным издержкам фирмы при выпуске  $Q$  единиц продукции за рассматриваемый период времени  $T_0$ :

$$TC=FC+VC, \text{ [руб./период времени];} \quad (1.1)$$

- средние (в отечественной литературе называемые удельными) издержки  $AC$  (Average Costs), относимые на единицу продукции:

$$AC=TC/Q=FC/Q+VC/Q, \text{ [руб./ед.прод.];} \quad (1.2)$$

- средние (удельные) фиксированные издержки  $AFC=FC/Q$  (Average Fixed Costs) производства, [руб./ед.прод.];

- средние (удельные) переменные издержки  $AVC=VC/Q$  (Average Variable Costs), [руб./ед.прод.];

- предельные издержки  $MC$  (Marginal Costs), определяемые приростом полных издержек  $TC$  (или эквивалентно - приростом переменных издержек  $VC$ ) в результате прироста выпуска продукции:

$$MC=\Delta TC/\Delta Q=\Delta VC/\Delta Q \text{ [руб./ ед.прод.]}, \quad (1.3)$$

т.е. предельные издержки равны приращению полных (переменных) издержек в результате увеличения выпуска продукции, поскольку фиксированные издержки постоянны;

- встречается также несколько иное определение предельных издержек [4], как прироста полных издержек  $TC$  (или переменных издержек  $VC$ ) при увеличении выпуска продукции на единицу:

$$MC = TC(Q+1) - TC(Q) = VC(Q+1) - VC(Q). \quad (1.4)$$

В дальнейшем для упрощения написания математических выражений и моделей введем следующие эквивалентные обозначения:

$$C_f=AFC=FC/Q; \quad (1.5)$$

$$C_v=AVC=VC/Q. \quad (1.6)$$

Сумма двух составляющих (1.5) и (1.6) образует стоимость продукции, [руб./ед.прод.]:

$$C = C_f + C_v. \quad (1.7)$$

По определению  $FC$  есть величина постоянная, не зависящая от  $Q$ , поэтому составляющая  $C_f$  (1.5) быстро уменьшается с увеличением  $Q$ . При достаточно большом  $Q$  обычно оказывается  $C_f \ll C_v$  и с достаточной степенью приближения можно принимать  $C=C_v$ .

Величина переменных издержек  $VC$  всегда возрастает с увеличением  $Q$ . Однако существуют различные подходы к определению поведения составляющей средних переменных издержек  $C_v=VC/Q$  при изменении величины  $Q$ .

Согласно первому подходу (см. численный пример, представленный на Рис.1.1) считается, что  $C_v$  (1.6) не зависит от  $Q$  или очень слабо зависит от  $Q$  так, что этой зависимостью в первом приближении можно пренебречь. Этот подход широко используется в практических расчетах и в общей теории, в част-

ности, в теории дисконтированных (приведенных) затрат. В качестве некоторой модификации этого подхода иногда учитывается также эффект масштаба производства (на Рис.1.1 при  $Q < 4$ ), проявляющийся в тех случаях, когда при возрастании использования одновременно всех факторов производства (материалов, энергии, труда) удельные издержки  $C_v$  несколько уменьшаются при увеличении  $Q$ . Производство оказывается рентабельным, если рыночная цена  $P$  продукции (как товара) оказывается выше стоимости этой продукции:  $P \geq C = C_f + C_v$ . Последнее фактически означает, что согласно первому подходу производство не имеет внутреннего стремления к самоограничению, поскольку разница между ценой  $P$  и стоимостью  $C$  увеличивается с ростом  $Q$ . Все ограничения накладываются на производство только извне, т.е. рынком. В соответствии с Рис.1.1 далее для краткости будем именовать первый подход как "невозрастающие издержки".

При втором подходе считается, что составляющая  $C_v = C_v(Q)$  является функцией от  $Q$ , причем при относительно небольших значениях  $Q$  величина  $C_v(Q)$  уменьшается (так же, как и на Рис.1.1), достигает минимума и затем начинает увеличиваться с ростом  $Q$ , причем этой зависимостью никак нельзя пренебрегать при анализе производства (см. Рис.1.2). В качестве основания для второго подхода привлекается "закон убывающей доходности", проявлением которого объясняется эффект возрастания средних издержек в том случае, когда дополнительные единицы одного изменяющегося фактора (затрат труда) последовательно прибавляются к неизменному количеству других ресурсных факторов производства (затрат материалов и энергии). В соответствии с Рис.1.2 далее будем именовать второй подход как "возрастающие издержки".

Приняв возрастание  $C_v(Q)$  с ростом  $Q$  в качестве главного постулата, современная микроэкономическая теория доказывает наличие внутренне присущего производству стремления к самоограничению роста выпуска продукции уровнем  $Q_0$  (см. Рис.1.2) при условии  $P = MC(Q)$ , где предельные издержки  $MC(Q)$  по определению являются возрастающими (с увеличением  $Q$ ) быстрее, чем средние переменные издержки  $C_v(Q)$ . Таким образом, при втором подходе предполагается наличие как внешнего (рынок), так и внутреннего (рост издержек) экономических факторов, управляющих уровнем производства.

Обратим внимание на такое важное обстоятельство, что составляющая  $C_f$  ведет себя совершенно одинаково при обоих подходах, т.е. быстро уменьшается с возрастанием  $Q$  (см. Рис.1.1 и Рис.1.2). Поэтому во многих случаях в процессе анализа эта составляющая может опускаться и при необходимости вводиться в окончательный результат оптимизации.

Именно второй подход положен в основу производственных моделей в современной микроэкономической теории [1-4] и преподносится как наиболее общий, в то время, как первый подход упоминается лишь вскользь, как некий частный случай. Этим фактически исключается рассмотрение линейного приближения, обычно играющего главную роль при решении многочисленных практических задач. Вместе с тем, ниже показывается, что вовсе нет необходимости противопоставлять первый и второй подходы (т.е. линейное и нелинейное приближения), поскольку методология предельных издержек оказывается применимой при любом из указанных выше подходов, т.е. как при возрастающих, так и при невозрастающих средних издержках.

## 1.2 Модель поведения фирмы, использующей только одну технологию

Рассмотрим обобщенный пример [4] определения оптимального выпуска продукции фирмой, использующей одну технологию, средние издержки которой возрастают с увеличением выпуска продукции  $Q$  исключительно за счет роста применения только одного фактора - затрат труда  $L$ .

Пусть согласно "закону убывающей доходности" рост выпуска продукции  $Q$  сопровождается возрастанием средней трудоемкости, описываемой функцией:  $L/Q = a + b*Q$ , где  $a$  и  $b$  - известные технологические коэффициенты. Из этого соотношения следует выражение для определения полной трудоемкости:

$$L = a*Q + b*Q^2, \quad (1.8)$$

которое описывает связь между объемом производства и трудозатратами при наличии всех других производственных ресурсов. Зная ставку заработной платы  $s$ , получим выражение полных издержек на оплату труда в виде:  $TC_1 = s*(a*Q + b*Q^2)$ .

Пусть для производства  $Q$  единиц продукции необходимо затратить  $E*Q$  руб. на покупку электроэнергии и  $M*Q$  руб. на покупку материалов, т.е. полные издержки по этим статьям затрат составят:  $TC_2 = (E+M)*Q$ . Пренебрегая для простоты фиксированными издержками (считая  $Q$  достаточно большим), запишем выражение полных издержек фирмы в виде:

$$TC = TC_1 + TC_2 = s*(a*Q + b*Q^2) + (E + M)*Q = C(Q)*Q.$$

Введя обозначения  $A=S+E+M$ ,  $S=s*a$ ,  $B=s*b$ , представим средние издержки фирмы в виде  $C(Q)=A+B*Q$  и соответственно полные издержки в виде:

$$TC = C(Q)*Q = A*Q + B*Q^2. \quad (1.9)$$

Согласно теории фирмы [1], прибыль при рыночной цене  $P$  определяется выражением:

$$Pr = P*Q - TC = (P - A)*Q - B*Q^2. \quad (1.10)$$

Как известно, условие оптимума прибыли можно получить, приравняв к нулю первую производную выражения (1.10):  $dPr/dQ=(P-A)-2*B*Q=0$ , откуда искомым оптимум выпуска продукции, обеспечивающий фирме максимум прибыли, есть:

$$Q_m = (P - A)/(2*B). \quad (1.11)$$

Подставляя выражение (1.11) в (1.10), получаем выражение для определения максимума прибыли:

$$Pr_m = (P - A)^2/(4*B). \quad (1.12)$$

Микроэкономическая теория предлагает при оптимизации выпуска продукции использовать предельные издержки. Воспользовавшись определением  $MC=\Delta TC/\Delta Q$  (1.3), в условиях рассматриваемого примера получаем:  $MC=A+2*B*Q$ . Поскольку фирме выгодно наращивать производство до тех пор, пока предельные издержки остаются не выше рыночной цены продукции (см. Рис.1.2), оптимальный выпуск продукции определяется соотношением:  $MC=P=A+2*B*Q$ , откуда получаем выражение:  $Q_o=(P-A)/(2*B)$ , совпадающее с выражением (1.11), т.е. имеем  $Q_o=Q_m$  и использование показателя предельных издержек в случае возрастающих издержек не вносит ничего нового по сравнению с классическим методом оптимизации.

Как следует из выражений (1.8)-(1.10), только наличие у фирмы (технологии) возрастающих средних издержек  $C(Q)$  (коэффициента  $B$  отличного от нуля), является решающим для существования оптимального решения (1.11). Однако при переходе к невозрастающим средним издержкам ( $B=0$ ) выражение (1.11) обращается в бесконечность и оптимальное решение теряет смысл.

Рассмотрим тот же пример, считая средние издержки изначально невозрастающими (Рис.1.1), т.е. полагая, что фирма может наращивать выпуск продукции только пропорционально увеличивая потребление всех ресурсов - труда, материалов и электроэнергии. В этом случае полная трудоемкость продукции описывается функцией:  $L=a*Q$  (т.е. имеем в (1.8)  $b=0$ , в (1.9)  $B=0$ ), откуда получаем:  $TC=C*Q$ , где  $C=A+S+E+M$  есть средние издержки, связанные с использованием одновременно всех ресурсов для производства единицы продукции. Используя теорию фирмы [1] и классический метод оптимизации, получаем:

$$Pr = P*Q - TC = (P - C)*Q \text{ и } dPr/dQ = P - C = 0, \text{ (т.е. } P=C). \quad (1.13)$$

Итак, прибыль достигает оптимума при  $P=C$ , т.е. когда рыночная цена оказывается равной средним издержкам независимо от величины выпуска продукции  $Q$ . Однако этот оптимум при невозрастающих издержках является минимумом прибыли, поскольку при  $P=C$  согласно (1.13) имеем  $Pr=0$ .

Воспользовавшись выражением предельных издержек (1.3) и условием  $MC=P$ , получаем:  $MC=\Delta TC/\Delta Q=P=C$ , т.е. то же самое условие (1.13). Этот же результат приводится в работе [4].

Таким образом, при использовании фирмой только одной технологии с невозрастающими издержками предельные издержки теряют смысл необходимого дополнительного показателя, поскольку всегда по величине совпадают со средними издержками. Однако при использовании фирмой двух и более технологий показатель предельных издержек приобретает самостоятельную значимость даже при невозрастающих средних издержках технологий.

### 1.3 Модель поведения фирмы, использующей две и более технологии

Допустим фирма подрядилась выкопать траншею заданных размеров за вполне определенный период времени  $T_o$ , для чего требуется выполнить количество работы  $Q$ . У этой фирмы имеется экскаватор (технология 1, средние производственные издержки которой есть  $C_1$ ), однако известно, что за время  $T_o$  экс-

каватор сможет выполнить только вполне определенный объем работы  $Q_1 < Q$ . Поэтому фирма решает нанять землекопов с лопатами (технология 2, средние издержки которой есть  $C_2$ ), которые должны выполнить недостающий объем работ  $Q_2$  ( $Q = Q_1 + Q_2$ ). Пусть издержки  $C_1$  и  $C_2$  являются невозрастающими функциями объемов выполненных работ ( $Q_1$  и  $Q_2$ ) и  $C_2 > C_1$ , поскольку в противном случае экскаватор (технология 1) использовать нецелесообразно. Вместе с тем, для фирмы выполняется условие применимости "закона убывающей доходности", когда дополнительный объем работ выполняется исключительно за счет привлечения лишь одного ресурса - труда.

Полные издержки фирмы, использующей две технологии, записываются в виде:

$$TC = C_1 * Q_1 + C_2 * Q_2 = -(C_2 - C_1) * Q_1 + C_2 * Q. \quad (1.14)$$

Выполнив всю работу, фирма получит прибыль, равную:  $Pr = P * Q - TC = P * Q + (C_2 - C_1) * Q_1 - C_2 * Q$ . При фиксированном значении  $Q_1$  и изменяющейся величине полного объема работ  $Q$  оптимум прибыли будет достигаться при  $(dPr/dQ) = P - C_2 = 0$ , т.е. при условии, что цена, запрашиваемая фирмой за выполняемую работу, устанавливается равной  $P = C_2$ , т.е. средним издержкам худшей (с большими издержками) из используемых технологий. При этом прибыль фирмы окажется равной:

$$Pr = (P - C_1) * Q_1, \quad (1.15)$$

т.е. будет определяться исключительно технологией 1, поскольку использование технологии 2 при  $P = C_2$  прибыли фирме не приносит, являясь всего лишь вынужденной мерой, вызванной необходимостью выполнить работу за период времени  $T_0$ .

Этот же результат получается, если воспользоваться определением предельных издержек (1.3) и выражением (1.14):  $MC = \Delta TC / \Delta Q = C_2$ . Поскольку предельные издержки должны быть равны цене продукции (работы), опять приходим к условию:  $MC = P = C_2$ . Таким образом, при использовании двух отличающихся технологий предельные издержки оказываются равными средним издержкам (стоимости продукции) худшей технологии, в то время, как прибыль фирме полностью обеспечивает лучшая технология.

Допустим фирма решила "объединить экономически" эти две различные технологии в одну технологию 1+2. Исходя из выражения полных издержек (1.14), разделив которое на  $Q$ , получим выражение средних издержек фирмы, использующей технологию 1+2 в виде:

$$C_{1+2} = C_2 * (1 - Q_1/Q) + C_1 * (Q_1/Q). \quad (1.16)$$

Из выражения (1.16) следует, что при  $Q = Q_1$  имеем  $C_{1+2} = C_1$ ; при  $Q \gg Q_1$  оказывается:  $C_{1+2} = C_2 > C_1$ . Таким образом, при объединении двух технологий с невозрастающими издержками, средние издержки фирмы  $C_{1+2}$  оказываются возрастающими, если объем работы окажется  $Q > Q_1$ . При этом худшая технология 2 будет существовать за счет прибыли, зарабатываемой лучшей технологией 1.

Цена выполненной работы  $P_0$ , при которой прибыль фирмы, объединившей технологии, обратится в ноль, составляет:  $P_0 = C_2 * (1 - Q_1/Q) + C_1 * (Q_1/Q)$ . Естественно эта цена оказывается равной средним издержкам этой фирмы, т.е.  $P_0 = C_1$  при  $Q = Q_1$ ;  $P_0 = C_2$  при  $Q \gg Q_1$ .

В то же время оказывается, величина предельных издержек, определяемая на основании выражений (1.3) и (1.14) для фирмы, использующей объединенную технологию 1+2, по-прежнему составляет:

$$MC = \Delta TC / \Delta Q = C_2 > C_{1+2}, \quad (1.17)$$

что демонстрирует тот крайне важный факт, что несмотря на снижение средних издержек у фирмы, объединившей различных технологий, предельные издержки по-прежнему оказываются равными средним издержкам худшей технологии. Поведение величин  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_{1+2}$  и  $MC$  в зависимости от  $Q_1$  и  $Q$  представлено на Рис. 1.3.

Таким образом, предельные издержки  $MC = P = C_2$  более правильно, чем средние издержки  $C_{1+2}$  показывают предпочтительный для фирмы уровень цены, позволяющий фирме избежать потерь прибыли. Такой же общий вывод содержится и в работе [3, стр.231] после рассмотрения приведенного ниже численного примера.

По условию этого примера фирма, выпускает в день 100 ед. продукции, из которых 75 ед. производится в урочное время (технология 1) и 25 ед. - в сверхурочное время (технология 2). Полные материальные издержки равны 500 долл./день. Основная заработная плата составляет 2000 долл./день плюс 1000 долл./день за сверхурочную работу.

Средние издержки технологий 1 и 2 равны:  $C_1=(2000/75+500/100)=31,7$ ;  $C_2=(1000/25+500/100)=45$  долл./ед. продукции. Средние издержки фирмы  $C_{1+2}$  определяются делением полных издержек  $ТС=(500+2000+1000)=3500$  долл./день на полный выпуск продукции  $Q=100$  ед./день, т.е. имеем  $C_{1+2}=35$  долл./ед. продукции, из которых 5 долл./ед. продукции составляют материальные издержки, которые полагаются неизменными как при основной, так и при сверхурочной работе.

Предельные издержки связываются исключительно со сверхурочной работой и определяются суммой составляющих предельных издержек на зарплату и материалы:  $МС=(1000/25+5)=45$  долл./ед. продукции. Таким образом, фирме для успешного функционирования предлагается ориентироваться не на средние издержки  $C_{1+2}=35$  долл./ед. продукции, а на предельные издержки  $МС=45$  долл./ед. продукции, совпадающие со средними издержками  $C_2=45$  долл./ед. продукции, т.е. в данном примере предельными называются средние издержки наихудшей (наиболее дорогой) технологии. Далее всюду используется именно такое определение предельных издержек.

Обратим внимание на то обстоятельство, что в этом примере не идет речи о возрастающих средних издержках отдельной технологии. Вообще говоря, обосновать возрастание средних издержек, (Рис.1.2) на практике оказывается проблематично. В работах [1-4] нет никаких достоверных доказательств того факта, что рассматриваемые численные или обобщенные примеры взяты из практики фирм или технологий. Вместе с тем, очень просто привлечь практический материал для примеров с невозрастающими средними издержками. Поэтому во всех учебниках по микроэкономике (например, [3-4]) часто производится незаметная для читателя подмена, состоящая в том, что в примерах, оторванных от практики, активно популяризируются возрастающие средние издержки, тогда как в примерах, приближенных к практике (подобных приведенному выше), используются исключительно невозрастающие издержки. Последнее заставляет сомневаться в обоснованности упоминавшегося выше теоретического постулата о том, что возрастающие издержки проявляются повсеместно.

Возможное объяснение этому обстоятельству состоит в том, что практика обычно имеет дело с "отработанными", "совершенными" технологиями, у которых соотношение между используемыми ресурсами (материалы, энергия, труд) оптимизировано и поэтому средние издержки являются невозрастающими. Любая попытка изменить соотношение между используемыми ресурсами неизбежно приводит к ухудшению экономических показателей технологии, чего конечно фирмы на практике не допускают. В итоге корректировка использования какого-либо ресурса приводит к смене технологии, но всегда на лучшую.

Приведенное выше определение предельных издержек можно обобщить на случай любого числа фирм (технологий), выходящих на рынок. Пусть на рынке продается одна и та же продукция, произведенная тремя технологиями (например, электроэнергия, выработанная тремя различными типами электростанций), имеющими стоимости продукции  $C_1 < C_2 < C_3$ . Первая технология поставляет количество продукции  $Q_1$ , вторая  $Q_2$ , третья  $Q_3$  и соответственно вместе они поставляют потребляемой рынком количество продукции  $Q=Q_1+Q_2+Q_3$ . Будем предполагать, что производственные мощности технологий 1 и 2 (как наиболее эффективных) полностью загружены и весь остающийся дефицит продукции покрывается технологией 3, производительность которой составляют  $Q_3 = Q - Q_1 - Q_2$ .

Полные издержки производства продукции равны сумме полных издержек всех трех технологий:

$$ТС = C_1*Q_1 + C_2*Q_2 + C_3*Q_3 = (C_1 - C_3)*Q_1 + (C_2 - C_3)*Q_2 + C_3*Q,$$

откуда следует, что предельные издержки равны  $МС=\Delta ТС/\Delta Q=C_3$ . Следовательно рыночная цена продукции должна назначаться равной предельным издержкам ( $P=C_3$ ). Технологии 1 и 2 будут получать прибыль, определяемую разностью между рыночной ценой (т.е. предельными издержками  $C_3$ ) и средними издержками технологий  $C_1$  и  $C_2$ .

## 2 Рыночное равновесие в моделях микроэкономики

### 2.1 Классические модели монополии, дуополии и олигополии

Классические модели монополии, дуополии Курно и Стэкельберга, олигополии рассматриваются в большинстве изданий, касающихся математического моделирования рыночной экономики и микроэкономики. Для примера сошлемся на хорошо известную монографию [1] и на недавние работы [3, 4]. В этих изданиях, отстоящих по времени более чем на 25 лет, трактовка указанных моделей практически

одинакова. И не удивительно, поскольку решения задач Курно и Стэкельберга относятся еще к прошлому веку и с тех пор практически не претерпели изменений.

В основу постановки упомянутых выше задач положено понятие равновесного рынка. Под равновесным понимается такое состояние, которое выгодно всем участникам рынка (производителям и потребителям) и от которого они не стремятся уйти. Монополистом принято называть единственного производителя, действующий на данном рынке. Дуополией называется состояние рынка, когда на нем присутствует только два равноправных производителя (дуополиста), каким либо образом разделивших рынок между собой. Олигополией называется состояние рынка, когда на нем действуют более двух (т.е. много) равноправных производителей (олигополистов).

Предполагая, что общая постановка классических задач хорошо известна (в противном случае отсылаем к источникам [1, 3, 4]), тем не менее будем останавливаться на некоторых конкретных положениях для того, чтобы максимально упростить понимание сути рассматриваемых проблем.

## 2.2 Поведение потребителей и функции спроса

Всякий рынок характеризуется некоторым спросом и предложением, которые зависят от поведения производителей и потребителей. При моделировании поведения потребителей принято использовать понятие функции полезности [1-4]. Предполагается, что потребитель всегда стремится максимизировать значение функции полезности на бюджетном множестве, т.е. некотором бюджетном ограничении, задаваемом в виде соответствующей гиперповерхности. Кривая, соединяющая максимумы функции полезности (изображаемой линиями постоянной полезности), называется функцией спроса. Показано [4], что для различных линий постоянной полезности функция спроса может иметь вид гиперболы:

$$P=G/Q, \quad (2.1)$$

где  $P$  — цена единицы продукции, руб./ед. прод.

$Q$  — объем предложения, т.е. количество ед.прод./ед.времени;

$G$  — размерная постоянная, имеющая в данном случае размерность руб./ед.времени.

Очевидно функцию спроса можно также записать в виде:  $Q=G/P$ . Функции  $Q=G/P$  и  $P=G/Q$  (2.1) есть одна и та же неограниченная гипербола с асимптотами, совпадающими с осями координат:  $Q$  (при  $P=0$ ) и  $P$  (при  $Q=0$ ).

Если в рассматриваемой задаче величины  $P$  и  $Q$  изменяются в небольших пределах, то допустимо аппроксимировать гиперболу ограниченной линейной зависимостью вида:

$$P = J - H*Q. \quad (2.2)$$

Соответственно обратная функция имеет вид:  $Q = J/H - (1/H)*P = J' - H'*P$ , где  $J' = J/H$ ,  $H' = 1/H$ .

## 2.3 Эволюция монополии

Монополия представляет собой рыночную ситуацию, при которой все предложение (производство) товара в количестве  $Q(t)$  в любой момент времени  $t$  сосредоточено в руках одного продавца — монополиста. При этом предполагается, что на рынке действует много покупателей и их общий спрос на данный товар известен и задан функциями вида (2.1) или (2.2). На монополиста отсутствует давление конкуренции и поэтому состояние рынка во многом определяется добросовестностью (порядочностью) монополиста и соответствующей инспекцией. Первоначально рассмотрим, как будет развиваться добросовестный (контролируемый) монополист. Как принято, инфляцию всюду в анализе будем считать исключенной использованием денежных единиц некоторого базового года.

Для описания поведения развивающегося монополиста воспользуемся известной в теории фирмы моделью [1], в соответствии с которой записывается соотношение:

$$Pr(Q_i) = P(Q_i)*Q_i - C(Q_i)*Q_i, \quad (2.3)$$

где  $Pr(Q_i)$  — прибыль (profit) монополиста, (руб./ед. времени), определяемая на некотором  $i$ -ом шаге, соответствующем некоторому периоду времени  $t_i$ ;

$P(Q_i)$  — устанавливаемая рынком цена на продукцию монополиста, (руб./ед. прод.) на  $i$ -ом шаге;

$C(Q_i)$  — средние издержки (стоимость), (руб./ед. прод.) на  $i$ -ом шаге.

Имеется в виду совершенно любая продукция  $Q_i$ , измеряемая в штуках, тоннах (килограммах), метрах, электроэнергия в кВт.ч и проч.; за единицу (период) времени часто принимают отчетный год.

Будем далее предполагать, что зависимости  $P(Q_i)$  и  $C(Q_i)$  известны. Зависимость  $P(Q_i)$  определяется функцией спроса, например, вида (2.1) или (2.2). Зависимость  $C(Q_i)$  определяется свойствами используемой технологии и может быть достаточно произвольной. Единицу времени (шаг расчета в модели) по умолчанию всегда будем предполагать такой, чтобы внутри этой единицы можно было бы считать величины:  $P(Q_i)=P$ ,  $C(Q_i)=C$  и  $Pr(Q_i)=Pr$  постоянными (дискретными) на каждом  $i$ -ом шаге расчета в модели, т.е. на каждом шаге расчета вместо выражения (2.3) будем использовать упрощенное выражение:

$$Pr = P*Q - C*Q, \quad (2.3')$$

относящееся к некоторому значению  $Q_i=Q$ , которое может меняться лишь при переходе от шага к шагу.

В цитируемых здесь источниках [1, 3, 4] и многих других работах решение задач с помощью модели (2.3), (2.3') ограничивается исключительно поиском условий получения максимальной прибыли. Принципиальный вопрос о том, какой экономический смысл имеет прибыль и соответственно, как она должна использоваться, даже не ставится и не обсуждается. По-видимому, молчаливо предполагается, что любой производитель полностью правомочен распоряжаться всей чистой прибылью (т.е. прибылью за вычетом налогов) по своему усмотрению. Поэтому в теории фирмы при исследовании монополии, дуополии и олигополии совершенно упускается из виду не менее важная (в первую очередь для покупателей) проблема — куда и как должна тратиться получаемая прибыль.

Вместе с тем, прибыль это есть дополнительные средства производителей (пока забудем о налогах, взимаемых с прибыли, т.е. не будем различать полную и чистую прибыль), которыми они действительно могут распоряжаться по своему усмотрению. Однако важно иметь в виду (и понимать), что куда бы не направлялась прибыль, она всегда используется исключительно на развитие (предоставим читателям самостоятельно убедиться в справедливости этого утверждения). Принципиальные отличия в использовании прибыли могут состоять лишь в том, направляется прибыль на развитие того самого производства, где получена эта прибыль, или на развитие совершенно иных производств (технологий, фирм, отраслей). Ограничимся здесь рассмотрением наиболее интересного и важного направления использования прибыли именно для развития тех самых производств (технологий), которые приносят эту прибыль.

Фактически покупатель непосредственно (т.е. без участия посредников в виде банков или других кредитных учреждений) кредитует производителя, когда оплачивает не только стоимость продукции (т.е. возмещающая производственные издержки), но равновесную цену, включающую прибыль. Если прибыль направляется на развитие производства, со временем на рынок поступает больше товара и цена его снижается. Таким образом, посредством снижения цен вплоть до уровня стоимости продукции производитель постепенно возвращает покупателям одалживаемые у них средства в виде прибыли. Покажем, каким образом этот процесс можно описать с помощью математических моделей.

Допустим производитель продал на рынке  $Q$  ед. продукции за единицу времени (год) и получил прибыль  $Pr$ , которую вложил в развитие производства. Величина прироста производства  $\Delta Q/\Delta t$  (ед.прод./год<sup>2</sup>), которая может быть достигнута за время  $\Delta t$  (год) в результате использования полученной за это время прибыли составляет:

$$\Delta Q/\Delta t = Pr/R, \quad (2.4)$$

где  $R$  — показатель удельных затрат на развитие производственных мощностей (технологий), руб.\*год/ед.прод. Соотношение (2.4) может быть представлено в виде дифференциального уравнения, если вместо приращений  $\Delta Q$  и  $\Delta t$  использовать дифференциальные величины  $dQ$  и  $dt$ :

$$dQ/dt = Pr/R. \quad (2.4')$$

В работе [5] показано, что величина  $R$  непосредственно связана со стоимостью продукции  $C$ . Как известно, в стоимость продукции всегда включаются две составляющие:  $C=C_c+C_e$ , где  $C_c$  — капитальная и  $C_e$  — эксплуатационная. Соответственно и показатель  $R$  можно также представить в виде суммы:  $R=R_c+R_e$ , где  $R_c$  — затраты на создание единицы дополнительных основных фондов технологии,  $R_e$  — затраты на создание единицы дополнительных оборотных фондов технологии.

Капитальная составляющая стоимости практически есть:  $C_c=K_c/(\tau_c*Q)$ , где  $K_c$  — капитальная стоимость основных фондов (руб.),  $\tau_c$  — характерное время амортизации основных фондов, (лет). Капиталь-

ная составляющая удельных затрат на развитие есть  $R_c = K_c/Q$  или  $R_c = C_c * \tau_c$ . В зависимости от того, какая информация имеется, можно пользоваться любым из этих выражений.

Вполне аналогично оценивается величина  $R_e = K_e/Q$  или  $R_e = C_e * \tau_e$ , где  $\tau_e$  — характерное время амортизации капиталовложений  $K_e$ , связанных с производством оборотных фондов. В свою очередь, величина  $C_e$  зависит от цен покупаемых ресурсов  $C_r$  и расхода этих ресурсов на единицу продукции  $U_r$ , т.е.  $R_e = \sum U_r * C_r * \tau_e$ . Например, если  $C_c = C_e = C/2$  и  $\tau_c = \tau_e = 10$  (лет), то получаем:

$$R = R_c + R_e = C_c * \tau_c + C_e * \tau_e = (C/2) * 10 + (C/2) * 10 = 10 * C.$$

Здесь не будем останавливаться на всех аспектах проблемы определения показателя  $R$  в условиях реального бизнеса, требующих наличия информации не только о состоянии собственно производства (как при определении величины  $C$ ), но также и о всей инфраструктуре, в которой предстоит развиваться фирме. Например, если речь идет о развитии энергетической технологии, то при определении величины  $R$  требуется знать состояние топливной базы этой технологии. Более подробное обсуждение этой проблемы имеется в работах [5, 7, 8]. Для простоты в численных примерах далее будем полагать, что величина  $R$  всегда на порядок больше величины  $C$ .

Если величина показателя  $R$  не изменяется на каждом  $i$ -ом шаге расчета (т.е. эскалация отсутствует), то подставляя выражение (2.4) в (2.3) и проведя необходимые преобразования, приходим к выражению:  $R * (dQ/dt) = (P - C) * Q$  или:

$$P = C + R * Y, \quad (2.5)$$

где  $Y = (dQ/dt)/Q$  — темп развития производства (1/год), определяющий изменение величины  $Q$  при переходе от  $i$ -ого шага к  $(i+1)$ -ому шагу расчета (периоду времени) в модели. Произведение  $R * Y = P - C$  есть прибыль, получаемая фирмой (технологией) от продажи единицы продукции.

Если же величина показателя  $R$  изменяется на каждом  $i$ -ом шаге (т.е. существует эскалация технико-экономических показателей), приходим к следующему выражению:  $d(R * Q)/dt = (P - C) * Q$ , раскрывая которое по правилам дифференцирования, получаем выражение  $R * (dQ/dt) + Q * (dR/dt) = (P - C) * Q$  или:

$$P = C + R * (Y + Y_R), \quad (2.5')$$

где  $Y_R = (dR/dt)/R$  — темп эскалации (1/год) показателя удельных затрат на развитие  $R$  при переходе от  $i$ -ого шага к  $(i+1)$ -ому шагу расчета (периоду времени).

Характерные значения темпов  $Y$  и  $Y_R$ , как правило, оказываются существенно отличными для различных отраслей производства и в различные моменты времени. Например в энергетике темп развития производства  $Y$  обычно в каждом данном периоде времени оказывается много выше, чем темп эскалации  $Y_R$ , т.е. при определении цены электроэнергии часто можно полагать  $Y_R = 0$ . Вместе с тем, в топливных отраслях даже при сохранении одного и того же уровня добычи ( $Y = 0$ ) неизбежно происходит истощение наиболее богатых месторождений и вследствие этого со временем возрастает величина показателя  $R$ , т.е. часто определяющим при ценообразовании оказывается темп эскалации  $Y_R > 0$ . Однако для простоты в дальнейшем всюду будем предполагать эскалацию отсутствующей ( $Y_R = 0$ ).

На практике при определении цены продукции приходится учитывать также налоги, по крайней мере, двух основных видов: пропорциональные стоимости и пропорциональные прибыли. Налоги первого вида, увеличивая стоимость  $C$ , очевидно не могут повлиять на структуру выражения (2.5). Покажем, что налоги второго вида также не изменяют структуру выражения (2.5).

Допустим ставка налога на прибыль составляет  $t_{pr}$ . Тогда чистая прибыль, которая может быть направлена на развитие, есть:  $Pr_n = Pr * (1 - t_{pr})$ . Подставляя это выражение в (2.4'), имеем:

$$dQ/dt = Pr * (1 - t_{pr}) / R = Pr / R_t, \quad \text{где } R_t = R / (1 - t_{pr}).$$

Из сравнения последнего выражения с выражением (2.4') следует, что налог на прибыль приводит к возрастанию показателя  $R$ , однако структура выражения (2.5) при этом сохраняется. При стремлении ставки налога на прибыль  $t_{pr}$  к 1 эквивалентная по смыслу показателю  $R$  величина  $R_t$  стремится к бесконечности и какое-либо развитие становится невозможным.

Очевидно выражение (2.5) можно представить в следующем виде:

$$Y = (P - C) / R. \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) показывает, что добросовестный монополист (т.е. вкладывающий всю прибыль в развитие собственного производства) может развиваться ( $Y > 0$ ), если цена, которую он получает за свою продукцию, превышает его издержки ( $P > C$ ). При  $P = C$  монополия находится в состоянии стационарного равновесия, в котором производство не развивается ( $Y = 0$ ), но и не деградирует. При  $P < C$  производство монополиста будет деградировать ( $Y < 0$ ).

Если функция спроса имеет вид  $P = G/Q$  (2.1), то подставив это выражение в (2.6), получаем:

$$Y = (G/Q - C)/R, \quad (2.7)$$

описывающее изменение темпа роста производства монополии по мере возрастания выпуска продукции. При этом все время существует динамическое равновесие спроса и предложения, поскольку по условию функция спроса (2.1) воздействует на монополию в любой момент времени, т.е. перемещение точки равновесия все время происходит вдоль гиперболы  $P = G/Q$ . Никакого паутинообразного движения не возникает, а посему отсутствуют неустойчивости, присущие паутинообразной модели и подробно исследованные в работе [4].

На практике индикатором наличия рыночного равновесия является состояние склада продукции [6]. Если запас продукции (товара) на складе начинает уменьшаться относительно некоторого нормативного, даже добросовестный монополист будет вынужден увеличивать цену продукции и смещать равновесие в сторону меньшего спроса. Рост запасов сверх норматива говорит о том, что цену пора снижать. Поэтому для рыночной экономики характерно наличие "заполненных полок" в магазинах (выполняющих роль складов), без которых определение равновесных значений показателей  $P_e$  и  $Q_e$  было бы затруднительным.

Из выражения (2.7) следует, что при использовании функции спроса в виде гиперболы (2.1) стационарная ( $P_e = C$ ,  $Pr = 0$ ,  $Y = 0$ ) производительность добросовестного монополиста есть:  $Q_e = G/C$  и соответственно цена продукции, отвечающая стационарному равновесию, есть  $P_e = G/Q_e = C$ . Такое состояние равновесия будет сохраняться до тех пор, пока либо покупатели нарушат это состояние, изменив в какой-то момент времени величину коэффициента  $G$ , т.е. начав тратить больше (или меньше) денег на данную продукцию (руб./год), либо у производителя изменятся условия производства, т.е. снизится (или возрастет) стоимость продукции  $C$ .

Проиллюстрируем процесс установления динамического равновесия и перехода к стационарному рыночному равновесию условным примером, изображенным на Рис.2.1. На этом рисунке показаны функция спроса вида  $P = 100/Q$  ( $G = 100$ ) и исходное состояние производства монополиста, поставляющего на рынок  $Q_0 = 3$  ед. продукции в течение некоторого периода времени (например, года) при стоимости  $C = 20$  руб. за единицу продукции. Выйдя на этот рынок, монополист узнает, что при  $Q_0 = 3$  и  $P = C = 20$  руб./ед. прод. спрос превышает предложение, вследствие чего продукция быстро раскупается и все заявки, поступающие в течение этого периода времени (года) удовлетворяться не могут. Очевидно у монополиста имеются, по крайней мере, следующие два способа добиться равенства (т.е. равновесия) производства и потребления.

1. Установить для потребителей очередность покупки продукции. При  $P = C = 20$  руб./ед. прод. спрос составляет 5 ед. прод./год (точка 4 на Рис.2.1), тогда как производится только 3 ед. прод./год, т.е. возникает дефицит 2 ед. прод., покрытие которого переносится (в порядке очереди) на следующие периоды времени (годы). Очевидно наличие дефицита и очереди указывает на то, что выбранный способ не приводит к равновесному решению (дефицит со временем нарастает), т.е. не совместим с рыночной экономикой.

2. Установить цену  $P_0 = 33,3$  руб./ед. прод., при которой предложение ( $Q_0 = 3$  ед. прод./год) и спрос совпадут (уравновесятся) и за первый год будет получена прибыль  $Pr(1) = (P - C) * Q_0 = (33,3 - 20) * 3 = 40$  руб./год. Добросовестный монополист использует эту прибыль на развитие своего производства. Пусть удельные затраты на развитие равны  $R = 200$  руб.\*год/ед. прод., тогда производственная мощность может быть увеличена на единицу (до  $Q = 4$  ед. прод./год) за  $i = 200/40 = 5$  (лет).

Однако рост поступления продукции на рынок приведет к снижению прибыли до  $Pr(6) = (P - C) * Q = (25 - 20) * 4 = 20$  руб./год (см. Рис.2.2). Потребуется примерно  $i = 10$  периодов (лет), чтобы поднять производство до уровня  $Q_e = 5$  (ед./год), что приведет к снижению равновесной цены продукции до  $P_e = C = 20$  руб./ед. прод. и падению прибыли до нуля, т.е. приведет монополиста к стационарному равновесию (Рис.2.2).

Таким образом, в результате процесса развития монополиста потребители будут приобретать на рынке большее количество товара (5 ед. вместо 3 ед. в год) по более низкой цене (20 руб. вместо 33,3 руб./ед.), производитель-монополист получит в свою собственность 2ед. дополнительных производственных мощностей. За счет снижения цены товара потребители будут экономить ежегодно  $(33,3 - 20) * 5 = 66,5$  руб. Поскольку монополист получил кредит на развитие от потребителей (в виде прибыли) в размере  $200 * 2 = 400$  руб., то возврат этого кредита потребителям потребует  $400 / 66,5 = 6$  (лет). По прошествии этого срока потребители будут получать лишь прямую выгоду от использования равновесного экономического механизма, не неся при этом никаких видимых потерь от дефицита.

Отсутствие очередей и дефицита, наличие равновесия спроса и предложения говорит о том, что второе решение вполне совместимо с проверенным практикой представлением о рыночной экономике. Обратим внимание на то, что процесс перехода к стационарному состоянию описывается посредством пошагового решения дифференциального уравнения (2.7). Длительность этого процесса во многом определяется начальными условиями, в данном случае производительностью монополиста в начальный момент времени ( $Q_0=3$ ).

Выражения (2.6) и (2.7) можно преобразовать таким образом, чтобы непосредственно описать изменение равновесной цены продукции в процессе перехода к стационарному рыночному равновесию. С этой целью продифференцируем правую и левую части функции спроса (2.1), записав следующую цепочку равенств:

$$dP/dt = d(G/Q)/dt = -(G/Q^2) * dQ/dt = -(G/Q) * Y = -P * Y.$$

Введя обозначение для темпа изменения цены  $Y_p = (dP/dt)/P$ , окончательно приходим к равенству:  $Y_p = -Y$ , подставляя которое в выражение (2.7), получаем:

$$Y_p = -(G/Q - C)/R. \quad (2.8)$$

Выражение (2.8) показывает, что равновесная цена продукции монополиста убывает (знак минус) в точности с тем же темпом, с которым растет производство. Согласно определению (см. работу [2]), величина  $E_q = Y_p/Y$  есть эластичность цены от спроса, т.е. функции спроса вида (2.1) соответствует  $E_q = -1$ . Соответственно эластичность спроса от цены есть  $E_p = Y/Y_p = -1$ .

Очевидно совершенно аналогично можно поступить, если зависимость цены от спроса описывается линейной функцией вида (2.2) или имеет вид какой-либо другой функции, определяемой экспериментально. Запишем условие равновесия, подставляя функцию (2.2) в выражение (2.6):

$$Y = (J - H * Q - C)/R. \quad (2.9)$$

Дифференцируя функцию спроса, запишем выражение, связывающее темпы  $Y$  и  $Y_p$  в виде:

$$Y_p = -(H * Q / (J - H * Q)) * Y, \quad (2.10)$$

означающее, что эластичность спроса от цены в данном случае равна:

$$E_p = Y/Y_p = - (J - H * Q) / H * Q = 1 - J / (H * Q),$$

т.е. в принципе, может изменяться в широких пределах при изменении коэффициентов  $J$  и  $H$ .

Вне зависимости от вида функции спроса состояние стационарного равновесия характеризуется условием  $Y_p = Y = 0$ . Действительно если окажется  $P < C$ , то будет иметь место перепроизводство, темп развития должен стать отрицательным ( $Y < 0$ ) и следовательно цена  $P$  должна будет возрастать ( $Y_p > 0$ ), т.е. спрос будет снижаться. Вместе с тем, как показано выше, при  $P > C$  производство развивается и цены падают. Поэтому при  $P = C$  имеет место устойчивое стационарное равновесие спроса и предложения при справедливой и открытой для контроля (добросовестной) монополии. Отрицательные свойства монополии (недобросовестность) проявляются только тогда, когда возникает стремление утаивать прибыль, одновременно добиваясь её максимума.

Фактически в работах [1-4] рассматриваются только лишь условия получения максимума прибыли на первом и единственном шаге, т.е. речь идет не о равновесном развитии и переходе к стационарному состоянию, а только лишь о выборе начальных условий, обеспечивающих монополии максимум прибыли на первом шаге равновесного развития. Поскольку об использовании прибыли ничего не говорится, весь дальнейший процесс развития просто упускается из виду. Возможно некоторым оправданием такому подходу может служить использованное в этих работах предположение о том, что количество продук-

ции, поступающей на рынок, не ограничивается уровнем производственной мощности монополиста, а определяется исключительно его желанием получить максимальную прибыль. Подобное предположение позволяет говорить о том, что в работах [1-4] речь идет о недобросовестных монополистах. При этом использовалось предположение о возрастании средних издержек, о справедливости которого речь шла выше. Поэтому посмотрим, как будут выглядеть оптимальные начальные условия для получения максимальной прибыли на первом шаге в случае, когда средние издержки монополиста  $C$  оказываются невозрастающими.

При функции спроса вида (2.1) прибыль монополиста (2.3') на первом шаге равна:  $Pr = G - C * Q$  и соответственно максимум этой прибыли  $Pr_m$  оказывается при  $Q_m$  почти равном нулю, т.е. величина  $Pr_m$  близка к  $G$  (ограничимся здесь лишь таким приближенным решением). При этом цена  $P$  стремится к бесконечности, т.е. недобросовестному монополисту оказывается наиболее выгодно сильно поднять цену и практически вообще ничего не производить. Добросовестный монополист никогда не выберет такого решения.

В том случае, когда функция спроса является ограниченной и имеет вид (2.2), прибыль монополиста (2.3') определяется выражением:  $Pr = (J - C) * Q - H * Q^2$ , достигая максимума  $Pr_m = (J - C)^2 / (4 * H)$  в точке, где  $dPr/dQ = 0$ , т.е. при оптимальной величине поставки продукции на рынок, равной:

$$Q_m = (J - C) / (2 * H). \quad (2.11)$$

Не трудно заметить, что величины  $Pr$ ,  $Pr_m$  и  $Q_m$  (2.11) сильно напоминают выражения (1.10-1.12), несмотря на то, что последние получены в предположении возрастающих средних издержек. Отсюда следует вывод о том, что при линейной функции спроса вида (2.2) предположение о возрастании издержек монополии оказывается излишним, поскольку максимум прибыли достигается и без использования этого предположения. Последнее позволяет при микроэкономическом анализе производить незаметную подмену возрастающих издержек на невозрастающие при использовании линейной функции спроса вида (2.2). При функции спроса вида (2.1) этот "фокус" не проходит и поэтому функция вида (2.1) практически не используется в таком анализе [1-4].

Стационарное равновесие ( $P = C$ ,  $Pr = 0$ ) может наступить на первом же шаге, если монополист поставит на рынок количество продукции:  $Q_e = (J - C) / H$ , т.е. всего лишь вдвое больше оптимума ( $Q_e = 2 * Q_m$ ). Таким образом, при наличии одинаковых возможностей добросовестный монополист будет поставлять на рынок количество продукции, равное  $Q_e$ , недобросовестный монополист — только лишь  $Q_m$ .

Недобросовестному монополисту всегда оказывается выгодно совершенно не развивать (скрывать) свои производственные мощности и направлять получаемую прибыль на различные цели, не связанные с развитием собственного производства. В работах [1-4] такое решение трактуется как равновесное. В действительности же это особый монопольный рынок, на котором покупатели являются лишь источником прибыли, пользы от которой они, скорее всего, никогда не получают. Такое поведение не имеет ничего общего с истинным рыночным равновесием спроса и предложения. Поэтому необходим соответствующий контроль за издержками и прибылью монополий, и в частности, за так называемыми "естественными монополиями".

Итак, задачи о максимуме прибыли монополии [1-4] следует рассматривать всего лишь как оптимизацию начальных условий в рамках решения более общей задачи равновесного развития добросовестной монополии (имея в виду, что недобросовестная монополия развиваться не будет ни при каких условиях). Эволюция добросовестного (подконтрольного) монополиста при произвольной убывающей функции спроса (т.е. когда спрос падает с ростом цены) характеризуется, во-первых, очень быстрым (относительно используемой единицы времени) переходом из начального состояния (оптимизированного или не оптимизированного) в состояние промежуточного равновесия, и во-вторых, дальнейшим много более медленным движением к состоянию стационарного равновесия, совершенно не зависящему от начальных условий и в котором темп развития и прибыль монополиста оказываются равными нулю ( $Y = 0$ ,  $Pr = 0$ ).

## 2.4 Эволюция дуополии

По определению дуополии образуется на рынке одного товара, который поставляется двумя продавцами (производителями). В основу классической теории дуополии в работах [1-4] положены идеи французского математика О. Курно (1838г.), исходившего из следующей концепции конкуренции: "покупатели объявляют цены товаров, а продавцы просто приспособливают свой объем выпуска к данным ценам". Исходя из этой концепции, решим задачу равновесной эволюции дуополии, используя результаты, полу-

ченные выше при рассмотрении монополии. В частности, будем использовать те же выражения для функций спроса вида (2.1) и (2.2).

Воспользовавшись выражением (2.5), запишем уравнения для определения индивидуальных темпов развития каждого из дуополистов, получающих на рынке за свою продукцию одинаковую равновесную цену  $P$ , назначаемую покупателями в соответствии с уровнем поставки товара (т.е. в соответствии с функциями (2.1) или (2.2)):

$$P = C_1 + R_1 * Y_1, \quad (2.12)$$

$$P = C_2 + R_2 * Y_2, \quad (2.13)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — стоимости продукции;  $R_1$  и  $R_2$  — удельные затраты на развитие;  $Y_1$  и  $Y_2$  — индивидуальные темпы развития первого и второго дуополистов соответственно.

Поскольку по условию дуополисты работают на один и тот же рынок, то объем поставки товара на этот рынок  $Q$  всегда оказывается равен сумме поставок каждого из них, т.е.  $Q = q_1 + q_2$ , где  $q_1$  — поставка товара на рынок первым и  $q_2$  — вторым дуополистами. Очевидно точно так же должны быть связаны и приростные величины (производные):  $dQ/dt = dq_1/dt + dq_2/dt$ . Произведя простейшие тождественные преобразования последнего выражения, запишем следующее уравнение:

$$Y = w_1 * Y_1 + w_2 * Y_2, \quad (2.14)$$

где  $w_1 = q_1/Q$  и  $w_2 = q_2/Q$  — доли от общего уровня рыночного спроса (при условии  $w_1 + w_2 = 1$ ), покрываемые в данном периоде времени первым и вторым дуополистами;

$Y_1 = (dq_1/dt)/q_1$  и  $Y_2 = (dq_2/dt)/q_2$  — индивидуальные темпы развития первого и второго дуополистов.

Записав уравнения (2.12) и (2.13) в виде, аналогичном выражению (2.6), и подставляя полученные выражения в уравнение (2.14), приходим к следующему уравнению:

$$Y = w_1 * (P - C_1)/R_1 + w_2 * (P - C_2)/R_2. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) может использоваться двояко. В случае, если известен (задан) необходимый темп развития  $Y$ , уравнение (2.15) легко превратить в следующее:

$$P = (Y + w_1 * C_1/R_1 + w_2 * C_2/R_2) / (w_1/R_1 + w_2/R_2), \quad (2.16)$$

определяющее равновесную цену  $P$ , при которой этот темп может быть достигнут в условиях данной дуополии. Именно такой общий подход использовался в работах [5, 7, 8].

Если же функция спроса известна, то подставив в уравнение (2.15) эту функции, например, в виде (2.1), т.е.  $P = G/Q$ , получим выражение, определяющее общий темп роста производства в условиях известного спроса:

$$Y = w_1 * (G/Q - C_1)/R_1 + w_2 * (G/Q - C_2)/R_2. \quad (2.17)$$

Воспользовавшись полученным выше для функции спроса (2.1) соотношением  $Y = -Y_p$ , можно записать также следующее выражение:

$$-Y_p = w_1 * (G/Q - C_1)/R_1 + w_2 * (G/Q - C_2)/R_2. \quad (2.18)$$

В том случае, если функция спроса имеет вид (2.2), т.е.  $P = J - H * Q$ , подстановка этой функции в уравнение (2.15) приводит к следующему выражению:

$$Y = w_1 * (J - H * Q - C_1)/R_1 + w_2 * (J - H * Q - C_2)/R_2. \quad (2.19)$$

Используя полученное выше соотношение (2.10), можем переписать выражение (2.19) в виде:

$$-Y_p = (1/(J/HQ - 1)) * (w_1 * (J - H * Q - C_1)/R_1 + w_2 * (J - H * Q - C_2)/R_2). \quad (2.20)$$

Таким образом многое, что сказано выше о монополии, относится также и к дуополии, однако появляется очень важное новое обстоятельство, вызванное конкуренцией. Пояснить это обстоятельство проще всего можно, обратившись к выражениям (2.12), (2.13), (2.15).

Как правило, средние издержки и следовательно стоимости продукции  $C_j$  ( $j=1, 2$ ) у дуополистов различаются. Допустим, имеет место случай  $C_1 > C_2$  и согласно выражениям (2.12) и (2.13) индивидуальный

темп роста второго производителя оказывается выше, чем у первого (показатели  $C_j$  и  $R_j$  у дуополистов предполагаются пропорциональными). Тогда при общем росте производства ( $Y > 0$ ) быстрее развивается второй производитель, у которого меньше издержки и удельные затраты на развитие, причем выполняется соотношение  $Y_1 < Y < Y_2$ .

Поскольку рост производства приводит к снижению цены в соответствии с функцией спроса, то при достижении некоторого значения  $Q^*$  окажется  $(P - C_1) < 0$ , в то время, как  $(P - C_2) > 0$ . Первый дуополист окажется неконкурентоспособен и при дальнейшем росте производства будет вытесняться с рынка ( $Y_1 < 0$ ). Полное вытеснение первого дуополиста с рынка произойдет, когда второй дуополист сможет стать монополистом, что случится лишь тогда, когда этот монополист сможет обеспечить весь имеющийся равновесный спрос.

Проиллюстрируем процесс установления динамического равновесия и перехода к стационарному рыночному равновесию условным примером, изображенным на Рис.2.3. В этом примере использована та же, что и на Рис.2.1 и 2.2 функция спроса  $P = 100/Q$  (размерности показателей здесь и далее опускаем). Начальные состояния производства дуополистов приняты равными: первого  $q_1 = 3$ ,  $C_1 = 20$  (точки 2-3) и второго  $q_2 = 1$ ,  $C_2 = 15$  (точки 0-1). Как не трудно заметить, первым дуополистом является прежний монополист (Рис.2.1). Теперь же на рынке появился второй дуополист, обладающий поначалу более низкой производительностью, однако меньшими издержками ( $C_1 > C_2$ ). Поэтому в данных условиях предельными издержками (см. раздел 1.3) обладает первый дуополист.

В начальный период времени поставляемая обоими дуополистами на рынок продукция  $Q_0 = q_1 + q_2 = 4$  будет находиться в равновесии со спросом при цене  $P_0 = 100/4 = 25$ , которая выше стоимостей продукции, производимой каждым из дуополистов ( $P_0 > C_1 = 20$ ,  $P_0 > C_2 = 15$ ). При равновесной цене  $P_0 = 25$  прибыль, которую получают дуополисты в первом временном периоде, есть:  $Pr_1 = (25 - 20) * 3 = 15$ ,  $Pr_2 = (25 - 15) * 1 = 10$ . Будем предполагать для простоты, что рост производства обоих дуополистов происходит в основном дискретно, целыми единицами производительностей  $q_1$  и  $q_2$ .

Пусть удельные затраты на развитие первого и второго дуополистов есть  $R_1 = 200$  и  $R_2 = 150$ . Первому дуополисту понадобится приблизительно  $i = 200/15 = 13$  временных периодов для увеличения производительности на единицу (т.е. до  $q_1 = 4$ ), тогда как второму понадобилось бы  $i = 150/10 = 15$  периодов (до  $q_2 = 2$ ). Может показаться, что суммарная производительность  $Q = q_1 + q_2 = 6$  будет достигнута по прошествии  $i = 15$  периодов, однако это не так. Дело в том, что по прошествии примерно  $i = 13$  периодов первый дуополист начнет поставлять  $q_1 = 4$  (пока по-прежнему  $q_2 = 1$ ) и тем снизит цену до  $P = 100/5 = 20$ . После этого прибыль первого дуополиста станет равной нулю и в дальнейшем (вплоть до вытеснения его с рынка) будет оставаться таковой. Прибыль второго дуополиста в 14-м и последующих периодах окажется равной  $Pr_2 = 5$ , т.е. только по прошествии  $i = 17$  периодов он сможет увеличить производительность до  $q_2 = 2$ . Состояние, в котором окажется рынок после  $i = 17$  периодов представлено на Рис.2.4.

При  $Q = 4 + 2 = 6$  имеет место состояние, в котором может развиваться только второй дуополист. Первый же дуополист не только не может развиваться, но вынужден будет сокращать производство. Как следует из Рис.2.4, он фактически напрасно увеличил производство до  $q_1 = 4$ , поскольку после ввода дополнительной единицы производственных мощностей вторым дуополистом возникло перепроизводство, заставляющее первого дуополиста сократить производство с  $q_1 = 4$  до  $q_1 = 3$  (это произойдет например потому, что второй дуополист установит цену несколько ниже, чем  $P = 20$ ).

По мере увеличения производства второго дуополиста его суммарная прибыль будет увеличиваться ( $q_2$  растет) и сокращаться число периодов времени (лет), требующихся для ввода следующей единицы мощности. Наконец наступит момент, когда первый дуополист будет полностью вытеснен с рынка. Состояния дуополистов, отвечающее этому моменту, представлено на Рис.2.5. Как следует из этого рисунка, первый дуополист практически уже вытеснен с рынка, равновесная рыночная цена  $P = 16,7$  оказывается меньше стоимости  $C_1 = 20$ . Поэтому первый дуополист может некоторое время существовать только за счет распродажи накопленной им ранее собственности и покрытия таким способом убытков, возникающих при продаже его нерентабельной продукции. После того, как возможности распродажи у первого дуополиста будут исчерпаны, второй дуополист превратится в монополиста. При целочисленном решении данного примера на этом можно остановиться.

Не трудно убедиться в том, что описанное выше численное решение основано на использовании выражений (2.17) и (2.18), т.е. процесс движения к стационарному равновесию и состояния дуополистов вполне предсказуемы, что позволяет им построить обоснованные бизнес-планы. Поэтому при наличии возможностей получить свободные средства (например, кредит в банке или прямые инвестиции) нет необходимости ждать, пока перспективный производитель (каковым в данном случае является второй дуополист) наберет необходимые средства для ускоренного увеличения выпуска продукции.

В условиях рассмотренного выше примера можно рекомендовать второму дуополисту взять кредит или привлечь инвестиции в размере 150 ед., чтобы его производительность практически сразу же, в следующем временном периоде (временем строительства для простоты пренебрегаем) увеличилась на 1 ед., суммарная производительность стала равной  $Q=q_1+q_2=3+2=5$  и рыночная цена продукции оказалась  $P=100/5=20$ . При этом прибыль первого дуополиста окажется нулевой ( $Pr_1=0$ ), тогда как у второго дуополиста в каждом последующем периоде прибыль составит  $Pr_2=(20-15)*2=10$ . Предполагая, что полученный кредит беспроцентный и деля сумму кредита на прибыль  $Pr_2$ , получаем длительность периода возврата кредита, равную 15 периодам, что эквивалентно выплате дивидендов на инвестиции  $100/15=6,7$ (% в год). Более подробно различные способы финансирования развития рассматриваются далее в разделе 4.

Пожалуй единственный шанс для первого дуополиста сохраниться на рынке, это направить всю полученную вначале прибыль не на развитие производства, а на снижение средних издержек с тем, чтобы за время, пока второй дуополист захватывает рынок, постараться добиться положения:  $C_1 < C_2$ . После этого роли дуополистов поменяются, угроза наступления монополизма отодвинется. Таким образом, спасение и эволюция дуополии определяется в первую очередь научно-техническим прогрессом.

Не трудно также представить, что будет происходить с дуополистами в таком частном случае, когда у них совпадают стоимости продукции ( $C_1=C_2$ ) и удельные затраты на развитие ( $R_1=R_2$ ). Согласно выражениям (2.12) и (2.13), у таких идентичных дуополистов будут совпадать индивидуальные темпы развития. В соответствии с выражением (2.15), которое просто превращается в выражение (2.6), эти дуополисты будут вести себя как один монополист с производительностью  $Q=q_1+q_2$ . Поэтому в процессе перехода к стационарному равновесию отношения  $q_1/Q$  и  $q_2/Q$  у идентичных дуополистов будут сохраняться теми, которые были установлены (заданы) им в начальный момент времени.

Все рассуждения, относящиеся к приведенному выше конкретному примеру, очевидно могут быть без особого труда перенесены на случай линейной функции спроса вида (2.2) посредством использования выражений (2.19) и (2.20). Итак, выше подробно рассмотрены задачи и примеры, относящиеся к эволюции (развитию) дуополии. Посмотрим, как эти задачи связаны с классическими задачами о дуополии Курно и Стэкельберга.

## 2.5 Дуополия Курно

Классическая постановка задачи о дуополии Курно (1838г.) [2], заключается в определении условий получения максимума прибыли каждым из неагрессивных (т.е. не стремящихся навредить друг другу) дуополистов от продажи своей продукции на рынке, имеющем функцию спроса вида (2.2).

При этом сразу же обратим внимание на два важных обстоятельства. Во-первых, решение задачи Курно для случая функции спроса вида (2.1) в работах [1-4] отсутствует, в то время, как именно гипербола признается наиболее общим видом функции спроса (см. раздел 2.1). И во-вторых, средние издержки дуополистов всюду полагаются невозрастающими, что принципиально отличает решения задач о монополии и дуополии Курно в современной микроэкономической теории. По-видимому последнее обстоятельство объясняется тем, что методология предельных издержек не была еще придумана в то время, когда впервые решалась задача Курно.

Постановку задачи о дуополии Курно можно пояснить следующим образом. Предполагается, что имеются два дуополиста, борющихся за один и тот же рынок, на котором цена  $P(Q)$  есть известная функция предложения товара (спроса). Производственные мощности каждого из них (созданные когда-то ранее) полагаются по крайней мере достаточными, чтобы дуополисты могли порознь полностью обеспечить спрос на этом рынке при цене  $P=P(Q)$ , равной соответствующей стоимости продукции (т.е. при  $P=C_1$  или  $P=C_2$ ), однако естественно при этом прибыль будет отсутствовать. Для того, чтобы получить прибыль, каждый из дуополистов должен ограничить продажу товара на данном рынке, учитывая при этом в определенной степени также интересы конкурента. Задача состоит в определении оптимальных объемов продаж.

Каждый из дуополистов стремится выбрать стратегию поступления собственного товара на рынок таким образом, чтобы получить максимальную прибыль при некоторых предположениях о стратегии действий конкурента. По умолчанию предполагается, что вся продукция, не проданная на данном рынке, отправляется дуополистами на другие рынки, где они очевидно также участвуют в борьбе за прибыль. Последнее означает, что дуополисты, имея возможность полностью (при  $P=C$ ) обеспечить товаром данный рынок, тем не менее не могут обеспечить этим товаром все доступные им рынки (в противном случае они не получали бы прибыли). В этих условиях справедливо предположение о том, что дуополисты

не несут потерь от перепроизводства или свертывания производства и поэтому стоимости продукции  $C_1$  и  $C_2$  оказываются не зависящими от количества продаж на данном рынке. Далее очень кратко коснемся основных результатов решения задачи Курно.

Для упрощения задачи Курно зачастую предполагается, что издержки (стоимости продукции) дуополистов одинаковы ( $C_1=C_2=C$ ). В этом случае при функции спроса вида  $P=J-H*Q$  (2.2) оказывается [1], что равновесие Курно, обеспечивающее одновременное получение обоими дуополистами максимальной прибыли, имеет место при выполнении следующего условия:

$$q = q_1 = q_2 = (J - C)/3H, \quad (2.21)$$

т.е. при соблюдении неравенства  $J>C$  и продаже каждым из дуополистов одного и того же количества товара, что соответственно суммарно составляет:  $Q=q_1+q_2=2*q$ . Подстановка выражения (2.21) в функцию спроса (2.2) приводит к выражению рыночной цены в виде:

$$P_k = (J + 2*C)/3. \quad (2.22)$$

Условием получения прибыли является превышение рыночной цены над стоимостью продукции, т.е. выполнения условия  $P>C$ , которое согласно (2.22) также приводит к неравенству  $J>C$ . При этом каждый из дуополистов получит максимально возможную в данных условиях прибыль в размере:

$$Pr_1 = Pr_2 = (J - C)^2/(9*H). \quad (2.23)$$

В работе [4] рассмотрено решение задачи о равновесии Курно для случая неравных стоимостей  $C_1$  и  $C_2$ . В этом случае для получения максимальной прибыли дуополисты должны поставлять на рынок количество продукции, определяемое выражениями:

$$q_1 = (J - 2*C_1 + C_2)/(3*H); \quad (2.24)$$

$$q_2 = (J - 2*C_2 + C_1)/(3*H), \quad (2.24')$$

т.е. величины  $q_1$  и  $q_2$  должны различаться, причем большее количество продукции на рынок должно поставляться тем дуополистом, у которого меньше стоимость продукции. Например, если выполняется условие  $C_1>C_2$ , то согласно (2.24), (2.24') равновесие Курно достигается при  $q_1<q_2$ .

Суммарное оптимальное количество продукции, поставляемой на рынок, должно составить:

$$Q = q_1 + q_2 = (2*J - C_1 - C_2)/(3*H) \quad (2.25)$$

и оказывается тем больше, чем меньше стоимости  $C_1$  и  $C_2$ . Условие существования решения задачи Курно в данном случае есть:  $Q>0$ , т.е.  $J>(C_1+C_2)/2$ .

Рыночная цена, уравнивающая спрос и предложение продукции, составит:

$$P_k = (J + C_1 + C_2)/3. \quad (2.26)$$

Подставляя выражения (2.25) и (2.26) в определение прибыли (2.3), получаем выражения для определения максимальной прибыли дуополистов в виде:

$$Pr_1 = (J - 2*C_1 + C_2)^2/(9*H); \quad (2.27)$$

$$Pr_2 = (J - 2*C_2 + C_1)^2/(9*H). \quad (2.27')$$

Находя разность значений выражений (2.27) и (2.27'), получаем следующее выражение:

$$Pr_1 - Pr_2 = (2*J - C_1 - C_2)*(C_2 - C_1)/(3*H), \quad (2.28)$$

показывающее, что большую прибыль среди неравных всегда получает дуополист, у которого меньше стоимость продукции. Например, если  $C_1>C_2$ , то выражение (2.28) оказывается отрицательным, т.е. большую прибыль получает второй дуополист.

Рассмотрим дуополию Курно на простейшем примере. На Рис.2.6 представлена функция спроса, имеющая вид:  $P=80-10*Q$ , и состояние дуополистов, стоимости продукции которых одинаковы и равны

$C_1=C_2=20$ . Согласно выражению (2.21) получаем:  $q=q_1=q_2=(80-20)/3*10=2$  и  $Q_K=4$ . Равновесная цена продукции согласно (2.22) есть:  $P_K=(80+2*20)/3=40$ , что совпадает с показанным на Рис.2.6.

Как видно на Рис.2.6, решение Курно приводит к некоторому состоянию, которое не является стационарным равновесным решением ( $P_K > C$ ). Подобное состояние получило название "несовершенная конкуренция". Как показано выше, для перехода к стационарному равновесному решению ( $P=C$ ) необходимо рассмотреть переходный процесс, описанный в предыдущем разделе (т.е. исследовать эволюцию дуополии).

В том случае, когда стоимости продукции не совпадают и, например, составляют  $C_1=20$  и  $C_2=15$ , то максимум прибыли по Курно получится, если поставить на данный рынок продукцию в количестве  $q_1=1,8$ ,  $q_2=2,3$ , т.е. в сумме  $Q_K=4,1$  ед. В этом случае равновесная цена Курно несколько снизится, приблизительно до  $P_K=38$ .

Таким образом, классическую задачу о дуополии Курно можно рассматривать только лишь как некоторую частную задачу, позволяющую выработать наилучшие для производителей начальные условия на данном рынке, неявно имея в виду наличие других рынков и возможность их дальнейшего развития (иначе куда направить прибыль?). При этом дуополист, обладающий меньшей стоимостью продукции, с самого начала получает преимущество в объеме продаж и прибыли. Последнее не противоречит известному критерию "минимума С" (т.е. преимущество получает производитель с наименьшими издержками), однако буквально этот критерий выполняется лишь при достижении стационарного равновесного решения, когда  $P=C$ . В процессе же эволюции дуополии этот критерий не действует, поскольку оба дуополиста могут получать прибыль и развиваться даже тогда, когда имеют разные стоимости продукции.

Ограниченность задачи Курно заключается в предположении о существовании взаимной уступчивости (неагрессивности) дуополистов, безусловно учитывающих интересы друг друга при получении прибыли. Однако на практике вполне может наблюдаться агрессивность дуополистов, когда каждый действует, ориентируясь только на свои собственные интересы, что приводит к превращению дуополии Курно в дуополию Стэкельберга.

## 2.6 Дуополия Стэкельберга

Оказывается если один из дуополистов захочет проявить агрессивность и с самого начала захватит большую долю рынка, то другой дуополист уже ничего не сможет с ним поделать. У отставшего дуополиста остаются два выбора: либо действовать как неагрессивный дуополист, т.е. реагировать по Курно, либо действовать так же агрессивно, как его конкурент [1, 4].

В первом случае установится равновесие Стэкельберга [1], при котором более агрессивный дуополист получает большую (при  $C_1=C_2$  - ровно вдвое) долю рынка и соответственно большую (чем по Курно) прибыль.

В другом случае второй дуополист действует точно так же, как первый и устанавливается неравновесие Стэкельберга [1], когда каждый дуополист (при  $C_1=C_2$ ) получают одинаковую долю рынка и прибыль, однако меньшие, чем по Курно.

Вполне возможны и другие решения [1], например такие, при которых получается максимум общей прибыли дуополистов. Это напоминает решение Курно, однако реализуется не в одной точке, а на некоторой оптимальной поверхности. В связи с этим в работе [1] указывается на аналогию классических задач о дуополии задачам теории игр.

Все эти результаты вполне согласуются с возможностью иметь множество начальных условий эволюции дуополии, описываемой системой дифференциальных уравнений (2.12-2.14). При этом оказывается независимо от начальных условий рынок всегда приводит к одному и тому же стационарному равновесному решению, когда дуополист с минимальной стоимостью продукции становится монополистом при  $P=C$ .

## 2.7 Эволюция олигополии

Олигополией принято называть состояние, когда на рынке действуют более двух (т.е. достаточно много) производителей (продавцов) продукции. В рамках олигополии признается возможным рассматривать подход, в котором предполагается наличие столь большого числа производителей (фирм), что каждая отдельная фирма оказывается слишком слабой, чтобы заметно повлиять на рынок (т.е. на  $Q$  и  $P$ ).

Не представляет труда обобщить решение задачи о развивающейся дуополии на случай олигополии при произвольном числе производителей (фирм) и функциях спроса (2.1) и (2.2). Для этого запишем систему уравнений вида (2.12-2.14) применительно к произвольному числу  $n$  фирм, присутствующих на рынке:

$$\begin{aligned} P &= C_1 + R_1 * Y_1 \\ P &= C_2 + R_2 * Y_2 \\ &\dots \dots \dots \\ P &= C_j + R_j * Y_j \\ &\dots \dots \dots \\ P &= C_n + R_n * Y_n \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$Y = w_1 * Y_1 + w_2 * Y_2 + \dots + w_j * Y_j + \dots + w_n * Y_n . \quad (2.30)$$

Производя преобразование уравнений (2.29) к виду, аналогичному (2.6) и подставляя получающиеся выражения для темпов  $Y_j$  в (2.30), получим уравнение вида:

$$Y = w_1 * (P - C_1) / R_1 + w_2 * (P - C_2) / R_2 + \dots + w_j * (P - C_j) / R_j + \dots + w_n * (P - C_n) / R_n , \quad (2.31)$$

где по условию сумма всех значений  $w_j = q_j / Q$  (доли участия в покрытии общего спроса  $Q$  в данный период времени каждой фирмой), равна:  $w_1 + w_2 + \dots + w_j + \dots + w_n = 1$ .

Как и в случае дуополии, уравнение (2.31) можно переписать для определения равновесной цены по известному темпу роста спроса на продукцию  $Y$ :

$$P = (Y + (w_1 * C_1 / R_1 + \dots + w_j * C_j / R_j + \dots + w_n * C_n / R_n)) / (w_1 / R_1 + \dots + w_j / R_j + \dots + w_n / R_n) . \quad (2.32)$$

Если в уравнение (2.31) подставить функцию спроса вида (2.1), или (2.2), или любого другого вида, получим выражение равновесного темпа развития производства в направлении устойчивого (статического) равновесия спроса и предложения. Например, если функция спроса имеет вид (2.1), приходим к выражению вида:

$$Y = w_1 * (A/Q - C_1) / R_1 + w_2 * (A/Q - C_2) / R_2 + \dots + w_j * (A/Q - C_j) / R_j + \dots + w_n * (A/Q - C_n) / R_n , \quad (2.33)$$

где  $C_j$  и  $R_j$  - показатели соответствующей  $j$ -ой фирмы (технологии);

$w_j$  - показатели рыночной конъюнктуры, складывающейся для  $j$ -ой фирмы (технологии) в процессе равновесной эволюции олигополии;

$Q$  - уровень предложения и спроса, складывающийся в данном временном периоде.

Поскольку уравнение (2.33) дифференциальное, для его решения необходимо задать начальные условия, определяемые состоянием спроса и предложения на рынке в начальный момент времени. Как показано выше, при известных функции спроса и начальных условиях задача эволюции олигополии решается посредством организации соответствующей пошаговой процедуры. Процесс такого решения поясняют примеры, представленные на Рис.2.7 и 2.8.

На Рис.2.7 представлен процесс эволюции олигополии на рынке с функцией спроса вида (2.1) при наличии 4-х производителей-конкурентов, имеющих различные стоимости продукции. В начальный момент времени суммарная поставка товара на рынок ( $Q_0=4$ ) оказалась меньше равновесной. При наличии дефицита на рынке очень быстро (по сравнению с характерным временем развития производства) установится цена  $P_0=25$ , обеспечивающая равновесие спроса и предложения. При такой цене все четверо конкурентов поначалу будут получать прибыль и смогут развиваться, увеличивая со временем поступление товара на рынок. Процесс конкуренции будет протекать точно так же, как в описанном выше случае эволюции дуополии. В пределе по прошествии достаточно большого времени все конкуренты, имеющие стоимость продукции более  $C_1=5$  будут последовательно вытеснены с рынка и в конце концов установится стационарное равновесие добросовестного монополиста при  $Q_e=20$ ,  $P_e=C_1=5$  (точка 6 на Рис.2.7).

На Рис.2.8 представлен процесс эволюции олигополии при функции спроса  $P=100/Q$  (гипербола  $D$ ) и наличии весьма большого числа поставщиков-конкурентов, имеющих различные стоимости продукции (кривая  $S$ ). Допустим в начальный момент времени суммарная поставка товара на рынок ( $Q_0=6$ ) оказалась существенно больше той, которую принято называть равновесной и определять как точку пересечения кривых  $D$  и  $S$  ( $Q_1=4,5$ , точка 5). В данном случае имеет место перепроизводство, поскольку производители ожидали, что у них купят  $Q_0=6$  ед. товара по цене  $P_0=C_m=33,3$  (предельные издержки, точка 3), тогда как потребители согласны купить данный товар в количестве  $Q_0=6$  ед. только по цене  $P=16,7$  (точка 6).

ка 4). Как правило, значительное перепроизводство может возникнуть лишь тогда, когда спрос по каким-либо причинам (например, вследствие кризиса) резко уменьшился по сравнению с имевшим место в предыдущих периодах.

При наличии перепроизводства в начальный момент времени равновесной оказывается точка 4, а вовсе не точка 5 на Рис.2.8. Наблюдается полная аналогия со случаем начального дефицита (Рис.2.7), т.е. случаем  $Q=Q_0$ ,  $P>C_m$ . Например, если бы на Рис.2.8 предлагалось к продаже только 3 единицы товара (точка 2 на кривой **S**), тогда равновесная цена была бы  $P=33,3$  (точка 4' на кривой **D**), но не точка 5. Точка 5 может являться равновесной в случае, когда кривая **S** имеет только одну общую точку с кривой **D**, но не пересекает последнюю.

Итак, перепроизводство достаточно быстро (по сравнению с характерным временем эволюции) устраняется посредством того, что на рынке устанавливается цена  $P_0=16,7$ , обеспечивающая равновесие спроса и предложения при  $Q_0=6$ . При цене  $P_0$  на Рис.2.8 все производители подразделяются на две категории - на тех, у которых прибыль положительная (конкурентоспособные), и тех, у которых прибыль отрицательная (неконкурентоспособные). Последние могут "держаться на плаву", если имеют возможность компенсировать убытки, возникающие при продаже продукции, средствами, поступающими от продажи своих основных фондов. Поэтому производственные мощности неконкурентоспособных предприятий будут уменьшаться, темпы развития окажутся отрицательными. В уравнении (2.36) слагаемые, относящиеся к конкурентоспособным и неконкурентоспособным производителям, будут иметь разные знаки в соответствии со знаками их темпов развития и прибыли. И если положение конкурентоспособных производителей не должно внушать опасений, по крайней мере, в течение некоторого периода времени, то состояние неконкурентоспособных производителей сразу же оказывается неустойчивым.

Оценим период времени, в течение которого неконкурентоспособное предприятие может "держаться на плаву". Для этого воспользуемся выражением (2.6), представив его в виде:  $(dQ/Q)/dt=(P-C)/R$  или:

$$\Delta Q/Q = ((P - C)/R) * \Delta t. \quad (2.34)$$

Применим выражение (2.34) к случаю, когда прирост мощностей отрицательный  $\Delta Q < 0$  (происходит выбытие мощностей) и рыночная цена продукции меньше стоимости ( $P < C$ ). Производство может существовать, пока выведенных мощностей меньше, чем имевшихся в начальный момент времени, иначе говоря, пока  $\Delta Q$  по модулю меньше  $Q$ . Условие  $\Delta Q/Q = -1$  определяет период времени  $\Delta t = R/(C-P)$ , в течение которого предприятие может "держаться на плаву".

Однако следует учитывать, что при выбытии предприятия значение показателя  $R=R(Y < 0)$  может быть вовсе не таким, как при строительстве, когда  $R=R(Y > 0)$ , вследствие пониженной ликвидности выбывающих фондов. В частности, если на фонды выбывающего предприятия вообще не находится покупателей, то  $R=R(Y < 0) = 0$  и следовательно  $\Delta t = 0$ , т.е. предприятие вынуждено останавливаться, как только рыночная цена делается меньше стоимости. Может случиться и наоборот: земля или (и) строения так подорожали с момента пуска предприятия, что оказалось  $R(Y < 0) > R(Y > 0)$ . Такое предприятие может долго существовать, распродавая себя небольшими кусочками.

На Рис.2.8 конкурентоспособными являются производители, у которых стоимость продукции  $C \leq 16,7$ , неконкурентоспособными естественно те, у кого  $C > 16,7$ . Границей между ними на Рис.2.8 является линия, проходящая между точками 2 и 4. На начальном этапе развития олигополии все конкурентоспособные производители развиваются, все неконкурентоспособные производители деградируют. При этом неконкурентоспособные производители, борясь за выживание, понижают рыночную цену (при их отсутствии рыночная цена была бы равна  $P_1 = 22,2$ , точка 5 на Рис.2.8) и уменьшают тем самым прибыль, получаемую конкурентоспособными производителями. Однако это будет длиться лишь ограниченное время до тех пор, пока все выбывающие основные фонды не будут проданы.

В том случае, когда производителей на рынке очень много (как на Рис.2.8, где **S** — плавная кривая), и основные фонды каждого из них малы (или совершенно не являются ликвидными), эффект перепроизводства может практически вообще не наблюдаться, поскольку все неконкурентоспособные производители будут мгновенно вытеснены с рынка, поскольку им нечем компенсировать убытки. В этом случае равновесие всегда будет иметь место в точке пересечения (вернее касания) кривых **D** и **S**. Дальнейший (после пересечения с кривой **D**) участок кривой **S** учитывать (и чертить) вообще не следует, поскольку перепроизводство всегда будет отсутствовать.

После того, как последствия перепроизводства будут ликвидированы, начнется процесс равновесной эволюции, сопровождающийся увеличением со временем поступления товара на рынок. Эволюция будет протекать практически так же, как и в описанном выше случае дуополии. В пределе по прошествии до-

статочного большого периода времени все поставщики, имеющие стоимости более  $C_1=5$ , будут вытеснены с рынка и установится стационарное монопольное состояние  $Q_e=20$ ,  $P_e=C_1=5$ .

Рассмотрим процесс выхода из состояния перепроизводства и дальнейшей эволюции на численном примере, для чего используем исходные данные, близкие к изображенным на Рис.2.8. Пусть на рынке с функцией спроса  $P=100/Q$ , работают 6 поставщиков, первоначально имеющих одинаковую производительность  $Q_1=...=Q_6=1$ , т.е. общую производительность равную  $Q_0=6$  и равные доли участия  $w_j=1/6$ . Стоимость продукции этих производителей примем равными:  $C_1=7,5$ ;  $C_2=11$ ;  $C_3=15$ ;  $C_4=20$ ;  $C_5=25$  и  $C_6=33$ . Удельные затраты на развитие примем равными  $R=10 \cdot C$  для всех производителей.

В соответствии с функцией спроса равновесная цена продукции в начальный момент времени оказывается равной  $P=100/6=16,7$ . Для оценки темпа развития производства воспользуемся выражением (2.36), подставив в которое все необходимые численные значения, получаем:

$$Y=(1/6)*((16,7-7,5)/75+(16,7-11)/110+...+(16,7-33)/330)=(1/6)*(0,186-0,1)=0,086/6=0,014.$$

Темп развития оказался положительным, т.е. несмотря на перепроизводство на рынок в следующем периоде будет поставляться больше продукции, чем в предыдущем. Оценку величины прироста выработки продукции получим, воспользовавшись определением темпа  $Y=(dQ/dt)/Q$ , где  $Q=Q_0=6$  ед. Отсюда определяем прирост продаж продукции на рынке за период ( $dt=1$ ) как равный  $dQ=0,086$ , в состав которого входит вклад от развития конкурентоспособных предприятий ( $Q_+=0,186$ ) и потери вследствие выбытия неконкурентоспособных предприятий ( $Q_-=0,1$ ), т.е. продажи на рынке составят  $Q_1=6,086$  вместо прежних  $Q_0=6$ .

В представленной оценке имеется, по крайней мере, одно обстоятельство, которое внушает серьезные сомнения. Этим обстоятельством является неопределенность, связанная с возмещением средств от продажи основных фондов неконкурентоспособных предприятий. Если эти предприятия проработали срок полной амортизации, то вполне возможно, что полученных ими реновационных отчислений хватит для того, чтобы компенсировать убытки в размере начальной стоимости их строительства, т.е. для амортизированных выбывающих предприятий справедливо использовать оценку  $R=10 \cdot C$ . Однако в том случае, когда спрос снизился ранее срока амортизации неконкурентоспособных предприятий и полностью реновационные отчисления еще не накоплены, рыночная стоимость утилизируемых предприятий может оказаться много меньше первоначальной.

Например, если при выводе из эксплуатации и продаже основных и оборотных фондов выбывающих предприятий удастся вернуть только 20% их первоначальной стоимости (ликвидность 20%), то получаем следующую оценку:

$$Y = (1/6)*((0,186+(16,7-20)/40+(16,7-25)/50+(16,7-33)/66) = (1/6)*(0,186-0,5) = -0,314/6 = -0,052,$$

т.е. темп развития и соответствующий прирост производственных мощностей оказываются в этих условиях отрицательными. Последнее означает, что ввод мощностей развивающихся (конкурентоспособных) предприятий окажется суммарно ниже вывода мощностей неконкурентоспособных предприятий. Поэтому поставка на рынок продукции в следующем периоде снизится на -0,314 и составит  $Q=5,686$ .

Наконец в упоминавшемся выше предельном случае, когда владельцы неконкурентоспособных предприятий, предвидя окончательный исход конкуренции, не захотят терпеть убытки и сразу прекратят работу на данном рынке, поставка продукции снизится до уровня  $Q=3$ , равновесная цена возрастет до  $P=33,3$ , темп развития производства конкурентоспособных предприятий станет равным  $Y=0,669/3=0,223$  и прирост производства за период окажется  $Q_+=0,669$  (вместо прежних  $Q_+=0,186$ ).

Таким образом, при возникновении перепроизводства возможны как снижение, так и рост поступления товара на рынок в зависимости от того, как поведут себя и какими средствами обладают предприятия, вынуждаемые конкуренцией на данном рынке снижать выпуск продукции. Вместе с тем, рассмотрение олигополии несколько не изменяет выработанный при рассмотрении монополии и дуополии общий подход к исследованию конкуренции и развития производства.

Представленный выше подход к описанию рыночного равновесия и развития фирм (технологий) позволяет продвинуться дальше в экономическом анализе и получить ряд новых интересных результатов. Эти результаты описаны в работах [5-8], здесь дадим лишь краткое изложение основных идей и положений теории.

### 3 Предельные цены основных и оборотных фондов

Проблема корректной рыночной оценки фондов фирмы (предприятия) возникает при выпуске и распространении пакетов акций, при смене владельцев фирмы, при оценке ликвидности фондов. Например возникает вопрос, какую цену на фондовом рынке назначить предприятию, имеющему известную проектную стоимость. Иначе говоря, стоит ли продавать вместе с предприятием также и ожидаемую прибыль, или прибыль по возможности оставить себе.

Выше было показано, что прибыль от продажи продукции у предприятия появляется только тогда, когда темп развития  $Y$  в выражении (2.5) оказывается положительным. Для получения относительной оценки прибыли, которую принесет реальное предприятие, следует сравнить его с некоторым однотипным условным "предельным" предприятием, производящим ту же продукцию в количестве  $Q$ , но не приносящим прибыли.

По условию реальное и соответствующее условное "предельное" предприятия получают одну и ту же рыночную цену  $P$  за свою продукцию, что позволяет записать следующее соотношение:

$$P = C + R*Y = C_m, \quad (3.1)$$

где  $C$  и  $R$  — стоимость продукции и удельные затраты на развитие оцениваемого предприятия;

$C_m$  — стоимость продукции "предельного" предприятия (или предельная стоимость продукции).

Воспользовавшись результатами, полученными выше (см. раздел 2.3), представим составляющие выражения (3.1) в виде:  $C_m = C_{m_c} + C_{m_e}$ ,  $C = C_c + C_e$ ,  $R = R_c + R_e$ ,  $\tau_c = R_c/C_c$  и  $\tau_e = R_e/C_e$ . Здесь величины  $C_c$  и  $C_e$  пропорциональны полным стоимостям соответствующих основных  $K_c$  и оборотных  $K_e$  фондов (см. раздел 2). Соответственно предельные значения стоимостей  $C_{m_c}$  и  $C_{m_e}$  оказываются пропорциональными полным стоимостям предельных фондов  $K_{m_c}$  и  $K_{m_e}$ . Подставляя эти выражения в (3.1) и принимая во внимание, что основные и оборотные фонды предприятий независимы, получаем следующие выражения:

$$F_{m_c} = K_{m_c}/K_c = C_{m_c}/C_c = 1 + \tau_c * Y, \quad (3.2)$$

$$F_{m_e} = K_{m_e}/K_e = C_{m_e}/C_e = 1 + \tau_e * Y, \quad (3.3)$$

где, как указывалось ранее, для грубых оценок можно принимать по порядку величины  $\tau_c = \tau_e = 10$ .

Безразмерные величины  $F_{m_c}$  и  $F_{m_e}$  показывают относительные предельные цены фондов, при которых вся ожидаемая в будущем (согласно прогнозу величины  $Y > 0$ ) прибыль останется у продавца фондов. Такое решение будет явно несправедливым, поскольку покупатель вовсе не получит прибыли. Стремясь к равновесию, продавцы и покупатели должны договариваться о величинах наценки сверх номинальной стоимости фондов, чтобы выполнялись условия  $1 < F_c < F_{m_c}$ ,  $1 < F_e < F_{m_e}$ . Естественно при  $Y < 0$  о будущей прибыли речь не идет и цены фондов будут определяться их возможной ликвидностью.

Анализ выражений (3.2) и (3.3) показывает наличие больших спекулятивных возможностей фондовых рынков. Эти возможности могут проявляться в первую очередь по отношению к выходящим на рынок новым предприятиям, перспективы которых оценены с большой долей неопределенности или старым предприятиям при появлении новой информации, существенно меняющей их положение на рынке. Например, пусть предприятие выпускает акции, которые вследствие неопределенности перспектив расходятся почти по номинальной стоимости, т.е. брокеры оценивают темп развития практически как  $Y = 0$ . Пусть некто, оценив (интуитивно или на основании доступной ему информации) перспективы нового предприятия таким образом, что в будущем можно ожидать темпа роста  $Y = 0,1$  (10% годовых), решает купить большой пакет акций, выждать некоторое время и снова предложить этот пакет на рынок, когда брокерам станут ясны перспективы этого предприятия. При этой операции коэффициент  $F_c$  практически с 1 поднимается до  $F_c = (1 + 10 * 0,1) = 2$ . Поэтому владелец пакета сможет за короткое время существенно увеличить свой капитал и приступить к следующей подобной спекулятивной операции на фондовом рынке.

Как следует из выражений (3.2) и (3.3), указанные возможности фондовых рынков возникают потому, что всегда имеют место значения показателей  $\tau_c \gg 1$  и  $\tau_e \gg 1$ , и когда  $Y > 0$ . Если же оказывается  $Y < 0$ , то цена фондов быстро убывает, т.е. разорение наступает так же быстро, как и обогащение. Очевидно при  $Y = 0$  цена фондов оказывается равной номинальной. Как было показано выше, случай  $Y = 0$  осуществляется всегда, когда наступает стационарное равновесие и следовательно какие-либо законные спекуляции при этом невозможны. Поэтому область действия подобных операций может находиться по времени в основном в самом начале развития новых производств и технологий. По мере приближения к стационар-

ному равновесию фонды переходят к постоянным владельцам (не спекулянтам), которые затем длительное время продолжают получать на них, в лучшем случае, лишь обычную норму прибыли (процент) на капитал (дивиденды).

Таким образом, поведение фондового рынка оказывается тесно связанным с положением на товарном рынке и определяется показателями развития  $\tau_c = R_c/C_c$ ,  $\tau_e = R_e/C_e$  и  $Y$ . Отсутствие в современной микроэкономической теории показателей развития  $R$  и  $Y$  не позволяет этой теории исследовать поведение фондового рынка.

## 4 Финансирование развития в рыночной экономике

Выше рассматривалось развитие исключительно посредством использования прибыли, т.е. путем так называемого самофинансирования. Фактически же самофинансирование есть ни что иное, как инвестирование производителей непосредственно потребителями (т.е. покупателями) продукции. Однако на практике используются и другие способы финансирования, которые с целью упрощения можно свести к двум основным - кредитованию и инвестированию (выпуску акций). Между всеми этими способами финансирования нет никаких принципиальных различий и поэтому их математическое описание оказывается практически идентичным.

### 4.1 Финансирование посредством кредитования и инвестирования

Как правило, кредит характеризуется, по крайней мере, тремя показателями - величиной суммы кредита  $S_{cr}$  (руб.), относительной величиной платы (процентом) за пользование кредитом  $E_{cr}$  (1/год или %/год) и сроком возврата кредита  $T_{cr}$  (год). Кредит всегда возвращается из прибыли, получаемой фирмой. Предположим кредит возвращается равными долями в течение времени  $T_{cr}$ , т.е. каждый год должны возвращаться средства  $S_{cr}/T_{cr}$ . С остающейся суммы кредита взимается процент  $E_{cr}$ . В работе [6] получена усредненная оценка необходимой величины составляющей прибыли  $Pq$  в цене продукции  $P$ , обеспечивающей фирме возможность полностью и своевременно возвращать кредит:

$$Pq = (S_{cr}/(T_{cr} * Q)) * (1 + E_{cr} * (T_{cr} + 1)/2). \quad (4.1)$$

В том случае, когда срок возврата кредита является достаточно большим ( $T_{cr} \gg 1$ ), выражение (4.1) можно записать в упрощенном виде:

$$Pq = (S_{cr}/Q) * (1/T_{cr} + E_{cr}/2). \quad (4.2)$$

Поскольку согласно (2.5) справедливо выражение  $Pq = R * Y$ , где величина  $R = S_{cr}/Q$  считается известной, получаем оценку эквивалентного темпа развития фирмы  $Y_c$ , взявшей кредит со сроком возврата  $T_{cr}$  под процент  $E_{cr}$ :

$$Y_c = 1/T_{cr} + E_{cr}/2. \quad (4.3)$$

Анализируя выражение (4.3), можно выделить два частных случая.

Первый случай есть беспроцентное кредитование, когда  $E_{cr} = 0$  и эквивалентный темп развития фирмы равен  $Y_c = 1/T_{cr}$ . В этом случае, если темп развития производства  $Y$  совпадает с темпом возврата кредита ( $Y = Y_c = 1/T_{cr}$ ), то цена продукции фирмы  $P$  совпадает при кредитовании и самофинансировании. Изменением темпа возврата кредита ( $Y > Y_c$  или  $Y < Y_c$ ), можно влиять на цену продукции  $P$ .

Второй случай есть инвестирование (выпуск акций) под процент  $E_d = E_{cr}/2$ , что равносильно бесконечному сроку возврата (т.е.  $1/T_{cr} = 0$ ) и эквивалентному темпу развития  $Y_d = E_d$ . В этом случае, если темп развития производства  $Y$  совпадает с темпом выплаты дивидендов ( $Y = Y_d = E_d$ ), то цена продукции фирмы  $P$  совпадает при инвестировании и самофинансировании. Изменением уровня дивидендов также можно влиять на цену продукции  $P$ .

Таким образом, зная показатели фирмы (технологии)  $C$ ,  $R$ , вид функции спроса и конъюнктуру на рынке, можно с помощью выражений (4.1)-(4.3) оценить допустимые параметры кредита и возможные дивиденды на акции, которые принесут фирме успех на данном рынке.

## 4.2 Равновесная цена капитала на финансовом рынке

В развитой экономике, обладающей некоторыми производственными резервами, кроме рынка продукции и фондового рынка появляется также рынок капитала, стремящийся устанавливать практически единый уровень равновесной цены капитала для любых его потребителей (фирм и технологий), приходящих на этот рынок с целью получения (привлечения) капитала для собственного развития. Фирма, развивающаяся за счет кредита или внешних инвестиций, вынуждена покупать капитал на финансовом рынке. Этот привлекаемый капитал приводит в действие имеющиеся резервы производственных мощностей, начиная с труда ученых, конструкторов и проектантов, производителей оборудования и прочих отраслей, и кончая трудом строительного-монтажных организаций. В цену продукции развивающейся фирмы входит также цена капитала, используемого для развития. Каждой единице привлекаемого капитала (руб., долл., фунт и т.п.) можно назначить следующую цену:

$$P_c = R \cdot Y_c / R = Y_c = 1/T_{cr} + E_{cr}/2. \quad (4.4)$$

Поскольку величина  $Y_c$  имеет размерность (1/год), то и цена капитала  $P_c$  также имеет размерность [1/год] или [%/год]. Если рассматривать капитал, как некоторую продукцию ("производимую" банками и другими кредитными учреждениями), то единице этой продукции ("единице капитала") следует приписать размерность [руб.\*год]. Тогда размерность цены капитала  $P_c$  [руб./ед. капитала] окажется равной:  $P_c$  [руб./руб.\*год] или  $P_c$  [1/год].

Поясним смысл размерности единицы капитала [руб.\*год], обратившись к аналогиям. Напомним например, что в качестве размерности количества потребленной электроэнергии (и соответственно полученной работы) используется единица [кВт\*год]. Подобные по смыслу единицы используются при измерении механической работы. По аналогии величина, имеющая размерность [руб.\*год] может быть названа "работой капитала". В результате используемое иногда иносказательно выражение "капитал работает" приобретает буквальный смысл.

Можно также констатировать, что в выражении (4.4) слагаемое  $1/T_{cr}$  есть стоимость капитала, в то время как слагаемое  $E_{cr}/2$  по смыслу есть прибыль. Чем короче устанавливается срок возврата кредита  $T_{cr}$ , тем больше сумма ежегодной удельной (на руб. кредита) выплаты  $1/T_{cr}$ . При получении ежегодно доли средств в размере  $1/T_{cr}$  от первоначального кредита, выданного фирме, кредитное учреждение (банк) только лишь возмещает свои средства, не получая никакой прибыли. Величина  $T_{cr} \cdot E_{cr}/2$  определяет норму прибыли, получаемую банком за время  $T_{cr}$ . Например, если получен кредит сроком на  $T_{cr}=10$  (лет) под  $E_{cr}=0,1$  (10% годовых), то эквивалентный темп для фирмы окажется равным  $Y_c=1/10+0,1/2=0,15$  и норма прибыли такого кредита составит:  $T_{cr} \cdot E_{cr}/2=10 \cdot 0,1/2=0,5$ . Последнее означает, что прибыль банка от такого кредита в итоге окажется равной половине от первоначальной суммы кредита.

Если развитие происходит посредством привлечения инвестиций (акционирования), то стоимость капитала оказывается нулевой ( $T_{cr}$  равно бесконечности). При этом годовая норма прибыли оказывается непосредственно равной величине дивидендов  $E_d$ . Для фирмы инвестирование может быть выгоднее кредитования в том случае, когда сумма дивидендов, выплачиваемых за время  $T_{cr}$ , окажется меньше суммы средств, уплачиваемой за кредит, т.е.  $T_{cr} \cdot E_d < 1 + T_{cr} \cdot E_{cr}/2$  или  $E_d < 1/T_{cr} + E_{cr}/2$ .

Для того, чтобы найти в каждом конкретном случае рыночную цену капитала  $P_c$  составим и решим систему уравнений равновесия. Пусть каждый  $j$ -ый инвестор (банк), из полного числа  $n$  инвесторов, выдает кредит (инвестиции) только одной  $j$ -ой фирме в сумме  $S_{cr,j} = Q_j \cdot R_j$  на сооружение дополнительной мощности  $Q_j$  на срок  $T_{cr,j}$ , определяемый имеющимся у этой фирмы бизнес-планом. Соответственно каждый банк старается получить наибольшие проценты (дивиденды), выбирая фирму с наиболее привлекательным в этом смысле бизнес-планом. В свою очередь, любая фирма может воспользоваться конкуренцией между банками и попытаться получить кредит на срок  $T_{cr,j}$  под меньший процент, не позволяя таким образом поднять цену капитала выше некоторой равновесной и поэтому одинаковой независимо от того, к какому банку обратилась фирма.

Для определения равновесной цены капитала  $P_c$ , которая должна быть одинаковой у всех  $n$  банков, запишем систему уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} P_c &= 1/T_{cr,1} + Y_1 \\ P_c &= 1/T_{cr,2} + Y_2 \\ &\dots\dots\dots \\ P_c &= 1/T_{cr,j} + Y_j \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$P_c = 1/T_{cr,n} + Y_n,$$

где  $P_c$  — равновесная цена капитала, которую следует определить; величины  $T_{cr,j}$  и  $Y_j$  связаны таким образом, что при ограниченном  $T_{cr,j}$  равновесный процент на капитал равен  $Y_j = E_{cr,j}/2$ , тогда как при  $T_{cr,j}$  бесконечном имеем  $Y_j = E_{d,j}$ , т.е.  $Y_j$  есть равновесные дивиденды.

К системе уравнений (4.5) добавим уравнение баланса прироста капиталов в банковской системе, которое запишем в виде:

$$dS/dt = dS_1/dt + dS_2/dt + \dots + dS_j/dt + \dots + dS_n/dt, \quad (4.6)$$

где  $dS$  — сумма прироста капитала у инвесторов (банков) от всех вложенных капиталов за время  $dt$ ;

$dS_j$  — прирост капитала за время  $dt$ , полученный каждым  $j$ -ым банком.

Произведя преобразования уравнения (4.6) (умножая и деля каждое из слагаемых на  $S_j$  и на  $S$ ), получаем следующее уравнение:

$$Y_s = g_1 * Y_1 + g_2 * Y_2 + \dots + g_j * Y_j + \dots + g_n * Y_n, \quad (4.7)$$

где  $Y_s = (dS/dt)/S$  — темп прироста суммарного капитала в банковской системе;

$Y_j = (dS_j/dt)/S_j$  — темп прироста капитала  $j$ -ого банка;

$g_j = S_j/S$  — доля  $j$ -ого банка в общей сумме всех кредитов (инвестиций), причем очевидно  $\sum g_j = 1$ .

Подставляя в уравнение (4.7) все значения  $Y_j$ , приходим к выражению, определяющему равновесную цену капитала на рынке, имеющем темп роста  $Y_s$  при наличии спроса, характеризующегося показателями  $g_j$  и  $T_{cr,j}$ :

$$P_c = Y_s + \sum (g_j/T_{cr,j}). \quad (4.8)$$

Подстановка значения  $P_c$  в систему уравнений (4.5) определяет все равновесные значения процента на капитал (дивидендов)  $Y_j$  при условии, что все значения  $T_{cr,j}$  известны:

$$Y_j = P_c - 1/T_{cr,j} = Y_s + \sum (g_j/T_{cr,j}) - 1/T_{cr,j}, \quad (4.9)$$

где некоторые из значений  $T_{cr,j}$ , или даже все из них, могут быть равны бесконечности. В последнем случае оказывается  $P_c = Y_s$ , т.е. равновесным решением для банков и фирм является выплачивать инвесторам один и тот же процент (дивиденды) на инвестиции  $Y_j = Y_s$ . Очевидно такое решение в среднем подтверждается практикой, поскольку процент на капитал обычно является величиной достаточно устойчивой (если забыть о рисках, связанных с ненадежными фирмами).

Поясним смысл выражения (4.9) простым примером. Допустим на финансовом рынке заключено  $n$  кредитных сделок, для которых средняя стоимость кредитов определяется величиной  $\sum (g_j/T_{cr,j}) = n/(n * T_{cr,j}) = 0,1$ , т.е. средний срок возврата кредитов составил 10 лет. Пусть банковской системе установлен норматив темпа роста капитала  $Y_s = 0,05$  (5% годовых). При этих условиях средний процент за кредит должен быть установлен равным:

$$E_{cr,j} = 2 * Y_j = 2 * (Y_s + \sum (g_j/T_{cr,j}) - 1/T_{cr,j}) = 2 * (0,05 + 0,1 - 0,1) = 0,1 \text{ (10 \% годовых)}.$$

При этом равновесная цена капитала на рынке окажется равной  $P_c = Y_s + \sum (g_j/T_{cr,j}) = 0,05 + 0,1 = 0,15$ .

Пусть на этом рынке появляется еще один покупатель кредита, доля которого мала ( $g_{n+1} \ll 1/(n+1)$ ) и поэтому такой кредит практически не изменит равновесной цены капитала ( $P_c = 0,15$ ). Пусть однако этот кредит необходим сроком на 20 лет. В данном случае из (4.9) получаем:  $Y_{n+1} = P_c - 1/T_{cr,n+1} = 0,15 - 1/20 = 0,1$  или  $E_{cr,n+1} = 2 * Y_{n+1} = 0,2$  (20% годовых). Таким образом, на равновесном рынке капитала попытка получить кредит на больший срок должна приводить к соответствующему росту процента за кредит.

Вместе с тем, из выражений (4.8) и (4.9) следует, что появление на рынке заметного числа фирм, которым нужны кредиты на короткий срок (малые значения  $T_{cr}$ ), может вызвать значительный рост равновесной цены капитала. Последнее приведет к тому, что фирмам с длительным сроком обращения капитала банки будут значительно повышать проценты за кредит, что может приводить к отказу от таких кредитов. В результате совместное существование на одном финансовом рынке фирм с сильно различающимися сроками возврата заемных средств (например, многочисленных посреднических фирм-импортеров одновременно с энергетическими и другими промышленными фирмами) представляется проблематичным. Опыт последних лет (реформ) в России кажется подтверждает справедливость такого вывода.

## 5 Заключение. Рынок - инициатор научно-технического прогресса

Проведенное выше рассмотрение методологии предельных издержек и формирования равновесных цен в условиях эволюции монополии, дуополии и олигополии выявило общее свойство рыночной экономики, состоящее в том, что рынок всегда в первую очередь поддерживает и продвигает фирмы, производства и технологии, у которых средние издержки (стоимости продукции) являются минимальными.

Поскольку снижение издержек всегда есть следствие использования достижений научно-технического прогресса (НТП), можно говорить о том, что рынок является инициатором и проводником НТП. Причем в течение всего времени развития лучших (с наименьшими издержками) технологий рынок автоматически обеспечивает равновесие, при котором ни одна из технологий не бывает недооцененной, ни переоцененной, ни одна из технологий не бывает незаслуженно подавляема. Вытеснение любой технологии с рынка происходит только тогда, когда для нее подготовлена объективно наилучшая замена, основанная на достижениях НТП.

Связь рынка и НТП проявляется особенно явно в том случае, когда рассматриваются развивающиеся технологии, участвующие в процессе конкуренции. В весьма ограниченном виде эта связь отражена также в дуополии Курно при рассмотрении конкуренции дуополистов с различными средними издержками. У развивающихся фирм (технологий) роль инициатора НТП играет прибыль. При этом следует существенно изменить понятие "совершенная конкуренция". Более правильно оказывается называть "совершенной конкуренцией" ситуацию, когда вся прибыль каждой из фирм (технологий), действующих на рынке, независимо от их числа и влияния на равновесную цену, полностью направляется на развитие собственного производства. Фирма (технология), которая получает прибыль, но не направляет эту прибыль на развитие, ведет себя как недобросовестный монополист независимо от того, имеются ли у нее конкуренты на рынке (дуополия или олигополия) или нет. Иначе говоря, такая фирма всегда создает на рынке условия несовершенной конкуренции.

Хорошо известно [2] высказывание Адама Смита ("Исследование о природе и причинах богатства народов", 1776г.) о том, что в условиях рынка каждый индивидуум, преследуя лишь свои собственные эгоистические цели, как бы направляется чьей-то "невидимой рукой" в интересах достижения наибольшего блага для всех. В работе [3] действием "невидимой руки" Адама Смита объясняется стремление к заключению взаимовыгодных сделок на рынке, в результате чего получаемое равновесное распределение товаров экономически эффективно. На наш взгляд, наибольшим общим благом, обеспечиваемым для всех рынком посредством равновесного распределения товаров, являются блага, доставляемые посредством НТП. Таким образом, "невидимая рука" рынка проявляется в первую очередь через НТП, приводя в дальнейшем к появлению на рынке наиболее совершенных во всех отношениях и более дешевых товаров. Весь международный опыт говорит о том, что в первую очередь товары с максимальным использованием НТП становятся предметом эффективной международной торговли.

### Список литературы

1. М.Интрилигатор. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Изд-во "Прогресс", М., 1975.
2. П. Самуэльсон. Экономика. МГУ "Алгон", ВНИИСИ, М., 1992.
3. Роберт Пиндайк, Даниэль Рубинфельд. Микроэкономика. "Экономика". "Дело". М., 1992.
4. В.В.Лебедев. Математическое моделирование социально-экономических процессов. Изд-во "ИЗОГРАФ", М., 1997.
5. А.Н.Кархов. Основы рыночной экономики. "Фианфонд". М., 1994.
6. А.Н.Кархов. Равновесное ценообразование в энергетике на основе дисконтированной стоимости. Препринт № IBRAE 98-07. М., 1998.
7. А.А. Afanasiev, L.A. Bolshov, A.N. Karkhov. Economic Competitiveness of New Generation of NPPs With NP-500 Units in Russia, IBRAE RAS, Proceedings of TOPNUX.-96, p.118, 1996. Nuclear Engineering and Design 173 (1997) 219-227.
8. А.А.Афанасьев, Л.А.Большов, А.Н.Кархов. Экономическая эффективность АЭС нового поколения. "Атомная энергия", том 81, вып. 2, август 1996.

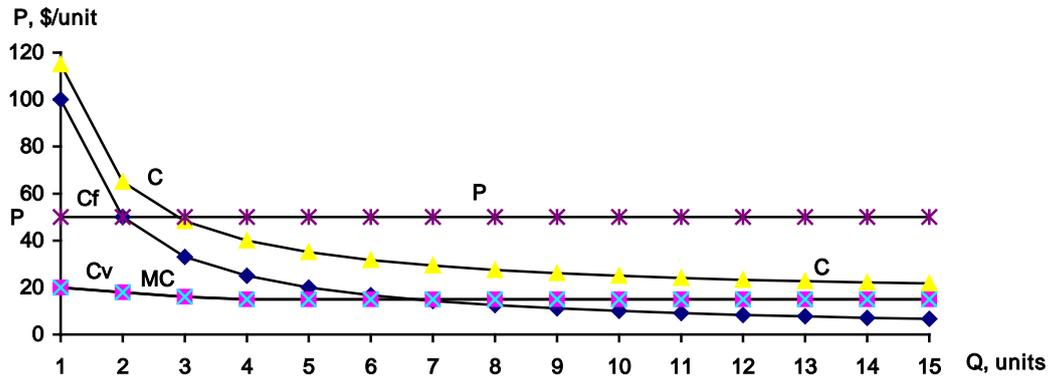


Рис.1.1. Поведение величин  $C_f$ ,  $C_v$ ,  $C$  и  $MC$  в зависимости от  $Q$  при невозрастающих средних издержках.

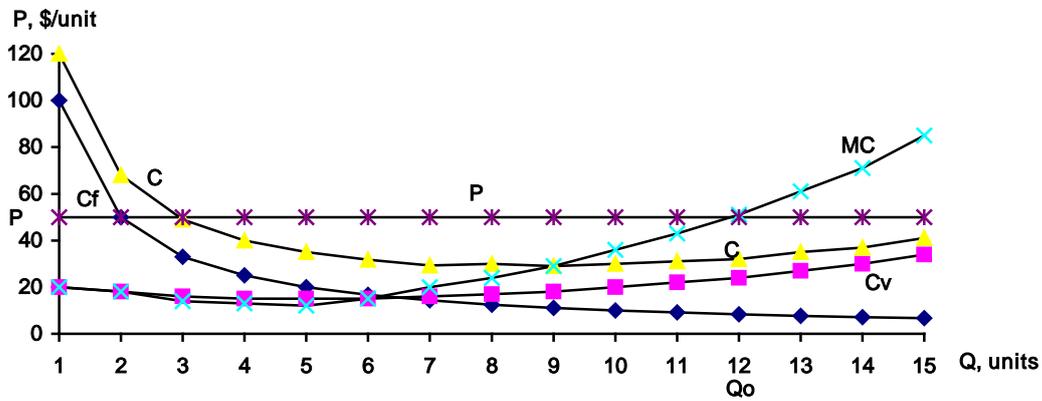


Рис.1.2. Поведение величин  $C_f$ ,  $C_v$ ,  $C$  и  $MC$  в зависимости от  $Q$  при возрастающих издержках.

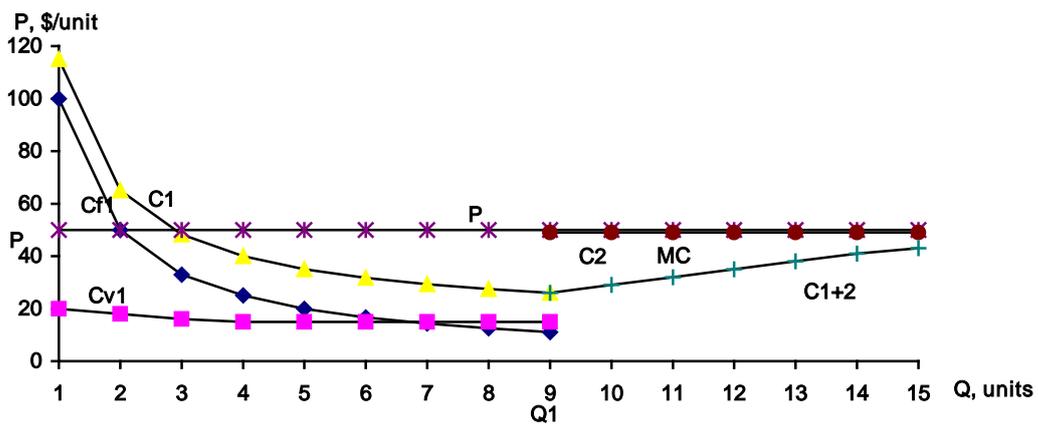
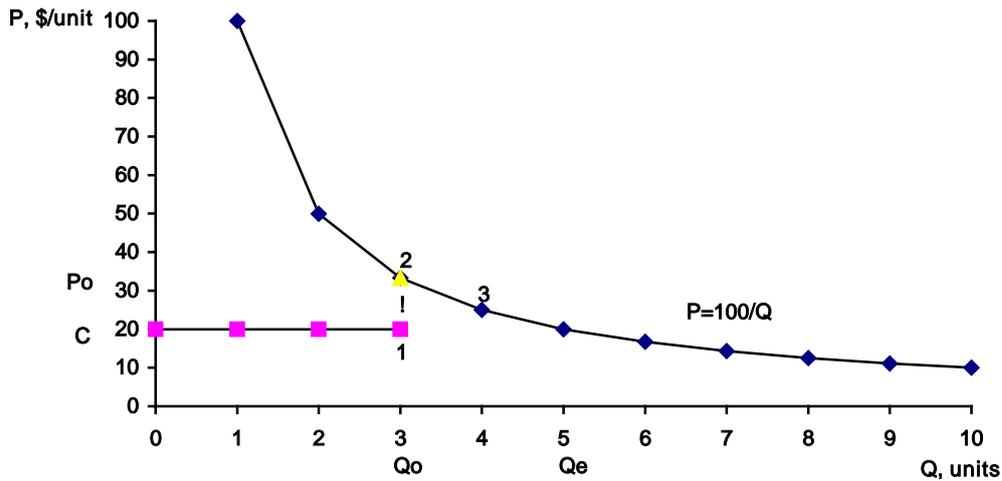
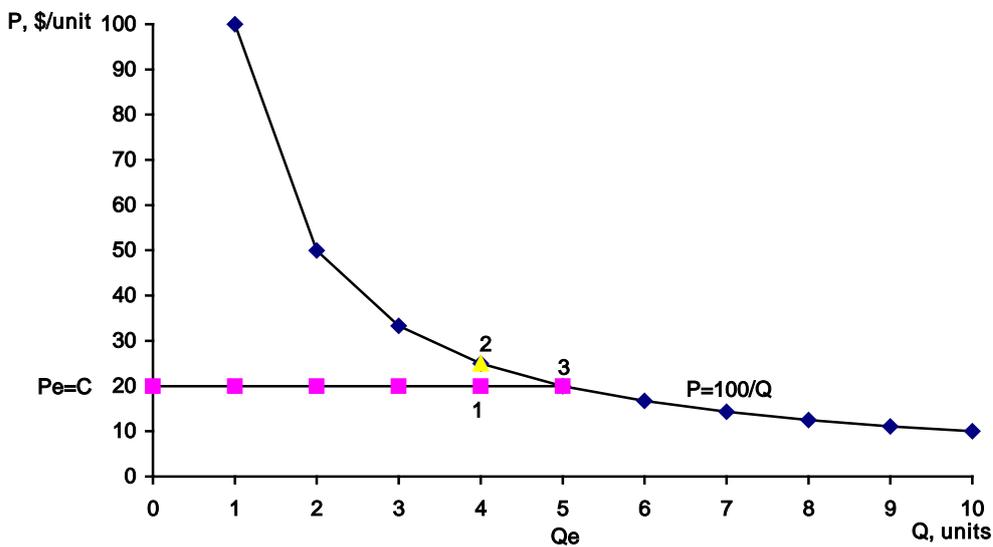


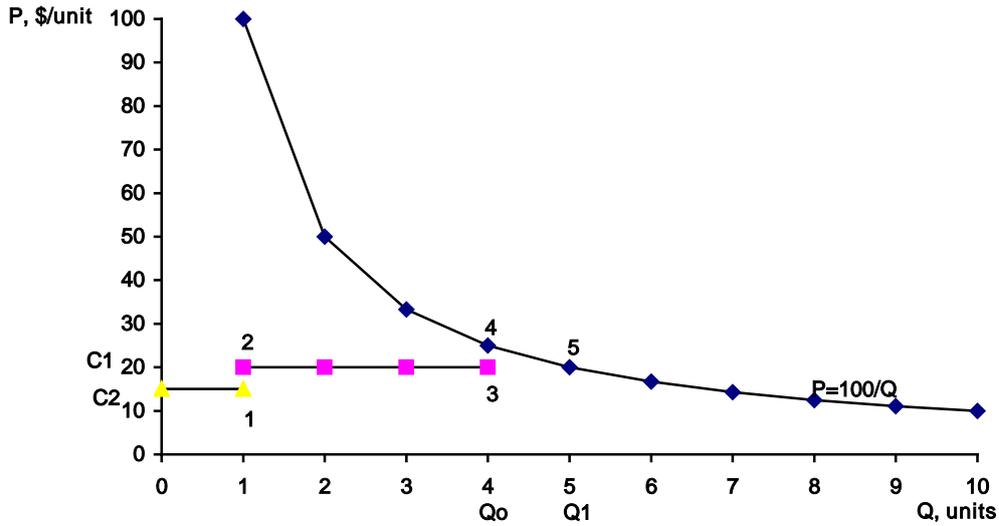
Рис.1.3. Поведение величин  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_{1+2}$  и  $MC$  в зависимости от  $Q_1$  и  $Q$  при использовании фирмой двух технологий.



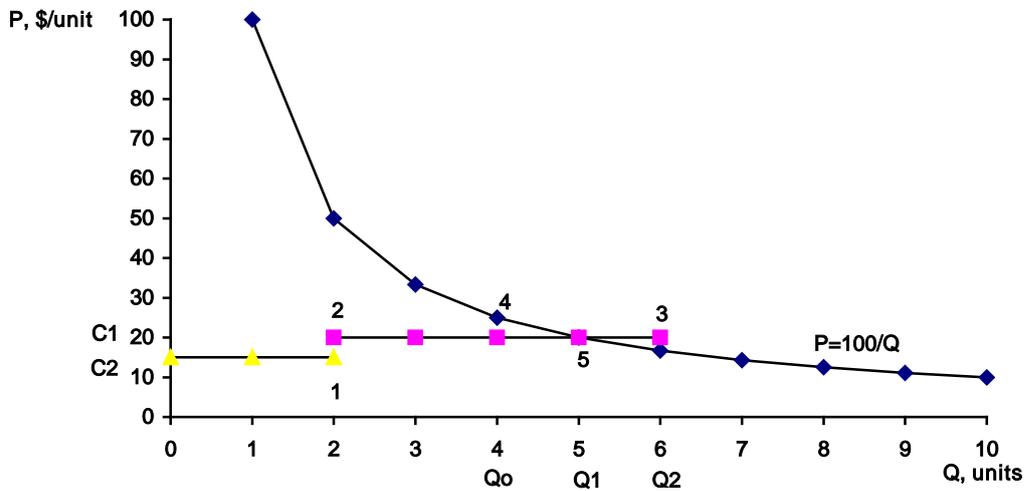
*Рис.2.1.* Функция спроса вида  $P=100/Q$  и первоначальное поведение добросовестного монополиста. Начальное состояние  $Q_0=3$ ,  $P=C=20$  (точка 1) очень быстро переходит в равновесное  $Q_0=3$ ,  $P_0=33,3$  (точка 2) и затем медленно по мере развития производства переходит в состояние  $Q_1=4$ ,  $P_1=25$  (точка 3).



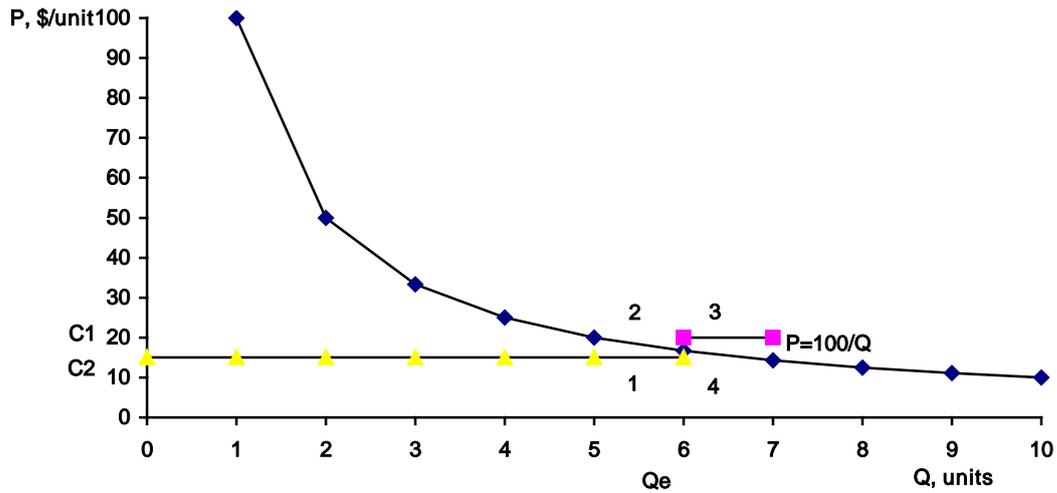
*Рис.2.2.* Функция спроса вида  $P=100/Q$  и равновесное поведение добросовестного монополиста. Равновесное состояние  $Q=4$ ,  $P=25$  (точка 2) по мере развития производства переходит в стационарное равновесное состояние  $Q_e=5$ ,  $P_e=20$  (точка 3).



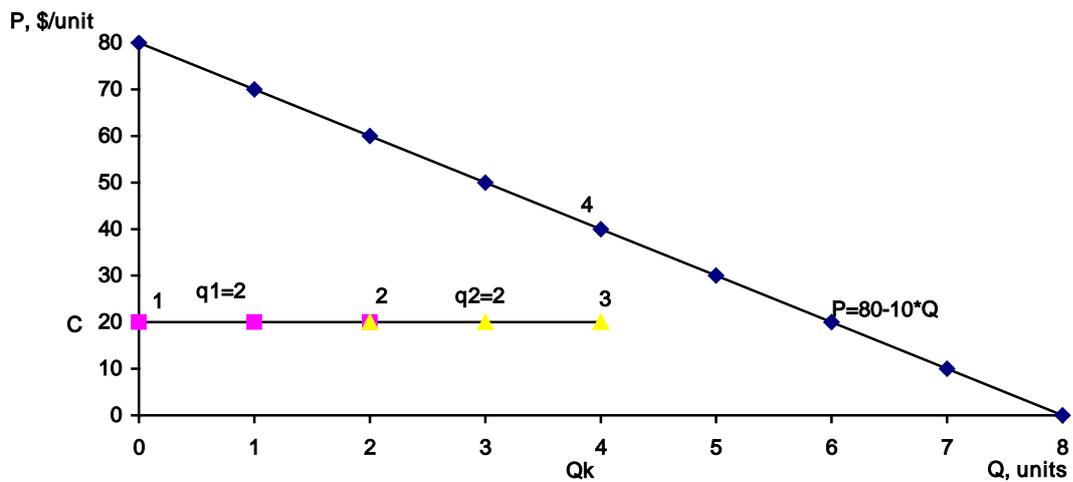
*Рис.2.3.* Функция спроса  $P=100/Q$  и первоначальное поведение дуополистов. Начальное состояние  $Q_0=q_1+q_2=1+3=4$ ,  $C_1=20$ ,  $C_2=15$  (точка 3) очень быстро переходит в равновесное  $Q_0=4$ ,  $P_0=25$  (точка 4) и затем медленно по мере развития производства дуополистов приходит в следующее промежуточное равновесное состояние  $Q_1=q_1+q_2=1+4=5$ ,  $P_1=C_1=20$  (точка 5).



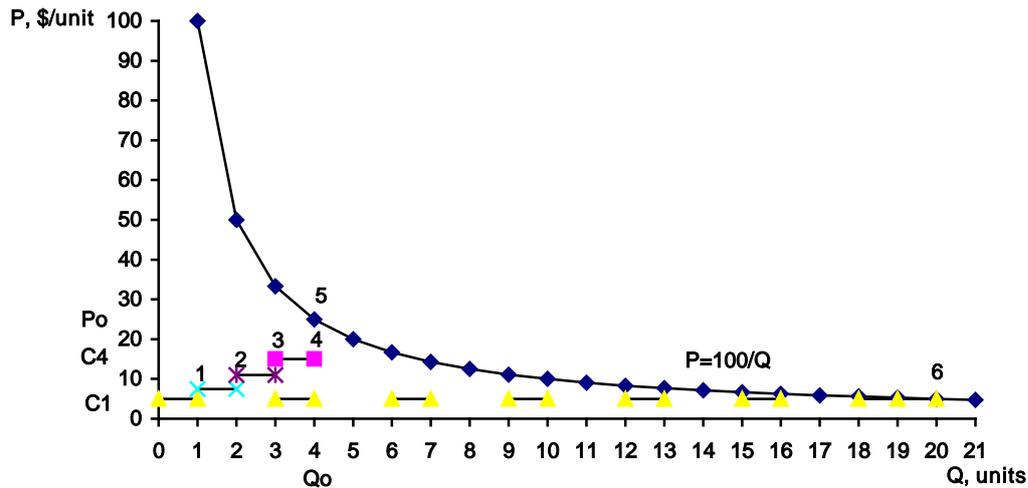
*Рис.2.4.* Функция спроса  $P=100/Q$  и поведение дуополистов при появлении перепроизводства. Равновесное состояние  $Q_0=q_1+q_2=1+3=4$ ,  $P_0=25$  (точка 4) по мере развития производства переходит в следующее также равновесное состояние  $Q_1=1+4=5$ ,  $P_1=20$  (точка 5) Затем при  $Q_2=2+4=6$ ,  $P_2=20$  (точка 3) возникает перепроизводство и первый дуополист будет вынужден ( $P < C_1$ ) снизить производство и вернуться в равновесное состояние (точка 5).



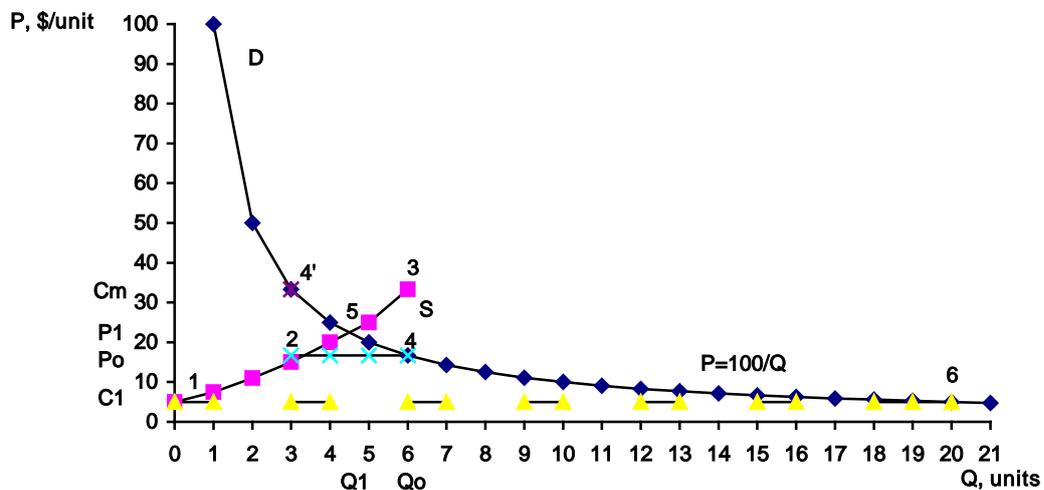
*Рис. 2.5. Функция спроса  $P=100/Q$  и стационарное состояние дуополии. Равновесное состояние  $Q_e=q_2=6, P_e=C_2=16,7$  (точка 1) является стационарным (при целочисленном решении). Второй дуополист (точки 2 - 3) находится в области перепроизводства и уже практически вытеснен с рынка.*



*Рис. 2.6. Решение Курно для случая функции спроса  $P=80-10*Q$  и стоимости продукции  $C_1=C_2=20$ . Каждому дуополисту предлагается выставить на продажу по 2 ед., т.е. всего  $Q_k=4$  ед. продукции. Видно, что стационарное равновесное решение еще не получено, поскольку равновесная цена  $P_k=40$  (точка 4) не совпадает со стоимостью продукции ( $C=20$ ).*



*Рис.2.7. Функция спроса  $P=100/Q$  и состояния олигополии при 4-х конкурентах. Начальное состояние  $Q_0=4$ ,  $C_1=5$ ,  $C_2=7,5$ ,  $C_3=11$ ,  $C_4=C_m=15$  (предельные издержки, точка 4) очень быстро переходит в промежуточное равновесие при  $Q_0=4$ ,  $P_0=25$  (точка 5) и затем медленно по мере развития производства и вытеснения конкурентов, у которых  $C > C_1=5$ , стремится к стационарному равновесному состоянию  $Q_e=20$ ,  $P_e=C_1=5$  (точка 6).*



*Рис.2.8. Функция спроса  $P=100/Q$  (кривая D) и состояния олигополии при большом числе конкурентов (кривая S). Начальное состояние  $Q_0=6$ ,  $C_m=33,3$  (точка 3) достаточно быстро (через точку 4,  $Q=6$ ,  $P=16,7$ ) приходит в промежуточное равновесие при  $Q_1=4,5$ ,  $P_1=22,2$  (точка 5) и затем медленно по мере развития производства конкурентов, у которых  $C < 22,2$ , стремится к тацонарному равновесному состоянию  $Q_e=20$ ,  $P_e=C_1=5$  (точка 6).*