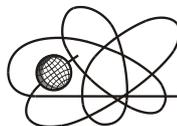




Российская Академия Наук

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ
БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**



ИБРАЭ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**NUCLEAR SAFETY
INSTITUTE**

Препринт ИБРАЭ № ИБРАЭ-2003-19

Preprint IBRAE-2003-19

А. А. Леонов, В. В. Чуданов

**ПРИМЕНЕНИЕ РРМ МЕТОДИКИ ДЛЯ
МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВУХФАЗНЫХ
СЖИМАЕМЫХ СРЕД С УЧЕТОМ
МИКРО-ИНЕРЦИИ**

Москва
2003

Moscow
2003

Леонов А.А., Чуданов В.В. ПРИМЕНЕНИЕ РРМ МЕТОДИКИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВУХФАЗНЫХ СЖИМАЕМЫХ СРЕД С УЧЕТОМ МИКРО-ИНЕРЦИИ. Препринт ИБРАЭ № IBRAE-2003-19. Москва: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. 2003. 20 с.

Аннотация

Рассматривается модель двухфазной среды с учетом микро-инерции. Основные уравнения для модели получены вариационным методом, основанным на использовании принципа наименьшего действия Гамильтона. Численное моделирование выполнено с использованием модифицированного метода кусочно-параболической аппроксимации (РРМ). Приведены результаты тестовых расчетов для задачи поведения газовых пузырьков в трубке с жидкостью и распространения ударной волны в жидкой среде с пузырьками газа.

©ИБРАЭ РАН, 2003

Leonov A.A., Chudanov V.V. APPLICATION PPM OF A PROCEDURE FOR MODELING OF TWO-PHASE COMPRESSIBLE MEDIUMS IN VIEW OF MICRO-INERTIA. Preprint IBRAE-2003-19. Moscow: Nuclear Safety Institute RAS, December 2003. 20 p.

Abstract

The model of two-phase medium is considered in view of micro-inertia. The basic equations are received by a variation method based on use of a principle of a least action of Hamilton. The numerical modeling is executed with use of a modified method of piecewise parabolic approximation (PPM). The results of test calculations for behavior problem of gas bubbles in a tube with a fluid and for distribution problem of a shock wave in fluid medium with gas bubbles are presented.

©Nuclear Safety Institute, 2003

Применение РРМ методики для моделирования двухфазных сжимаемых сред с учетом микро-инерции

А.А.Леонов, В.В.Чуданов

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

113191, Москва, ул. Б. Тульская, 52

тел.: (095) 955-22-34, эл. почта: chud@ibrae.ac.ru

Содержание

Введение.....	3
1. Математическая модель.....	3
1.1. Основные обозначения.....	3
1.2. Полная энергия и Лагранжиан двухфазной системы.....	4
1.3. Основные уравнения.....	5
1.4. Учет диссипации.....	8
2. Численный метод.....	9
3. Тестовые расчеты.....	15
Заключение.....	20
Литература.....	20

Введение

Типичным примером среды с микро-инерцией является жидкость, содержащая пузырьки с газом. Со времени появления первых работ (начало 60–ых г.г.) по построению математических моделей, описывающих поведение жидкости с пузырьками газа, был разработан и предложен целый ряд новых моделей. Существует, по крайней мере, два различных метода получения основных уравнений для двухфазной среды. Первый основывается на локальном усреднении законов сохранения. Вторым – вариационный подход, основан на использовании принципа наименьшего действия Гамильтона. Преимущество второго подхода заключается в том, что основные уравнения можно получить на основе одной известной скалярной функции средних величин переменных или Лагранжиана системы.

В данной работе рассматривается модель двухфазной среды с учетом микро-инерции [1], полученная в результате использования вариационного подхода для случая двухфазной среды, в которой каждый компонент является сжимаемым и имеет свою собственную температуру. Этот случай связан с моделированием перехода от возгорания к взрыву в пористых материалах.

1. Математическая модель

Принцип наименьшего действия Гамильтона состоит в том, что среди множества возможных траекторий системы между двумя фиксированными точками в координатном пространстве реализуется траектория, соответствующая экстремуму действия Гамильтона, которое определяется как интеграл Лагранжиана по времени.

1.1 Основные обозначения

Рассматриваемая двухфазная смесь состоит из двух несмешивающихся компонентов. Каждый α -ый компонент имеет собственные средние величины: локальной скорости \bar{u}_α , локальной плотности ρ_α^0 , парциальной плотности ρ_α , объемной доли φ_α , локальной энтропии единицы массы η_α , локальной внутренней энергии единицы массы $\varepsilon_\alpha(\rho_\alpha^0, \eta_\alpha)$ и локальной температуры θ_α , $\alpha=1,2$. Парциальные плотности ρ_α определяются следующим образом:

$$\rho_\alpha = \varphi_\alpha \rho_\alpha^0. \quad (1.1)$$

Эти плотности удовлетворяют уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha \bar{u}_\alpha) = 0. \quad (1.2)$$

В случае, когда процессами диссипации энергии можно пренебречь, величина локальной энтропии вдоль траекторий сохраняется:

$$\frac{d_\alpha}{dt} \eta_\alpha = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\frac{d_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \nabla.$$

Объемные парциальные энтропии определяются из выражения:

$$S_\alpha = \rho_\alpha \eta_\alpha \quad (1.4)$$

и удовлетворяют уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} S_\alpha + \operatorname{div}(S_\alpha \bar{u}_\alpha) = 0. \quad (1.5)$$

Объемные доли φ_α удовлетворяют следующему соотношению:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1, \quad (1.6)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют непрерывной и дисперсной фазе, соответственно.

Обозначим $\varphi_2 = \varphi$, тогда

$$\varphi_1 = 1 - \varphi. \quad (1.7)$$

Также предполагается, что для каждого компонента справедливо соотношение Гиббса:

$$\theta_\alpha d\eta_\alpha = d\varepsilon_\alpha + p_\alpha d\left(\frac{1}{\rho_\alpha}\right), \quad (1.8)$$

где $p_\alpha(\rho_\alpha^0, \eta_\alpha)$ среднее локальное давление.

1.2 Полная энергия и Лагранжиан двухфазной системы

В [1] полная энергия определяется следующим выражением:

$$E = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha \frac{|\bar{u}_\alpha|^2}{2} + \frac{m}{2} \left(\frac{d_i \varphi}{dt} \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha \varepsilon_\alpha \left(\frac{\rho_\alpha}{\varphi_\alpha}, \frac{S_\alpha}{\rho_\alpha} \right) + (\rho_1 + \rho_2) e(\varphi) + \frac{k}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{d}{2} |\bar{u}_2 - \bar{u}_1|^2, \quad (1.9)$$

где первый член представляет кинетическую энергию поступательного движения; второй соответствует кинетической энергии пульсаций,

$$\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_i \nabla,$$

где индекс i обозначает поверхность раздела, \bar{u}_i – интерфейсная скорость (выражение для скорости \bar{u}_i должно быть выбрано априори);

третий представляет внутреннюю энергию единицы объема;

четвертый член соответствует потенциальной энергии, связанной с внутренней структурой, выражение для функции e должно быть известно априори;

пятый учитывает макроскопическую неоднородность смеси;

шестой представляет кинетическую энергию, связанную с эффектом переноса дополнительной массы.

Лагранжиан системы записывается в обычной форме $L = T - U$, где T – кинетическая энергия, U – потенциальная энергия. Из выражения для полной энергии (1.9) можно получить:

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{\alpha=1}^2 \rho_{\alpha} \frac{|\bar{u}_{\alpha}|^2}{2} + \frac{m}{2} \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right)^2 + \frac{d}{2} |\bar{u}_2 - \bar{u}_1|^2, \\
U &= \sum_{\alpha=1}^2 \rho_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \left(\frac{\rho_{\alpha}}{\varphi_{\alpha}}, \eta_{\alpha} \right) + \rho e(\varphi) + \frac{k}{2} |\nabla \varphi|^2.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

При проведении вычислений более удобно вместо переменных \bar{u}_{α} и η_{α} использовать новые переменные: парциальный импульс $\vec{J}_{\alpha} = \rho_{\alpha} \bar{u}_{\alpha}$ и парциальную энтропию S_{α} . Тогда, Лагранжиан системы:

$$L = L(\vec{J}_1, \vec{J}_2, \rho_1, \rho_2, S_1, S_2, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi). \tag{1.11}$$

1.3 Основные уравнения

Пусть вычислительная область в пространстве-времени определена как $B \times [t_2, t_1]$. При нахождении экстремума действия Гамильтона: $\int_{t_1}^{t_2} dt \int_B L d\vec{x}$ в координатных пространствах $(\vec{J}_{\alpha}, \rho_{\alpha}, S_{\alpha})$ и $(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi)$ можно получить уравнения для импульса каждого из компонентов смеси [1]:

$$\rho_{\alpha} \frac{\partial \vec{K}_{\alpha}}{\partial t} + \text{rot} \vec{K}_{\alpha} \times \vec{J}_{\alpha} - \rho_{\alpha} \nabla R_{\alpha} + S_{\alpha} \nabla \theta_{\alpha} = 0, \alpha=1,2, \tag{1.12}$$

$$\text{где } \vec{K}_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \vec{J}_{\alpha}}, R_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \rho_{\alpha}}, \theta_{\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial S_{\alpha}}, \tag{1.13}$$

и уравнение для объемной доли φ [1]:

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \right) - \text{div} \left(\frac{\partial L}{\partial (\nabla \varphi)} \right) = 0. \tag{1.14}$$

Если пренебречь пятым и шестым членами в выражении для полной энергии (1.9), то соответствующая функция Лагранжа будет иметь вид:

$$L = \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{|\vec{J}_{\alpha}|^2}{2\rho_{\alpha}} + \frac{m}{2} \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right)^2 \delta_{1\alpha} \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \rho_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} - \rho e(\varphi), \tag{1.15}$$

где $\delta_{1\alpha}$ – символ Кронеккера. В данном выражении индекс “1” относится к жидкой фазе, а индекс “2” к газовой. Значение интерфейсной скорости \bar{u}_i выбрано равной скорости жидкой фазы смеси \bar{u}_1 . Это

означает, что кинетическая энергия пульсаций $\frac{m}{2} \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right)^2$ предполагается сосредоточенной в жидкой

фазе. Это предположение допустимо лишь при малой объемной доле газовых пузырьков в смеси. Для упрощения окончательного выражения также предполагается, что коэффициент m является функцией лишь одной переменной $m = m(\varphi)$, хотя в общем случае $m = m(\varphi, \rho_1, \rho_2, S_1, S_2, |\bar{u}_1 - \bar{u}_2|)$. Этот параметр представляет массу жидкости, которая приходит в движение под влиянием пульсации газовых пузырьков.

С использованием (1.15) можно найти явный вид уравнения (1.12). Для этого выразим явным образом коэффициенты (1.13):

$$\vec{K}_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \vec{J}_{\alpha}} = \bar{u}_{\alpha} + m \frac{d_1 \varphi}{dt} \frac{\nabla \varphi}{\rho_1} \delta_{1\alpha},$$

$$R_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \rho_\alpha} = -\frac{|\bar{u}_\alpha|^2}{2} - m \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right) \frac{\bar{u}_1 \nabla \varphi}{\rho_1} \delta_{1\alpha} - \frac{\partial}{\partial \rho_\alpha} (\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) - e(\varphi),$$

$$\theta_\alpha = -\frac{\partial L}{\partial S_\alpha} = \frac{\partial}{\partial S_\alpha} (\rho_\alpha \varepsilon_\alpha).$$

С учетом полученных выражений и соотношения $rot \bar{K}_\alpha \times \bar{j}_\alpha = \bar{j}_\alpha \nabla \bar{K}_\alpha - \left(\frac{\partial \bar{K}_\alpha}{\partial \bar{x}} \right)^T \bar{j}_\alpha$ (1.12) примет вид:

$$\rho_\alpha \frac{d_\alpha \bar{K}_\alpha}{dt} - \left(\frac{\partial \bar{K}_\alpha}{\partial \bar{x}} \right)^T \bar{j}_\alpha - \rho_\alpha \nabla \left(-\frac{|\bar{u}_\alpha|^2}{2} - m \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right) \frac{\bar{u}_1 \nabla \varphi}{\rho_1} \delta_{1\alpha} - \frac{\partial}{\partial \rho_\alpha} (\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) - e(\varphi) \right) + S_\alpha \nabla \left(\frac{\partial}{\partial S_\alpha} (\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) \right) = 0. \quad (1.16)$$

Учитывая соотношение Гиббса (1.8) и определение потенциала Гиббса: $\mu_\alpha = \varepsilon_\alpha + \frac{p_\alpha \varphi_\alpha}{\rho_\alpha} - \theta_\alpha \eta_\alpha$, легко получить: $d(\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) = \theta_\alpha dS_\alpha + \mu_\alpha d\rho_\alpha - p_\alpha d\varphi_\alpha$ и $S_\alpha d\theta_\alpha + \rho_\alpha d\mu_\alpha = \varphi_\alpha dp_\alpha$. С учетом последнего выражения и соотношений $\frac{\partial}{\partial \rho_\alpha} (\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) = \mu_\alpha$, $\frac{\partial}{\partial S_\alpha} (\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) = \theta_\alpha$ можно привести (1.16) к виду:

$$\rho_\alpha \frac{d_\alpha \bar{K}_\alpha}{dt} - \left(\frac{\partial \bar{K}_\alpha}{\partial \bar{x}} \right)^T \bar{j}_\alpha + \left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial \bar{x}} \right)^T + \varphi_\alpha d\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \frac{de}{d\varphi} \nabla \varphi + \rho_\alpha \nabla \left(m \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right) \frac{\bar{u}_1 \nabla \varphi}{\rho_1} \right) \delta_{1\alpha} = 0 \quad (1.17)$$

Рассмотрим случай $\alpha = 2$, тогда $\bar{K}_2 = \bar{u}_2$, $\delta_{12} = 0$ и уравнение (1.17) для импульса второго компонента смеси с учетом соотношения:

$$div(\bar{a} \otimes \bar{b}) = \bar{b} div \bar{a} + \frac{\partial \bar{b}}{\partial \bar{x}} \quad (1.18)$$

будет выглядеть следующим образом [1]:

$$\frac{\partial \rho_2 \bar{u}_2}{\partial t} + div(\rho_2 \bar{u}_2 \otimes \bar{u}_2 + \varphi_2 p_2 I) = \left(p_2 - \rho_2 \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi. \quad (1.19)$$

Для случая $\alpha = 1$ имеем $\bar{K}_1 = \bar{u}_1 + m \frac{d_1 \varphi}{dt} \frac{\nabla \varphi}{\rho_1}$. Далее, используя (1.18), можно показать, что уравнение для импульса первого компонента смеси будет иметь вид:

$$\frac{\partial \rho_1 \bar{K}_1}{\partial t} + div(\rho_1 \bar{u}_1 \otimes \bar{K}_1 + \varphi_1 p_1 I) = - \left(p_1 - \rho_1 \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi - m \frac{d_1 \varphi}{dt} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}} \right)^T \nabla \varphi. \quad (1.20)$$

Или выражая \bar{K}_1 через \bar{u}_1 , получим [1]:

$$\rho_1 \frac{d_1 \bar{u}_1}{dt} + \nabla(p_1 \varphi_1) + \rho_1 \frac{d_1}{dt} \left(m \frac{d_1 \varphi}{dt} \frac{1}{\rho_1} \right) \nabla \varphi + m \frac{d_1 \varphi}{dt} \nabla \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right) = - (p_1 + \rho_1 \frac{de}{d\varphi}) \nabla \varphi. \quad (1.21)$$

Используя Лагранжиан (1.15), можно получить из (1.14) микроструктурное уравнение для объемной доли газа в явном виде:

$$\frac{d_1}{dt} \left(\frac{m(\varphi)}{2\rho_1^2} \left(\frac{d_1\varphi}{dt} \right)^2 \right) = \left(p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi} \right) \frac{d_1\varphi}{dt} \frac{1}{\rho_1^2}. \quad (1.22)$$

Обозначим $\tau = \frac{d_1\varphi}{dt} \sqrt{m}$, тогда уравнение (1.22) можно записать в виде квазилинейной системы уравнений первого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d_1\varphi}{dt} = \frac{\tau\rho_1}{\sqrt{m}} \\ \frac{d_1\tau}{dt} = \frac{p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi}}{\rho_1 \sqrt{m}} \end{array} \right. \quad (1.23)$$

С учетом (1.23) уравнение для импульса первого компонента смеси (1.21) будет иметь вид:

$$\rho_1 \frac{d_1\bar{u}_1}{dt} + \nabla \left(p_1\varphi_1 + \frac{m}{2} \left(\frac{d_1\varphi}{dt} \right)^2 \right) = - \left(p_2 - \rho_2 \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi. \quad (1.24)$$

Уравнения (1.2), (1.5), (1.19), (1.23) и (1.24) образуют полную записанную через обычные физические переменные систему уравнений, описывающих поведение двухфазной смеси:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \text{div}(\rho_2 \bar{u}_2) = 0 \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 \bar{u}_1) = 0 \\ \rho_2 \frac{d_2\bar{u}_2}{dt} + \nabla(p_2\varphi_2) = \left(p_2 - \rho_2 \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi \equiv p_i \nabla \varphi \\ \rho_1 \frac{d_1\bar{u}_1}{dt} + \nabla \left(p_1\varphi_1 + \frac{\tau^2 \rho_1^2}{2} \right) = - \left(p_2 - \rho_2 \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi \equiv -p_i \nabla \varphi \\ \frac{d_1\varphi}{dt} = \frac{\tau\rho_1}{\sqrt{m}} \\ \frac{d_1\tau}{dt} = \frac{p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi}}{\rho_1 \sqrt{m}} \\ \frac{d_2\eta_2}{dt} = 0 \\ \frac{d_1\eta_2}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Здесь через $p_i = p_2 - \rho_2 \frac{de}{d\varphi}$ обозначено среднее интерфейсное давление.

В работе [1] показано, что система (1.25) имеет вещественные собственные значения и является гиперболической при условии $(u_2 - u_1)^2 \neq c_2^2$ (c_2 - скорость звука второго компонента смеси). Для численных вычислений более удобно преобразовать последние два уравнения, выражающих закон сохранения энтропии, в уравнения для энергии. Используя соотношение Гиббса (1.8), уравнение непрерывности (1.2) и уравнение для энтропии (1.3), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_\alpha \varepsilon_\alpha + \frac{|\bar{j}_\alpha|^2}{2\rho_\alpha} \right) + \operatorname{div} \left(\bar{j}_\alpha \left(\frac{|\bar{u}_\alpha|^2}{2} + \varepsilon_\alpha + p_\alpha \frac{\varphi_\alpha}{\rho_\alpha} \right) \right) = u_\alpha \left(\rho_\alpha \frac{d_\alpha \bar{u}_\alpha}{dt} + \nabla(p_\alpha \varphi_\alpha) \right) - p_\alpha \frac{d_\alpha \varphi_\alpha}{dt}.$$

С учетом уравнения для импульса второго компонента будем иметь [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_2 \left(\varepsilon_2 + e + \frac{|\bar{u}_2|^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho_2 \bar{u}_2 \left(\varepsilon_2 + e + \frac{|\bar{u}_2|^2}{2} + p_2 \frac{\varphi_2}{\rho_2} \right) \right) = -p_i \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (1.26)$$

С учетом уравнения для импульса первого компонента и (1.23) получим [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_1 \left(\varepsilon_1 + e + \frac{\rho_1 \tau^2}{2} + \frac{|\bar{u}_1|^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho_1 \bar{u}_1 \left(\varepsilon_1 + e + \rho_1 \tau^2 + \frac{|\bar{u}_1|^2}{2} + p_1 \frac{\varphi_1}{\rho_1} \right) \right) = p_i \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (1.27)$$

Система (1.25), в которой уравнения, выражающие закон сохранения энтропии, заменены уравнениями для энергии, имеет сходство с моделью, предложенной в работе [2]. Отличия заключаются в присутствии “турбулентных” членов в уравнениях для импульса и энергии непрерывной фазы и в уравнении для объемной доли. В системе (1.25) вместо уравнения переноса для φ присутствует система двух уравнений для объемной доли газа и аналога радиальной скорости пульсации τ газовых пузырьков.

1.4 Учет диссипации

Дальнейшие вычисления проводятся без учета потенциальной энергии $e(\varphi)$, связанной с внутренней структурой. Тогда интерфейсное давление $p_i = p_2$. Для этого случая рассмотрим диссипативную модель с учетом трения между жидкой и газообразной фазами, схлопывания газовых пузырьков и внешней силы \bar{g} . Система (1.25) с учетом диссипации будет иметь вид (1.28). Член $\lambda(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)$ представляет силу трения между газовой и жидкой фазами; λ – положительный коэффициент, зависящий от свойств среды; p_μ – сила трения, вызывающая схлопывание пузырьков. Для случая сферических пузырьков вы-

ражение для p_μ имеет следующий вид [3]: $p_\mu = \frac{4\mu_l}{R} \frac{dR}{dt}$, где μ_l – динамическая вязкость жидкости; R – радиус пузырьков газа, связанный с объемной долей газа φ и концентрацией пузырьков N соотношением $\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3 N$. Полагая $N \approx \text{const}$ и заменяя $\frac{d}{dt}$ на $\frac{d_1}{dt}$, получим:

$$p_\mu = \frac{4\tau\rho_1\mu_l}{3\varphi\sqrt{m}}. \quad (1.29)$$

В случае слабых вариаций N для вычисления p_μ также используется (1.29), а изменения концентрации оцениваются из уравнения:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N\bar{u}_2) = 0. \quad (1.30)$$

Уравнение (1.30) является независимым от системы (1.28) и не изменяет ее математических свойств [2].

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{d_1 \tau}{dt} = \frac{p_2 - p_1 - p_\mu}{\rho_1 \sqrt{m}} \\
\frac{d_1 \varphi}{dt} = \frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}} \\
\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \bar{u}_2) = 0 \\
\frac{\partial(\rho_2 \bar{u}_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 u_2 \otimes \bar{u}_2 + \varphi_2 p_2 I) = p_2 \nabla \varphi + \rho_2 \bar{g} + \lambda(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \\
\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{|\bar{u}_2|^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho_2 \bar{u}_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{|\bar{u}_2|^2}{2} + p_2 \frac{\varphi_2}{\rho_2} \right) \right) \\
= -p_2 \left(\frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}} - \bar{u}_1 \nabla \varphi \right) + \lambda \bar{u}_1 (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) + \rho_2 u_2 \bar{g} \\
\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \bar{u}_1) = 0 \\
\frac{\partial(\rho_1 \bar{u}_1)}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho_1 u_1 \otimes \bar{u}_1 + \left(\frac{\rho_1^2 \tau^2}{2} + p_1 \varphi_1 \right) I \right) = p_2 \nabla \varphi + \rho_2 \bar{g} + \lambda(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \\
\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{\rho_1 \tau^2}{2} + \frac{|\bar{u}_1|^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho_1 \bar{u}_1 \left(\varepsilon_1 + \rho_1 \tau^2 + \frac{|\bar{u}_1|^2}{2} + p_1 \frac{\varphi_1}{\rho_1} \right) \right) \\
= p_2 \left(\frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}} - \bar{u}_1 \nabla \varphi \right) - \lambda \bar{u}_1 (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) + \rho_1 u_1 \bar{g}
\end{array} \right. \quad (1.28)$$

2. Численный метод.

Численное решение системы (1.28) было выполнено для одномерного случая с использованием метода PPM [4]. Обобщение на двумерный и трехмерный случаи может быть проведено с использованием метода расщепления по направлениям и не представляет принципиальных затруднений [5].

Введем индексы “l” и “g” для обозначения жидкой и газовой фазы, соответственно. Также будем использовать следующие обозначения: $u_1 = u_l$, $u_2 = u_g$, $\varphi_1 = \varphi_l$, $\varphi_2 = \varphi_g$, $\rho_1 = \varphi_l \rho_l$ и $\rho_2 = \varphi_g \rho_g$. В одномерном случае система (1.28) будет иметь вид (2.1), где $E_g = \varepsilon_g + u_g^2 / 2$; $E_l = \varepsilon_l + u_l^2 / 2 + \varphi_l \rho_l \tau^2 / 2$.

Численное решение системы (2.1) находится при последовательном применении гиперболического оператора $L_h^{\Delta t}$ и интегрального оператора $L_S^{\Delta t}$ для учета релаксационных членов: $U_i^{n+1} = L_S^{\Delta t} L_h^{\Delta t} U_i^n$, где

$$U = (\tau, \varphi_g, \varphi_g \rho_g, \varphi_g \rho_g, \varphi_g \rho_g u_g, \varphi_g \rho_g E_g, \varphi_l \rho_l, \varphi_l \rho_l u_l, \varphi_l \rho_l E_l)^T.$$

Т.е. численное решение системы (2.1) сводится к последовательному решению систем уравнений (2.2), (2.3) и (2.4). Значения переменных U , найденные при решении данной системы уравнений на текущем временном шаге, используются в качестве начальных значений при решении следующей системы уравнений.

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial \tau}{\partial t} + u_l \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{p_g - p_l - p_\mu}{\varphi_l \rho_l \sqrt{m}} \\
& \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} + u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} = \frac{\tau \varphi_l \rho_l}{\sqrt{m}} \\
& \frac{\partial \varphi_g \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g)}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g^2 + \varphi_g p_g)}{\partial x} = p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_g \rho_g g + \lambda (u_l - u_g) \\
& \frac{\partial (\varphi_g \rho_g E_g)}{\partial t} + \frac{\partial (u_g (\varphi_g \rho_g E_g + \varphi_g p_g))}{\partial x} \\
& = p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_g \rho_g u_g g + \lambda u_l (u_l - u_g) - p_g \frac{\tau \varphi_l \rho_l}{\sqrt{m}} \\
& \frac{\partial \varphi_l \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_l \rho_l u_l)}{\partial x} = 0 \\
& \frac{\partial (\varphi_l \rho_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\varphi_l \rho_l u_l^2 + \varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial x} = -p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_l \rho_l g - \lambda (u_l - u_g) \\
& \frac{\partial (\varphi_l \rho_l E_l)}{\partial t} + \frac{\partial \left(u_l \left(\varphi_l \rho_l E_l + \varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right) \right)}{\partial x} \\
& = -p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_l \rho_l u_l g - \lambda u_l (u_l - u_g) - p_g \frac{\tau \varphi_l \rho_l}{\sqrt{m}}
\end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Рассмотрим метод численного решения гиперболической системы (2.2). Решение системы (2.2) находилось с использованием метода РРМ, изначально предназначенного для моделирования простых газо-динамических течений. Основное преимущество такого способа решения заключается в том, что эту методику легко обобщить на двумерный или трехмерный случай, так как в лагранжевых массовых переменных решение рассматриваемой многомерной задачи можно свести к решению локальных одномерных задач Римана вдоль соответствующих направлений [5]. В системе уравнений (2.2) перейдем от Эйлеровых координат к лагранжевым массовым переменным, используя соотношения, связывающие производные по эйлеровым и массовым координатам:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_{,l}} - (\varphi \rho) u \frac{\partial}{\partial s}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = (\varphi \rho) \frac{\partial}{\partial s}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial \tau}{\partial t} + u_l \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial \varphi_g}{\partial t} + u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial \varphi_g \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g)}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g^2 + \varphi_g p_g)}{\partial x} = p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_g \rho_g g \\
\frac{\partial (\varphi_g \rho_g E_g)}{\partial t} + \frac{\partial (u_g (\varphi_g \rho_g E_g + \varphi_g p_g))}{\partial x} = p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_g \rho_g u_g g \\
\frac{\partial \varphi_l \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_l \rho_l u_l)}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial (\varphi_l \rho_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\varphi_l \rho_l u_l^2 + \varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial x} = -p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_l \rho_l g \\
\frac{\partial (\varphi_l \rho_l E_l)}{\partial t} + \frac{\partial \left(u_l \left(\varphi_l \rho_l E_l + \varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right) \right)}{\partial x} = -p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_l \rho_l u_l g
\end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{p_g - p_l - p_\mu}{\varphi_l \rho_l \sqrt{m}} \\
\frac{\partial \varphi_g}{\partial t} = \frac{\tau \varphi_l \rho_l}{\sqrt{m}} \\
\frac{\partial \varphi_g \rho_g}{\partial t} = 0 \\
\frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g)}{\partial t} = 0 \\
\frac{\partial (\varphi_g \rho_g E_g)}{\partial t} = -p_g \frac{\tau \varphi_l \rho_l}{\sqrt{m}} \\
\frac{\partial \varphi_l \rho_l}{\partial t} = 0 \\
\frac{\partial (\varphi_l \rho_l u_l)}{\partial t} = 0 \\
\frac{\partial (\varphi_l \rho_l E_l)}{\partial t} = p_g \frac{\tau \varphi_l \rho_l}{\sqrt{m}}
\end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial (\varphi_g \rho_g)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g)}{\partial t} = \lambda (u_l - u_g) \\ \frac{\partial (\varphi_g \rho_g E_g)}{\partial t} = \lambda u_l (u_l - u_g) \\ \frac{\partial \varphi_l \rho_l}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial (\varphi_l \rho_l u_l)}{\partial t} = -\lambda (u_l - u_g) \\ \frac{\partial (\varphi_l \rho_l E_l)}{\partial t} = -\lambda u_l (u_l - u_g) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

В результате получим следующую систему уравнений в лагранжевых массовых координатах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d_l \tau}{dt} = 0 \\ \frac{d_l \varphi_g}{dt} = 0 \\ \frac{d_g \left(\frac{1}{\varphi_g \rho_g} \right)}{dt} + \frac{\partial u_g}{\partial s_g} = 0 \\ \frac{d_g u_g}{dt} + \frac{\partial (\varphi_g p_g)}{\partial s_g} = p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_g} + g \\ \frac{d_g E_g}{dt} + \frac{\partial (\varphi_g p_g u_g)}{\partial s_g} = p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_g} + u_g g \\ \frac{d_l \left(\frac{1}{\varphi_l \rho_l} \right)}{dt} + \frac{\partial u_l}{\partial s_l} = 0 \\ \frac{d_l u_l}{dt} + \frac{\partial (\varphi_l p_l)}{\partial s_l} + \frac{\partial \left(\frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial s_l} = -p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l} + g \\ \frac{d_l E_l}{dt} + \frac{\partial (\varphi_l p_l u_l)}{\partial s_l} + \frac{\partial \left(u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial s_l} = -p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l} + u_l g \end{array} \right. \quad (2.5)$$

где $\frac{d_l}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_l \frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{d_g}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x}$ лагранжевы производные. Выделим из (2.5) уравнения, которые содержат дифференцирование по лагранжевым координатам жидкой фазы S_l или полные производные на лагранжевой сетке:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d_l \tau}{dt} = 0 \\ \frac{d_l \varphi_g}{dt} = 0 \\ \frac{d_l \left(\frac{1}{\varphi_l \rho_l} \right)}{dt} + \frac{\partial u_l}{\partial s_l} = 0 \\ \frac{d_l u_l}{dt} + \frac{\partial(\varphi_l p_l)}{\partial s_l} + \frac{\partial \left(\frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial s_l} = -p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l} + g \\ \frac{d_l E_l}{dt} + \frac{\partial(\varphi_l p_l u_l)}{\partial s_l} + \frac{\partial \left(u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial s_l} = -p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l} + u_l g \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Оставшиеся три уравнения для газовой фазы из (2.5) образуют подсистему системы (2.6) и решаются аналогично. На лагранжевой сетке для жидкой фазы величины τ и φ не меняются. Получим численную схему для решения последних трех уравнений. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} U' &= \left(\frac{1}{\varphi_l \rho_l}, u_l, E_l \right)^T, \\ F' &= \left(u_l, \varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2}, \varphi_l p_l u_l + u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)^T, \\ H' &= (0, -p_g, -p_g u_l)^T, \\ H'' &= (0, g, u_l g)^T \end{aligned} \quad (2.7)$$

На одномерной сетке с шагом Δs_l на временном шаге Δt получим в обозначениях (2.7) следующую систему разностных уравнений:

$$(U')_i^{n+1} = (U')_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left((F')_{i+1/2}^n - (F')_{i-1/2}^n \right) + \Delta t \times [H'((U')_i^n) \times \Delta + H''], \quad (2.8)$$

где Δ соответствует численной аппроксимации производной $\frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l}$. Способ разностной аппроксимации

производной $\frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l}$ можно найти из условия, чтобы численное решение системы уравнений (2.8) удовле-

творяло следующему принципу: если в двухфазной среде в равновесном состоянии давление и скорость каждой фазы в начальный момент времени совпадают, то они останутся неизменными и в любой следующий момент времени. Полагая в (2.8) $(p_l)_{i-1/2}^n = (p_l)_{i+1/2}^n = (p_l)_i^n = P$, получим, что равенство

$(u_l)_i^{n+1} = (u_l)_i^n = u$ возможно, если $\Delta = \left(\frac{(\varphi_l)_{i+1/2}^n - (\varphi_l)_{i-1/2}^n}{\Delta s_i} \right)$. Таким образом, получили сле-

дующую разностную схему для решения (2.8):

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{1}{(\varphi_l \rho_l)_i^{n+1}} = \frac{1}{(\varphi_l \rho_l)_i^n} + \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left((u_l)_i^n - (u_l)_{i-1/2}^n \right) \\
& (u_l)_i^{n+1} = (u_l)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left(\left(\varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i=1/2}^n - \left(\varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i-1/2}^n \right) \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (p_g)_i^n \left((\varphi_l)_{i+1/2}^n - (\varphi_l)_{i-1/2}^n \right) + g \Delta t \\
& (E_l)_i^{n+1} = (E_l)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left(\left(u_l \varphi_l p_l + u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i=1/2}^n - \left(u_l \varphi_l p_l + u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i-1/2}^n \right) \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (u_l p_g)_i^n \left((\varphi_l)_{i+1/2}^n - (\varphi_l)_{i-1/2}^n \right) + u_l g \Delta t
\end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

Аналогичная разностная схема получается и для уравнений другой фазы. Значения скорости и давления в полуцелых точках ищутся с использованием метода PPM и решения задачи Римана о распаде разрыва на границе ячеек [4]. Так как жидкость описывается уравнением состояния, отличным от уравнения идеального газа, то при решении задачи Римана для вычисления скорости звука использовалось выражение:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_l + \pi}{\rho_l}}, \quad (2.10)$$

которое можно получить с использованием уравнения состояния [2]: $p = (\gamma - 1)\rho e - \gamma\pi$, где e - внутренняя энергия; π - постоянный коэффициент. Значения производных $\frac{((\varphi_l)_{i+1/2}^n - (\varphi_l)_{i-1/2}^n)}{\Delta s_i}$,

$$\frac{\left(\left(\frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i+1/2}^n - \left(\frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i-1/2}^n \right)}{\Delta s_i} \text{ и } \frac{\left(\left(u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i+1/2}^n - \left(u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i-1/2}^n \right)}{\Delta s_i} \text{ находились}$$

с использованием метода кусочно-параболической аппроксимации (PPM) профиля физических величин. После решения системы (2.9) и нахождения величин термодинамических параметров на лагранжевой сетке проводилась интерполяция значений найденных значений на эйлерову сетку с использованием вычисленных величин скоростей в полуцелых точках. Значения величин φ_g и τ на эйлеровой сетке из (2.6) также находились при помощи метода интерполяции.

Решение системы (2.3) находилось при помощи обычного численного интегрирования с двумя итерациями.

Для решения системы (2.4) использовался метод, предложенный в работе [2]. В результате, учитывая, что в данном случае $u_i \equiv u_g$ и $p_i \equiv p_l$, получают следующие соотношения для новых значений скорости и внутренней энергии:

$$(u_l)_i^{n+1} = (u_g)_i^{n+1} = (u_g)_i^n; (e_g)_i^{n+1} = (e_g)_i^n; (e_l)_i^{n+1} = (e_l)_i^n + \frac{1}{2} \left((u_l)_i^{n+1} - (u_g)_i^{n+1} \right)^2. \quad (2.11)$$

3. Тестовые расчеты

Представленная в настоящей работе модель, впервые предложенная в [1], объединяет описание микроскопического и макроскопического движения двухфазной смеси при помощи гиперболической системы уравнений (1.28). Для оценки применимости методики РРМ для численного решения (1.28) были проведены тестовые расчеты, аналогичные представленным в работе [1].

Первая тестовая задача связана с описанием поведения газовых пузырьков в трубке с жидкостью. Первоначально обе фазы однородны и находятся в покое. Каждая фаза имеет собственное давление. Таким образом, любой пузырек газа является независимым и его поведение описывается уравнением Релея-Лемба [6]:

$$R\ddot{R} + 3/2\dot{R}^2 = (p_g - p_l) / \rho_l. \quad (3.1)$$

Это уравнение эквивалентно системе (1.23), если в ней пренебречь потенциальной энергии $e(\varphi)$, связанной с внутренней структурой, и сделать подстановки: $\rho_1^0 = \rho_l \approx const$, $\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3 N$,

$m(\varphi) = \frac{\rho_l}{3} \left(\frac{3}{4\pi N} \right)^{2/3} \varphi^{-1/3}$. Для сравнения аналитического решения (3.1) с численным решением системы (1.23) необходимо сделать следующие предположения:

- однородность смеси;
- постоянство давления жидкой фазы (2×10^5 Па).

Значения начальных параметров физических величин, используемые при расчете поведения газовых пузырьков в однородной смеси, следующие:

Жидкость

Плотность — 953 кг/см³
Параметры уравнения состояния — $\gamma=3$, $P_\infty=3,04 \times 10^8$ Па
Давление — 2×10^5 Па

Газ

Молярная масса — 146 г
Отношение теплоемкостей — $\gamma=1,09$
Начальная температура — $T=309$ К
Начальное давление — 1×10^5 Па
Объемная доля — 0,00232

Результаты численного решения системы (1.23) совместно с решением уравнения Релея-Лемба (3.1) показаны на рис. 1.

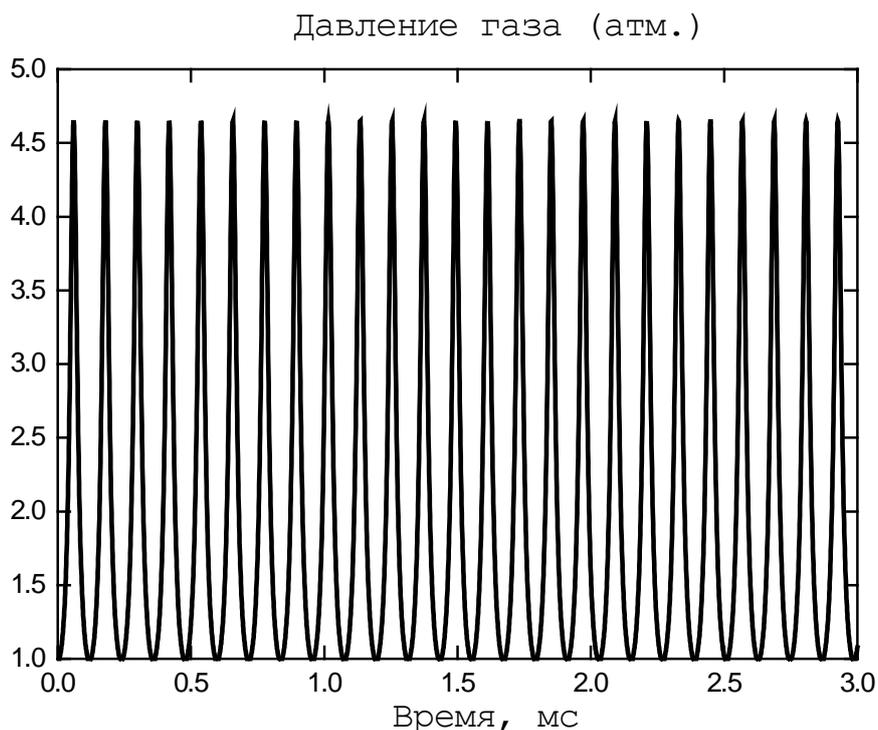


Рис. 1. Сравнение решений уравнения Релея-Лемба и решения системы (1.23) для однородной смеси

Вторая тестовая задача связана с моделированием распространения ударной волны в жидкой среде с пузырьками газа. Первые эксперименты по изучению распространения ударной волны в жидкой среде с пузырьками газа были проведены более 30 лет назад. Однако, из-за недостатка точности измерений физических величин и присутствия растворенного газа, вызывающего образование новых пузырьков, первые экспериментальные данные имели большую неопределенность. Более надежные данные были получены лишь несколько лет назад с использованием жидкой среды, в которой практически отсутствовали растворенные газы [7]. В этом эксперименте удалось обеспечить сохранение однородного начального пространственного распределения газовых пузырьков. Экспериментальная установка представляла собой вертикальную трубку (рис.2).

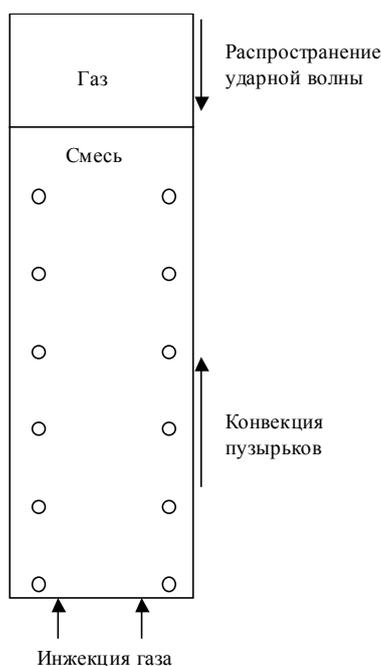


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

Пузырьки газа инжестрировались с нижнего конца трубки и поднимались вверх за счет естественной и вынужденной конвекции. Ударная волна взаимодействовала со свободной поверхностью смеси и распространялась вниз. Прибор, измеряющий давление, располагался на расстоянии 1,462 м от нижней части трубки. Полная длина трубки составляла 4 м.

Для сравнения с экспериментом по распространению ударной волны в жидкой среде с пузырьками газа использовалась одномерная модель (2.1). При проведении численного расчета использовались те же начальные значения физических величин (рис.3), что и при проведении эксперимента. Начальная концентрация пузырьков газа задавалась однородной и равнялась $N = 2,42 \times 10^6 \text{ см}^{-3}$. Динамическая вязкость жидкой фазы принималась равной $\mu = 0,00415 \text{ Па} \cdot \text{с}$. Так как объемная доля газа невелика, и плотность жидкой фазы во много раз больше плотности газа, то относительным скольжением фаз можно пренебречь и использовать коэффициент релаксации скорости $\lambda \rightarrow +\infty$. Вместо моделирования ударной волны в газовой камере на входе трубки с двухфазной смесью поддерживалась постоянная скорость 0,427 м/с.

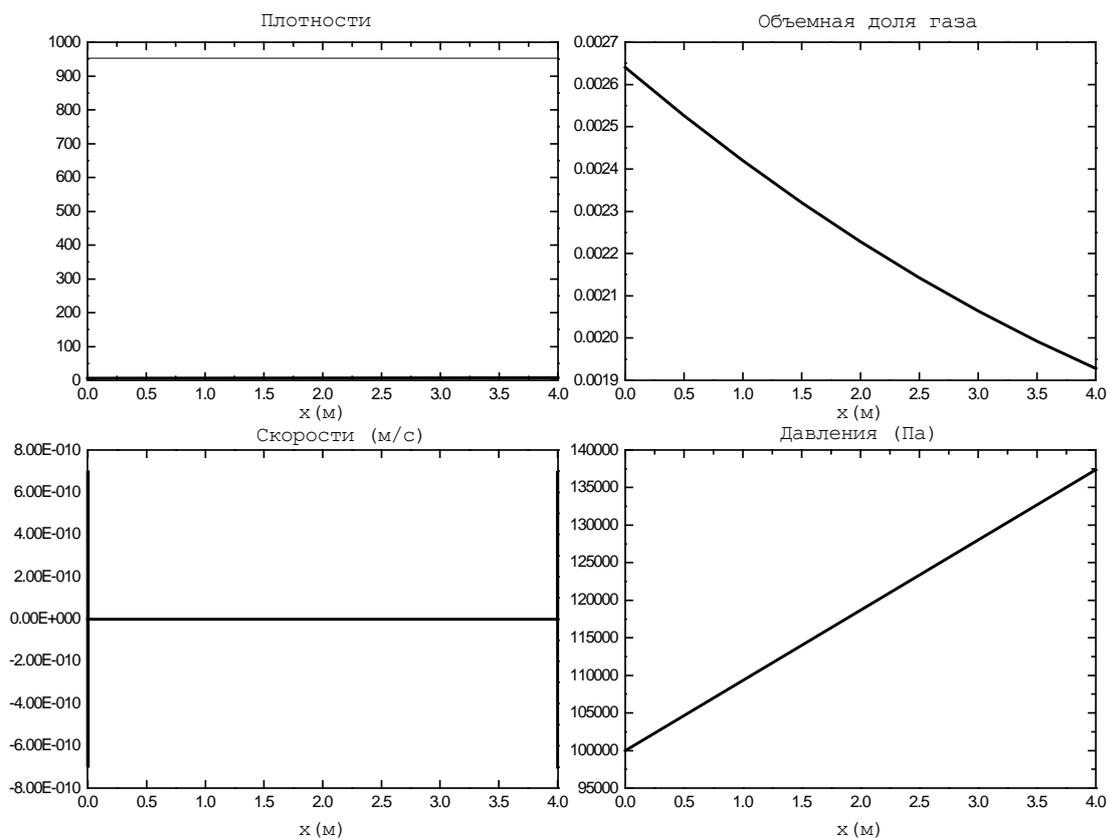


Рис. 3. Начальные условия для задачи взаимодействия ударной волны с двухфазной средой

Результаты численного расчета на сетке 2500 точек для моментов времени 1,92 мс, 3,84 мс и 5,76 мс представлены на рис. 4 и 5. Из рисунков видно, что микроскопическое движение (пульсации) оказывает значительное влияние на макроскопические параметры двухфазной системы.

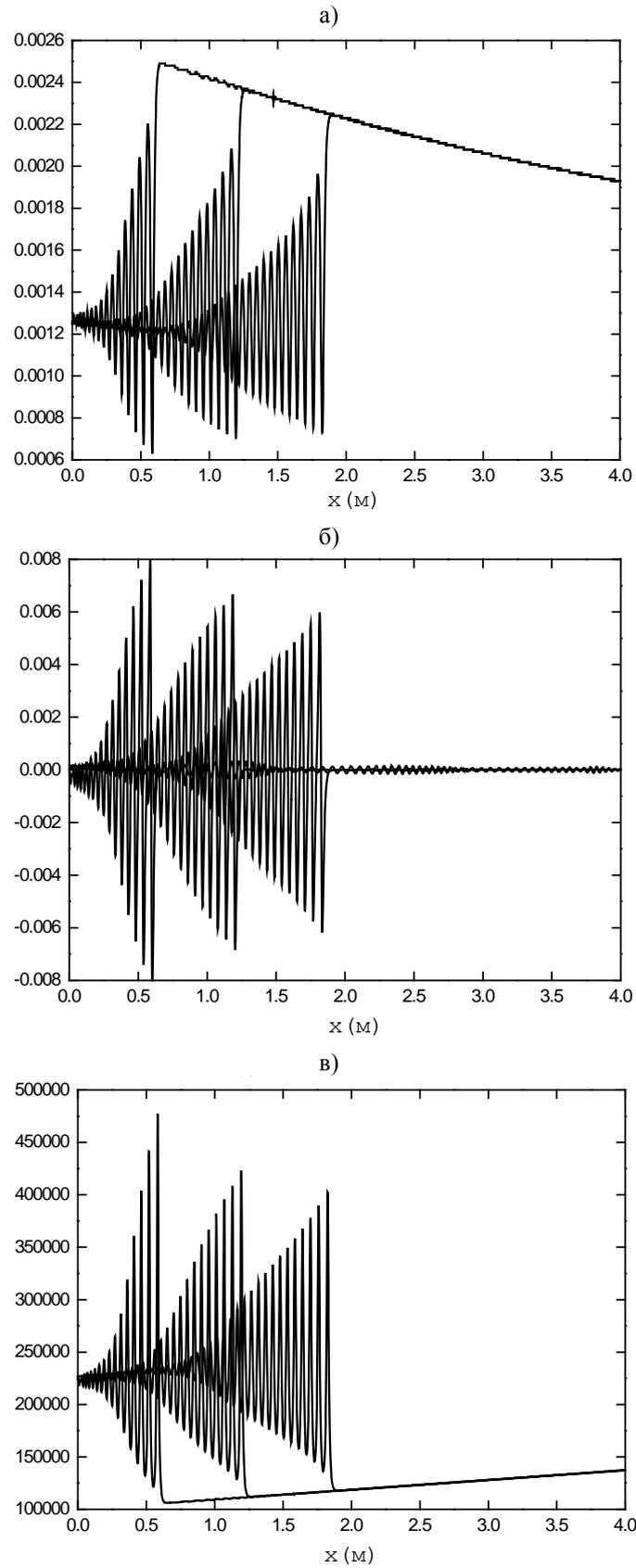


Рис. 4. Профили физических параметров двухфазной среды, полученные с использованием модели (2.1):
 а) объемная доля газа, б) аналог радиальной скорости, в) давление газа

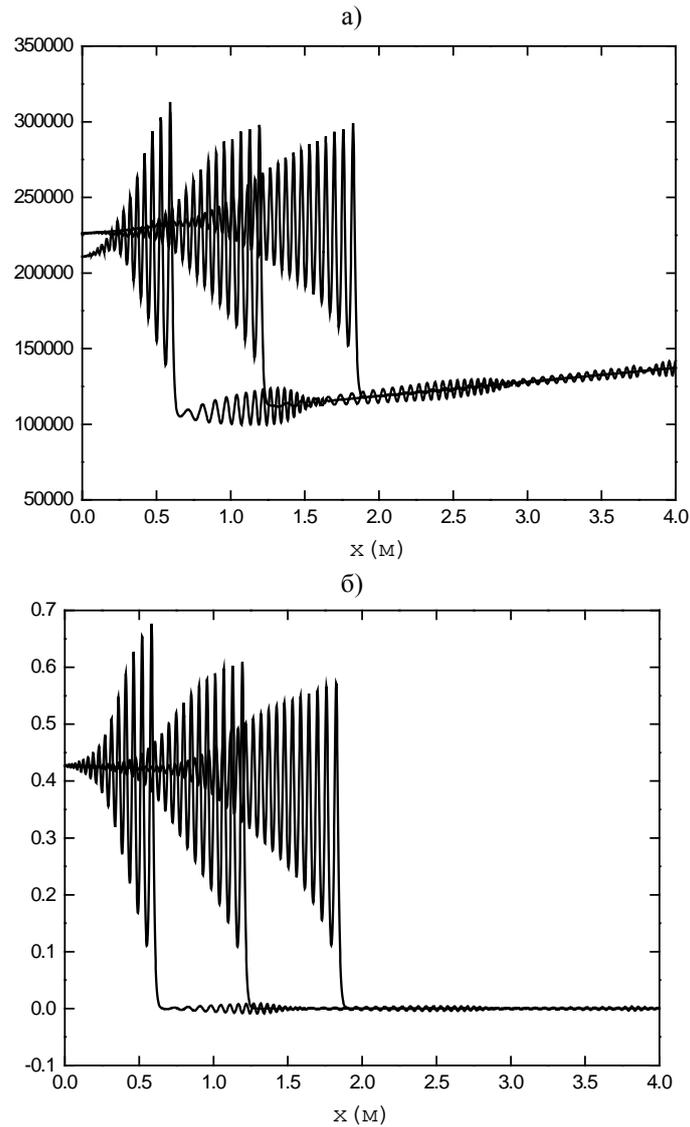


Рис. 5. Профили физических параметров двухфазной среды, полученные с использованием модели (2.1):
а) давление жидкости, б) скорость смеси

На рис.6 приведено сравнение результатов расчета с экспериментальными данными, полученными при помощи прибора, расположенного на расстоянии 1,462 м от нижнего конца вертикальной трубки [7]. Очевидно хорошее совпадение первых трех осцилляций разности величин мгновенного и гидростатического давлений. Следующие осцилляции совпадают с результатами расчета значительно хуже, однако расчетные значения остаются в пределах экспериментальной ошибки 15 КПа. Кроме того, модель (2.1) предсказывает существование волны предвестника, которая действительно была обнаружена в другом эксперименте [8]. Аналогичные результаты, но полученные другим численным методом, представлены в работе [1].

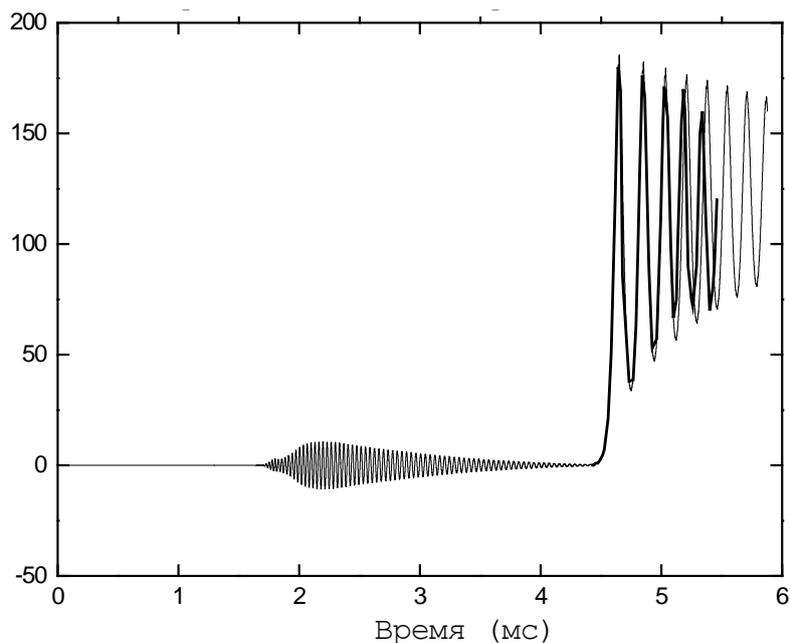


Рис. 6. Сравнение экспериментальных (жирная линия [7]) и расчетных (тонкая линия) данных

Заключение.

Из сравнения с результатами, полученными в работе [1], можно сделать вывод о применимости модифицированной методики РРМ для расчета двухфазных потоков. Обобщение на двумерный и трехмерный случаи может быть проведено с использованием метода расщепления по направлениям.

Литература

1. S. Gavriluk and R.Saurel. Mathematical and Numerical modeling of Two-Phase Compressible Flows with Micro-Inertia // J. Comp. Phys.175, P.326-360, 2002.
2. R. Saurel and R. Abgrall, A multiphase Godunov method for multifluid and multiphase flows // J. Comp. Phys. 150, P.425-467, 1999.
3. M.S. Plesset and A. Prosperetti, Bubble dynamics and cavitation // Ann. Rev. Fluid Mech. 9, 145, 1977.
4. Paul R. Woodward, The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations // J. Comp. Phys. V. 54, №1, April 1984.
5. Н.В. Ёлкина, А.А. Леонов, В.В. Чуданов. Моделирование сверхзвуковых течений методом кусочно-параболической аппроксимации // Препринт ИБРАЭ РАН, № ИБРАЭ-2002-06.
6. H. Lamb, Hydrodynamics // Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1932.
7. M. Kameda, N. Shimaura, F. Higashino, and Y. Matsumoto, Shock waves in uniform bubbly flow // Phys. Fluids, V.10, №10, P.2661, 1998.
8. В.К. Кердинский, Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели // Наука, Новосибирск, 2000.