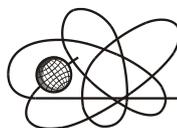




*Российская Академия Наук*

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ  
БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ  
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**



**ИБРАЭ**

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

**NUCLEAR SAFETY  
INSTITUTE**

Препринт ИБРАЭ № ИБРАЭ-2003-18

Preprint IBRAE-2003-18

**А. А. Леонов, В. В. Чуданов**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ  
И ДВУХФАЗНЫХ СЖИМАЕМЫХ СРЕД  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА  
КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ  
АППРОКСИМАЦИИ (РРМ)**

Москва  
2003

Moscow  
2003

УДК 536.24

Леонов А.А., Чуданов В.В. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ И ДВУХФАЗНЫХ СЖИМАЕМЫХ СРЕД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ (PPM). Препринт ИБРАЭ № IBRAE-2003-18. Москва: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. 2003. 18 с.

Аннотация

В работе обсуждается обобщение метода кусочно-параболической аппроксимации (PPM) для расчетов двухкомпонентных и двухфазных сжимаемых сред. Предлагаемая методика позволяет решать газодинамические задачи, в которых присутствуют резкие разрывы профилей термодинамических величин и контактные разрывы, и легко обобщается на многомерные случаи при помощи метода расщепления по направлениям.

©ИБРАЭ РАН, 2003

Leonov A.A., Chudanov V.V. MODELING OF TWO-COMPONENT AND TWO-PHASE COMPRESSIBLE FLOWS WITH USAGE OF METHOD OF A PIECEWISE PARABOLIC APPROXIMATION (PPM). Preprint № IBRAE-2003-18. Moscow: Nuclear Safety Institute RAS. 2003. 18 p.

Abstract

A generalization of a piecewise parabolic method (PPM) to calculate two-component and two-phase compressible flows is discussed. The offered procedure allows to solve problems of gas dynamics, at which there are sharp breaks of profiles of thermodynamic values and of contact breaks. The technique is extended easily on multidimensional cases through a method of splitting on directions.

©Nuclear Safety Institute, 2003

# Моделирование двухкомпонентных и двухфазных сжимаемых сред с использованием метода кусочно-параболической аппроксимации (PPM)

*А.А.Леонов, В.В.Чуданов*

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ  
113191, Москва, ул. Б. Тульская, 52  
тел.: (095) 955-22-34, эл. почта: chud@ibrae.ac.ru

## Содержание

Введение .....	3
1 Модель двухфазной среды .....	3
2 Математические свойства .....	6
3 Метод решения.....	7
4 Результаты .....	14
Заключение .....	18
Литература .....	18

## Введение

При решении огромного количества фундаментальных и прикладных задач возникает необходимость рассматривать многофазные и многокомпонентные газодинамические течения, в которых каждый компонент имеет свои собственные физические свойства и отделен от остальных компонентов поверхностью раздела. Классическим примером такой ситуации являются задачи о поведении газовых пузырьков в жидкости при прохождении ударной волны или о прохождении ударной волны через поверхность раздела воздуха и гелия. Обычно многофазные и многокомпонентные смеси образуются при физическом смешивании нескольких веществ (газов, жидкостей или твердых тел), но также они могут возникать при искусственном «размазывании» границы раздела веществ с различными физическими и химическими свойствами. Значительное число методов моделирования многофазных и многокомпонентных газодинамических течений основывается на численном решении уравнений Эйлера или Навье-Стокса, которые обычно дополняются одним или несколькими уравнениями, выражающими законы сохранения специфических для данной задачи физических величин (концентрация газовых пузырьков), необходимых для определения интерфейсных значений параметров многофазной системы. Применение таких численных методов приводит к возникновению искусственной диффузии через контактные разрывы и к искусственному смешиванию веществ на границе раздела. В такой искусственной смеси значения всех термодинамических параметров вычисляются с ошибкой. При сильно различающихся параметрах веществ такой подход приводит к отрицательным значениям давления уже на втором шаге по времени [1].

В работе [2] была предложена двухфазная модель, позволяющая определять термодинамические и кинетические переменные каждого компонента смеси. При этом в любом месте расчетной сетки одним и тем же численным методом решаются одинаковые уравнения как для случая двух несмешивающихся компонентов, разделенных поверхностью раздела, так и для случая присутствия физического смешивания различных веществ. Более подробно достоинства применяемой модели описываются в работе [2]. В данной работе для моделирования двухфазных течений при помощи двухфазной модели была адаптирована методика кусочно-параболической аппроксимации [3], которая позволяет решать газодинамические задачи, в которых присутствуют резкие разрывы профилей термодинамических величин и контактные разрывы.

## 1 Модель двухфазной среды

Для расчета двухфазных течений использовалась модель [2], основанная на введении объемных фракций:  $\alpha_k = V_k / V$  ( $k=1,2$ ) для каждого компонента двухфазной смеси. Здесь  $V_k$  –объем, занимаемый  $k$ -ым компонентом смеси;  $V$  –рассматриваемый объем смеси. Тогда полная плотность в контроль-

ном объеме  $V$  есть:  $\rho = \sum \alpha_k \rho_k$ , где плотности каждой фазы в двухфазной смеси  $\rho_k = n_k \hat{M}_k / V_k = M_k / V_k$ . Здесь  $n_k$  и  $M_k$  число молей и молярная масса  $k$ -го компонента смеси, соответственно. Давление каждой фазы определяется как:  $P_k = \rho_k R_k T_k$ , где  $T_k$  – температура  $k$ -го компонента смеси; а полное давление смеси:  $P = \sum \alpha_k P_k$ . Преимущество введения объемных фракций заключается в том, что различные компоненты смеси могут иметь разную температуру. Хотя в этом случае необходимо знать две температуры или два значения внутренней энергии, а также два значения плотности. Описываемая модель позволяет находить эти величины.

В одномерном случае двухфазная модель включает семь уравнений, которые получаются при помощи процедуры усреднения уравнений Навье-Стокса, записанных для каждого компонента смеси [4]. Три уравнения для каждой фазы смеси выражают законы сохранения массы, импульса и энергии, седьмое уравнение описывает эволюцию объемной фракции. Эти уравнения позволяют определять термодинамические и кинетические переменные для каждого компонента смеси и записываются следующим образом [2]:

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial x} = \dot{m}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g P_g)}{\partial x} = P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \dot{m} V_i + F_d, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} + \frac{\partial(u_g (\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g P_g))}{\partial x} = P_i V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \dot{m} E_i + F_d V_i + Q_i \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial x} = -\dot{m}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l P_l)}{\partial x} = -P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - \dot{m} V_i - F_d, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} + \frac{\partial(u_l (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l P_l))}{\partial x} = -P_i V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - \dot{m} E_i - F_d V_i - Q_i, \quad (1.7)$$

где  $\alpha_g + \alpha_l = 1$ ; полная энергия  $E_k = e_k + 1/2 u_k^2$  ( $e_k$  – внутренняя энергия).

Индекс  $g$  относится к термодинамическим величинам, описывающим состояние газа, индекс  $l$  – жидкости. Интерфейсные переменные, описывающие состояние смеси, имеют индекс  $i$ .

Левые части уравнений (1.2)-(1.7) выражают законы сохранения массы, импульса и энергии, записанные для каждой фазы смеси.

Правые части уравнений системы (1.2)-(1.7) содержат слагаемые, связанные с изменением массы данной фазы  $\dot{m}$ , силой трения  $F_d$ , конвективным теплообменом  $Q_i$ ; неконсервативные члены:  $P_i (\partial \alpha_g / \partial x)$  и  $P_i V_i (\partial \alpha_g / \partial x)$ . Интерфейсные давление  $P_i$  и скорость  $V_i$  представляют усредненные по контрольному объему величины давления и скорости. Моделирование этих величин в общем виде представляет значительные трудности и для их оценки используют упрощающие расчет физические предположения, допустимые для данной конкретной задачи.

После прохождения ударной волны через двухфазную среду компоненты смеси оказываются в неравновесном по давлению состоянии:  $P_g \neq P_l$ . Далее в двухфазной среде начинают развиваться релаксационные процессы, в результате которых давление обеих фаз уравнивается:  $P_g = P_l$ . Скорость достижения равновесного состояния зависит от свойств каждого компонента и от топологии смеси. В работе [5] было теоретически доказано существование переменной  $\mu$  (динамическая вязкость сжатия,  $Pa^{-1}c^{-1}$ ), которая характеризует скорость достижения равновесного состояния в двухфазной системе. После прохождения ударной волны релаксационные процессы вызывают вариации объемной фракции и энергий каждого компонента смеси [2]:

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = \mu(P_g - P_l) \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} &= \mu P_i (P_g - P_l) \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} &= -\mu P_i (P_g - P_l) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Условие равенства давлений на границе раздела двух несмешанных сред также удовлетворяет системе (1.8), (1.9) при мгновенной релаксации давления, т.е.  $\mu \rightarrow \infty$ . Таким образом, учет релаксационных процессов и интерфейсных условий для давления осуществляется при помощи одной и той же системы уравнений (1.8)–(1.9).

Процесс релаксации скорости в двухфазной среде может происходить медленнее, чем релаксация давления. С одной стороны время этого процесса зависит от скорости релаксации давления, а с другой определяется вязкими свойствами компонентов среды. В системе (1.1)–(1.7) сила трения  $F_d$  выражает эффекты вязкости и может быть представлена в таком же виде, как и член, описывающий релаксационные процессы [2]:

$$F_d = \lambda(u_l - u_g), \quad (1.10)$$

где  $\lambda$  – положительный параметр или функция. Условие равенства скоростей на границе раздела двух несмешанных сред можно учесть, решая систему (1.1)–(1.7) с величиной  $\lambda \rightarrow \infty$ .

С учетом членов, описывающих процессы релаксации скорости и давления, система (1.1)–(1.7) примет вид:

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = \mu(P_g - P_l), \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial x} = m, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g P_g)}{\partial x} = P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \dot{m} V_i + \lambda(u_l - u_g), \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} + \frac{\partial(u_g (\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g P_g))}{\partial x} = \\ P_i V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + m E_i + \mu P_i (P_g - P_l) + \lambda V_i (u_l - u_g) + Q_i \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial x} = -\dot{m}, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l P_l)}{\partial x} = -P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - \dot{m} V_i - \lambda(u_l - u_g), \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} + \frac{\partial(u_l(\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l P_l))}{\partial x} = \\ - P_i V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - \dot{m} E_i - \mu P_i (P_g - P_l) - \lambda V_i (u_l - u_g) - Q_i \end{aligned} \quad (1.17)$$

В данной работе значение интерфейсного давления для двухфазной смеси оценивается следующим образом:

$$P_i = \sum_{k=1}^2 \alpha_k P_k, \quad (1.18)$$

то есть равным давлению смеси. В качестве оценки интерфейсной скорости берется скорость центра масс:

$$V_i = \frac{\sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k u_k}{\sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k}. \quad (1.19)$$

Именно с этой скоростью распространяются участки среды после релаксации всех неравновесных процессов в системе. Значения давлений жидкости и газа вычисляются из соответствующих уравнений состояния.

## 2 Математические свойства

Численное решение системы (1.11)–(1.17) можно получить при помощи последовательного применения операторов:

$$U_i^{n+1} = L_S^{\Delta t} L_R^{\Delta t} L_h^{\Delta t} U_i^n, \quad (2.1)$$

где  $L_h^{\Delta t}$  – оператор, используемый для решения (1.11)–(1.17) с учетом только неконсервативных членов в правой части;  $L_R^{\Delta t}$  – релаксационный оператор и  $L_S^{\Delta t}$  – оператор, учитывающий влияние теплообмена и изменения массы на параметры каждого из компонентов смеси. Выражения для членов, описывающих изменения массы и теплообмен, получаются эмпирически и зависят от вида конкретного процесса (испарение, конденсация, взрыв). Влияние этих членов на поведение двухфазной среды можно рассматривать отдельно и в данной работе они не рассматриваются.

Система (1.11)–(1.17) с учетом только неконсервативных членов в правой части, записанная в примитивных переменных, имеет вид [2]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0,$$

где  $W = (\alpha_g, \rho_g, u_g, P_g, \rho_l, u_l, P_l)^T$ ,

$$A(W) = \begin{pmatrix} V_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_g}{\alpha_g}(V_i - u_g) & u_g & \rho_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{P_g - P_i}{\alpha_g \rho_g} & 0 & u_g & \frac{1}{\rho_g} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_g c_{gi}^2}{\alpha_g}(V_i - u_g) & 0 & \rho_g c_g^2 & u_g & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_l}{\alpha_l}(V_i - u_l) & 0 & 0 & 0 & u_l & \rho_l & 0 \\ \frac{P_l - P_i}{\alpha_l \rho_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_l & \frac{1}{\rho_l} \\ \frac{\rho_l c_{li}^2}{\alpha_l}(V_i - u_l) & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_l c_l^2 & u_l \end{pmatrix},$$

$$c_k^2 = \frac{\left. \frac{P_k}{\rho_k^2} - \frac{\partial e_k}{\partial \rho_k} \right|_{P_k}}{\left. \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right|_{\rho_k}}, \quad c_{ki}^2 = \frac{\left. \frac{P_i}{\rho_k^2} - \frac{\partial e_k}{\partial \rho_k} \right|_{P_k}}{\left. \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right|_{\rho_k}}.$$

Матрица Якоби  $A(W)$  имеет действительные собственные значения:  $\lambda_1 = V_{INT}$ ;  $\lambda_2 = u_g + c_g$ ;  $\lambda_3 = u_g - c_g$ ;  $\lambda_4 = u_g$ ;  $\lambda_5 = u_l + c_l$ ;  $\lambda_6 = u_l - c_l$ ;  $\lambda_7 = u_l$ . Т.о., оператор  $L_h^{\Delta t}$  является гиперболическим.

### 3 Метод решения

Рассмотрим уравнения (1.1)-(1.4) приведенной выше системы с учетом только неконсервативных членов в правой части. Последние три уравнения этой системы (1.5)-(1.7) представляют подсистему, идентичную уравнениям (1.2)-(1.4).

Запишем уравнения (1.1)-(1.4) в следующем виде (индексы  $g$  и  $l$  опущены):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + V_i \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = H(U) \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad (3.2)$$

где

$$U = (\alpha \rho, \alpha \rho u, \alpha \rho E)^T,$$

$$F = (\alpha \rho u, \alpha \rho u^2 + \alpha P, u(\alpha \rho E + \alpha P))^T,$$

$$H = (0, P_i, P_i V_i)^T.$$

В явном виде система уравнений (3.2) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\alpha\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\rho u)}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial(\alpha\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\rho u^2 + \alpha P)}{\partial x} &= P_i \frac{\partial\alpha}{\partial x}, \\
\frac{\partial(\alpha\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(u(\alpha\rho E + \alpha P))}{\partial x} &= P_i V_i \frac{\partial\alpha}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Для решения системы уравнений (3.3) применялась методика кусочно-параболической аппроксимации RPM [3], [6], которая ранее использовалась для моделирования однофазных газодинамических течений. Численное решение системы (3.3) выполнялось в два этапа. На первом этапе находилось решение записанной в лагранжевых массовых координатах системы (3.3) на лагранжевой расчетной сетке, а на втором – найденные значения термодинамических параметров интерполировались на эйлерову сетку. Основное преимущество такого способа решения заключается в том, что эту методику легко обобщить на двумерный или трехмерный случай, так как в лагранжевых массовых переменных решение рассматриваемой многомерной задачи можно свести к решению локальных одномерных задач Римана вдоль соответствующих направлений при помощи метода расщепления по направлениям [6].

В системе уравнений (3.3) перейдем от Эйлеровых координат к лагранжевым массовым переменным. Для этого вычтем из второго уравнения первое, умноженное на скорость, получим:

$$\alpha\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(\alpha P)}{\partial x} + P_i \frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

Разделим обе части получившегося уравнения на  $\alpha\rho$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha\rho} \frac{\partial(\alpha P)}{\partial x} + \frac{P_i}{(\alpha\rho)} \frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

Аналогично, вычтя из третьего уравнения системы (3.3) первое, умноженное на  $E$ , и разделив обе части полученного выражения на  $\alpha\rho$ , получим:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha\rho} \frac{\partial(\alpha P u)}{\partial x} + \frac{P_i V_i}{\alpha\rho} \frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

С учетом сделанных преобразований система (3.3) примет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\alpha\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\rho u)}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\alpha\rho} \frac{\partial(\alpha P)}{\partial x} + \frac{P_i}{(\alpha\rho)} \frac{\partial\alpha}{\partial x}, \\
\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{1}{\alpha\rho} \frac{\partial(\alpha P u)}{\partial x} + \frac{P_i V_i}{\alpha\rho} \frac{\partial\alpha}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Теперь перейдем к лагранжевым массовым переменным  $s = \int_{x_0}^x \rho(y, t) dy$ , используя соотношения, связывающие производные по эйлеровым и массовым координатам [7]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_{\mathcal{L}}} - \alpha \rho u \frac{\partial}{\partial s}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \alpha \rho \frac{\partial}{\partial s}.$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \frac{1}{\alpha \rho} \right)}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha P)}{\partial s} &= P_i \frac{\partial \alpha}{\partial s} \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha P u)}{\partial s} &= P_i V_i \frac{\partial \alpha}{\partial s} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Или

$$\frac{\partial U_{\mathcal{L}}}{\partial t} + \frac{\partial F_{\mathcal{L}}(U_{\mathcal{L}})}{\partial s} = H(U_{\mathcal{L}}) \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \quad (3.5)$$

где  $U_{\mathcal{L}} = \left( \frac{1}{\alpha \rho}, u, E \right)^T$ ;  $F_{\mathcal{L}}(U_{\mathcal{L}}) = (-u, \alpha P, \alpha P u)$ ;  $H(U_{\mathcal{L}}) = (0, P_i, P_i V_i)^T$ .

На одномерной сетке с шагом  $\Delta s_i$  и на временном интервале  $\Delta t$  численная схема для решения системы (3.5) будет иметь вид:

$$(U_{\mathcal{L}})_i^{n+1} = (U_{\mathcal{L}})_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left( (F_{\mathcal{L}})_{i+1/2}^n - (F_{\mathcal{L}})_{i-1/2}^n \right) + \Delta t H_{\mathcal{L}}(U_{\mathcal{L}})_i^n \Delta,$$

где  $\Delta$  соответствует разностной аппроксимации производной  $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$ .

Способ разностной аппроксимации производной  $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$  можно получить из требования, чтобы численное решение системы уравнений (3.4) удовлетворяло следующему условию [1]: если в двухфазной среде в равновесном состоянии давление и скорость каждой фазы в начальный момент времени совпадают, то они должны оставаться неизменными и в любой следующий момент времени.

Запишем численную схему для второго уравнения системы (3.4) в явном виде:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (\alpha_{i+1/2}^n P_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n P_{i-1/2}^n) + \Delta t P_i \Delta. \quad (3.6)$$

Пусть  $P_g = P_l = P_i = P$  и  $u_g = u_l = V_i = u$ , тогда полагая в уравнении (3.6)  $P_{i-1/2}^n = P_{i+1/2}^n = P$ , получим, что равенство  $u_i^{n+1} = u_i^n = u$  возможно, если  $\Delta = \frac{\alpha_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n}{\Delta s_i}$ . Аналогично, рассматривая численную схему для первого и третьего уравнений системы (3.4), получим:  $\frac{1}{(\alpha \rho)_i^n} = \frac{1}{(\alpha \rho)_i^{n+1}}$ ,  $e_i^n(P, \rho_i^n) = e_i^{n+1}(P, \rho_i^{n+1})$ . Совместное решение этих двух уравнений возможно, если:

$$\alpha_i^n = \alpha_i^{n+1} = \alpha. \quad (3.7)$$

Т.е. на лагранжевой сетке значения объемных фракций не изменяются. Таким образом, получили следующую численную схему:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_i^{n+1}} &= \frac{1}{\rho_i^n} + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n), \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (\alpha_{i+1/2}^n P_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n P_{i-1/2}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta s_i} P^i (\alpha_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n), \\ E_i^{n+1} &= E_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (\alpha_{i+1/2}^n P_{i+1/2}^n u_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n P_{i-1/2}^n u_{i-1/2}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta s_i} P^i V^i (\alpha_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n). \end{aligned}$$

Аналогичная разностная схема получается и для другого компонента смеси. Значения скорости  $u_{i\pm 1/2}$  и давления  $(\alpha P)_{i\pm 1/2}$  в полущелых точках ищутся с использованием метода кусочно-параболической аппроксимации (PPM) для решения задачи Римана о распаде разрыва на границе ячеек [3]. Значения  $\alpha_{i\pm 1/2}$  также находятся при помощи аппроксимации профиля объемной доли методом PPM.

Значения объемной фракции на эйлеровой сетке  $\alpha_i^{n+1}$  находятся при численном решении уравнения адвекции (3.1):  $\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n - (V_i)_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (\alpha_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n)$ .

Для учета релаксационных процессов в двухфазной среде необходимо решить систему  $U_i^{n+1} = L_R^{\Delta t} U_i^n$  (см. п.2) или в явном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \mu(P_g - P_l), \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} &= \lambda(u_l - u_g), \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} &= \mu P_i (P_g - P_l) + \lambda V_i (u_l - u_g), \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial t} &= -\lambda(u_l - u_g), \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} &= -\mu P_i (P_g - P_l) - \lambda V_i (u_l - u_g). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для системы (3.8) можно записать:  $\partial U / \partial t = S(U)$ ,

где  $U = (\alpha_g, \alpha_g \rho_g, \alpha_g \rho_g u_g, \alpha_g \rho_g E_g, \alpha_l \rho_l, \alpha_l \rho_l u_l, \alpha_l \rho_l E_l)^T$ ,

$$S(U) = (\mu(P_g - P_l), 0, \lambda(u_l - u_g), V_i \lambda(u_l - u_g) - P_i \mu(P_g - P_l), \\ 0, -\lambda(u_l - u_g), -V_i \lambda(u_l - u_g) + P_i \mu(P_g - P_l))^T.$$

Для большей наглядности можно представить оператор  $S(U)$  в виде суммы двух интегральных операторов:  $S(U) = V(U) + PR(U)$ , где операторы

$$V(U) = (0, 0, \lambda(u_l - u_g), V_i \lambda(u_l - u_g), 0, -\lambda(u_l - u_g), -V_i \lambda(u_l - u_g))^T \text{ и}$$

$$PR(U) = (\mu(P_g - P_l), 0, 0, -P_i \mu(P_g - P_l), 0, 0, P_i \mu(P_g - P_l))^T$$

содержат члены, описывающие процессы релаксации скорости и давления, соответственно. Решение дифференциальной задачи (3.8) находится путем последовательного применения описанных интегральных операторов:  $U_i^{n+1} = L_{PR}^{\Delta t} L_V^{\Delta t} U_i^n$ . Рассмотрим сначала метод решения системы уравнений:

$$U_i^{n+1} = L_V^{\Delta t} U_i^n \quad (3.9)$$

при бесконечно большом значении коэффициента  $\lambda$ , что соответствует мгновенной релаксации скорости. В явном виде система (3.9) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} &= \lambda(u_l - u_g), \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} &= \lambda V_i (u_l - u_g), \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial t} &= -\lambda(u_l - u_g), \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} &= -\lambda V_i (u_l - u_g). \end{aligned} \quad (3.10)$$

С учетом второго и третьего уравнения системы (3.10) для импульса газовой фракции преобразуется к виду:

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{\lambda}{\alpha_g \rho_g} (u_l - u_g). \quad (3.11)$$

Аналогично можно преобразовать уравнение для импульса жидкой фракции:

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\alpha_l \rho_l} (u_l - u_g). \quad (3.12)$$

Вычитая уравнение (3.11) из (3.12) и интегрируя полученное выражение, можно получить:

$$u_l - u_g = (u_{l0} - u_{g0}) e^{-\lambda \left[ \frac{1}{\alpha_g \rho_g} + \frac{1}{\alpha_l \rho_l} \right] t}, \quad (3.13)$$

где индекс 0 обозначает величины, полученные после решения гиперболической системы уравнений (3.1), (3.2).

Решение уравнения (3.13) при бесконечно большом значении  $\lambda$  на ограниченном временном интервале  $\Delta t$  совпадает с решением уравнения, имеющего тот же вид (3.13), но с конечным значением параметра  $\lambda$  на неограниченном интервале времени. Так как  $\lambda$  положительный коэффициент, то решение уравнения (3.13) имеет вид:

$$u_l - u_g = 0. \quad (3.14)$$

Суммирование уравнений выражений (3.11) и (3.12) приводит к следующему результату:  $\alpha_g \rho_g \frac{\partial u_g}{\partial t} + \alpha_l \rho_l \frac{\partial u_l}{\partial t} = 0$ . Интегрируя это уравнение, получим:  $\alpha_g \rho_g \frac{\partial u_g}{\partial t} + \alpha_l \rho_l \frac{\partial u_l}{\partial t} = 0$ . Далее с учетом (3.14) можно получить следующее выражение для скоростей компонентов смеси после процесса релаксации:

$$u = u_g = u_l = \frac{\alpha_g \rho_g u_{g0} + \alpha_l \rho_l u_{l0}}{\alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l}. \quad (3.15)$$

Найдем изменение внутренней энергии. Уравнение для полной энергии газовой фазы:  $\frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} = \lambda V_i (u_l - u_g)$  с учетом уравнений для массы:  $\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} = 0$  и импульса:  $\alpha_g \rho_g \frac{\partial u_g}{\partial t} = \lambda (u_l - u_g)$  можно преобразовать к следующему виду:  $\alpha_g \rho_g \frac{\partial e_g}{\partial t} + \lambda u_g (u_l - u_g) = \lambda V_i (u_l - u_g)$  или  $\frac{\partial e_g}{\partial t} = (V_i - u_g) \frac{\partial u_g}{\partial t}$ .

Окончательно получим:

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} = V_i \frac{\partial u_g}{\partial t} - \frac{\partial \left( \frac{u_g^2}{2} \right)}{\partial t}. \quad (3.16)$$

Приближенное интегрирование этого уравнения приводит к следующему результату:

$$e_g = e_{g0} + \bar{V}_i (u_g - u_{g0}) - 1/2 (u_g^2 - u_{g0}^2).$$

Оценивая  $\bar{V}_i = (V_i^n + V_i^{n+1})/2$  и  $V_i^{n+1} = u_g$ , получим:

$$e_g = e_{g0} + 1/2 (V_i^n - u_{g0}) (u_g - u_{g0}) = e_{g0} + 1/2 (u_g - u_{g0})^2. \quad (3.17)$$

Аналогичное выражение получается и для внутренней энергии жидкой фазы.

Выражения (3.15) и (3.17) позволяют вычислить значения скорости и внутренней энергии каждого из компонент смеси после процесса релаксации скорости.

Рассмотрим метод численного решения системы уравнений

$$U_i^{n+1} = L_{PR}^{\Delta t} U_i^n \quad (3.18)$$

при бесконечно большом значении параметра  $\mu$ . В явном виде (3.18) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \mu(P_g - P_l), \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} &= \mu P_i (P_g - P_l), \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} &= -\mu P_i (P_g - P_l). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Предположение о мгновенной релаксации давления необходимо при вычислении термодинамических параметров на границе раздела сред и в случае, если теоретически или экспериментально неизвестно значение параметра  $\mu$ . Предположим, что динамическая вязкость сжатия имеет конечную величину, и будем искать стационарное решение системы уравнений (3.19).

Для газовой фракции эта система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \mu(P_g - P_l), \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} &= \mu P_i (P_g - P_l). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Уравнение для полной энергии с учетом первых трех уравнений можно привести к следующему виду:  

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} = -\frac{P_i}{\alpha_g \rho_g} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t}$$
. Интегрируя это уравнение, получим:

$$e_g^* \left( P_g^*, \rho_g^* = \frac{\alpha_g^0 \rho_g^0}{\alpha_g^*} \right) = e_g^0(P_g^0, \rho_g^0) - \frac{\bar{P}_i}{\alpha_g^0 \rho_g^0} (\alpha_g^* - \alpha_g^0), \quad (3.21)$$

где величины с верхним индексом 0 соответствуют значениям, полученным после применения гиперболического оператора (2.1) и интегрального релаксационного оператора для скоростей (3.9); верхний индекс \* используется для обозначения установившихся после процесса релаксации давления равновесных значений;  $\bar{P}_i$  обозначает среднее интерфейсное давление. Аналогичное уравнение получается для жидкой фракции:

$$e_l^* \left( P_l^*, \rho_l^* = \frac{\alpha_l^0 \rho_l^0}{1 - \alpha_g^*} \right) = e_l^0(P_l^0, \rho_l^0) + \frac{\bar{P}_i}{\alpha_l^0 \rho_l^0} (\alpha_g^* - \alpha_g^0). \quad (3.22)$$

Среднее интерфейсное давление оценивается как:  $\bar{P}_i = 0.5(P_i + P_i^0)$ , где  $P_i$  оценивается при помощи (1.18) во время итерационной процедуры для состояния  $(\alpha_g^*, \rho_g^*, P_g^*)$ . Таким образом, для нахождения стационарного решения системы (3.19) необходимо решить систему уравнений (3.21), (3.22) при  $P_g^* = P_l^* = P^*$ . Численное решение указанной системы с двумя искомыми параметрами  $(\alpha_g^*, P^*)$  находится при помощи итерационного метода Ньютона.

## 4 Результаты

При помощи представленного выше алгоритма были решены следующие тестовые одномерные задачи: задача о распаде разрыва в ударной трубе; задача о водяном кране [8].

В задаче о распаде разрыва левая часть одномерной трубы длиной 1 м заполнена водой, а правая воздухом. Каждая из компонент смеси описывается уравнением состояния:  $P = (\gamma - 1)\rho e - \gamma\pi$ , где  $\gamma$  и  $\pi$  - постоянные параметры. Начальное состояние каждой из фаз задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_l &= 1000 \text{ кг/м}^3; P_l = 10^9 \text{ Па}; u_l = 0 \text{ м/с}; \\ \gamma_l &= 4,4; \pi_l = 6 \times 10^8 \text{ Па}; \alpha_l = 1 - \varepsilon; \varepsilon = 10^{-8} && \text{если } x < 0,7 \text{ м} \\ \rho_g &= 50 \text{ кг/м}^3; P_g = 10^5 \text{ Па}; u_g = 0 \text{ м/с}; \\ \gamma_g &= 1,4; \pi_g = 0 \text{ Па}; \alpha_g = 1 - \varepsilon; \varepsilon = 10^{-8} && \text{если } x > 0,7 \text{ м} \end{aligned}$$

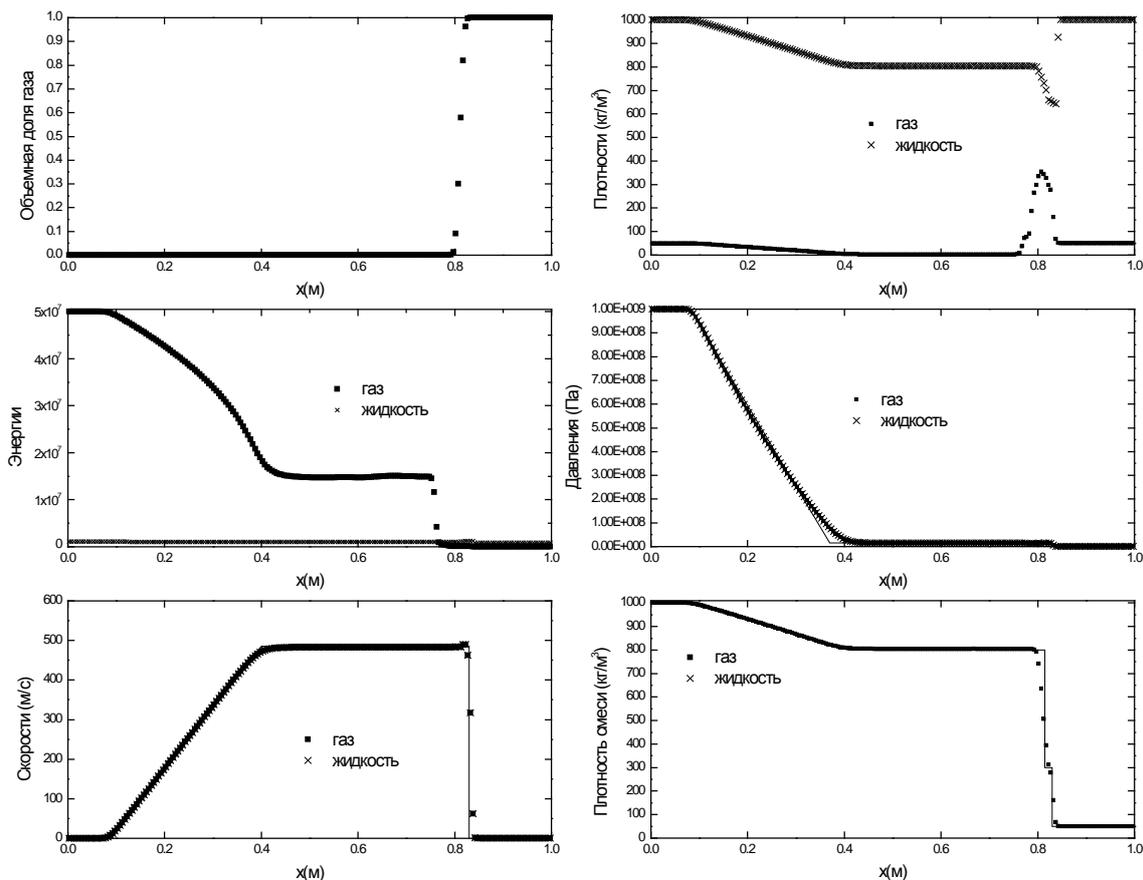


Рис. 1. Сравнение расчетного и точного решений задачи об ударной трубе для расчетной сетки из 100 точек

На рисунках 1 и 2 представлены результаты численного расчета для момента времени 229 мкс на сетке из 200 и 400 точек, соответственно. На каждом рисунке представлены графики для объемной доли газа, плотности двухфазной смеси, а также внутренних энергий, давлений, скоростей и плотностей каждого компонента. На графиках для плотности смеси, давлений и скоростей каждой фазы сплошной линией представлено точное аналитическое решение. Из графиков для давлений и скоростей видно, что эти величины совпадают для обоих компонентов смеси, что является результатом учета релаксационных процессов.

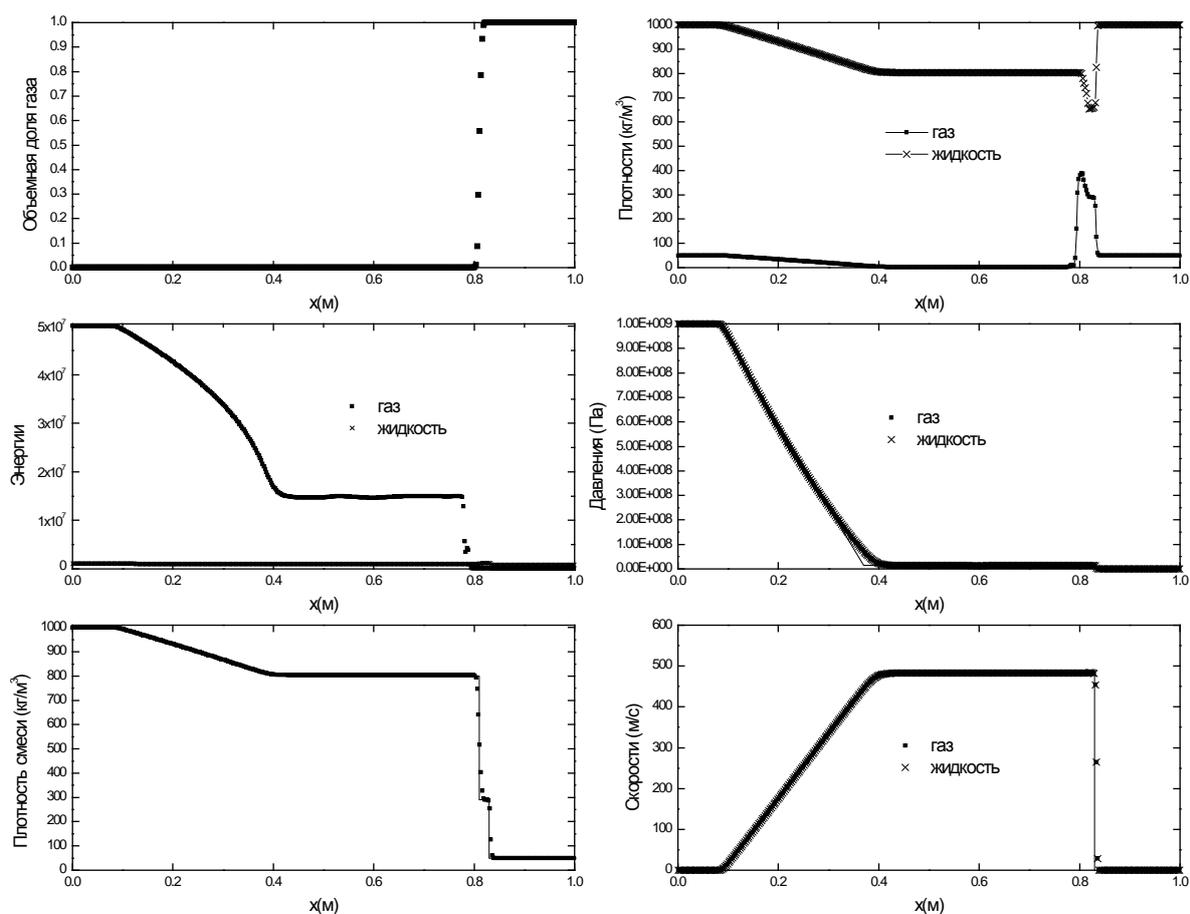


Рис. 2. Сравнение расчетного и точного решений задачи об ударной трубе для расчетной сетки из 400 точек

Рис.1 и 2 показывают, что численное решение сходится к аналитическому решению.

Постановка задачи о водяном кране состоит в следующем: в вертикальной трубе длиной 12 м находится вода, окруженная воздухом; на верхней границе трубы заданы объемные доли каждой из фаз, скорость газа задается равной нулю; на нижней границе поддерживаются атмосферные условия. Под действием сил гравитации происходит сужение водяной струи. Начальные условия для данной задачи имеют вид:

$$\text{вода} - \rho_l = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad P_l = 10^5 \text{ Па}; \quad u_l = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \alpha_l = 0,8$$

$$\text{газ} - \rho_g = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad P_g = 10^5 \text{ Па}; \quad u_g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \alpha_g = 0,2$$

Граничные условия выглядят следующим образом:

верхняя граница:

$$u_l = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad \alpha_l = 0,8$$

$$u_g = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad \alpha_g = 0,2$$

нижняя граница:

$$P_l = 10^5 \text{ Па}$$

$$P_g = 10^5 \text{ Па}$$

При проведении вычислений использовались следующие параметры уравнений состояния:

$$\gamma_l = 4,4; \quad \pi_l = 6 \times 10^6; \quad \gamma_g = 1,4; \quad \pi_g = 0.$$

Предполагая, что жидкость несжимаема и давление газа постоянно, можно получить выражение для изменения объемной доли газа [9]:

$$\alpha_g(x, t) = \begin{cases} 1 - \frac{(1 - \alpha_g^0) u_l^0}{\sqrt{2gx + (u_l^0)^2}}, & x \leq u_l^0 t + \frac{gt^2}{2} \\ 0,2, & x > u_l^0 t + \frac{gt^2}{2} \end{cases},$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

При нахождении численного решения этой задачи процесс релаксации скорости не рассматривался, так как компоненты двухфазной смеси имеют различные скорости. Сравнение результатов расчета на сетке из 200 точек с точным решением представлено на рис.3.

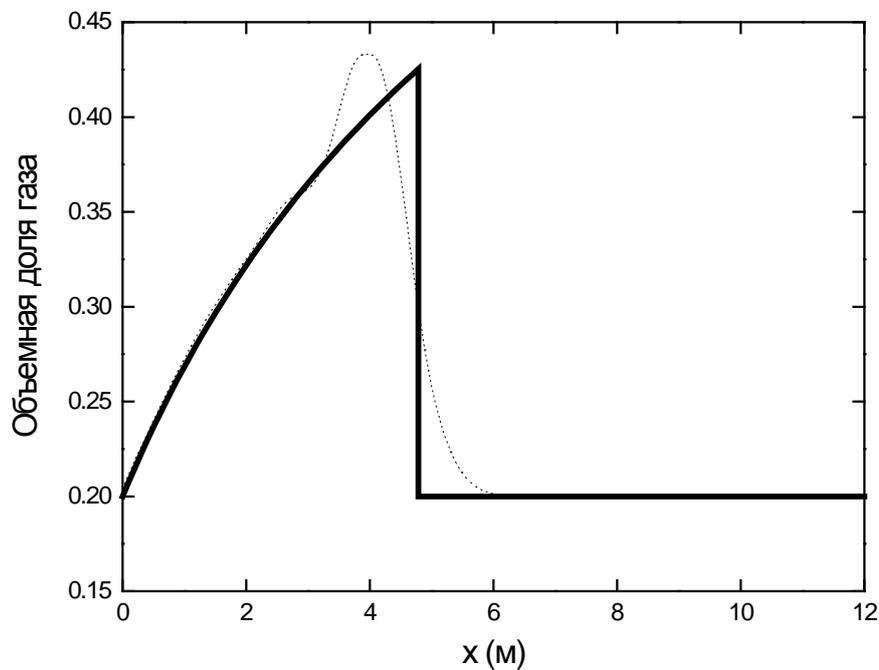


Рис. 3. Задача о водяном кране: сравнение точного и численного решения

Недостаточно хорошее разрешение разрыва профиля объемной фракции газа связано с тем, что скорость жидкости, с которой распространяется разрыв, на несколько порядков меньше скоростей акустических волн, что приводит к очень малым временным шагам и накоплению численных ошибок. С другой стороны, давление газа не является постоянным вдоль трубы, заставляя газ подниматься вверх, размазывая интерфейсную поверхность. Тем не менее, данный тестовый расчет показывает, что описанная методика позволяет рассчитывать двухфазные потоки, в которых каждый компонент имеет собственную скорость.

## Заключение

- Адаптированная для расчета двухфазных смесей методика кусочно-параболической аппроксимации [3] позволяет решать газодинамические задачи, в которых присутствуют резкие разрывы профилей термодинамических величин и контактные разрывы.
- Описанную методику легко обобщить на многомерные случаи при помощи метода расщепления по направлениям.
- Решение многомерной задачи сводится к последовательному решению одномерных задач вдоль соответствующих направлений.
- При этом решение одномерной задачи для одного направления используется в качестве начального условия при решении одномерной задачи для другого направления [6].

## Литература

1. R. Abgrall, How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: A quasi conservative approach // J. Comp. Phys. 125, P.150–160, 1996.
2. R. Saurel and R. Abgrall. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // J.Comp. Phys. 150, P.425-467, 1999.
3. Paul R. Woodward. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations // J. Comp. Phys. V. 54, №1, April 1984.
4. D.A. Drew and S.L. Passman. Theory of Multicomponent fluids // Applied Mathematical Sciences. V.135. Springer. New York, 1998.
5. M.R. Baer and J.W. Nunziato, A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Int. J. Multiphase Flow. V.12, №6, P.861–889, 1986.
6. Н.В. Ёлкина, А.А. Леонов, В.В. Чуданов. Моделирование сверхзвуковых течений методом кусочно-параболической аппроксимации // Препринт ИБРАЭ РАН №ИБРАЭ-2002-06.
7. А.А. Самарский, Ю.П. Попов, Разностные методы решения задач газовой динамики // Наука. Москва, 1980.
8. V.H. Ransom, Numerical benchmark tests // Multiphase Science and Technology. V.3. Hemisphere, Washington, 1987.
9. F. Coquel, K. E. Amine, E. Godlewski, B. Perthame, and P. Rascle, A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows // J. Comp. Phys. 136, P.272–288, 1997.