

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем безопасного развития атомной энергетики

ТРУДЫ ИБРАЭ

Под общей редакцией члена-корреспондента РАН
Л. А. Большова

Выпуск 4

ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ

Научный редактор
профессор, доктор физико-математических наук
В. М. Головизнин

Москва Наука 2008

УДК 621.039
ББК 31.4
Т78

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *А.М. Гальпер*,
доктор физико-математических наук *В.Н. Семенов*

Труды ИБРАЭ РАН / под общ. ред. чл.-корр. РАН Л.А. Большова ; Ин-т проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. — М. : Наука, 2007—

Вып. 4 : Численные схемы решения систем гиперболического типа для моделирования ударно-волновых процессов в двухфазных средах / науч. ред. В. М. Головизнин. — 2008. — 119 с. : ил. — ISBN 978-5-02-036950-4 (в пер.).

В сборнике рассмотрены возможности использования PPM-схем для решения уравнения адвекции и систем гиперболического типа. Изложены новые подходы к моделированию ударно-волновых процессов в двухфазных средах, в частности применение нелинейных разностных схем с коррекцией потоков для расчетов двухфазных сжимаемых газодинамических течений. Обсуждены возможности моделирования двухкомпонентных и двухфазных сжимаемых сред, в том числе с учетом микроинерции, с использованием метода кусочно-параболической аппроксимации (PPM) и точного римановского солвера.

Для студентов, аспирантов и специалистов в области численных методов решения дифференциальных уравнений математической физики.

Proceedings of IBRAE RAS / Ed. by L.A. Bolshov ; Nuclear Safety Institute (IBRAE) RAS. — Moscow : Nauka, 2007—

Issue 4 : Numerical methods to simulate shock wave processes in the two-phase mixtures / Ed. by V. M. Goloviznin. — 2008. — 119 p. : ill. — ISBN 978-5-02-036950-4 (bound).

The possibility of using the Piecewise-Parabolic-approximation Method (PPM) to solve the advection equation and hyperbolic-like systems is considered. New approaches to simulation of shock-wave processes in two-phase media are described, namely, the application of non-linear difference schemes with correction of flows to calculations of two-phase compressible gas-dynamic flows. The possibility of simulation using the PPM and the exact Riemann solver of two-component and two-phase compressible media, taking also into account the micro-inertia phenomenon, is discussed.

The assumed target for the issue are students and specialists in numerical methods for solving differential equations of mathematical physics.

ISBN 978-5-02-036950-4

- © Продолжающееся издание «Труды ИБРАЭ РАН», 2007 (год основания), 2008
- © Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2008
- © Коллектив авторов, 2008
- © Редакционно-издательское оформление. Издательство «Наука», 2008

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Использование PPM-схем для решения уравнения адвекции и систем гиперболического типа <i>Н. В. Елкина, А. А. Леонов, В. В. Чуданов</i>	5
Generalization of two-phase model with topology microstructure of mixture to Lagrange-Euler methodology <i>A. A. Leonov, V. V. Chudanov</i>	24
Применение нелинейных разностных схем с коррекцией потоков для расчетов двухфазных сжимаемых газодинамических течений <i>В. В. Чуданов, А. А. Леонов</i>	49
Моделирование двухкомпонентных и двухфазных сжимаемых сред с использованием метода кусочно-параболической аппроксимации (PPM) <i>А. А. Леонов, В. В. Чуданов</i>	70
Применение PPM-методики для моделирования двухфазных сжимаемых сред с учетом микроинерции <i>А. А. Леонов, В. В. Чуданов</i>	85
Расчет ударно-волновых и интерфейсных процессов в сжимаемых двухфазных средах с применением модифицированной численной схемы Годунова <i>А. А. Леонов, В. В. Чуданов</i>	102

Предисловие

В настоящее время существует целый ряд различных математических моделей и реализующих их численных схем, описывающих поведение двухфазных сжимаемых сред. В сборнике представлены численные методы, адаптированные для расчетов ударно-волновых процессов в двухфазных и двухкомпонентных сжимаемых средах. Существует два различных метода получения основных уравнений для двухфазной среды. Первый основывается на локальном усреднении законов сохранения. Вторым – вариационный подход, основан на использовании принципа наименьшего действия Гамильтона. Преимущество второго подхода заключается в том, что основные уравнения можно получить на основе одной известной скалярной функции средних величин переменных или системы Лагранжиана.

При реализации первого подхода были получены результаты численных расчетов двухфазных систем, выполненных с применением математической модели двухфазной среды с учетом топологической микроструктуры, а также с применением усредненной модели, содержащей внешние параметры интерфейсной скорости и интерфейсного давления. Применяемые модели позволяют аппроксимировать неконсервативные члены в уравнениях, описывающих двухфазную среду, и неконсервативное уравнение переноса объёмной доли. Они могут использоваться как при моделировании чистых фаз, так и смесей. При их реализации применяется один и тот же численный алгоритм в каждой расчетной ячейке.

В частности, при реализации модели с учетом топологической микроструктуры применялась нелинейная разностная схема с коррекцией потоков. Наиболее точным методом расчета является адаптированный к расчетам двухфазных сред метод кусочно-параболической аппроксимации (PieceWise-parabolic Method — PPM), использующий точный римановский солвер. Этот метод, основанный на кусочно-параболической аппроксимации начального профиля термодинамических параметров, позволяет более точно описывать поведение разрывных решений. Применение лагранж-эйлерова подхода позволяет обобщить представленную методику на двумерный и трехмерный случаи при помощи метода расщепления по направлениям. Однако к недостаткам данной методики следует отнести большой объем вычислений и неустойчивость метода при расчетах для малых чисел Маха.

При реализации второго подхода применялась модель двухфазной среды с учетом микроинерции. Эта модель является дальнейшим развитием вариационного метода для случая двухфазной среды, в которой каждый компонент является сжимаемым и имеет свою собственную температуру. Этот случай связан с моделированием перехода от возгорания к взрыву в пористых материалах.

Тестирование адаптированной к расчетам двухфазных сред методики PPM позволяет сделать вывод о ее применимости для расчета двухфазных потоков.

Использование PPM-схем для решения уравнения адвекции и систем гиперболического типа

Н. В. Елкина, А. А. Леонов, В. В. Чуданов

Введение

В вычислительной гидродинамике часто возникает необходимость моделировать нестационарные течения в нетривиальных расчетных областях, в которых развивается сложная картина ударных волн и разрывов. В таких ситуациях классические немонотонные методы с введением псевдовязкости, используемые для расчета ударных волн, зачастую неприменимы из-за невысокой точности и искажения решений. В таких случаях хорошие результаты дает применение монотонных нелинейных методов. Одним из них является метод Годунова, основанный на решении задачи Римана о распаде произвольного разрыва, который возникает между ячейками с кусочно-непрерывными параметрами течения [7]. Такой произвольный разрыв распадается, в общем случае, на контактный разрыв, волну разрежения и ударную волну [3]. Для расчета переноса в этом случае используется численная схема второго порядка точности.

Основная идея метода Годунова заключается в том, чтобы решить задачу Римана последовательно для каждой ячейки или для каждой области течения, а затем получившиеся локальные аналитические решения объединить в общее решение.

Включение информации, получаемой из задачи Римана в решение полной задачи, позволяет рассчитывать ударные волны существенно точнее, чем по классическим методам [1]. Важная особенность метода Годунова заключается в сшивании разрывных решений. Эти разрывные решения дают приемлемую аппроксимацию для соответствующих гладких решений и оказываются намного лучшими по сравнению с классическими методами при аппроксимации решений с разрывами.

В основе своей метод Годунова является двухшаговым. Сначала решается задача Римана и находятся вспомогательные величины, а затем используется метод второго порядка точности для получения результатов на выбранной сетке. Для повышения точности метода Годунова, а также лучшего разрешения ударных волн используется метод кусочно-параболической аппроксимации, или PPM (PieceWise-parabolic Method), разработанный Вудвардом и Колеллой [2].

В методе PPM решение задачи Римана используется в численной схеме второго порядка точности для аппроксимации системы уравнений Эйлера.

1. Постановка задачи

Для моделирования полномасштабной структуры течения вязкого теплопроводного газа используется система уравнений Навье — Стокса [5]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = -f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} - p \delta_{ij}); \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho E v_j + p v_j) = -f_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} v_j + \kappa \frac{\partial T}{\partial x^i} \right), \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3; \\ j = 1, 2, 3. \end{matrix} \quad (1.3)$$

Здесь введены обозначения:

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \text{ — тензор вязких напряжений,}$$

$$E = e + \frac{1}{2} \sum_i v_i^2 \text{ — удельная плотность полной энергии системы,}$$

e — внутренняя энергия,

f_i — объемная плотность внешних сил.

Система уравнений (1.1–1.3) переходит в систему уравнений Эйлера при условии:

$$\mu = \kappa = 0, \quad (1.4)$$

т. е. когда мы пренебрегаем вязкостью и теплопроводностью газа.

В случае идеального газа система (1.1–1.3) замыкается уравнением состояния:

$$p = (\gamma - 1) \rho e.$$

Начальные и граничные условия сформулируем в общем виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, 0) = u_0, \quad p(x, y, z, 0) = p_0, \quad \rho(x, y, z, 0) = \rho_0, \\ u(B, 0) = u_B, \quad p(B, 0) = p_B, \quad \rho(B, 0) = \rho_B. \end{aligned}$$

Здесь подиндекс B обозначает границы рассматриваемой в задаче области.

Обозначив в уравнениях (1.1–1.3) компоненты скорости через u, ϑ, w и используя равенство (1.4), получим систему уравнений Эйлера для идеального газа:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \vartheta \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u \vartheta \\ \rho u w \\ \rho u E + p u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho \vartheta \\ \rho \vartheta u \\ \rho \vartheta^2 + p \\ \rho \vartheta w \\ \rho \vartheta E + p \vartheta \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w u \\ \rho w \vartheta \\ \rho w^2 + p \\ \rho w E + p w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{ex} \\ f_{ey} \\ f_{ez} \\ \vec{f}_e \vec{\vartheta} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Перейдем от переменных Эйлера (x, y, z, t) к переменным Лагранжа (s_x, s_y, s_z, t) , где

$$s_x = \int_{x_0}^x \rho(x, y, z) dx, \quad s_y = \int_{y_0}^y \rho(x, y, z) dy, \quad s_z = \int_{z_0}^z \rho(x, y, z) dz.$$

Рассмотрим первое уравнение непрерывности:

$$(\partial \rho / \partial t + u \partial \rho / \partial x + \vartheta \partial \rho / \partial y + w \partial \rho / \partial z) + \rho \partial u / \partial x + \rho \partial \vartheta / \partial y + \rho \partial w / \partial z = 0,$$

где в скобках выделено выражение для полной (лагранжевой) производной от плотности. Учитывая, что $\partial s_x = \rho \partial x$, $\partial s_y = \rho \partial y$, $\partial s_z = \rho \partial z$, получим окончательно:

$$d \rho / dt + \rho^2 \partial u / \partial s_x + \rho^2 \partial \vartheta / \partial s_y + \rho^2 \partial w / \partial s_z = 0$$

или

$$d / dt (1 / \rho) = \partial u / \partial s_x + \partial \vartheta / \partial s_y + \partial w / \partial s_z. \quad (1.6)$$

Аналогично запишем второе уравнение в виде:

$$(\partial(\rho u) / \partial t + u \partial(\rho u) / \partial x + \vartheta \partial(\rho u) / \partial y + w \partial(\rho u) / \partial z) + \rho u \partial u / \partial x + \rho u \partial \vartheta / \partial y + \rho u \partial w / \partial z + \partial p / \partial x = f_{ex}.$$

Здесь также в скобках выделено значение полной производной от произведения плотности и компоненты скорости вдоль оси x . При переходе к переменным Лагранжа получим:

$$d(\rho u) / dt + \rho^2 u (\partial u / \partial s_x + \partial \vartheta / \partial s_y + \partial w / \partial s_z) = f_{ex} - \rho \partial p / \partial s_x.$$

В первом слагаемом, подставив значение $d\rho / dt$ из уравнения (1.6), получим:

$$\rho du / dt = f_{ex} - \rho \partial p / \partial s_x$$

или

$$du / dt = -\partial p / \partial s_x + f_{ex} / \rho. \quad (1.7)$$

Также точно преобразуются третье и четвертое уравнения системы (1.5):

$$d\vartheta / dt = -\partial p / \partial s_y + f_{ey} / \rho, \quad (1.8)$$

$$dw / dt = -\partial p / \partial s_z + f_{ez} / \rho. \quad (1.9)$$

Выделим полную производную от произведения плотности на полную энергию единицы массы газа в последнем уравнении системы (1.5):

$$d(\rho E) / dt + \rho E (\partial u / \partial x + \partial \vartheta / \partial y + \partial w / \partial z) + \partial(\rho u p) / \partial x + \partial(\rho \vartheta p) / \partial y + \partial(\rho w p) / \partial z = \bar{f}_e \bar{\vartheta}.$$

При переходе к массовым переменным, как и при выводе уравнения (1.7), подставив в первом слагаемом значение $d\rho / dt$ из уравнения (1.6), получим:

$$\rho dE / dt + \rho \partial(\rho u p) / \partial s_x + \rho \partial(\rho \vartheta p) / \partial s_y + \rho \partial(\rho w p) / \partial s_z = \bar{f}_e \bar{\vartheta}$$

или

$$dE / dt = \bar{f}_e \bar{\vartheta} / \rho - \partial(\rho u p) / \partial s_x - \partial(\rho \vartheta p) / \partial s_y - \partial(\rho w p) / \partial s_z. \quad (1.10)$$

Окончательно система уравнений (1.5) в лагранжевых массовых переменных будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 1/\rho \\ u \\ \vartheta \\ w \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial s_x} \begin{pmatrix} -u \\ p \\ 0 \\ 0 \\ \rho u p \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial s_y} \begin{pmatrix} -\vartheta \\ 0 \\ p \\ 0 \\ \rho \vartheta p \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial s_z} \begin{pmatrix} -w \\ 0 \\ 0 \\ p \\ \rho w p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{ex} / \rho \\ f_{ey} / \rho \\ f_{ez} / \rho \\ \bar{f}_e \bar{\vartheta} / \rho \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

где $E = e + \frac{u^2 + \vartheta^2 + w^2}{2}$. Здесь учтено, что в лагранжевых переменных частные производные по времени совпадают с полными [3].

Для численного решения системы (1.11) применим аддитивную разностную схему с целыми шагами [8]. В операторно-разностном виде система (1.11) выглядит следующим образом:

$$(U_{n+1} - U_n) / t + AF(U_n) = \varphi_n, \quad (1.12)$$

где A — некоторый постоянный оператор, $U = (1/\rho, u, \vartheta, w, E)^T$. Оператор A имеет трехкомпонентное расщепление на сумму постоянных операторов: $A = \sum_{\alpha=1}^3 A^{(\alpha)}$.

Каждый из операторов соответствует дифференцированию по лагранжевой массовой переменной вдоль соответствующего направления ($A^{(1)} = \partial / \partial s_x$, $A^{(2)} = \partial / \partial s_y$, $A^{(3)} = \partial / \partial s_z$). Переход с временного слоя t_n на t_{n+1} слой в схеме, являющейся разностным аналогом системы (1.12), будет основываться на последовательном решении трех начально-краевых задач для операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$. Для определения значений $U^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1, 2, 3$ используются системы уравнений ($t_n < t \leq t_{n+1}$):

$$\begin{aligned} dU^{(1)} / dt + A^{(1)}F(U^{(1)}) &= \varphi^{(1)}(t); \\ dU^{(2)} / dt + A^{(2)}F(U^{(2)}) &= \varphi^{(2)}(t); \\ dU^{(3)} / dt + A^{(3)}F(U^{(3)}) &= \varphi^{(3)}(t); \\ \sum_{\alpha=1}^3 \varphi^{(\alpha)}(t) &= \varphi(t), \end{aligned} \quad (1.13)$$

дополненные соответствующими начальными и краевыми условиями.

Начальные условия в общем виде можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} U^{(1)}(0) &= U^0, \quad U^{(1)}(t_n) = U^{(3)}(t_n), \\ U^{(2)}(t_n) &= U^{(1)}(t_{n+1}), \quad U^{(3)}(t_n) = U^{(2)}(t_{n+1}). \end{aligned}$$

При реализации описанной схемы сначала решается уравнение для $U^{(1)}(t)$ при начальном условии $U^{(1)}(t_n) = U^{(3)}(t_n)$ и находится $U^{(1)}(t_{n+1})$, которое используется в качестве начального для определения $U^{(2)}(t)$ и т. д. За приближенное решение

задачи на момент времени t_{n+1} принимается $U(t_{n+1}) = U^{(3)}(t_{n+1})$.

При условии независимости от времени операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$ решение системы (1.13) аппроксимирует исходную задачу (1.11) с первым порядком при допущении о достаточной гладкости точного решения [8].

Каждая отдельная промежуточная задача из (1.13) не аппроксимирует исходную задачу (не дает приближенного решения), и только последовательное решение всех промежуточных задач с их согласованием через начальные условия позволяет получить приближенное решение. В этом случае считается, что задача (1.13) аппроксимирует исходную задачу (1.11) в суммарном смысле (суммарная аппроксимация).

В качестве примера рассмотрим первую систему уравнений из (1.13):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1/\rho \\ u \\ \vartheta \\ w \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial s_x} \begin{pmatrix} -u \\ p \\ 0 \\ 0 \\ up \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{ex}/\rho \\ 0 \\ 0 \\ f_{ex}u/\rho \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

которая описывает одномерное течение газа. Аналогичные промежуточные системы уравнений получаются при расщеплении оператора A по другим направлениям.

Таким образом, при помощи метода расщепления по направлениям можно представить решение системы уравнений Эйлера (1.5) как последовательное решение более простых систем уравнений, описывающих одномерное течение газа в лагранжевых массовых координатах. Решение рассматриваемой многомерной задачи можно свести к решению локальных одномерных задач Римана вдоль соответствующих направлений. Ниже подробно описана процедура расщепления по направлениям в лагранжевых координатах, а также численная схема всего метода Годунова и метода PPM.

Для решения многих задач существенны явления, связанные с диссипацией кинетической энергии. Ниже приведен способ учета этих процессов в численной схеме. Для сглаживания нефизических осцилляций решения вблизи ударных волн обычно применяется функция-лимитер, которая также рассмотрена ниже.

2. Процедура расщепления по направлениям в лагранжевых координатах

Задача о распаде произвольного разрыва, которая лежит в основе метода Годунова, имеет аналитическое решение только в одномерном случае. Поэтому для обобщения метода Годунова на многомерные случаи

используется описанный в предыдущем разделе прием расщепления по направлениям в лагранжевых массовых координатах. Для каждого направления решается система одномерных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s} = G$$

или

$$U = \begin{pmatrix} \tau \\ u \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -u \\ p \\ (pu) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ (fu) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\rho = \frac{1}{\tau}, \quad e = E - \frac{1}{2} \left(\sum_i v_i^2 \right), \quad p = (\gamma - 1)\rho e,$$

где e — внутренняя энергия системы; f — массовая плотность внешних сил; s — лагранжева массовая координата.

Полученные при решении этой системы распределения физических величин ρ, u, p используются в качестве начальных условий для решения промежуточной задачи вдоль другого направления.

Начальные условия формулируются в общем виде на эйлеровой сетке с последующим переводом на лагранжеву. После завершения расчетного цикла происходит обратная интерполяция на исходную эйлерову сетку для последующей обработки результатов и подготовки расчетной лагранжевой сетки для следующего временного шага.

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, интегрирование по времени в промежутке $(t, t + \Delta t)$ разностных аналогов уравнений Эйлера осуществляется в несколько этапов. Сначала система уравнений решается в направлении одной из осей — получается первое приближение решения, затем оно используется в качестве начального условия для решения одномерной задачи в другом направлении, и т. д.

Рассмотрим этот метод подробнее для направления вдоль оси x . Для решения этой задачи запишем разностный аналог системы уравнений (2.1) в виде:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n \right) + \Delta t \left(G_i^n \right), \quad (2.2)$$

где

$$U_i^n = \begin{pmatrix} \tau_i^n \\ u_i^n \\ E_i^n \end{pmatrix}, \quad F_{i+1/2}^n = \begin{pmatrix} -\bar{u}_{i+1/2}^n \\ \bar{p}_{i+1/2}^n \\ (\bar{p}\bar{u})_{i+1/2}^n \end{pmatrix}, \quad G_j^n = \begin{pmatrix} 0 \\ f_i^n \\ (fu)_i^n \end{pmatrix}.$$

Найденные значения плотности, скорости и давления используются в качестве начальных условий для решения задачи по направлению y или z . При этом должно быть установлено взаимно-однозначное соответствие для нумераций узлов в различных направлениях: $i \Leftrightarrow j \Leftrightarrow k$.

Теперь запишем разностную схему (2.2) в виде [2]:

$$\begin{aligned} x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} &= x_{i+\frac{1}{2}}^n + \Delta t \bar{u}_{i+\frac{1}{2}}, \quad \tau_i^{n+1} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - x_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta s_i}; \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (\bar{p}_{i-\frac{1}{2}} - \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}) + \Delta t f_i^n; \\ E_i^{n+1} &= E_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (\bar{u}_{i-\frac{1}{2}} \bar{p}_{i-\frac{1}{2}} - \bar{u}_{i+\frac{1}{2}} \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}) + \Delta t u_i^n f_i^n; \\ \rho_i^{n+1} &= \frac{1}{\tau_i^{n+1}}; \\ e_i^{n+1} &= E_i^{n+1} - \frac{1}{2} (u_i^{n+1})^2; \\ p_i^{n+1} &= (\gamma - 1) \rho_i^{n+1} e_i^{n+1}; \\ T_i^{n+1} &= \frac{\gamma - 1}{R} e_i^{n+1}, \end{aligned}$$

где $x_{i+\frac{1}{2}}$ — это лагранжева координата правой границы ячейки. Величины $\bar{u}_{i+\frac{1}{2}}^n, \bar{p}_{i+\frac{1}{2}}^n$ находятся с помощью метода Годунова из решения задачи о распаде разрыва на границе ячейки $x_{i+\frac{1}{2}}$.

3. Метод Годунова и метод РРМ

3.1. Метод РРМ

Как уже отмечалось, величины $\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}, \bar{p}_{j+\frac{1}{2}}$ находятся с помощью метода Годунова и метода РРМ. В основе метода Годунова лежит решение задачи Римана [3, 6] на границах каждой ячейки. В отличие от обычного метода Годунова, где давление и скорость слева и справа от рассматриваемой границы ячейки имеют постоянные значения, в методе РРМ эти величины интерполируются квадратичным полиномом, узлами которого являются значения скорости и давления в полужелых узлах сетки $p_{j+\frac{1}{2}}, u_{j+\frac{1}{2}}$.

Полином строится таким образом, чтобы среднее по данной ячейке значение этого полинома совпадало со значением скорости или давления в целом узле.

Значения величин слева и справа от границы разрыва получаются при помощи процедуры усреднения по соответствующим областям зависимости. Подробно эта процедура описана в [2].

В качестве примера рассмотрим интерполяцию профиля давления. Соответствующий квадратичный полином будет иметь вид:

$$p(x) = p_{L,j} + \xi(\Delta p_j + p_{6,j}(1 - \xi)),$$

где
$$\xi = \frac{x - x_{j-1/2}}{\Delta x_j}, \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2},$$

$$\Delta p_j = p_{R,j} - p_{L,j}, \quad p_{6,j} = 6 \left(p_j - \frac{1}{2}(p_{R,j} + p_{L,j}) \right).$$

Здесь введены обозначения:

$$\lim_{x \downarrow x_{j-1/2}} p(x) = p_{L,j}, \quad \lim_{x \uparrow x_{j+1/2}} p(x) = p_{R,j},$$

В работе [2] доказано, что такой полином можно построить единственным образом.

Значения давления в полуцелых точках находятся при помощи интерполяции полиномом третьей степени, узлами которого являются значения давления в соседних целых узлах. Эти значения находятся из следующего выражения:

$$\begin{aligned} p_{j+1/2} = & p_j^n + \frac{\Delta x_j}{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}} (p_{j+1}^n - p_j^n) + \frac{1}{\sum_{k=-2}^2 \Delta x_{j+k}} \times \\ & \times \frac{2\Delta x_{j+1}\Delta x_j}{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}} \left[\frac{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j}{2\Delta x_j + \Delta x_{j+1}} - \frac{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j}{2\Delta x_j + \Delta x_{j+1}} \right] (p_{j+1}^n - p_j^n) - \\ & - \Delta x_j \frac{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j}{2\Delta x_j + \Delta x_{j+1}} \delta p_{j+1} + \Delta x_{j+1} \frac{\Delta x_{j+1} + \Delta x_{j+2}}{\Delta x_j + 2\Delta x_{j+1}} \delta p_j. \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение:

$$\delta p_j = \frac{\Delta x_j}{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j + \Delta x_{j+1}} \times \frac{2\Delta x_{j-1} + \Delta x_j}{\Delta x_{j+1} + \Delta x_j} (p_{j+1}^n - p_j^n) + \frac{\Delta x_j + 2\Delta x_{j+1}}{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j} (p_j^n - p_{j-1}^n).$$

Величина δp_j в j -й ячейке имеет смысл среднего угла наклона параболы, средние значения которой в соответствующих ячейках равны $p_{j-1}^n, p_j^n, p_{j+1}^n$. В расчетах эта величина заменяется на выражение $\delta_{\min} p_j$, которое определяется так:

$$\text{Если } (p_j^n - p_{j-1}^n)(p_{j+1}^n - p_j^n) > 0, \text{ то } \delta_{\min} p_j = \min(|\delta p_j|, 2|p_j^n - p_{j-1}^n|, 2|p_{j+1}^n - p_j^n|) \operatorname{sgn}(\delta p_j).$$

В остальных случаях $\delta_{\min} p_j = 0$.

Значения скорости в полуцелых точках находятся аналогично.

Для сохранения монотонности интерполированных значений в методе РРМ предусмотрен специальный алгоритм, который существенно уменьшает осцилляции вблизи ударных волн [2]:

$$p_{L,j} = p_j^n, \quad p_{R,j} = p_j^n, \quad \text{если } (p_{R,j} - p_{L,j})(p_j^n - p_{L,j}) \leq 0;$$

$$p_{L,j} = 3p_j^n - 2p_{R,j}, \quad \text{если } (p_{R,j} - p_{L,j}) \left(p_j^n - \frac{1}{2}(p_{R,j} + p_{L,j}) \right) > \frac{(p_{R,j} - p_{L,j})^2}{6};$$

$$p_{R,j} = 3p_j^n - 2p_{L,j}, \quad \text{если } -\frac{(p_{R,j} - p_{L,j})^2}{6} > (p_{R,j} - p_{L,j}) \left(p_j^n - \frac{1}{2}(p_{R,j} + p_{L,j}) \right).$$

В областях, где решение гладкое и шаг по времени стремится к нулю, кусочно-параболическая схема на равномерной сетке дает четвертый порядок точности. Вблизи разрывов кусочно-параболическая интерполяция дает третий порядок точности.

3.2. Метод Годунова

Рассмотрим характеристическое уравнение для закона сохранения импульса в системе [3]:

$$du \pm \frac{dp}{C} = f dt \quad \text{вдоль характеристики} \quad ds = \pm C dt,$$

где $C = (\gamma p \rho)^{1/2}$, s — лагранжева массовая координата.

Остановимся кратко на алгоритме вычисления $\bar{u}_{j+1/2}$, $\bar{p}_{j+1/2}$. Для конструирования значений скорости и давления слева и справа от границы разрыва используются только те части каждой ячейки слева и справа от $s_{j+1/2}$, которые входят в область зависимости для интервала (t^n, t^{n+1}) . Величины $\bar{p}_{j+1/2}$, $\bar{u}_{j+1/2}$ удовлетворяют следующей системе нелинейных уравнений:

$$\frac{\bar{p}_{j+1/2} - p_{j+1/2,L}}{W_L} + (\bar{u}_{j+1/2} - u_{j+1/2,L}) = 0; W_L^2 = (\gamma p_{j+1/2,L} \rho_{j+1/2,L}) \left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left[\frac{\bar{p}_{j+1/2}}{p_{j+1/2,L}} - 1 \right] \right);$$

$$\frac{\bar{p}_{j+1/2} - p_{j+1/2,R}}{W_R} - (\bar{u}_{j+1/2} - u_{j+1/2,R}) = 0; W_R^2 = (\gamma p_{j+1/2,R} \rho_{j+1/2,R}) \left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left[\frac{\bar{p}_{j+1/2}}{p_{j+1/2,R}} - 1 \right] \right),$$

где $p_{j+1/2,L}$, $p_{j+1/2,R}$, $u_{j+1/2,L}$, $u_{j+1/2,R}$ — значения давления и скорости слева и справа от границы раздела ячеек, усредненные по соответствующей области зависимости.

Чтобы решить эту систему, используем метод Ньютона с фиксированным числом итераций [4, 7]. Кратко остановимся на описании этого метода. Пусть имеется нелинейное уравнение $f(x) = 0$.

Допустим, что это уравнение имеет корень ξ , для нахождения которого нужно выбрать начальное приближение x_0 . Тогда корень нашего уравнения отыскивается с помощью процедуры:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)};$$

$$\dots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

повторяемой требуемое число раз (до достижения заданной точности). Здесь введено обозначение $f'(x_n)$ для первой производной функции $f(x_n)$.

Этот итерационный процесс быстро сходится, если начальное приближение x_0 выбрано достаточно близко к корню уравнения.

4. Интерполяция на эйлерову сетку

После завершения расчета на очередном временном шаге происходит интерполяция плотности, скорости, давления и энергии на исходную эйлерову сетку. Этот шаг необходим для того, чтобы учесть деформации, которые может испытывать лагранжева сетка в процессе расчета.

Рассмотрим алгоритм переинтерполяции. Относительно эйлеровой сетки перемещения узлов лагранжевой сетки выглядят как втекание и вытекание массы, импульса и энергии через неподвижные границы эйлеровой сетки.

Для нахождения новых значений плотности, скорости, давления и полной энергии на эйлеровой сетке записывается баланс массы, импульса и полной энергии в каждой ячейке.

Для этого находится величина зоны пересечения соответствующих ячеек лагранжевой и эйлеровой сетки:

$$\alpha = x_i - x0_i.$$

Здесь x_i — координаты узлов лагранжевой сетки, $x0_i$ — узлы эйлеровой сетки. Рассмотрим частный случай, когда узлы лагранжевой сетки движутся влево. В этом случае $\alpha < 0$, и в эйлерову ячейку масса втекает через правую границу, а вытекает через левую. Эти потоки рассчитываются с помощью метода РРМ. Средние значения массы, скорости и полной энергии по области пересечения соответствующих ячеек лагранжевой и эйлеровой сеток вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} m_i &= \alpha \left(\rho_{L,i-1} + \delta\rho_{i-1} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Delta x_{i-1}} \left(\delta\rho_{i-1} - \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\Delta x_{i-1}} \rho\delta_{i-1} \right) \right) \right), \\ u_i &= \alpha \left(u_{L,i-1} + \delta v_{i-1} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Delta x_{i-1}} \left(\delta u_{i-1} - \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\Delta x_{i-1}} u\delta_{i-1} \right) \right) \right), \\ E_i &= \alpha \left(E_{L,i-1} + \delta E_{i-1} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Delta x_{i-1}} \left(\delta E_{i-1} - \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\Delta x_{i-1}} E\delta_{i-1} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Если лагранжева сетка движется вправо ($\alpha > 0$), то эти формулы принимают вид:

$$\begin{aligned} m_i &= \alpha \left(\rho_{L,i} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Delta x_i} \left(\delta\rho_i + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\Delta x_i} \rho\delta_i \right) \right) \right), \\ u_i &= \alpha \left(u_{L,i} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Delta x_i} \left(\delta u_i + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\Delta x_i} u\delta_i \right) \right) \right), \\ E_i &= \alpha \left(E_{L,i} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Delta x_i} \left(\delta E_i + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\Delta x_i} E\delta_i \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Рассматривая баланс втекающих и вытекающих в ячейку потоков, можно посчитать новую массу, импульс (найти скорость) и энергию в эйлеровой ячейке. Для обозначения новой величины на эйлеровой сетке используем верхний индекс e , а для обозначения этой же величины на лагранжевой сетке — верхний индекс l :

$$\rho_i^e = \frac{\rho_i^l \delta V_i^l + m_i^l - m_{i+1}^l}{\delta V_i^0},$$

$$u_i^e = \frac{u_i^l \rho_i^l \delta V_i^l + m_i^l u_i^l - m_{i+1}^l u_{i+1}^l}{\rho_i^e \delta V_i^0},$$

$$E_i^e = \frac{E_i^l \rho_i^l \delta V_i^l + m_i^l E_i^l - m_{i+1}^l E_{i+1}^l}{\rho_i^e \delta V_i^0},$$

где δV_i^0 — объем ячейки на фиксированной эйлеровой сетке.

Давление находим из уравнения состояния:

$$p_i^e = \gamma \rho_i^e \left(E_i^e - \frac{1}{2} \left[(u_i^e)^2 + (v_i^e)^2 + (w_i^e)^2 \right] \right).$$

При расчетах использовались граничные условия полного отражения и нулевого градиента, которые в разностном виде для одномерной задачи вдоль направления оси x имеют вид:

полное отражение

$$\begin{aligned} \rho_{n \min -1} &= \rho_{n \min}, & \rho_{n \min -2} &= \rho_{n \min +1}; & \rho_{n \max -1} &= \rho_{n \max}, & \rho_{n \max -2} &= \rho_{n \max +1}; \\ u_{n \min -1}^x &= -u_{n \min}^x, & u_{n \min -2}^x &= -u_{n \min +1}^x; & u_{n \max -1}^x &= -u_{n \max}^x, & u_{n \max -2}^x &= -u_{n \max +1}^x; \\ p_{n \min -1} &= p_{n \min}, & p_{n \min -2} &= p_{n \min +1}; & p_{n \max -1} &= p_{n \max}, & p_{n \max -2} &= p_{n \max +1}, \end{aligned}$$

нулевой градиент

$$\begin{aligned} \rho_{n \min -1} &= \rho_{n \min}, & \rho_{n \min -2} &= \rho_{n \min}; & \rho_{n \max -1} &= \rho_{n \max}, & \rho_{n \max -2} &= \rho_{n \max}; \\ u_{n \min -1}^x &= u_{n \min}^x, & u_{n \min -2}^x &= u_{n \min}^x; & u_{n \max -1}^x &= u_{n \max}^x, & u_{n \max -2}^x &= u_{n \max}^x; \\ p_{n \min -1} &= p_{n \min}, & p_{n \min -2} &= p_{n \min}; & p_{n \max -1} &= p_{n \max}, & p_{n \max -2} &= p_{n \max}. \end{aligned}$$

5. Учет вязкости

В общем виде учет диссипации кинетической энергии в жидкости или газе из-за наличия внутреннего трения осуществляется с использованием вязкого тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x^k} \right),$$

где μ — коэффициент вязкости. На первом этапе освоения и изучения метода РРМ, а также с целью сохранения однородности численного алгоритма при расчетах методом РРМ вязкость вводится как добавка к газокинетическому давлению (вязкое давление): $\omega = -\mu \partial v_i / \partial x^i$.

В случае двумерной или трехмерной задачи такой способ учета вязкости соответствует допущению о слабом изменении компонент скорости вдоль поперечных направлений. Учет перекрестных производных от скорости в вязком тензоре не представляет принципиальных затруднений. В системе (1.14) это приведет к изменению компонент скорости $v_y = \mathfrak{G}$ и $v_z = w$ при решении промежуточной задачи в лагранжевых координатах при расщеплении вдоль направления оси x . При указанном способе учета вязкости вдоль выбранного направления решается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}
 x_{j+1/2}^{n+1} &= x_{j+1/2}^n + \Delta t \bar{u}_{j+1/2}, \quad \tau_j^{n+1} = \frac{x_{j+1/2}^{n+1} - x_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta s_j}; \\
 \omega_{j+1/2} &= \bar{p}_{j+1/2} - \mu \left[\frac{1}{2} (\rho_{j+1}^n + \rho_j^n) \right] \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{0.5(\Delta s_{j+1} + \Delta s_j)} \right); \\
 \omega_{j-1/2} &= \bar{p}_{j-1/2} - \mu \left[\frac{1}{2} (\rho_j^n + \rho_{j-1}^n) \right] \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{0.5(\Delta s_j + \Delta s_{j-1})} \right); \\
 u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta s_j} (\omega_{j-1/2} - \omega_{j+1/2}) + \Delta t (f_j^n); \\
 E_j^{n+1} &= E_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta s_j} (\bar{u}_{j-1/2} \omega_{j-1/2} - \bar{u}_{j+1/2} \omega_{j+1/2}) + \Delta t (u_j^n f_j^n); \\
 \rho_j^{n+1} &= \frac{1}{\tau_j^{n+1}}; \\
 e_j^{n+1} &= E_j^{n+1} - \frac{1}{2} \left[(u_j^{n+1})^2 + (\mathfrak{S}_j^{n+1})^2 + (w_j^{n+1})^2 \right]; \\
 p_j^{n+1} &= (\gamma - 1) \rho_j^{n+1} e_j^{n+1}; \\
 T_j^{n+1} &= \frac{\gamma - 1}{R} e_j^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Для остальных направлений учет вязкости выполняется аналогично.

6. Сглаживание решения

При расчетах в окрестностях ударных волн часто появляются нефизические осцилляции, искажающие решение в этих областях. Для уменьшения этого эффекта разработаны методы, сглаживающие решение вблизи ударных волн [2]. Рассмотрим этот механизм на примере сглаживания давления; действия в отношении других гидродинамических переменных абсолютно идентичны.

Итак, сглаженные значения давления находятся следующим образом:

$$p_{R,j} = \phi_j p_j + (1 - \phi_j) p_{R,j};$$

$$p_{L,j} = \phi_j p_j + (1 - \phi_j) p_{L,j},$$

где ϕ_j — функция-лимитер.

Остановимся более подробно на алгоритме получения этой функции. Для контроля гладкости решения введем обозначение:

$$\chi = \frac{|p_{j+1} - p_{j-1}|}{\min(p_{j+1}, p_{j-1})}.$$

Переменная χ показывает, есть ли ударная волна в данной ячейке: если есть большой градиент давления, значит, имеет место ударная волна, в этом случае значение χ полагается равным 1:

$$\begin{aligned}
 \text{если } \frac{|p_{j+1} - p_{j-1}|}{\min(p_{j+1}, p_{j-1})} > \varepsilon \text{ и } u_{j-1} - u_{j+1} > 0, \\
 \text{то } \chi = 1,
 \end{aligned}$$

во всех остальных случаях: $\chi = 0$.

Далее необходимо ввести параметр, указывающий резкость скачка или ударной волны, что необходимо для более точного отрезания осцилляций:

$$\sigma_j = \chi \max \left(0, \left(\frac{p_{j+1} - p_{j-1}}{p_{j+2} - p_{j-2}} - \omega 1 \right) \omega 2 \right),$$

где $\varepsilon, \omega 1, \omega 2$ — свободные параметры.

И наконец, можно написать выражение для ϕ_j , учитывающее силу и резкость ударной волны:

$$\phi_j = \max\left(0, \min\left(\frac{1}{2}, \max(\sigma_{j-1}, \sigma_j, \sigma_{j+1})\right)\right).$$

Свободные параметры $\varepsilon, \omega_1, \omega_2$ позволяют влиять на «мощность» лимитера. В нашем случае расчет производился со следующими значениями этих параметров:

$$\varepsilon = 0.33, \quad \omega_1 = 0.75, \quad \omega_2 = 5.$$

7. Результаты расчетов

Изложенная выше методика была применена для численного моделирования серии задач, таких как: задача Сода, обтекание уступа, взаимодействие ударной волны с пузырьком, трехмерная задача Сода и двойное маховское отражение. Ниже представлены результаты численного моделирования для вышеназванных проблем и приведено сравнение с доступными из литературы данными.

7.1. Задача Сода

Эта задача также известна как задача о разрыве диафрагмы [1]. Расчетная область представляет собой отрезок $[0, 1]$, в котором заданы начальные условия:

$$\begin{aligned} \rho = 1, \quad p = 1, \quad x < 0.5; \\ \rho = 0.125, \quad p = 0.1, \quad x > 0.5. \end{aligned}$$

Разрыв, заданный в середине расчетной области, распадается на ударную волну, контактный разрыв и волну разрежения. На рис. 1 приведено сравнение результатов расчета с аналитическим решением для момента времени $t = 0.2$. Наблюдается полное совпадение численных предсказаний с аналитикой.

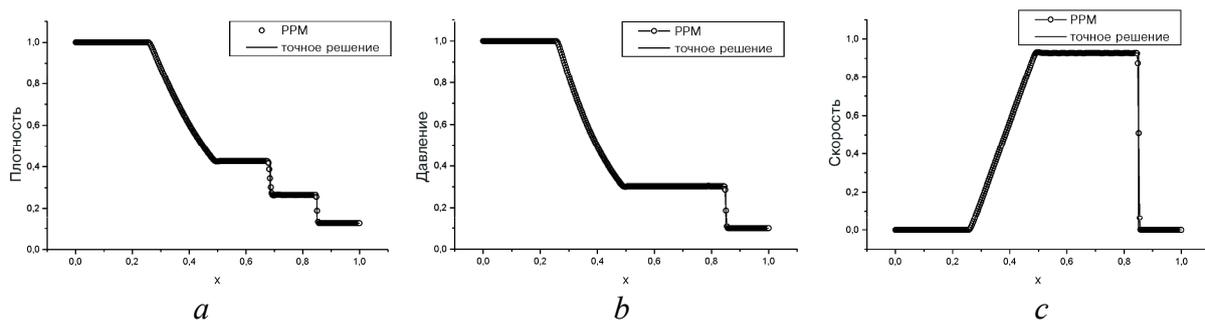


Рис. 1. Сравнение численных предсказаний с аналитикой при $t = 0.2$:
 a — плотность; b — давление; c — скорость

7.2. Обтекание уступа $M=3$

Задача об обтекании уступа решалась в двумерной области 3×1 для сетки 240×80 и граничных условий полного отражения. Уступ, высотой 0.2, находится на расстоянии 0.6 от левого края расчетной области. Задача решалась при начальных условиях:

$$\rho = 1.4; \quad p = 1; \quad \vartheta_x = 3M; \quad \vartheta_y = 0.$$

На рис. 2а приведено распределение плотности невязкого газа в стационарном режиме течения:

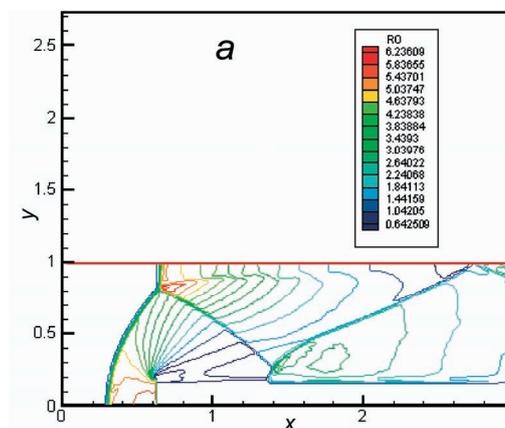


Рис. 2а: Распределение плотности невязкого газа

На рис. 2б, в, г и д показаны линии уровня для плотности в различные моменты времени. Расчет проведен для значений числа Рейнольдса из диапазона 7.5–75.

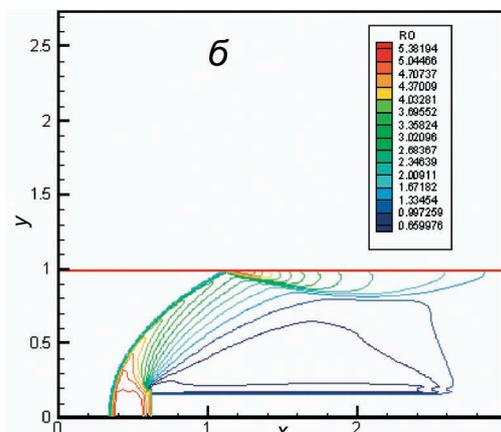


Рис. 2б: $T=0.71; Re=75$

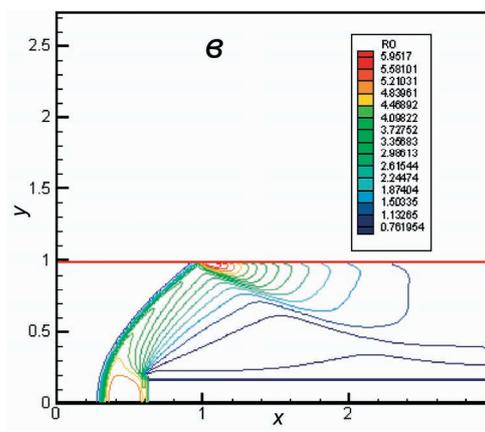


Рис. 2в: $T=1.04; Re=20$

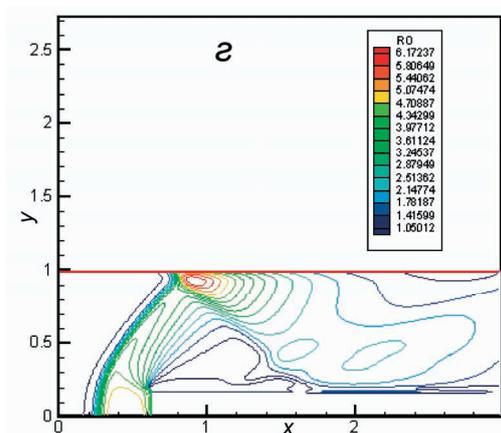


Рис. 2г: $T=2.5; Re=12$

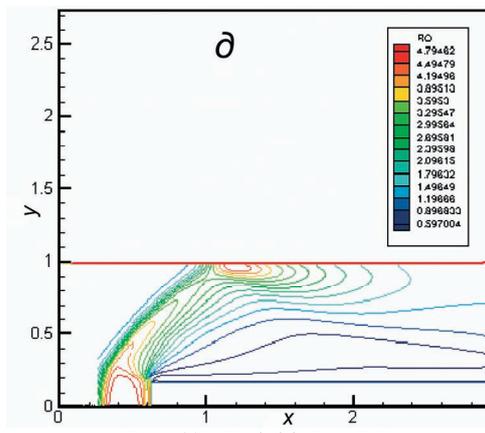


Рис. 2д: $T=0.98; Re=7.5$

7.3. Взаимодействие ударной волны с пузырьком

Моделируется взаимодействие плоской ударной волны с цилиндрическим пузырьком. Этот пример может служить иллюстрацией движения ударной волны через неоднородную среду с завихренностью и перемешиванием. Подробное решение этой задачи можно найти в работе [9]. Здесь решается двумерная задача для двухкомпонентного газа. Мы рассмотрим двумерную задачу с простым газом. Расчетная область представляет собой прямоугольник $[0, 1.5] \times [0, 0.5]$. Центр пузырька с

радиусом 0.2 расположен в точке $(0.2; 0.5)$. Первоначально скорость газа равна нулю, а давление — 1 во всей области. Внутри пузырька плотность составляет 0.1, тогда как за пределами сферы плотность 1.0. Входящая ударная волна стартует из точки $x=0$ и распространяется в направлении оси x .

На рис. 3а и б показано распределение плотности в расчетной области на ранних стадиях развития системы:

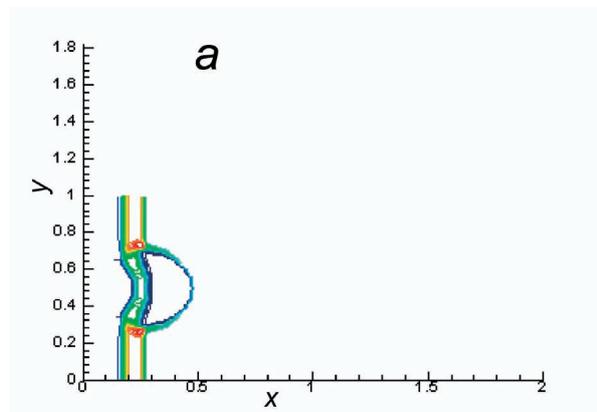


Рис. 3а. Начальная стадия прохождения ударной волны через пузырёк с газом

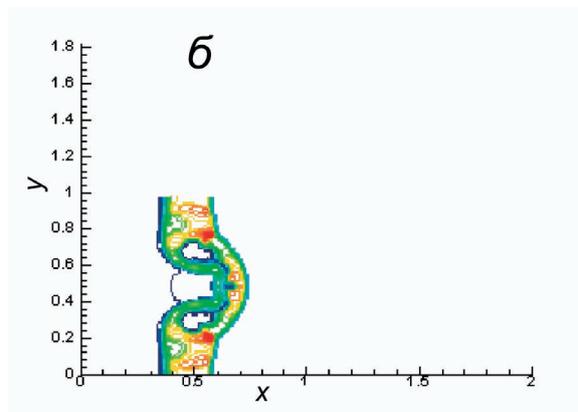


Рис. 3б. Ранняя стадия развития системы

По мере прохождения ударной волной пузырька происходит деформация, которую видно из рис. 3в, а затем схлопывание пузырька. На рис. 3г приведена картина вращающихся вихрей, распространяющихся вместе с ударной волной.

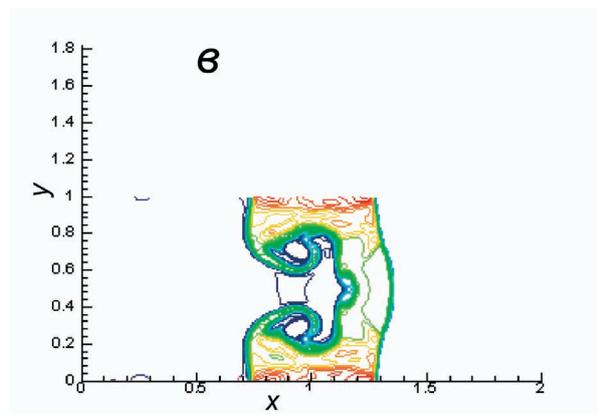


Рис. 3в. Деформация пузырька

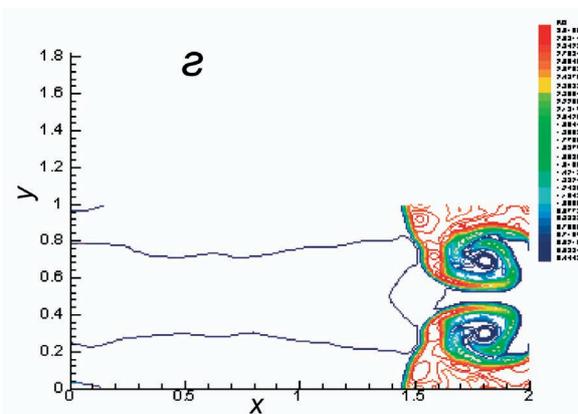


Рис. 3г. Вращающиеся вихри

Для качественного сравнения эволюции взаимодействия пузырька и плоской ударной волны приведен рис. 3д из работы [10]:

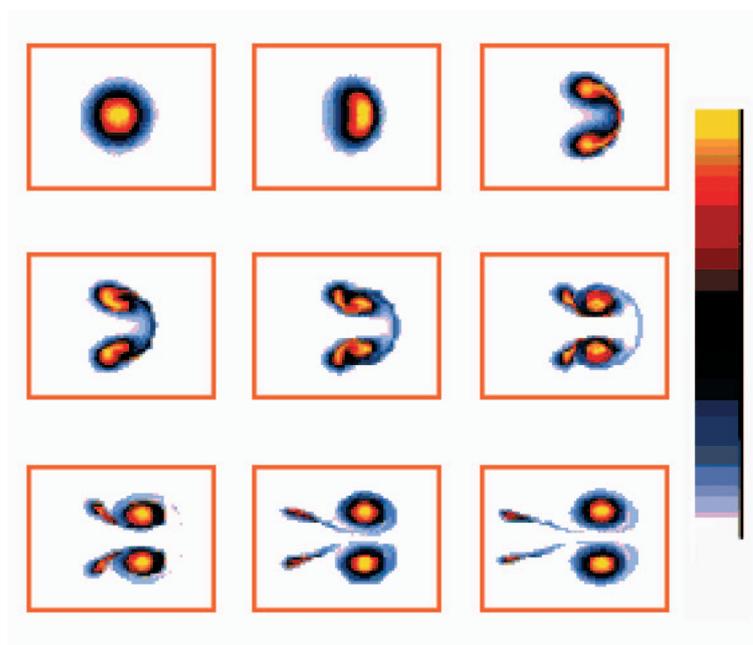


Рис. 3д. Взаимодействие пузырька и плоской ударной волны из работы [10]

7.4. Трехмерная задача Сода

Моделируется распространение ударных волн и волн разрежения в кубической области с отражающими стенками. Размер расчетной области $\{x,y,z\}=[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Начальные условия разрывные.

Распределение давления и плотности в начальный момент времени устанавливается следующим образом: расчетная область делится на две части плоскостью, пересекающей оси в точках $x=0.5, y=0.5, z=0.5$. Затем в части, которая содержит начало координат, устанавливаются плотности и

давления, равные $\rho=1, p=1$, а в оставшейся части: $\rho=0.125, p=0.1$.

Расчет выполнен на сетке $40 \times 40 \times 40$.

На рис. 4а показана эволюция решения на ранних стадиях (представлены распределения плотности в плоскостях $x=0, y=0, z=0$).

Далее ударная волна распространяется в область низкого давления, а в область высокого давления идет волна разрежения, что хорошо видно из рис. 4б.

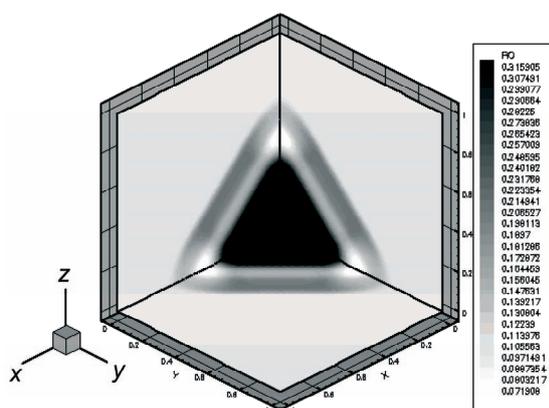


Рис. 4а. Эволюция решения на ранней стадии

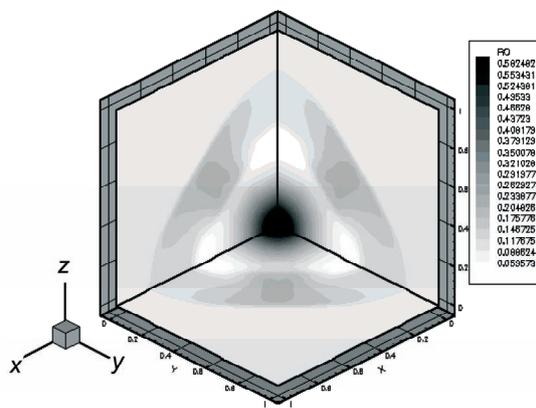


Рис. 4б. Распространение ударной волны и волны разрежения

Доходя до стенок, волны отражаются, как показано на рис. 4в.

Последнее обстоятельство приводит к колебаниям плотности и давления, как на рисунке 4г.

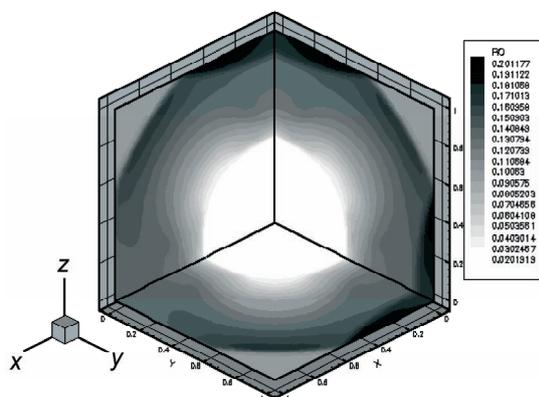


Рис. 4в. Отражение от стенок

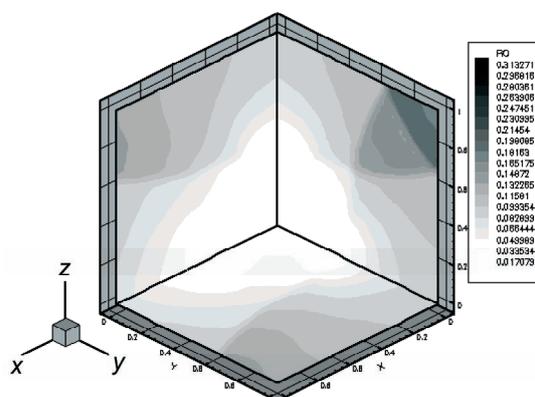


Рис. 4г. Колебания плотности

7.5. Двойное маховское отражение (Double Mach Reflection)

Явление двойного маховского отражения наблюдается, когда косая ударная волна набегаёт на отражающую стенку. Расчет проводился в области размера $[0, 4] \times [0, 1]$. Ударная волна при числе Маха $M=10$ в газе $\gamma=1.4$ набегаёт на нижнюю отражающую стенку под углом $\alpha=30^\circ$. Начальные ус-

ловия для давления и плотности задавались равными: $p=1, \rho=1.4$.

Расчет проводился на сетках 120×30 , 240×60 и 360×90 . Качественное совпадение было получено по картине линий плотности [9], которая приведена на рис. 5а для момента времени $t=0.21$.

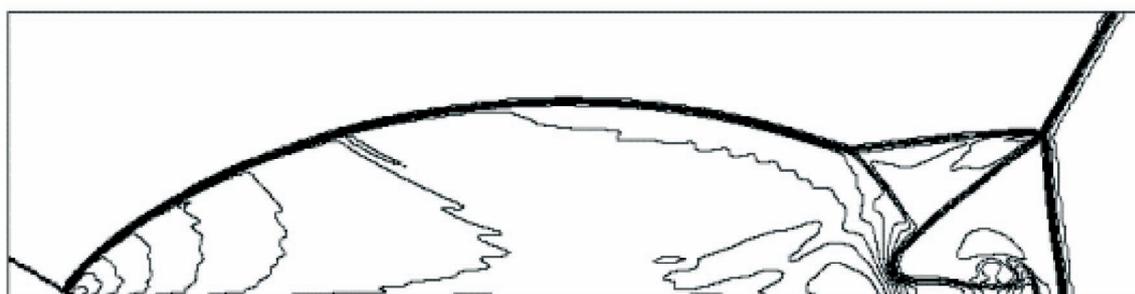


Рис. 5а. Линии плотности из [9]

На тот же момент времени на рис. 5б, в и г приведены полученные в ходе расчетов распределения линий уровня для плотности. На рис. 5д приведено распределение плотности на момент времени $t=0.21$.

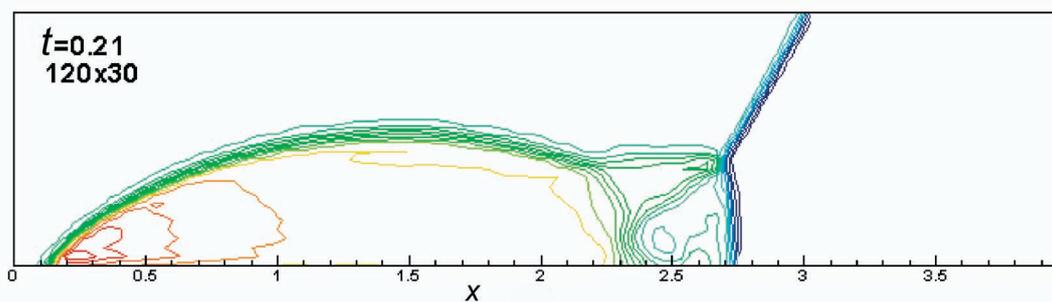


Рис. 5б. Линии уровня для плотности, сетка 120×30

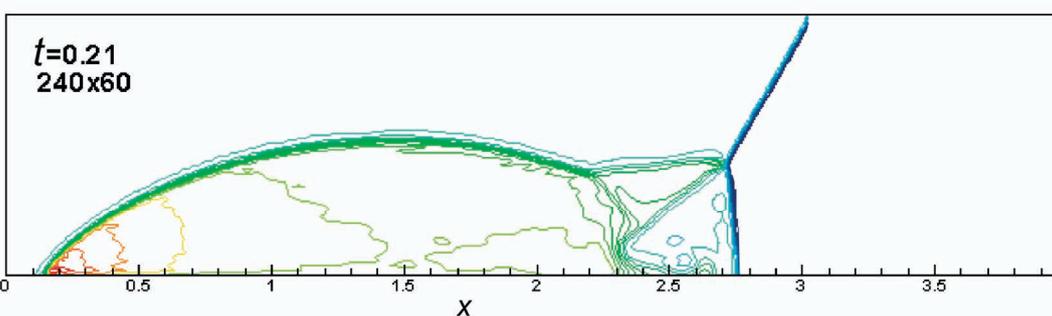


Рис. 5в. Сетка 240×60

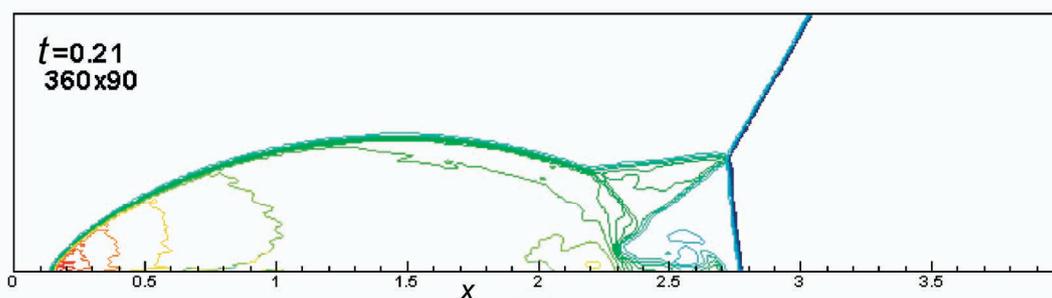


Рис. 5г. Сетка 360×90

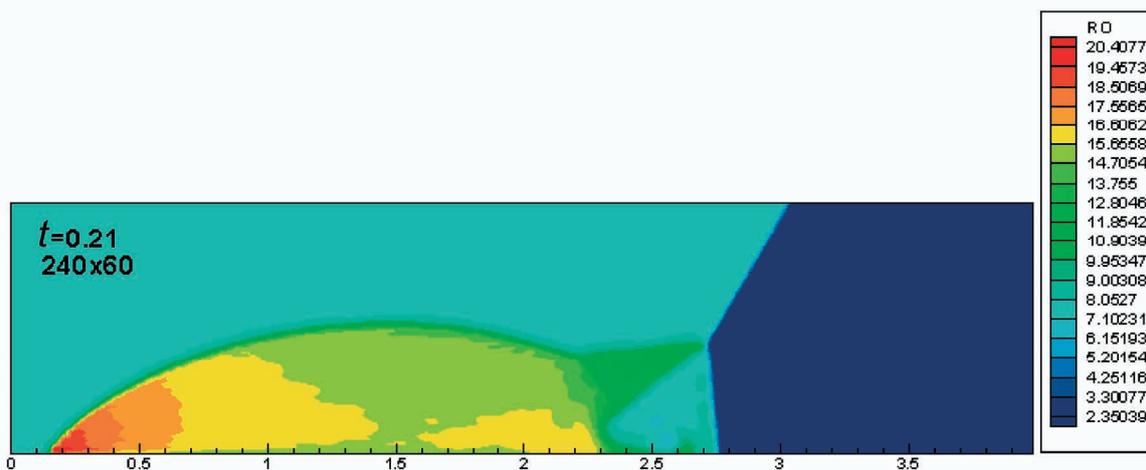


Рис. 5д. Распределение плотности

На рис. 6 и 7 приведены графики давления и плотности вдоль нижней отражающей границы. На рис. 6а и 7а приведены результаты расчетов для различных сеток в момент времени $t=0.21$, на рис. 6б и 7б — соответствующие графики из работы [12].

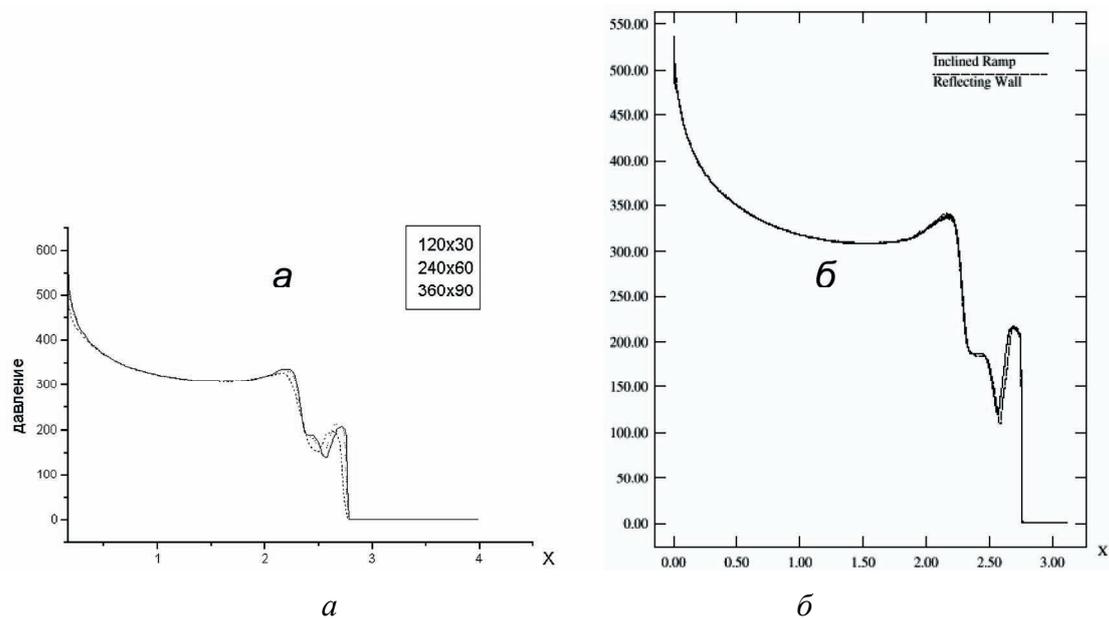


Рис. 6. Давление вдоль нижней отражающей границы (в безразмерных единицах)
 а — результаты расчёта; б — результаты расчёта из работы [12]

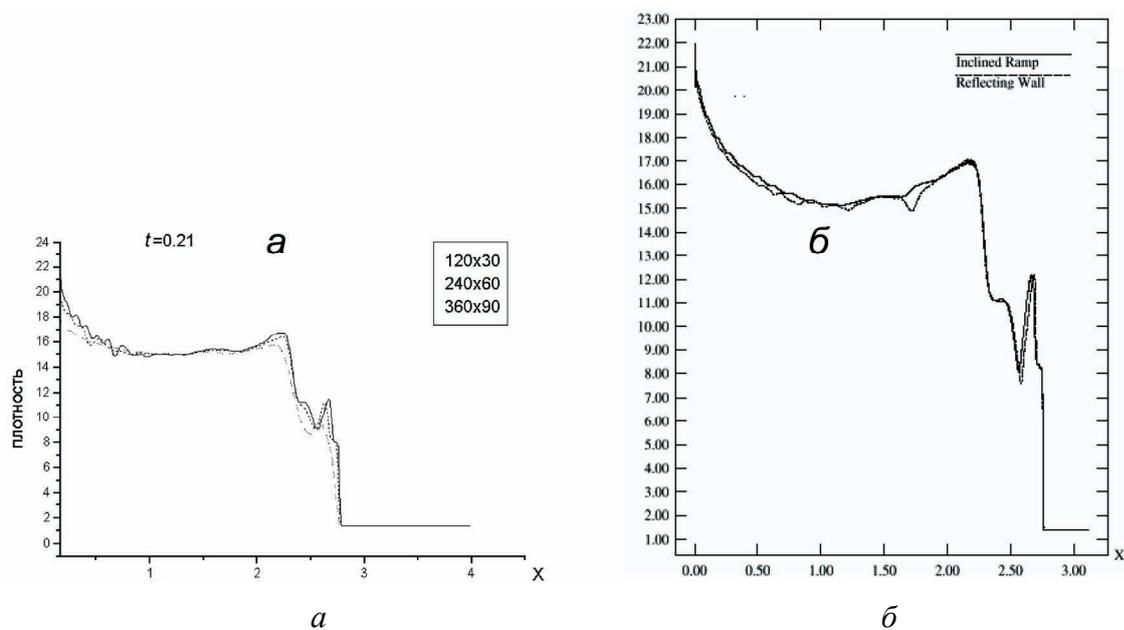


Рис. 7. Плотность вдоль нижней отражающей границы (в безразмерных единицах)
 а — результаты расчёта; б — результаты расчёта из работы [12]

Заключение

Несмотря на относительную сложность алгоритма, применяемого при реализации метода PPM, результаты численного расчета газодинамических течений в присутствии ударных волн и различных разрывов показывают, что метод позволяет гораздо более точно описывать поведение разрывных решений.

Существенным преимуществом метода является возможность введения в расчетную схему различных физических процессов, а также возможность обобщения метода на случай многофазных течений.

Литература

1. Оран, Э., Дж. Борис. Численное моделирование реагирующих потоков. — М.: Мир, 1990.
2. Colella, Ph., P.R. Woodward. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulation // J. Comput. Phys. 1984. Vol. 54, No 1.
3. Самарский, А.А., Ю.П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1992.
4. Van Leer // J. Comput. Phys. 1979. 32. P. 101.
5. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. — М.: Мир, 1991.
6. Пирумов, У.Г., Г.С. Росляков. Численные методы газовой динамики. — М.: Высшая школа, 1987.
7. LeVeque, R.J. Finite difference methods for differential equation. — University of Washington, 1998.
8. Самарский, А.А., П.Н. Вабищевич. Аддитивные схемы для задач математической физики. — М.: Наука, 1999.
9. Quirk, J.J., S. Karni. On the dynamics of a shock-bubble propagation. — ICASE Report No 94-75.
10. Lanseth, J.O., R.J. LeVeque. A wave propagation method for three-dimensional hyperbolic conservation laws. — January 1997.
11. Greenough, J.A., J. Bell, P. Colella, E.C. Puckett, J.W. Jacobs. A numerical study of shock-acceleration a diffuse helium cylinder. — UCRL-JC-122065 Preprint. 1995.
12. Randall J. LeVeque, Ken-Ming Shyue. Two-Dimensional Front Tracking Based on High Resolution Wave Propagation Methods // J. Comput. Phys. 1996. 123. P. 354–368.

Generalization of two-phase model with topology microstructure of mixture to Lagrange-Euler methodology

A. A. Leonov, V. V. Chudanov

Introduction

One of the mathematical models (hyperbolic type) for describing evolution of compressible two-phase mixtures was offered in [1] to deal with the following applications: interfaces between compressible materials; shock waves in multiphase mixtures; evolution of homogeneous two-phase flows; cavitation in liquids. The basic difficulties of this model were connected to discretization of the non-conservative equation terms. As result, the class of problems concerned with passage of shock waves through fields with a discontinuing profile of a volume fraction was not described by means of this model. A class of schemes that are able to converge to the correct solution of such problems was received in [2] due to a deeper analysis of two-phase model. The technique offered in was implemented on Eulerian grid via the Godunov scheme. In the present the additional analysis of two-phase model in view of microstructure of a mixture topology is carried out in Lagrange mass coordinates. The numerical solution is carried out with use of PPM method [3]. The robustness of the technique PPM adapted for two-phase compressible flows is demonstrated on a shock tube problem with different initial data.

To verify applicability of the modified technique PPM for simulation of two-phase compressible flows with micro-inertia, this adapted approach was used for numerical solution of hyperbolic system deduced in [4]. The typical example of medium with micro-inertia is the fluid containing gas bubbles. Examples for industrial problems can serve: discharge of a hot fluid from a horizontal pipe, depressurisation inducing cavitation water hammer initiated by a fast valve closure etc. Model equations of two-phase compressible flows with micro-inertia were obtained using the variation, based on use of Hamilton principle of a least activity. The advantage of the this approach against the method based on averaging of the local instantaneous conservation laws is kept in fact that the governing equations can be deduced on the basis of one known scalar function written in terms of the average variables or Lagrangian of system. The ability of the model for two-phase compressible flows with micro-inertia and adapted technique PPM to solve correctly physical problems is demonstrated for the shock wave propagation in a fluid containing small gas bubbles.

1. The modified technique PPM for simulation of two-phase compressible flows with micro-inertia

1.1. Mathematical model for two-phase compressible flows with micro-inertia

The derivation of the governing equations describing the two-phase compressible flows with micro-inertia is presented in [4]. For the sake of simplicity we summarize the main points of this procedure. To obtain the basic equations, the Hamilton principle of a least activity is used. This principle states, that among set of possible trajectories

of system between two fixed points in coordinate space the trajectory relevant to an extreme of Hamilton action is realized. The Hamilton action is defined as an integral of the Lagrangian, which is the difference between kinetic and potential energies over time.

1.1.1. Notations

The considered two-phase intermixture consists from two not mixing components. Each α constituent has averaged quantities: the local velocity \bar{u}_α , the local density ρ_α^0 , the partial density ρ_α , the volume fraction φ_α , the local entropy per unit mass η_α , the local internal energy per unit mass $\varepsilon_\alpha(\rho_\alpha^0, \eta_\alpha)$ and local temperature θ_α , $\alpha=1,2$. Partial densities ρ_α are defined as follows:

$$\rho_\alpha = \varphi_\alpha \rho_\alpha^0. \quad (1.1)$$

These densities are satisfied to the continuity equation:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_\alpha + \text{div}(\rho_\alpha \bar{u}_\alpha) = 0. \quad (1.2)$$

In case, when the processes of a dissipation of energy can be neglected, the quantity of local entropy along trajectories is maintained:

$$\frac{d_\alpha}{dt} \eta_\alpha = 0, \quad (1.3)$$

where

$$\frac{d_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \nabla.$$

The partial volume entropies are defined from the expression:

$$S_\alpha = \rho_\alpha \eta_\alpha \quad (1.4)$$

and are satisfied to the continuity equation:

$$\frac{\partial}{\partial t} S_\alpha + \text{div}(S_\alpha \bar{u}_\alpha) = 0. \quad (1.5)$$

The volume fractions φ_α are satisfied to the following relation:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1, \quad (1.6)$$

where indexes 1 and 2 correspond to the continuous and disperse phase, accordingly.

Let's use $\varphi_2 = \varphi$, then

$$\varphi_1 = 1 - \varphi. \quad (1.7)$$

Also, it is supposed, that for each component the Gibbs relation is valid:

$$\theta_\alpha d\eta_\alpha = d\varepsilon_\alpha + p_\alpha d\left(\frac{1}{\rho_\alpha^0}\right), \quad (1.8)$$

where $p_\alpha(\rho_\alpha^0, \eta_\alpha)$ average local pressure.

1.1.2. Total energy and Lagrangian of two-phase system

In [4] total energy is defined in the form:

$$E = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha \frac{|\bar{u}_\alpha|^2}{2} + \frac{m}{2} \left(\frac{d_i \varphi}{dt} \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha \varepsilon_\alpha \left(\frac{\rho_\alpha}{\varphi_\alpha}, \frac{S_\alpha}{\rho_\alpha} \right) + (\rho_1 + \rho_2) e(\varphi) + \frac{k}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{d}{2} |\bar{u}_2 - \bar{u}_1|^2, \quad (1.9)$$

where the first term represents a kinetic energy of a headway; second term corresponds to a kinetic energy of pulsations:

$$\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_i \nabla,$$

where index i designates an interface; \bar{u}_i – interface velocity (expression for velocity; \bar{u}_i must be chosen a priori);

third term represents an internal energy per unit volume:

- the fourth term corresponds to a potential energy, bound with interior structure, the expression for function e should be known a priori;
- fifth term takes into account macroscopic nonhomogeneity of the mixture;
- sixth term represents a kinetic energy, bound with effect of transport of additional mass.

1.1.3. Basic equations

Let computing domain in a space — time is defined as $B \times [t_2, t_1]$. At a finding of an Hamilton extreme action: $\int_{t_1}^{t_2} dt \int_B L d\bar{x}$ in coordinate spaces $(\vec{J}_\alpha, \rho_\alpha, S_\alpha)$ and $(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi)$ it is possible to receive the equations for an impulse of each of component of an intermixture [4]:

$$\rho_\alpha \frac{\partial \vec{K}_\alpha}{\partial t} + \text{rot} \vec{K}_\alpha \times \vec{J}_\alpha - \rho_\alpha \nabla R_\alpha + S_\alpha \nabla \theta_\alpha = 0, \alpha=1,2, \quad (1.12)$$

where
$$\vec{K}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \vec{J}_\alpha}, R_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \rho_\alpha}, \theta_\alpha = -\frac{\partial L}{\partial S_\alpha} \quad (1.13)$$

and equation for a volume fraction φ [4]:

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \right) - \text{div} \left(\frac{\partial L}{\partial (\nabla \varphi)} \right) = 0. \quad (1.14)$$

If for simplicity and to use of visual methods the fifth and sixth terms in expression for a total energy (1.9) will be neglected, the relevant Lagrangian will look like:

$$L = \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{|\vec{J}_\alpha|^2}{2\rho_\alpha} + \frac{m}{2} \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right)^2 \delta_{1\alpha} \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha \varepsilon_\alpha - \rho e(\varphi), \quad (1.15)$$

where $\delta_{1\alpha}$ — Kronecker symbol.

In the expression (1.15) index «1» concerns to a liquid phase, and index «2» concerns to a gas. The value of the interface velocity \bar{u}_i is chosen of equal velocity of a liquid phase of an intermixture \bar{u}_1 .

Lagrangian of system has usual shape $L = T - U$, where T — kinetic energy, U — potential energy. From expression for a total energy (1.9) it is possible to receive:

$$T = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha \frac{|\bar{u}_\alpha|^2}{2} + \frac{m}{2} \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right)^2 + \frac{d}{2} |\bar{u}_2 - \bar{u}_1|^2;$$

$$U = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha \varepsilon_\alpha \left(\frac{\rho_\alpha}{\rho_\alpha}, \eta_\alpha \right) + \rho e(\varphi) + \frac{k}{2} |\nabla \varphi|^2. \quad (1.10)$$

At realization of evaluations, it is more convenient instead of variable \bar{u}_α and η_α to use new variable: a partial impulse $\vec{J}_\alpha = \rho_\alpha \bar{u}_\alpha$ and partial entropy S_α . Then, Lagrangian of system:

$$L = L(\vec{J}_1, \vec{J}_2, \rho_1, \rho_2, S_1, S_2, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi). \quad (1.11)$$

It means, that the kinetic energy of pulsations $\frac{m}{2} \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right)^2$ is supposed concentrated in a liquid phase.

This guess is allowed only at a small volume fraction gas bubbles in an intermixture. In this case, the expressions (1.13) will have the following form [4]:

$$\begin{aligned} \bar{K}_\alpha &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{u}}_\alpha} = \bar{u}_\alpha + m \frac{d_1 \varphi}{dt} \frac{\nabla \varphi}{\rho_1} \delta_{1\alpha}; \\ R_\alpha &= \frac{\partial L}{\partial \rho_\alpha} = -\frac{|\bar{u}_\alpha|^2}{2} - m \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right) \frac{\bar{u}_1 \nabla \varphi}{\rho_1} \delta_{1\alpha} - \frac{\partial}{\partial \rho_\alpha} (\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) - e(\varphi); \\ \theta_\alpha &= -\frac{\partial L}{\partial S_\alpha}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

For simplification of final expression also it is supposed, that coefficient m is function only by one variable $m = m(\varphi)$, though generally $m = m(\varphi, \rho_1, \rho_2, S_1, S_2, |\bar{u}_1 - \bar{u}_2|)$. This parameter represents mass of a fluid, which comes in a motion under influence of a pulsation gas bubbles.

Using of Lagrangian (1.15), it is possible to receive microstructure equations for a volume fraction of gas in an explicit view from (1.14):

$$\frac{d_1}{dt} \left(\frac{m(\varphi)}{2\rho_1^2} \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right)^2 \right) = \left(p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi} \right) \frac{d_1 \varphi}{dt} \frac{1}{\rho_1^2}. \quad (1.17)$$

Let's designate $\tau = \frac{d_1 \varphi}{dt} \sqrt{m}$, then the equation (1.17) can be presented as first order quasi-linear equation system:

$$\begin{cases} \frac{d_1 \varphi}{dt} = \frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}}; \\ \frac{d_1 \tau}{dt} = \frac{p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi}}{\rho_1 \sqrt{m}}. \end{cases} \quad (1.18)$$

Using (1.12), (1.16) and (1.18), the equations for an impulse of the first and second components of an intermixture will look like, respectively:

$$\rho_1 \frac{d_1 \bar{u}_1}{dt} + \nabla \left(p_1 \varphi_1 + \frac{m}{2} \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right)^2 \right) = - \left(p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi; \quad (1.19)$$

$$\rho_2 \frac{d_2 \bar{u}_2}{dt} + \nabla (p_2 \varphi_2) = \left(p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi. \quad (1.20)$$

Equations (1.18), (1.19), (1.20) amplified with the equations of mass (1.2) and entropy (1.3) conservation produce a closed equations system describing behaviour of a two-phase intermixture with micro-inertia [4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \bar{u}_2) = 0; \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \bar{u}_1) = 0; \\ \rho_2 \frac{d_2 \bar{u}_2}{dt} + \nabla(p_2 \varphi_2) = \left(p_2 - \rho_2 \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi \equiv p_i \nabla \varphi; \\ \rho_1 \frac{d_1 \bar{u}_1}{dt} + \nabla \left(p_1 \varphi_1 + \frac{\tau^2 \rho_1^2}{2} \right) = - \left(p_2 - \rho_2 \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi \equiv -p_i \nabla \varphi; \\ \frac{d_1 \varphi}{dt} = \frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}}; \\ \frac{d_1 \tau}{dt} = \frac{p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi}}{\rho_1 \sqrt{m}}; \\ \frac{d_2 \eta_2}{dt} = 0; \\ \frac{d_1 \eta_1}{dt} = 0. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

Here through $p_i = p_2 - \rho_2 \frac{de}{d\varphi}$ the average interface pressure is designated. It is interesting point that for a given choice of the interface velocity \bar{u}_i the variation principle of Hamilton action defines uniquely the interface pressure p_i .

For numerical calculations it is more convenient to converse last two equations expressing a conservation law of entropy, to the equations for energy. Using of Gibbs relation (1.8), the continuity equation (1.2) and equation for entropy (1.3), the following equation can be obtained:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_\alpha \varepsilon_\alpha + \frac{|\bar{j}_\alpha|^2}{2\rho_\alpha} \right) + \operatorname{div} \left(\bar{j}_\alpha \left(\frac{|\bar{u}_\alpha|^2}{2} + \varepsilon_\alpha + p_\alpha \frac{\varphi_\alpha}{\rho_\alpha} \right) \right) = \bar{u}_\alpha \left(\rho_\alpha \frac{d_\alpha \bar{u}_\alpha}{dt} + \nabla(p_\alpha \varphi_\alpha) \right) - p_\alpha \frac{d_\alpha \varphi_\alpha}{dt}.$$

Then, using momentum equations (1.19) and (1.20) and equation (1.18), the entropy equations transform into the equations for energy [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_2 \left(\varepsilon_2 + e + \frac{|\bar{u}_2|^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho_2 \bar{u}_2 \left(\varepsilon_2 + e + \frac{|\bar{u}_2|^2}{2} + p_2 \frac{\varphi_2}{\rho_2} \right) \right) = -p_i \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_1 \left(\varepsilon_1 + e + \frac{\rho_1 \tau^2}{2} + \frac{|\bar{u}_1|^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho_1 \bar{u}_1 \left(\varepsilon_1 + e + \rho_1 \tau^2 + \frac{|\bar{u}_1|^2}{2} + p_1 \frac{\varphi_1}{\rho_1} \right) \right) = p_i \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (1.23)$$

The system (1.21), in which the equations expressing a conservation law of entropy, are exchanged by the energy equations, has likeness with model offered in paper [1]. The differences consist in presence of the «turbulent» terms at the equations for an impulse and energy of a continuous phase and in the equation for a volume fraction. In the system (1.21) instead of the transport equation for φ there is a system of two equations for a gas volume fraction and analogue of the bubble radial velocity τ .

1.1.4. Hyperbolicity

In one dimension, case system (1.21) can be rewritten in the form:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A(V) \frac{\partial V}{\partial x} = f,$$

where

$$V = (\rho_2, \rho_1, u_2, u_1, \varphi, \tau, \eta_2, \eta_1)^T$$

$$f = \left(0, 0, 0, 0, \tau \rho_1 / \sqrt{m}, \left(p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi} \right) / (\rho_1 \sqrt{m}), 0, 0 \right)^T$$

and matrix A is given as

$$A = \begin{pmatrix} u_2 & 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_2^2}{\rho_2} & 0 & u_2 & 0 & \frac{-c_2^2 \rho_2^0 + p_2 - p_i}{\rho_2} & 0 & \frac{\partial p_2}{\partial \eta_2} \frac{\varphi_2}{\rho_2} & 0 \\ 0 & \frac{c_1^2}{\rho_1} + \tau^2 & 0 & u_1 & \frac{-p_1 + p_i + c_1^2 \rho_1^0}{\rho_1} & \rho_1 \tau & 0 & \frac{\partial p_1}{\partial \eta_1} \frac{\varphi_1}{\rho_1} \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 & \frac{\rho_1}{u_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 \end{pmatrix}.$$

The eigenvalues of A are given by

$$\lambda_{1,2,3} = u_1; \lambda_4 = u_2; \lambda_{5,6} = u_1 \pm \sqrt{c_1^2 + \rho_1 \tau^2}; \lambda_{7,8} = u_2 \pm c_2$$

and the corresponding right eigenvectors are:

$$R_{1,2,3} = \left(\frac{-c_2^2 \rho_2^0 + p_2 - p_i}{c_2^2 - (u_2 - u_1)^2}; \frac{\left(\frac{-p_1 + p_i + c_1^2 \rho_1^0}{\rho_1} + \rho_1 \tau + \frac{\partial p_1}{\partial \eta_1} \frac{\varphi_1}{\rho_1} \right)}{\frac{c_1^2}{\rho_1} + \tau^2}; \frac{u_2 - u_1}{\rho_2} \left(\frac{-c_2^2 \rho_2^0 + p_2 - p_i}{c_2^2 - (u_2 - u_1)^2} \right); 0; 1; 1; 0; 1 \right)^T;$$

$$R_4 = \left(-\frac{\partial p_2}{\partial \eta_2} \frac{\varphi_2}{c_2^2}; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0 \right)^T;$$

$$R_{5,6} = \left(0; 1; 0; \pm \frac{\sqrt{c_1^2 + \rho_1 \tau^2}}{\rho_1}; 0; 0; 0; 0 \right)^T;$$

$$R_{7,8} = \left(1; 0; \pm \frac{c_2}{\rho_2}; 0; 0; 0; 0; 0 \right)^T.$$

All the eigenvalues are real. In paper [4] is shown, that the system (1.21) is hyperbolic under condition of $(u_2 - u_1)^2 \neq c_2^2$ (c_2 — sound velocity of the second component of an intermixture).

1.1.5. Dissipative terms

In the present application, the further considerations are carried out without the account of a potential energy $e(\varphi)$, bound with interior structure. Then the interface pressure is $p_i = p_2$. For this case the dissipative model,

taking into account the friction between fluid and gas, the collapse of gas bubbles and the external force \vec{g} , is considered. The modified system (1.21) in view of dissipation will look like:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d_1 \tau}{dt} = \frac{p_2 - p_1 - p_\mu}{\rho_1 \sqrt{m}}; \\ \frac{d_1 \varphi}{dt} = \frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}}; \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \text{div}(\rho_2 \vec{u}_2) = 0; \\ \frac{\partial(\rho_2 \vec{u}_2)}{\partial t} + \text{div}(\rho_2 \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_2 + \varphi_2 p_2 I) = p_2 \nabla \varphi + \rho_2 \vec{g} + \lambda(\vec{u}_1 - \vec{u}_2); \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{|\vec{u}_2|^2}{2} \right) \right) + \text{div} \left(\rho_2 \vec{u}_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{|\vec{u}_2|^2}{2} + p_2 \frac{\varphi_2}{\rho_2} \right) \right) = \\ = -p_2 \left(\frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}} - \vec{u}_1 \nabla \varphi \right) + \lambda \vec{u}_1 (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + \rho_2 \vec{u}_2 \vec{g}; \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 \vec{u}_1) = 0; \\ \frac{\partial(\rho_1 \vec{u}_1)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho_1 \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1 + \left(\frac{\rho_1^2 \tau^2}{2} + p_1 \varphi_1 \right) I \right) = -p_2 \nabla \varphi + \rho_2 \vec{g} - \lambda(\vec{u}_1 - \vec{u}_2); \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{\rho_1 \tau^2}{2} + \frac{|\vec{u}_1|^2}{2} \right) \right) + \text{div} \left(\rho_1 \vec{u}_1 \left(\varepsilon_1 + \rho_1 \tau^2 + \frac{|\vec{u}_1|^2}{2} + p_1 \frac{\varphi_1}{\rho_1} \right) \right) = \\ = p_2 \left(\frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}} - \vec{u}_1 \nabla \varphi \right) - \lambda \vec{u}_1 (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + \rho_1 \vec{u}_1 \vec{g}. \end{array} \right. \quad (1.24)$$

The term $\lambda(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$ represents a frictional force between gas and fluid phases; λ is a positive coefficient depending from the properties of medium; p_μ is the viscous force causing collapse of bubbles. For a case spherical bubbles the expression for p_μ has the follow-

ing view [5]: $p_\mu = \frac{4\mu_l}{R} \frac{dR}{dt}$, where μ_l dynamic viscosity of a fluid; R radius of gas bubble, connected with a volume fraction of gas φ and concentration of bubbles N by a

$$\text{relation } \varphi = \frac{4}{3} \pi R^3 N.$$

Assuming $N \approx \text{const}$ and exchanging $\frac{d}{dt}$ on

$\frac{d_1}{dt}$, it can be received:

$$p_\mu = \frac{4\tau \rho_1 \mu_l}{3\varphi \sqrt{m}}. \quad (1.25)$$

This relation can be used also for small variations of N . The changes of concentration are estimated from the equation:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \text{div}(N \vec{u}_2) = 0. \quad (1.26)$$

The equation (1.26) is independent from system (1.24) and does not change its mathematical properties [1].

1.2. The numerical method

The solution of system (1.24) is obtained by a succession of operators [1],

$$U_i^{n+1} = L_S^{\Delta t} L_h^{\Delta t} U_i^n,$$

where $L_h^{\Delta t}$ denotes the hyperbolic operator, containing non-conservative and source terms, $L_S^{\Delta t}$ denotes the integration operator for relaxation and source terms and

$$U = (\tau, \varphi, \rho_2, \rho_2 \bar{u}_2, \rho_2 E_2, \rho_1, \rho_1 \bar{u}_1, \rho_1 E_1)T.$$

Let's consider hyperbolic operator, which poses the main difficulties:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d_1 \tau}{dt} = 0; \\ \frac{d_1 \varphi}{dt} = 0; \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \bar{u}_2) = 0; \\ \frac{\partial(\rho_2 \bar{u}_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \bar{u}_2 \otimes \bar{u}_2 + \varphi_2 p_2 I) = p_2 \nabla \varphi + \rho_2 \bar{g}; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{|\bar{u}_2|^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho_2 \bar{u}_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{|\bar{u}_2|^2}{2} + p_2 \frac{\varphi_2}{\rho_2} \right) \right) = p_2 \bar{u}_1 \nabla \varphi + \rho_2 \bar{u}_2 \bar{g}; \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \bar{u}_1) = 0; \\ \frac{\partial(\rho_1 \bar{u}_1)}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho_1 \bar{u}_1 \otimes \bar{u}_1 + \left(\frac{\rho_1^2 \tau^2}{2} + p_1 \varphi_1 \right) I \right) = -p_2 \nabla \varphi + \rho_2 \bar{g}; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{\rho_1 \tau^2}{2} + \frac{|\bar{u}_1|^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho_1 \bar{u}_1 \left(\varepsilon_1 + \rho_1 \tau^2 + \frac{|\bar{u}_1|^2}{2} + p_1 \frac{\varphi_1}{\rho_1} \right) \right) = -p_2 \bar{u}_1 \nabla \varphi + \rho_1 \bar{u}_1 \bar{g}. \end{array} \right. \quad (1.27)$$

To solve the hyperbolic part of system (1.27) numerically in one-dimensional case the adapted PPM method [3] in Lagrange coordinate was used. The generalization on two-dimensional and three-dimensional cases can be obtained with splitting on directions and does not represent key difficulties [6].

Let's enter indexes «l» and «g» for a label of the fluid and gas phase, accordingly. Let's use also following labels: $u_1 = u_l$, $u_2 = u_g$, $\varphi_1 = \varphi_l$, $\varphi_2 = \varphi_g$, $\rho_1 = \rho_l$ and $\rho_2 = \rho_g$. The set of equations (1.27) for one-dimensional case in Lagrange mass coordinates looks like:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d_l \tau}{dt} = 0; \\
 & \frac{d_l \varphi_g}{dt} = 0; \\
 & \frac{d_g \left(\frac{1}{\varphi_g \rho_g} \right)}{dt} + \frac{\partial u_g}{\partial s_g} = 0; \\
 & \frac{d_g u_g}{dt} + \frac{\partial (\varphi_g p_g)}{\partial s_g} = p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_g} + g; \\
 & \frac{d_g E_g}{dt} + \frac{\partial (\varphi_g p_g u_g)}{\partial s_g} = p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_g} + u_g g; \\
 & \frac{d_l \left(\frac{1}{\varphi_l \rho_l} \right)}{dt} + \frac{\partial u_l}{\partial s_l} = 0; \\
 & \frac{d_l u_l}{dt} + \frac{\partial (\varphi_l p_l)}{\partial s_l} + \frac{\partial \left(\frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial s_l} = -p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l} + g; \\
 & \frac{d_l E_l}{dt} + \frac{\partial (\varphi_l p_l u_l)}{\partial s_l} + \frac{\partial \left(u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial s_l} = -p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l} + u_l g,
 \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

where $\frac{d_l}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_l \frac{\partial}{\partial x}$ and $\frac{d_g}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x}$ Lagrange derivative.

To derive the numerical scheme for solving (1.28) the following criterion was used [7]: if in equilibrium two-phase medium the pressure and velocity are uniform, they must remain uniform on the same variables during its temporal evolution.

Let's extract from system (1.28) equations, which contain derivation on liquid phase Lagrange coordinates s_l or total derivatives $\frac{d_l}{dt}$:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d_l \tau}{dt} = 0; \\
 & \frac{d_l \varphi_g}{dt} = 0; \\
 & \frac{d_l \left(\frac{1}{\varphi_l \rho_l} \right)}{dt} + \frac{\partial u_l}{\partial s_l} = 0; \\
 & \frac{d_l u_l}{dt} + \frac{\partial (\varphi_l p_l)}{\partial s_l} + \frac{\partial \left(\frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial s_l} = -p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l} + g; \\
 & \frac{d_l E_l}{dt} + \frac{\partial (\varphi_l p_l u_l)}{\partial s_l} + \frac{\partial \left(u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial s_l} = -p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l} + u_l g.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

The residual three equations for a gas phase form a subsystem of a system (1.28) and are solved similarly. On a Lagrange grid for a liquid phase the values τ and φ do not vary. Introducing following notations for last three equations:

$$\begin{aligned} U' &= \left(\frac{1}{\varphi_l \rho_l}, u_l, E_l \right)^T; \quad F' = \left(u_l, \varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2}, \varphi_l p_l u_l + u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)^T; \\ H' &= (0, -p_g, -p_g u_l)^T; \quad H'' = (0, g, u_l g)^T, \end{aligned} \quad (1.30)$$

we shall have for time step Δt and Lagrange variable step Δs_l the following difference scheme:

$$(U')_i^{n+1} = (U')_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left((F')_{i+1/2}^n - (F')_{i-1/2}^n \right) + \Delta t \times [H'((U')_i^n) \times \Delta + H''], \quad (1.31)$$

where Δ corresponds to the discrete form of the term $\frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l}$. The flux values in the mid points are

received from the solution of Riemann problem using PPM method [3] for each cell interface. Supposing in (1.31) $(p_l)_{i-1/2}^n = (p_l)_{i+1/2}^n = (p_l)_i^n = P$, we obtain, that equality $(u_l)_{i-1/2}^{n+1} = (u_l)_i^n = u$ is possible,

if $\Delta = \left(\frac{(\varphi_l)_{i+1/2}^n - (\varphi_l)_{i-1/2}^n}{\Delta s_i} \right)$. So, the explicit form of scheme (1.31) will be:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{(\varphi_l \rho_l)_i^{n+1}} = \frac{1}{(\varphi_l \rho_l)_i^n} + \frac{\Delta t}{(\Delta s_l)_i} \left((u_l)_{i+1/2}^n - (u_l)_{i-1/2}^n \right); \\ & (u_l)_{i-1/2}^{n+1} = (u_l)_i^n - \frac{\Delta t}{(\Delta s_l)_i} \left(\left(\varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i+1/2}^n - \left(\varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i-1/2}^n \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (p_g)_i^n \left((\varphi_l)_{i+1/2}^n - (\varphi_l)_{i-1/2}^n \right) + g \Delta t; \\ & (E_l)_{i-1/2}^{n+1} = (E_l)_i^n - \frac{\Delta t}{(\Delta s_l)_i} \left(\left(u_l \varphi_l p_l + u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i+1/2}^n - \left(u_l \varphi_l p_l + u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i-1/2}^n \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{(\Delta s_l)_i} (u_l p_g)_i^n \left((\varphi_l)_{i+1/2}^n - (\varphi_l)_{i-1/2}^n \right) + u_l g \Delta t. \end{aligned} \right. \quad (1.32)$$

The similar difference scheme is obtained for the gas phase equations. The numerical approximations of the derivative values

$$\begin{aligned} & \frac{((\varphi_l)_{i+1/2}^n - (\varphi_l)_{i-1/2}^n)}{\Delta s_i}, \quad \frac{\left(\left(\frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i+1/2}^n - \left(\frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i-1/2}^n \right)}{\Delta s_i} \quad \text{and} \\ & \frac{\left(\left(u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i+1/2}^n - \left(u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i-1/2}^n \right)}{\Delta s_i}, \quad \text{were} \end{aligned}$$

found using method of piece-wise parabolic approximation (PPM) for a profile of physical thermodynamic parameters [3]. After a solution of a system

(1.32) for liquid phase and analogous system for gas phase the interpolation from Lagrange to Euler grid was done using calculated magnitudes of velocities

in the midpoints. The new values of φ_g and τ from (1.27) are obtained on an Euler grid also by using the interpolation method (Woodward, 1984).

Now it is necessary to take into account the source terms and relaxation terms, which allow solution of the boundary conditions, at the interface. The corresponding system can be written in one dimension case (see 1.24):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d_1 \tau}{dt} = \frac{p_2 - p_1 - p_\mu}{\rho_1 \sqrt{m}}; \\ \frac{d_1 \varphi}{dt} = \frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}}; \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} = \lambda(u_1 - u_2); \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) \right) = -p_2 \frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}} + \lambda u_1 (u_1 - u_2); \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} = -\lambda(u_1 - u_2); \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{\rho_1 \tau^2}{2} + \frac{u_1^2}{2} \right) \right) = p_2 \frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}} - \lambda u_1 (u_1 - u_2). \end{array} \right. \quad (1.33)$$

The solution of the system (1.33) can be found using splitting for source (1.34) and relaxation (1.35) terms:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d_1 \tau}{dt} = \frac{p_2 - p_1 - p_\mu}{\rho_1 \sqrt{m}}; \\ \frac{d_1 \varphi}{dt} = \frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}}; \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{|\bar{u}_2|^2}{2} \right) \right) = -p_2 \frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}}; \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial(\rho_1 \bar{u}_1)}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{\rho_1 \tau^2}{2} + \frac{|\bar{u}_1|^2}{2} \right) \right) = p_2 \frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}}. \end{array} \right. \quad (1.34)$$

It is interesting to note that parameter, what controls the rate at which the phase pressures tend toward equilibrium is absent in the present model comparing two-phase model depicted in [1]. The corresponding equation is replaced by two quasi-linear equations

describing the same tendency to equilibrium. To solve (1.34) numerically the simple iterative integration was used and to obtain the decision of (1.35) the method described in [1] for velocity relaxation was applied:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d_1 \tau}{dt} = 0; \\
 & \frac{d_1 \varphi}{dt} = 0; \\
 & \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = 0; \\
 & \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} = \lambda(u_1 - u_2); \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) \right) = \lambda u_1 (u_1 - u_2); \\
 & \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0; \\
 & \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} = -\lambda(u_1 - u_2); \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{\rho_1 \tau^2}{2} + \frac{u_1^2}{2} \right) \right) = -\lambda u_1 (u_1 - u_2).
 \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

1.3. Test calculations

The considered model, offered in [4] couples the description of micro scale and macro scale motions of a two-phase mixture through a hyperbolic equations system (1.24). For an estimation of applicability of a PPM technique for a numerical solution of this system the test calculations similar submitted in work [4] were carried out.

The first test problem is connected to description of gas bubbles behavior in tube with a liquid. Originally both phases are homogeneous and are in rest. Each phase has own pressure. Thus, anyone bubble of gas is independent and its behavior is described by the equation Rayleigh Lamb [8]:

$$R\ddot{R} + 3/2\dot{R}^2 = (p_g - p_l)/\rho_l. \quad (1.36)$$

Values of initial parameters of physical magnitudes used to account for behavior gas bubbles in a homogeneous mixture are the following:

Liquid

Density — 953 кг/см³;

Equation of state parameters — $\gamma=3$,

$P_\infty=3,04 \times 10^8$ Па;

Pressure — 2×10^5 Па.

Gas

Molar mass — 146 г;

Specific heat ratio — $\gamma=1,09$;

Initial temperature — $T=309$ K;

Initial pressure — 1×10^5 Pa;

Volume fraction — 0,00232.

This equation is equivalent to a system (1.18), if a potential energy $e(\varphi)$ connected with interior structure is neglected, and to make the substitutions: $\rho_1^0 = \rho_l \approx \text{const}$, $\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3 N$,

$$m(\varphi) = \frac{\rho_l}{3} \left(\frac{3}{4\pi N} \right)^{2/3} \varphi^{-1/3}. \text{ For comparison}$$

of an analytical solution (1.24) with a numerical solution of a system (1.18) it is necessary to make the following assumptions:

Uniform initial conditions (all space derivatives are disappeared);

Invariability of a liquid phase pressure is 2×10^5 Па.

The outcomes of a numerical solution of a system (1.18) together with a solution of the Rayleigh Lamb equation (1.36) are shown in fig. 1.

The second test problem is connected with the modeling of shock wave propagation in a liquid medium with gas bubbles. The first experiments studying the distribution of a shock wave in a liquid medium with gas bubbles were carried out more than 30 years back. However, because of insufficient accu-

racy of physical measurements and because of the presence of the solute gases producing the creation of new bubbles, the first experimental data had the large uncertainty. More reliable data were obtained several years ago using a liquid exempt of solute gases [9]. In this experiment it was possible to preserve uniform bubble size and space distribution. The experimental situation is presented on fig. 2.

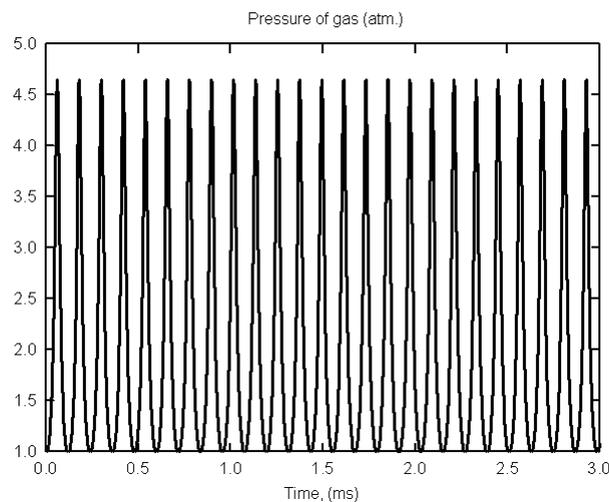


Fig. 1. Comparison of the Rayleigh Lamb equation solution and solution of system (1.18) for a homogeneous mixture

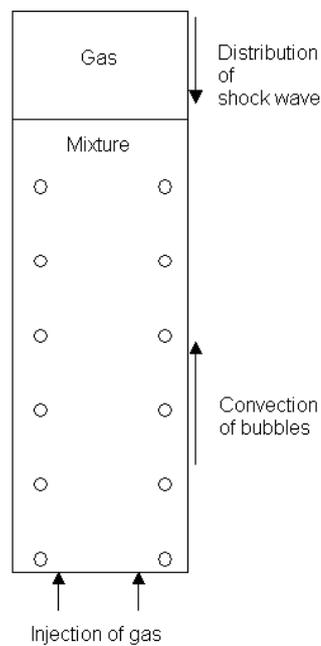


Fig. 2. The scheme of the bubbly shock tube

Gas bubbles were injected from the lower end of tube and rose upwards by natural and forced convection. The shock wave interacts with the free surface, and compression wave is transmitted into the mixture. The pressure gauge placed on distance 1,462 m from the lower part of tube. The tube length was 4 m.

To simulate the experimental conditions for shock wave propagation in bubbly fluids one-dimensional model (1.24) was used. The impact of piston velocity 0.427 m/s was set instead of simulating a shock tube with the gas chamber. This corresponds to the overpressure of 130 KPa at the distance of pressure gauge location in the experiment [9]. Initial conditions are shown in fig. 3.

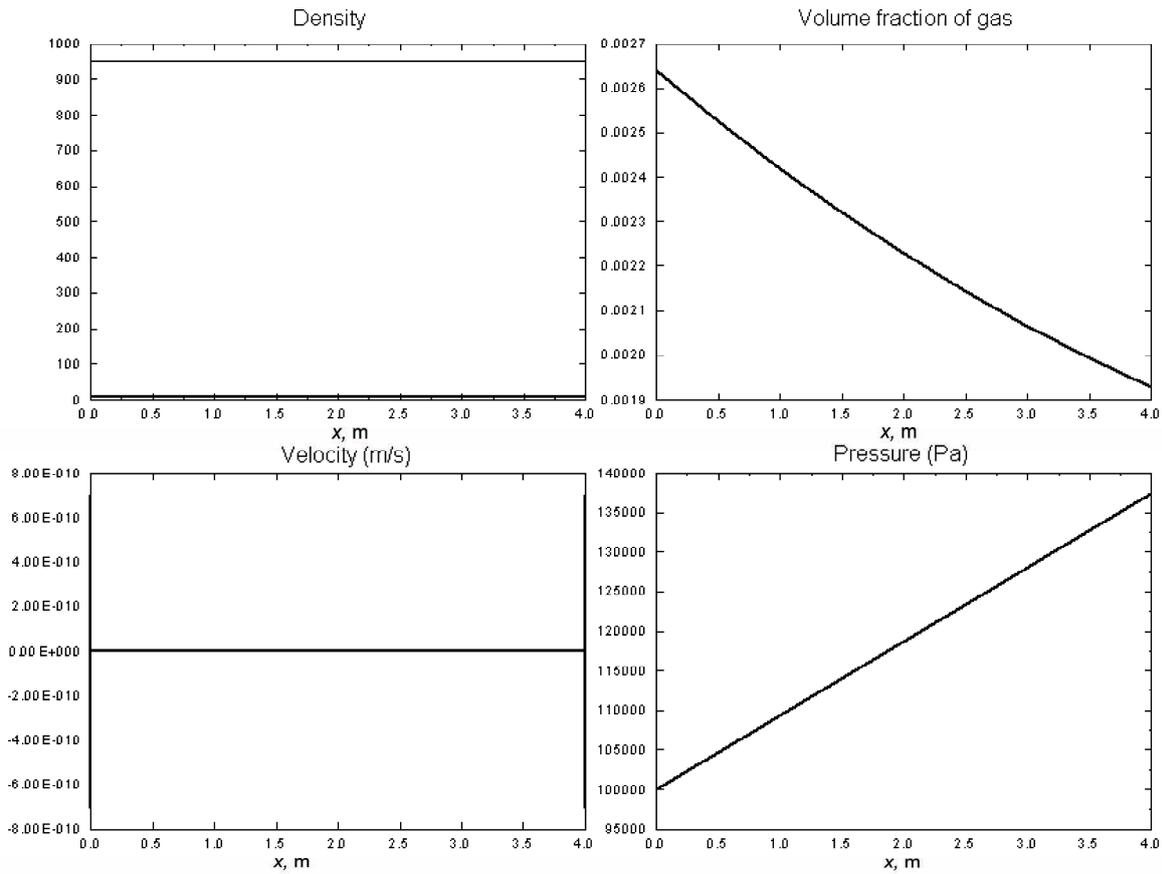


Fig. 3. The initial conditions for problem of a shock wave interaction with a two-phase medium

The initial bubbles concentration was set homogeneous and equaled $N = 2,42 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$; the dynamic viscosity of a liquid phase equaled $\mu_l = 0,00415 \text{ Pa s}$. As the volume fraction of gas is insignificant, and the density of the liquid phase is many times more than one of the gas, it is possible to neglect the relative sliding

between phases and to use infinite velocity relaxation coefficient $\lambda \rightarrow +\infty$.

The results of numerical simulation on a 2500 points grid for instants 1,92 ms, 3,84 ms and 5,76 ms are presented in a fig. 4 and 5. The mutual influence between the microscopic (pulsation) and macroscopic motions in a two-phase system is evident.

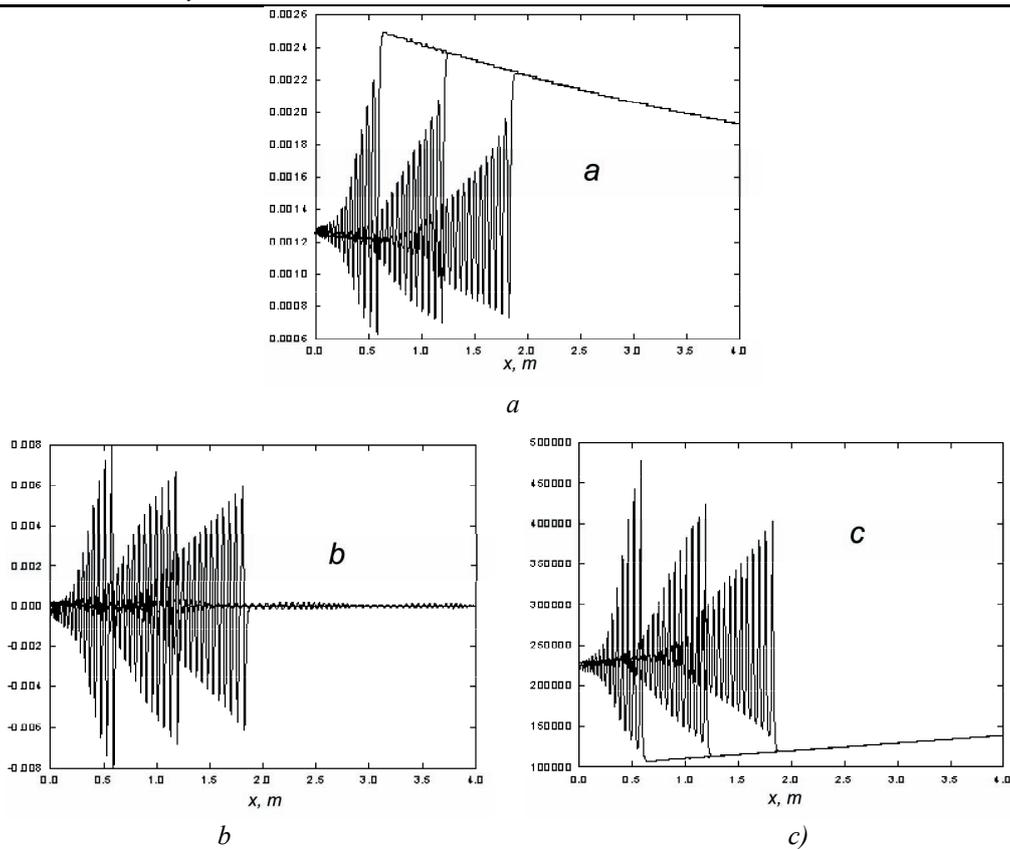


Fig. 4. Profiles of physical parameters of a two-phase medium models, obtained with use, (1.24)
 a — a gas volume fraction; b — analog of radial velocity; c — gas pressure

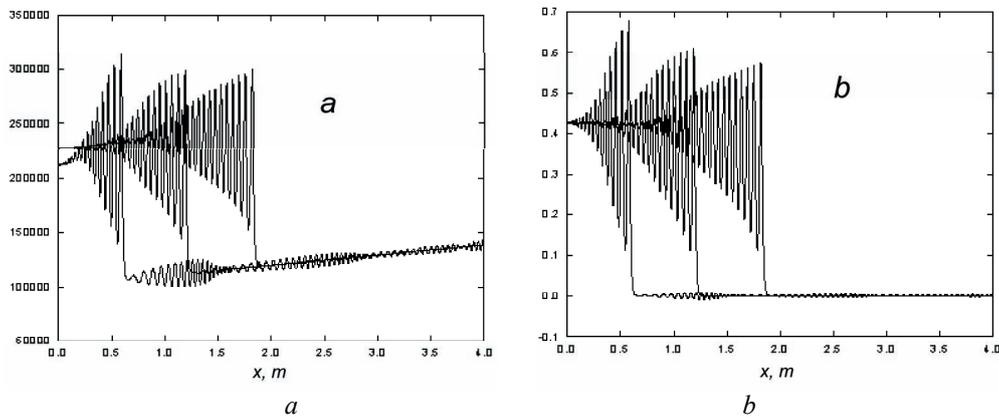


Fig. 5: profiles of physical parameters of a two-phase medium models,
 obtained using (1.24): a — liquid pressure; b — mixture velocity

In a fig. 6 the comparison between the experimental data obtained through the pressure gauge at a given position versus time and the numerical results are shown. The experimental results present the difference between instantaneous pressure and hydrostatic pressure. It is obviously good agreement for first three oscillations of large amplitude. For the following

oscillations coincidence with simulation worse, however calculated values remain within the limits of an experimental error 15 KPa. Besides, model (1.24) predicts the existence of a forerunner wave, which was really found out in the other experiment [10]. The similar outcomes, but obtained by other numerical method, are presented in work [4].

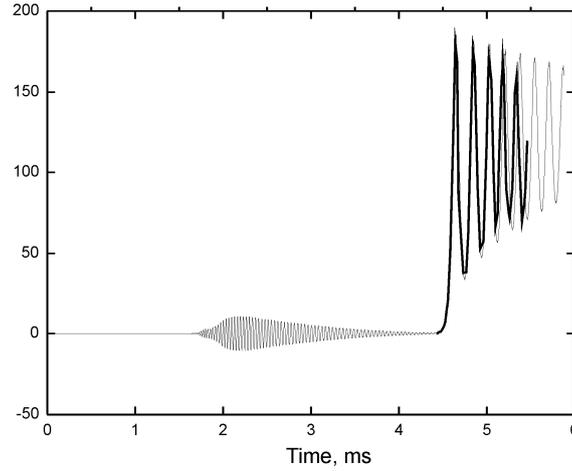


Fig. 6. Comparison between the experimental (bold line [9]) and calculated (thin line) data

2. The modified technique PPM for simulation of two-phase compressible flows with microstructure analysis

In this section, we apply the PPM method to numerical solution of discrete equations for compressible two-phase mixtures derived in [2]. At first the main points of this approach are considered.

2.1. Equations system for two-phase medium

Let's consider volume Ω , containing a two-phase medium with components Σ_1 and Σ_2 . Further two-phase mixture is considered as micro granulated structure, i. e. suppose, that

always it is possible to define a position of boundary between phases. The evolution of each phase is described by equations system of Euler:

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial t} + \nabla F^{(k)} = 0, \quad k=1,2, \quad (2.1)$$

where

$$U^{(k)} = \left(\rho^{(k)}, \rho^{(k)} \bar{u}^{(k)}, \rho^{(k)} E^{(k)} \right)^T,$$

$$F^{(k)} = \left(\rho^{(k)} \bar{u}^{(k)}, \rho^{(k)} \bar{u}^{(k)} \otimes \bar{u}^{(k)} + P^{(k)}, \left(\rho^{(k)} E^{(k)} + P^{(k)} \right) \bar{u}^{(k)} \right)^T,$$

$\rho^{(k)}$ – density, $u^{(k)}$ – velocity, $E^{(k)}$ – total energy of mass unit, $P^{(k)}$ – pressure of phase Σ_k . Each phase has the own state equation: $P^{(k)} = P^{(k)}(e^{(k)}, \rho^{(k)})$, where $e^{(k)}$ – internal energy ($e^{(k)} = E^{(k)} - \frac{1}{2} \bar{u}^{(k)} \bar{u}^{(k)}$).

Let's enter characteristic function $X^{(k)}$, $k = 1, 2$: $X^{(k)}(x, t) = 1$, if at time t coordinate x is inside a phase Σ_k , differently

$X^{(k)}(x, t) = 0$. The function $X^{(k)}$ satisfies to the following topological equation [11]:

$$\frac{\partial X^{(k)}}{\partial t} + \sigma \nabla X^{(k)} = 0, \quad (2.2)$$

where σ — velocity of interface between two phases. The equation (2.2) describes moving an interface between phases.

For arbitrary function f , we enter averaging procedures ε commuting with space and time derivative [11]:

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) &= \frac{\partial \varepsilon(f)}{\partial t}, \\ \varepsilon(\nabla f) &= \nabla \varepsilon(f)\end{aligned}\quad (2.3)$$

for which the following relations [11] are fulfilled:

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(X^{(k)}\frac{\partial f}{\partial t}\right) &= \varepsilon\left(\frac{\partial f X^{(k)}}{\partial t}\right) - \varepsilon\left(f_{\text{int}}^{(k)}\frac{\partial X^{(k)}}{\partial t}\right), \\ \varepsilon\left(X^{(k)}\nabla f\right) &= \varepsilon\left(\nabla X^{(k)}f\right) - \varepsilon\left(f_{\text{int}}^{(k)}\nabla X^{(k)}\right)\end{aligned}\quad (2.4)$$

In (2.4) $f_{\text{int}}^{(k)}$ a value of function f for a phase k on interface: if the point x_M is located on interface of phases Σ_1 and Σ_2 , then $f_{\text{int}}^{(k)}$ is a limit $f(x_P)$ at $P \rightarrow M$ and $x_P \in \Sigma_k$.

Using (2.2), (2.3), and (2.4) for functions $f = X^{(1)}U^{(1)} + X^{(2)}U^{(2)}$ and $f = X^{(1)}F^{(1)} + F^{(2)}U^{(2)}$, it is possible to receive [11]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\left(X^{(k)}\right)\right) + \varepsilon\left(\sigma\nabla X^{(k)}\right) = 0; \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon\left(X^{(k)}\rho^{(k)}\right)}{\partial t} + \nabla \varepsilon\left(X^{(k)}\rho^{(k)}\bar{u}^{(k)}\right) &= \varepsilon\left(\rho^{(k)}\left(\bar{u}^{(k)} - \sigma\right)\nabla X^{(k)}\right); \\ \frac{\partial \varepsilon\left(X^{(k)}\rho^{(k)}\bar{u}^{(k)}\right)}{\partial t} + \nabla \varepsilon\left(X^{(k)}\rho^{(k)}\bar{u}^{(k)} \times \bar{u}^{(k)} + X^{(k)}P^{(k)}\right) &= \varepsilon\left(\left(\rho^{(k)}\bar{u}^{(k)}\left(\bar{u}^{(k)} - \sigma\right) + P^{(k)}\right)\nabla X^{(k)}\right); \\ \frac{\partial \varepsilon\left(X^{(k)}\rho^{(k)}E^{(k)}\right)}{\partial t} + \nabla \varepsilon\left(X^{(k)}\rho^{(k)}E^{(k)}\bar{u}^{(k)} + X^{(k)}P^{(k)}\bar{u}^{(k)}\right) &= \\ = \varepsilon\left(\left(\rho^{(k)}E^{(k)}\left(\bar{u}^{(k)} - \sigma\right) + P^{(k)}\bar{u}^{(k)}\right)\nabla X^{(k)}\right).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Let's define a volume fraction of a phase Σ_k : $\alpha^{(k)} = \varepsilon\left(X^{(k)}\right)$, average density: $\bar{\rho}^{(k)} = \frac{\varepsilon\left(X^{(k)}\rho\right)}{\alpha^{(k)}}$,

average velocity: $\bar{u}^{(k)} = \frac{\varepsilon\left(X^{(k)}\rho u\right)}{\alpha^{(k)}\rho^{(k)}}$ etc. Then, omitting labels of average, we obtain for each phase the averaged equations:

$$\frac{\partial \alpha^{(k)}}{\partial t} + \varepsilon\left(\sigma\nabla X^{(k)}\right) = 0; \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha^{(k)}\rho^{(k)}}{\partial t} + \nabla\left[\alpha^{(k)}\rho^{(k)}\bar{u}^{(k)}\right] &= \varepsilon\left(\rho^{(k)}\left(\bar{u}^{(k)} - \sigma\right)\nabla X^{(k)}\right); \\ \frac{\partial \alpha^{(k)}\rho^{(k)}\bar{u}^{(k)}}{\partial t} + \nabla\left[\alpha^{(k)}\rho^{(k)}\bar{u}^{(k)} \times \bar{u}^{(k)} + \alpha^{(k)}P^{(k)}\right] &= \varepsilon\left(\left(\rho^{(k)}\bar{u}^{(k)}\left(\bar{u}^{(k)} - \sigma\right) + P^{(k)}\right)\nabla X^{(k)}\right); \\ \frac{\partial \alpha^{(k)}\rho^{(k)}E^{(k)}}{\partial t} + \nabla\left[\left(\alpha^{(k)}\rho^{(k)}E^{(k)} + \alpha^{(k)}P^{(k)}\right)\bar{u}^{(k)}\right] &= \varepsilon\left(\left(\rho^{(k)}E^{(k)}\left(\bar{u}^{(k)} - \sigma\right) + P^{(k)}\bar{u}^{(k)}\right)\nabla X^{(k)}\right).\end{aligned}\quad (2.8)$$

For numerical solution of equations system (2.7), (2.8), which are describing of evolution of a two-phase medium, greatest difficulties are represented in the calculation of average values of thermodynamic parameters on the interface.

Further one-dimensional case in Lagrange formulation is considered. In this approach the initial system (2.8) is splitting in several systems for each direction.

In Lagrange mass variables, taking into account, that the changing between phases is absent:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + u\frac{\partial X}{\partial s} = 0 \quad (2.9)$$

the equations system (2.7, 2.8) will look like:

$$\frac{d\alpha_m^{(k)}}{dt} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\alpha_m^{(k)}}{\rho^{(k)}}\right)}{dt} - \frac{\partial(\alpha_m^{(k)} u^{(k)})}{\partial s} &= \varepsilon \left(-u^{(k)} \frac{\partial X^{(k)}(s,t)}{\partial s} \right); \\ \frac{d(\alpha_m^{(k)} u^{(k)})}{dt} + \frac{\partial(\alpha_m^{(k)} P^{(k)})}{\partial s} &= \varepsilon \left(P^{(k)} \frac{\partial X^{(k)}(s,t)}{\partial s} \right); \\ \frac{d(\alpha_m^{(k)} E^{(k)})}{dt} + \frac{\partial(\alpha_m^{(k)} P^{(k)} u^{(k)})}{\partial s} &= \varepsilon \left(P^{(k)} u^{(k)} \frac{\partial X^{(k)}(s,t)}{\partial s} \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

where $\partial s = \rho \partial x$, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$, $\alpha_m^{(k)} = \varepsilon(X^{(k)}(s,t))$ — mass fraction.

2.2. Construction of numerical scheme

Let's assume, in each control volume C_i ($\cup_i C_i = \Omega$ computing domain) there are two not mixing up phases: Σ_1 and Σ_2 . Let's receive discrete analogy of equations system (2.10) for some fixed topology of a two-phase mixture in some control volume. Let's enter a calculated Lagrange grid $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ and consider $C_i =]s_{i-1/2}, s_{i+1/2}[$, where $s_{i+1/2} = \frac{s_i + s_{i+1}}{2}$. In C_i a state of everyone component of a two-phase medium is described by a vector:

$$W_{lag}^{(k)} = \left(\alpha_m^{(k)}, \frac{\alpha_m^{(k)}}{\rho^{(k)}}, \alpha_m^{(k)} u^{(k)}, \alpha_m^{(k)} E^{(k)} \right)^T, \quad k = 1, 2,$$

where $\alpha_m^{(1)}$ and $\alpha_m^{(2)}$ are the mass fractions of phases Σ_1 and Σ_2 , $\alpha_m^{(1)} + \alpha_m^{(2)} = 1$.

The basic stages of a considered numerical method are follows:

1. For each control volume i and for time t some partition $s_{i-1/2} = \xi_0 < \xi_1 \dots < \xi_{N(\omega)} = s_{i+1/2}$, where ω random parameter, defining given realization of a partition, is introduced. The number of interior points is equal $N(\omega) - 2$.
2. In everyone sub-grid interval $]\xi_l, \xi_{l+1}[$ the state of phases Σ_1 or Σ_2 is set by a

$$\text{vector } U_{lag}^{(1)} = \left(\frac{1}{\rho^{(1)}}, u^{(1)}, E^{(1)} \right)^T \text{ or}$$

$$U_{lag}^{(2)} = \left(\frac{1}{\rho^{(2)}}, u^{(2)}, E^{(2)} \right)^T, \text{ accordingly.}$$

The value of characteristic function $X^{(k)}$ is supposed a constant in $]\xi_l, \xi_{l+1}[$,

$$0 \leq l \leq N(\omega) - 1.$$

3. For the given realization with using the Godunov numerical scheme, the difference approximation of the equations (2.10) is written.
4. Averaging over all realizations allows a numerical solution.

Further the following notations are entered:

$$X = X^{(1)}, \quad U = U_{lag}^{(1)},$$

$$F = F_{lag}^{(1)} = \left(-u^{(k)}, P^{(k)}, u^{(k)} P^{(k)} \right)^T, \quad W = W_{lag}^{(k)}.$$

For each subdivision of control volume i the following conditions are fulfilled:

$$\varepsilon \left(\sum_{j=0}^{N(\omega)-1} (s_{j+1} - s_j) X \left(\frac{s_j + s_{j+1}}{2} \right) \right) = (\alpha_m)_i (\Delta s)_i;$$

$$\varepsilon \left(\frac{1}{\Delta s} \int_{s_{i-1/2}}^{s_{i+1/2}} XU ds \right) = W_i.$$

Let's consider expression:

$$\int_t^{t+s} \int_{C_i} X \left(\frac{dU}{dt} + \frac{\partial F}{\partial s} \right) ds dt = 0, \text{ which with tak-}$$

ing into account (2.9) can be transformed to a view:

$$\int_t^{t+s} \int_{C_i} \left(\frac{d(XU)}{dt} + \frac{\partial(XF)}{\partial s} \right) ds dt = \int_t^{t+s} \int_{C_i} F \frac{\partial X}{\partial s} ds dt. \quad (2.11)$$

For a calculation of these integrals it is necessary to notice, that the boundary between two adjacent sub-grid cells goes with a velocity of a contact discontinuity between left (U_L) and right (U_R) states. Let's designate this velocity by $\sigma(U_L, U_R)$. Since the interface boundary divides two different phases, then $U_L = U^{(1)}$ and $U_R = U^{(2)}$ or $U_L = U^{(2)}$ and $U_R = U^{(1)}$. For the given partition, there is a limited number of interior meshes. Therefore during enough small interval of time Δt , everyone sub-grid cell is increased or compressed according to solutions of Riemann problem, and interfaces move with constant velocities.

The Riemann problems on the interface of sub-grid cells are independent under condition that

2.3 Test problems

Here we present the shock tube test problems for different initial conditions as in [2]. All the tests were done with a uniform mesh of 200 cells.

In first test the left and right of the shock tube contain fluids with a very strong pressure difference. Fluids have uniform volume fraction initial conditions. The gas and liquid densities are 50 and 1000 kg/m³ respectively, in the entire domain. The initial pressure in the high-pressure chamber (left) is 10⁹ Pa and 10⁵ Pa in the low-pressure chamber (right). The materials are governed by the stiffened gas equation of state: $P = (\gamma - 1)\rho e - \gamma P_\infty$. The parameters of the gas are $\gamma = 1.4$ and $P_\infty = 0$ while for the liquid they are $\gamma = 4.4$ and $P_\infty = 6 \times 10^8$ Pa. The pressure and velocity relaxation [2] procedures were not used. The results are shown in fig. 7: each fluid evolves in a constant cross-section duct.

In second run the same test with the relaxation procedures was calculated. The fluids had an infinite drag coefficient and the pressure relaxation is instantaneous. The results are presented in fig. 8. The volume fraction varies across the rare fraction and shock waves.

For the next run the initial volume fractions were changed. The left part of the shock tube

the time interval Δt satisfies to a Courant relation:

$$|\lambda_{\max}| \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.12)$$

where λ_{\max} a maximum sound velocity, $\Delta \xi$ a minimum width of a sub-grid interval.

To find a numerical solution of a system (2.11) it is necessary to consider $N(\omega) - 1$ of interior areas in control volume C_i . As the changing between phases is absent, on a Lagrange grid the position of the interface boundaries between phases T_j , $j = 0 \dots N(\omega)$ does not vary.

Because of the limited volume of paper, we do not reduce here the numerical circuit realized in Lagrange case; details can be found in [12].

contained the same liquid as before with initial pressure of 2×10^8 Pa and an initial volume fraction of $\alpha_l = 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon = 10^{-6}$). The right part was filled with a gas at 10⁵ Pa an initial volume fraction of $\alpha_g = 1 - \varepsilon$. These conditions correspond to an almost pure liquid on the left high-pressure chamber and a nearly pure gas on the low-pressure right chamber. The results are shown in fig. 9.

The previous test was calculated also without using any relaxation procedure. In the absence of the relaxation terms each fluid retains its own pressure, velocity, etc, because there is no interaction between fluids. The results are displayed in fig. 10. The fluids have very different profiles because they do not have the same initial conditions, or equation of state, and they evolve in different volumes. The interesting result is that the coupling between phases is reached at the interface (see the magnified view of fig. 11).

Obtained results mean that the adapted PPM methodic for numerical two-phase model [2] allows dealing with two-phase mixtures into non-equilibrium velocities as well as interface problems separating pure or nearly pure materials.

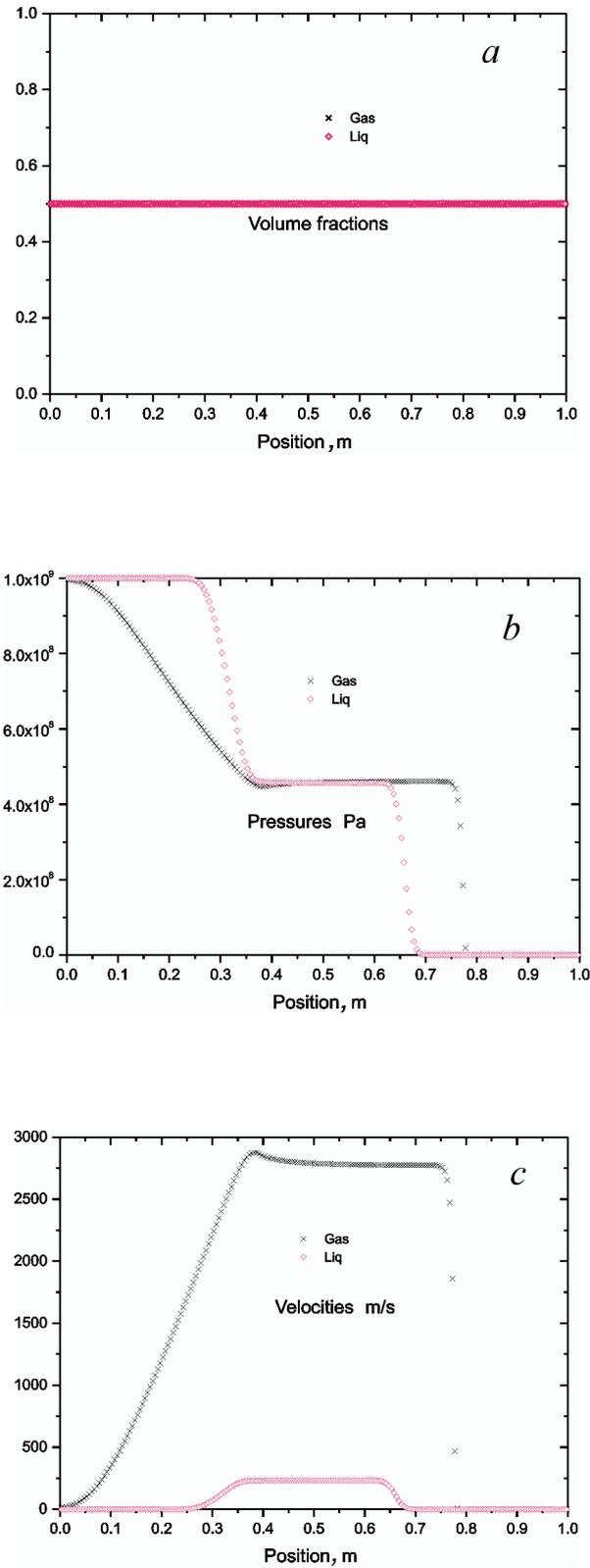


Fig. 7. Shock tube with two mixtures and uniform volume fraction:
a — fraction; *b* — pressure; *c* — velocity

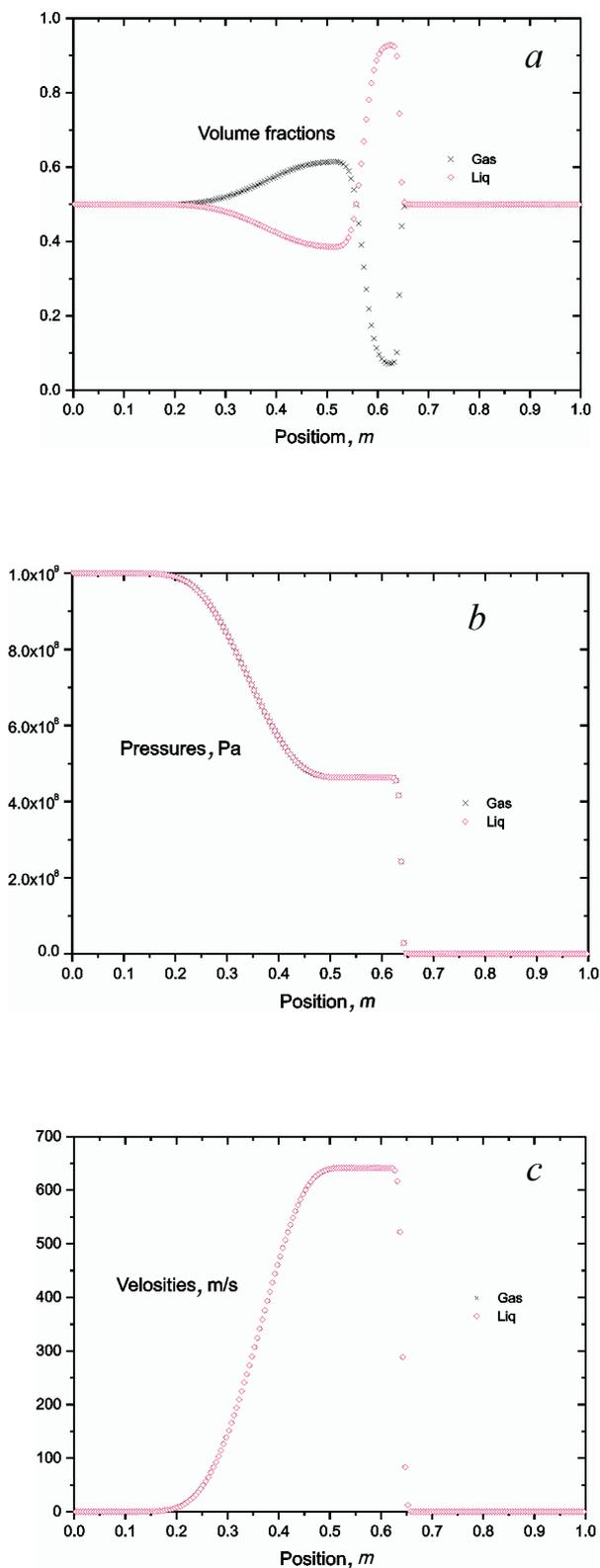


Fig. 8. Shock tube with well-mixed materials:
a — fraction; *b* — pressure; *c* — velocity

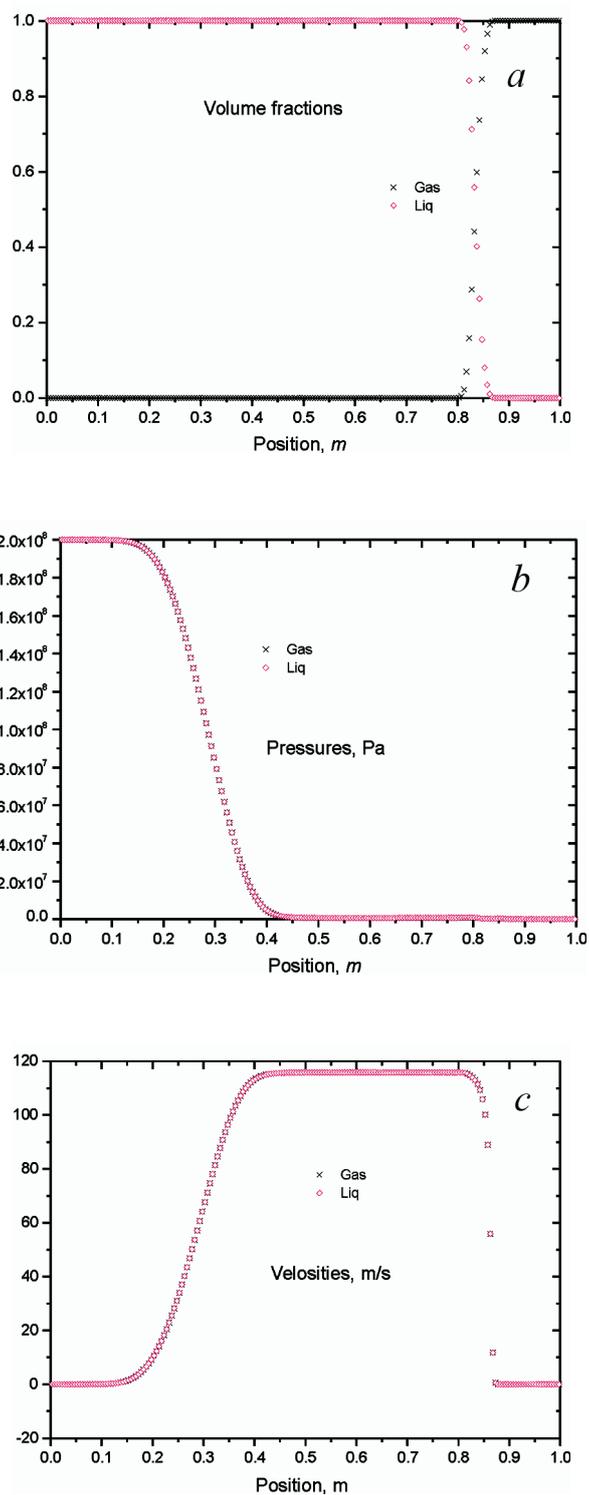


Fig. 9. Shock tube with interface separating nearly pure materials and with relaxation:
a — volume fraction; *b* — pressure; *c* — velocity

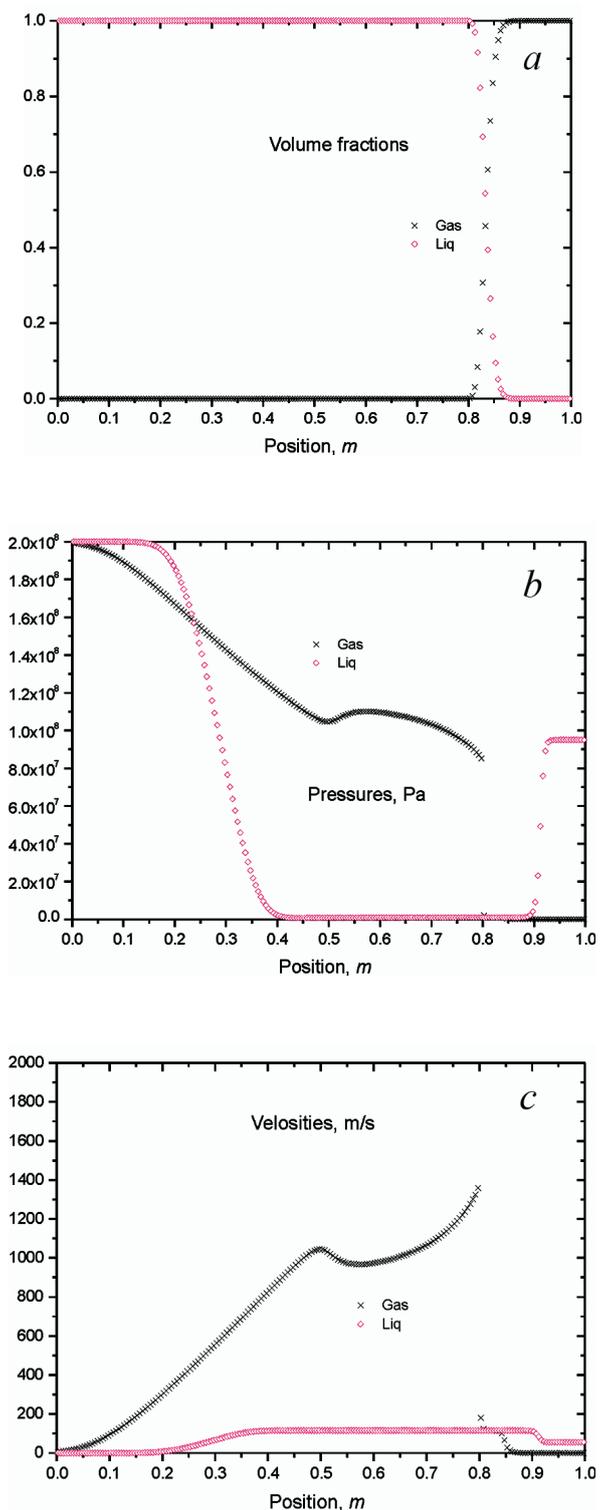


Fig. 10. Shock tube with interface separating nearly pure materials and without relaxation:
a — volume fraction; *b* — pressure; *c* — velocity

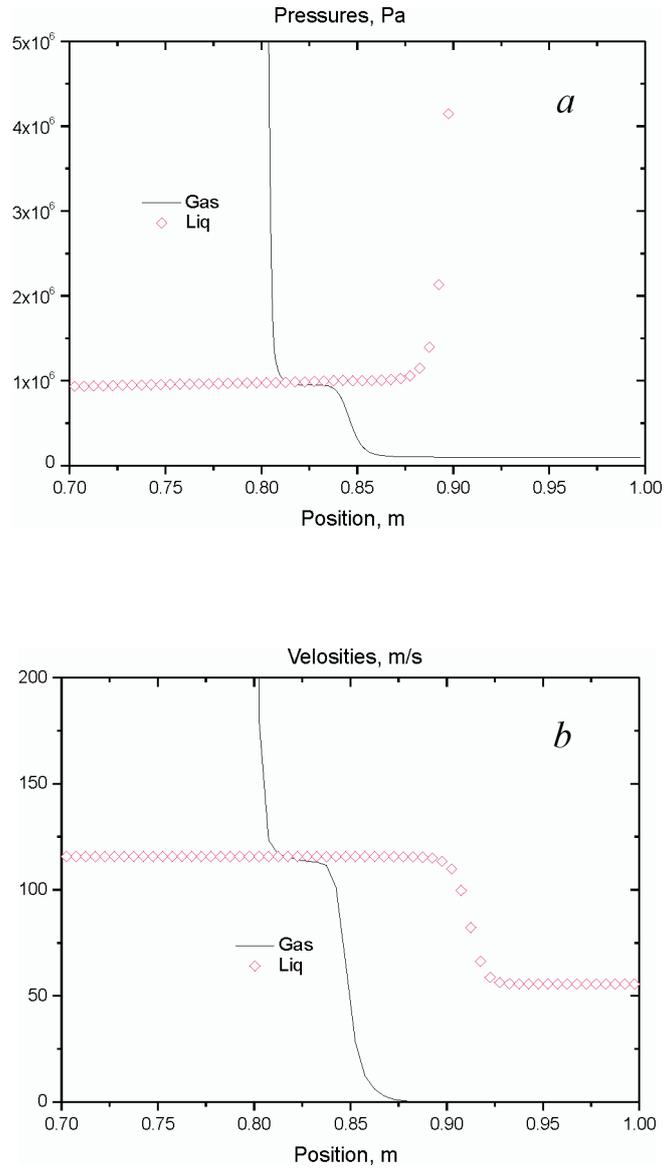


Fig. 11. Shock tube with interface separating nearly pure materials and without relaxation (in details): *a* — pressure; *b* — velocity

Conclusions

Despite of relative complexity of PPM realization algorithm, the results of numerical calculations of two-phase flows at the presence of strong shock waves and various discontinuities show, that the PPM method allows to precisely describe the behavior of breaking solutions.

Essential advantage of the modified PPM technique is the possibility to introduce in the calculated scheme the various physical processes, and also possibility of method generalization on a case of two or three directions by splitting.

More precisely:

Adapted for calculation of two-phase mixtures the technique of piecewise parabolic approximation [3] allows to solve gas dynamic

problems, at which there are sharp ruptures of profiles of thermodynamic magnitudes and contact ruptures.

The generalization on two-dimensional and three-dimensional cases can be carried out with use of a method of decomposition on directions. The solution of a many-dimensional task is reduced to a sequential solution of one-dimensional tasks along the appropriate directions. Thus the solution of a one-dimensional task for one direction is used as the entry condition for a solution of a one-dimensional task for other direction.

From comparison with outcomes obtained in works [2] and [4] it is possible to make a conclusion about applicability of the modified technique PPM to account for two-phase flows.

References

1. Saurel, R., and R. Abgrall. A multiphase Godunov method for multifluid and multiphase flows // J. Comp. Phys. 1999. № 150. P. 425–467.
2. Abgrall, R., and R. Saurel. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures // J. Comput. Phys. 2003. № 186. P. 361–396.
3. Woodward, P.R., and P. Collela. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical
4. Simulations // J. Comp. Phys. 1984. Vol. 54, no. 1.
5. Gavriluk, S. and R. Saurel. Mathematical and Numerical modeling of Two-Phase Compressible Flows with Micro-Inertia // J. Comp. Phys. 2002. № 175. P. 326–360.
6. Plesset, M.S., and A. Prosperetti. Bubble dynamics and cavitation // Ann. Rev. Fluid Mech. 1977. № 9. P. 145.
7. Chudanov, V.V., N.V. Elkina, A.A. Leonov. Modeling of super-sonic flows by piecewise parabolic approximation. — (Preprint / NSI RAS (IBRAE RAS), № IBRAE-2002-06). — Moscow: NSI RAS (IBRAE RAS), 2003.
8. Abgrall, R. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: A quasi conservative approach // J. Comput. Phys. 1996. № 125. P. 150–160.
9. Lamb, H. Hydrodynamics. — Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1932.
10. Kameda, M., N. Shimaura, F. Higashino, Y. Matsumoto. Shock waves in uniform bubbly flow // Phys. Fluids. 1998. №10 (10). P. 2661.
11. Kerdynskii, V.K. Hydrodynamics of explosion: experiment and models. — Novosibirsk: Science, 2000.
12. Drew, D.A., S.L. Passman. Theory of Multicomponent fluids // Applied Mathematical Sciences. — New work: Springer, 1998. P. 135.
13. Chudanov, V.V., A.A. Leonov. Modeling of two-phase compressible fluxes by piecewise parabolic approximation method. (Preprint / NSI RAS, № IBRAE-2003-18). — Moscow: NSI RAS, 2003.

Применение нелинейных разностных схем с коррекцией потоков для расчетов двухфазных сжимаемых газодинамических течений

В. В. Чуданов, А. А. Леонов

Введение

В настоящее время существует целый ряд различных математических моделей и реализующих их численных схем, описывающих поведение двухфазных сжимаемых сред. В данной работе приводятся результаты численных расчетов двухфазных сжимаемых газодинамических течений, выполненных с использованием Русановской схемы [3], TVD [4] схемы и адаптированного к расчетам двухфазных сред

метода кусочно-параболической аппроксимации (PPM) [1, 2].

При проведении расчетов с использованием схемы Русанова применялась математическая модель двухфазной среды, которая содержит два входных параметра, определяющих граничные условия на интерфейсной границе раздела фаз: интерфейсную скорость V_i и интерфейсное давление P_i [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g P_g)}{\partial x} = P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \lambda \times (u_l - u_g); \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} + \frac{\partial (u_g (\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g P_g))}{\partial x} = P_i V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \mu \times P_i \times (P_g - P_l) + \lambda \times V_i \times (u_l - u_g); \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l P_l)}{\partial x} = -P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - \lambda \times (u_l - u_g); \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l E_l}{\partial t} + \frac{\partial (u_l (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l P_l))}{\partial x} = -P_i V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - P_i \times V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - \mu \times P_i \times (P_g - P_l) - \lambda \times V_i \times (u_l - u_g), \end{array} \right. \quad (1.0)$$

где $\alpha_g + \alpha_l = 1$; α_K — объемная доля; ρ_K — плотность; P_K — давление; u_K — скорость; $E_K = e_K + 1/2 u_K^2$ — внутренняя энергия, $K = g, l$; λ и μ — коэффициенты релаксации скорости и давления, соответственно.

Индекс g относится к термодинамическим величинам, описывающим состояние газовой фазы, индекс l — жидкой. Переменные, описывающие состояние смеси на границе раздела жидкости и газа имеют индекс i . Значение давления на границе раздела сред оценивается следующим образом:

$$P_i = \sum_k \alpha_k P_k, \text{ то есть равным давлением}$$

смеси. В качестве оценки интерфейсной скорости берется скорость центра масс:

$$V_i = \frac{\sum_k \alpha_k \rho_k u_k}{\sum_k \alpha_k \rho_k}. \text{ Именно с этой скоростью}$$

распространяются участки среды после релаксации всех неравновесных процессов в системе.

Эта математическая модель является гиперболической, собственные значения которой равны:

$$V_i; u_g + c_g; u_g - c_g; u_g; u_l + c_l; \\ u_l - c_l; u_l;$$

$$\text{где } c_K^2 = \frac{P_K - \frac{\partial e_K}{\partial \rho_K} \Big|_{P_K}}{\frac{\partial e_K}{\partial P_K} \Big|_{P_K}}; K = g, l.$$

При проведении расчетов методом PPM и с применением TVD - схемы использовалась одна из наиболее известных в последние годы математических моделей, учитывающая топологическую структуру двухфазной среды и описанная в работе [4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon(X^{(k)})) + \varepsilon(\sigma \nabla X^{(k)}) = 0; \\ \frac{\partial \varepsilon(X^{(k)} \rho^{(k)})}{\partial t} + \nabla \varepsilon(X^{(k)} \rho^{(k)} \bar{u}^{(k)}) = \varepsilon(\rho^{(k)} (\bar{u}^{(k)} - \sigma) \nabla X^{(k)}); \\ \frac{\partial \varepsilon(X^{(k)} \rho^{(k)} \bar{u}^{(k)})}{\partial t} + \nabla \varepsilon(X^{(k)} \rho^{(k)} \bar{u}^{(k)} \times \bar{u}^{(k)} + X^{(k)} P^{(k)}) = \varepsilon((\rho^{(k)} \bar{u}^{(k)} (\bar{u}^{(k)} - \sigma) + P^{(k)}) \nabla X^{(k)}); \\ \frac{\partial \varepsilon(X^{(k)} \rho^{(k)} E^{(k)})}{\partial t} + \nabla \varepsilon(X^{(k)} \rho^{(k)} E^{(k)} \bar{u}^{(k)} + X^{(k)} P^{(k)} \bar{u}^{(k)}) = \\ = \varepsilon((\rho^{(k)} E^{(k)} (\bar{u}^{(k)} - \sigma) + P^{(k)} \bar{u}^{(k)}) \nabla X^{(k)}). \end{array} \right.$$

где $k = 1, 2$; $\rho^{(k)}$ — плотность; $u^{(k)}$ — скорость; $E^{(k)}$ — полная энергия единицы массы; $P^{(k)}$ — давление, $P^{(k)} = P^{(k)}(e^{(k)}, \rho^{(k)})$ — уравнение состояния фазы k ; $e^{(k)}$ — внутренняя энергия ($e^{(k)} = E^{(k)} - \frac{1}{2} u^{(k)} u^{(k)}$); $X^{(k)}(x, t)$ — характеристическая функция: $X^{(k)}(x, t) = 1$, если в момент времени t координата x находится внутри фазы k , иначе $X^{(k)}(x, t) = 0$; σ — скорость границы раздела между двумя фазами; ε — процедура усреднения, коммутирующая с пространственными и временными производными произвольной функции f [4].

Если определить объемную долю фазы k : $\alpha^{(k)} = \varepsilon(X^{(k)})$, среднюю плотность:

$$\bar{\rho}^{(k)} = \frac{\varepsilon(X^{(k)} \rho)}{\alpha^{(k)}}, \text{ среднюю скорость: } \bar{u}^{(k)} = \frac{\varepsilon(X^{(k)} \rho \bar{u})}{\alpha^{(k)} \rho^{(k)}} \text{ и т. д., то, опуская обозначения среднего, для каждой фазы можно получить следующие усредненные уравнения:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha^{(k)}}{\partial t} + \varepsilon (\sigma \nabla X^{(k)}) = 0; \\ \frac{\partial \alpha^{(k)} \rho^{(k)}}{\partial t} + \nabla [\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \bar{u}^{(k)}] = \varepsilon (\rho^{(k)} (\bar{u}^{(k)} - \sigma) \nabla X^{(k)}); \\ \frac{\partial \alpha^{(k)} \rho^{(k)} \bar{u}^{(k)}}{\partial t} + \nabla [\alpha^{(k)} \rho^{(k)} \bar{u}^{(k)} \times \bar{u}^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)}] = \varepsilon ((\rho^{(k)} \bar{u}^{(k)} (\bar{u}^{(k)} - \sigma) + P^{(k)}) \nabla X^{(k)}); \\ \frac{\partial \alpha^{(k)} \rho^{(k)} E^{(k)}}{\partial t} + \nabla [(\alpha^{(k)} \rho^{(k)} E^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)}) \bar{u}^{(k)}] = \varepsilon ((\rho^{(k)} E^{(k)} (\bar{u}^{(k)} - \sigma) + P^{(k)} \bar{u}^{(k)}) \nabla X^{(k)}). \end{array} \right. (2.0)$$

При построении численной схемы основную трудность представляет аппроксимация средних значений неконсервативных членов. В модели Abgrall & Saurel [4] эти величины вычисляются автоматически при усреднении по различным топологическим реализациям двухфазной среды в каждой расчетной ячейке. Эта модель учитывает микроструктуру двухкомпонентной смеси и позволяет рассчитывать не только прохождение ударных волн в двухфазной среде, поведение однородных двухфазных смесей, кавитацию в жидкой фазе, эволюцию интерфейсной границы между двумя сжимаемыми средами, но и прохождение ударной волны через разрывный профиль объемной доли в двухфазной смеси.

Основными достоинствами применяемой модели являются:

- 1) точная аппроксимация уравнений, описывающих эволюцию двухфазной среды, включая аппроксимацию неконсервативных членов;
- 2) определение интерфейсных параметров, присутствующих в правых частях уравнений;
- 3) определение релаксационных параметров.

Получающаяся в результате численная схема не содержит свободных параметров.

В первом разделе представлено краткое описание применяемых методов расчета, во втором — результаты тестовых расчетов, выполненных различными методами. В заключение приводятся некоторые соображения о перспективах применения рассматриваемых методов для расчета эволюции двухфазных сжимаемых сред.

1. Описание методов расчета двухфазных сжимаемых сред

1.1. Схема Русанова

Решение системы (1.0) находится при помощи последовательного применения операторов:

$$U_i^{n+1} = L_s^{\Delta t} L_h^{\Delta t} U_i^n,$$

где $U = (\alpha \rho, \alpha \rho u, \alpha \rho E)^T$; $L_h^{\Delta t}$ — гиперболический оператор, содержащий неконсервативные члены; $L_s^{\Delta t}$ — интегральный оператор, содержащий релаксационные члены.

Численное решение уравнения адвекции для объемной доли находится с использованием принципа сохранения постоянных значений скорости и давления при их однородном начальном распределении.

Рассмотрим гиперболический оператор системы (1.0). Первые четыре уравнения системы (оставшиеся три уравнения представляют идентичную систему уравнений) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} &= H(U) \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

где $F = (\alpha \rho u, \alpha \rho u^2 + \alpha P, u(\alpha \rho E + \alpha P))^T$, $H = (0, P_i, P_i V_i)^T$.

Численная схема Годунова для аппроксимации системы (1.1.1) имеет вид:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) + \Delta t H(U_i^n) \Delta, \quad (1.1.2)$$

где Δ — численная аппроксимация производной $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$. Величины консервативного потока на границах ячеек вычислялись по формуле Русанова [3]:

$$F_{i+1/2}^n = F(U_i, U_{i+1}) = \frac{1}{2} (F_i + F_{i+1} - S_{i+1/2} (U_{i+1} - U_i)), \quad (1.1.3)$$

где $S_{i+1/2} = \max\{|u_i + c_i|, |u_i - c_i|, |u_{i+1} + c_{i+1}|, |u_{i+1} - c_{i+1}|\}$ (c — скорость звука). Величина Δ и численное решение уравнения адвекции для объемной доли находятся с использованием принципа сохранения постоянных значений скорости и давления при их однородном начальном распределении и равны, соответственно [3]:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \frac{\alpha_{i+1}^n - \alpha_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{и} \\ \alpha_i^{n+1} &= \alpha_i^n - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[u_i^n (\alpha_{i+1}^n - \alpha_{i-1}^n) - S_{i+1/2} (\alpha_{i+1}^n - \alpha_i^n) + S_{i-1/2} (\alpha_i^n - \alpha_{i-1}^n) \right]. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Численная схема (1.1.2–1.1.4) является схемой первого порядка. Для получения схемы второго порядка в каждой расчетной ячейке для каждого термодинамического параметра $W_i^n = (\alpha_g, \rho_g, u_g, p_g, \rho_l, u_l, p_l)^T$ вводятся ограниченные наклоны δW_i^n . Для нахождения наклонов $(\Delta f)_i$ профиля термодинамического параметра f в i -й ячейке применялся UNO (uniformly nonoscillatory) ограничитель:

$$(\Delta f)_i = 0.5 \times (\text{sign}(\Delta_i - 0.5 \times d\Delta_{i+1}) + \text{sign}(\Delta_{i-1} + 0.5 \times d\Delta_i)) \times \min(|\Delta_i - 0.5 \times d\Delta_{i+1}|, |\Delta_{i-1} + 0.5 \times d\Delta_i|),$$

где

$$\Delta_i = f_{i+1} - f_i;$$

$$d\Delta_i = 0.5 \times [\text{sign}(f_i - 2 \times f_{i-1} + f_{i-2}) + \text{sign}(f_{i+1} - 2 \times f_i + f_{i+2})] \times \min(|f_i - 2 \times f_{i-1} + f_{i-2}|, |f_{i+1} - 2 \times f_i + f_{i+2}|).$$

На шаге предиктор вычисляются значения термодинамических параметров на границах ячеек слева «-» и справа «+»:

$$W_{i+1/2,-}^{n+1/2} = W_i^n + \frac{1}{2} \delta W_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A(W_i^n) \delta W_i^n;$$

$$W_{i-1/2,+}^{n+1/2} = W_i^n - \frac{1}{2} \delta W_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A(W_i^n) \delta W_i^n,$$

$$\text{где } A(W) = \begin{pmatrix} V_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_g}{\alpha_g}(V_i - u_g) & u_g & \rho_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{P_g - P_i}{\alpha_g \rho_g} & 0 & u_g & \frac{1}{\rho_g} & 0 & 0 & 0 \\ (V_i - u_g) \frac{P_i(\gamma_g - 1) + P_g}{\alpha_g} & 0 & \gamma_g P_g & u_g & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_l}{\alpha_l}(V_i - u_l) & 0 & 0 & 0 & u_l & \rho_l & 0 \\ \frac{P_l - P_i}{\alpha_l \rho_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_l & \frac{1}{\rho_l} \\ (V_i - u_l) \frac{P_i(\gamma - 1) + P_l + \gamma_l \pi}{\alpha_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_l (P_l + \pi) & u_l \end{pmatrix}.$$

Значения консервативных переменных на $(n + 1/2)$ -м временном слое находятся с использованием найденных значений $W_{i\pm 1/2, \pm}^{n+1/2}$. На шаге корректор вычисляется решение на $(n + 1)$ -м временном слое:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}) + \Delta t H(U_i^{n+1/2}) \Delta, \quad (1.1.5)$$

где

$$\Delta_i = \frac{\alpha_{i+1}^{n+1/2} - \alpha_{i-1}^{n+1/2}}{2\Delta x}, \quad (1.1.6)$$

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[u_i^n (\alpha_{i+1}^{n+1/2} - \alpha_{i-1}^{n+1/2}) - S_{i+1/2} (\alpha_{i+1}^{n+1/2} - \alpha_i^{n+1/2}) + S_{i-1/2} (\alpha_i^{n+1/2} - \alpha_{i-1}^{n+1/2}) \right]. \quad (1.1.7)$$

1.2. Численная реализация математической модели, описывающей двухфазную среду с учетом топологической микроструктуры

Численная аппроксимация системы (2.0) для фазы $k = 1$ имеет вид:

$$\frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon (\sigma \nabla X^{(1)}) = 0; \quad (1.2.1)$$

$$\frac{d}{dt} (\alpha^{(1)} U^{(1)}) + \frac{\varepsilon (XF)_{i+1/2} - \varepsilon (XF)_{i-1/2}}{\Delta x} = \varepsilon \left(F^{lag} \frac{\partial X}{\partial x} \right)_i, \quad (1.2.2)$$

где $U^{(1)} = (\rho^{(1)}, \rho^{(1)} u^{(1)}, \rho^{(1)} E^{(1)})^T$; $F = (\rho^{(1)} u^{(1)}, \rho^{(1)} u^{(1)} \times u^{(1)} + p^{(1)}, u^{(1)} (\rho^{(1)} E^{(1)} + p^{(1)}))^T$.

Величины конвективного потока F на границах ячеек вычисляются при помощи римановского солвера [5], который позволяет определять скорость контактного разрыва σ

для начальных левого U_L и правого U_R состояний. Лагранжев поток F^{lag} определяется из выражения:

$$F^{\text{lag}} = F^{\text{lag}}(U_L, U_R) = F(U_L^-) - \sigma(U_L, U_R)U_L^- = F(U_R^+) - \sigma(U_L, U_R)U_R^+,$$

где ”+“ означает состояние справа от контактного разрыва, ”-“ означает состояние слева от контактного разрыва.

Средняя величина конвективного потока из (1.2.2) вычисляется следующим образом [4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon(XF)_{i+1/2} = & \max(\alpha_i^{(1)} - \alpha_{i+1}^{(1)}, 0)F(U_i^{(1)}, U_{i+1}^{(2)})(\beta_{i+1/2}^{(1,2)})^+ + \min(\alpha_i^{(1)}, \alpha_{i+1}^{(1)})F(U_i^{(1)}, U_{i+1}^{(1)}) + \\ & + \max(\alpha_i^{(2)} - \alpha_{i+1}^{(2)}, 0)F(U_i^{(2)}, U_{i+1}^{(1)})(\beta_{i+1/2}^{(2,1)})^-, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

где

$$(\beta_{i+1/2}^{(p,l)})^+ = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma(U_i^{(p)}, U_{i+1}^{(l)}) \geq 0 \\ 0 & \text{if } \sigma(U_i^{(p)}, U_{i+1}^{(l)}) < 0 \end{cases}; \quad (\beta_{i+1/2}^{(p,l)})^- = \begin{cases} 0 & \text{если } \sigma(U_i^{(p)}, U_{i+1}^{(l)}) \geq 0; \\ 1 & \text{если } \sigma(U_i^{(p)}, U_{i+1}^{(l)}) < 0. \end{cases}$$

Средний лагранжев поток находится из выражения [4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(F^{\text{lag}} \frac{\partial X}{\partial x}\right) = & \left(\begin{aligned} & -\max(\alpha_i^{(1)} - \alpha_{i+1}^{(1)}, 0)F^{\text{lag}}(U_i^{(1)}, U_{i+1}^{(2)})(\beta_{i+1/2}^{(1,2)})^- + \max(\alpha_i^{(2)} - \alpha_{i+1}^{(2)}, 0)F^{\text{lag}}(U_i^{(2)}, U_{i+1}^{(1)})(\beta_{i+1/2}^{(2,1)})^- - \\ & -\max(\alpha_{i-1}^{(1)} - \alpha_i^{(1)}, 0)F^{\text{lag}}(U_{i-1}^{(1)}, U_i^{(2)})(\beta_{i-1/2}^{(1,2)})^+ + \max(\alpha_{i-1}^{(2)} - \alpha_i^{(2)}, 0)F^{\text{lag}}(U_{i-1}^{(2)}, U_i^{(1)})(\beta_{i-1/2}^{(2,1)})^+ + \Lambda_i(F^{\text{lag}}(U_i^{(1)}, U_i^{(2)}) - F^{\text{lag}}(U_i^{(2)}, U_i^{(1)})) \end{aligned} \right), \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

где $\Lambda_i = \frac{\varepsilon(N_{\text{int}})}{\Delta x}$ — среднее число внутренних интерфейсов в i -й ячейке.

Численная аппроксимация уравнения переноса для объемной доли $\alpha^{(1)}$ имеет вид [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\alpha_i^{(1)} + \frac{1}{\Delta x} \left[\begin{aligned} & -\max(\alpha_i^{(1)} - \alpha_{i+1}^{(1)}, 0)\sigma(U_i^{(1)}, U_{i+1}^{(2)})(\beta_{i+1/2}^{(1,2)})^- + \max(\alpha_i^{(2)} - \alpha_{i+1}^{(2)}, 0)\sigma(U_i^{(2)}, U_{i+1}^{(1)})(\beta_{i+1/2}^{(2,1)})^- - \\ & -\max(\alpha_{i-1}^{(1)} - \alpha_i^{(1)}, 0)\sigma(U_{i-1}^{(1)}, U_i^{(2)})(\beta_{i-1/2}^{(1,2)})^+ + \max(\alpha_{i-1}^{(2)} - \alpha_i^{(2)}, 0)\sigma(U_{i-1}^{(2)}, U_i^{(1)})(\beta_{i-1/2}^{(2,1)})^+ \end{aligned} \right] + \\ + \Lambda_i(\sigma(U_i^{(1)}, U_i^{(2)}) - \sigma(U_i^{(2)}, U_i^{(1)})) = 0. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Средняя величина лагранжевого потока $\varepsilon\left(F^{\text{lag}} \frac{\partial X}{\partial x}\right)_i$ может быть представлена в виде суммы вкладов внешних и внутренних интерфейсов [4]:

$$\varepsilon\left(F^{\text{lag}} \frac{\partial X}{\partial x}\right)_i = \varepsilon\left(F^{\text{lag}} \frac{\partial X}{\partial x}\right)_{i,\text{bound}} + \varepsilon\left(F^{\text{lag}} \frac{\partial X}{\partial x}\right)_{i,\text{relax}},$$

где

$$\varepsilon\left(F^{\text{lag}} \frac{\partial X}{\partial x}\right)_{i,\text{relax}} = \Lambda_i(F^{\text{lag}}(U_i^{(1)}, U_i^{(2)}) - F^{\text{lag}}(U_i^{(2)}, U_i^{(1)})),$$

$$\varepsilon \left(F^{\text{lag}} \frac{\partial X}{\partial x} \right)_{i, \text{bound}} = \begin{pmatrix} -\max(\alpha_i^{(1)} - \alpha_{i+1}^{(1)}, 0) F^{\text{lag}}(U_i^{(1)}, U_{i+1}^{(2)}) (\beta_{i+1/2}^{(1,2)})^- + \max(\alpha_i^{(2)} - \alpha_{i+1}^{(2)}, 0) F^{\text{lag}}(U_i^{(2)}, U_{i+1}^{(1)}) (\beta_{i+1/2}^{(2,1)})^- \\ -\max(\alpha_{i-1}^{(1)} - \alpha_i^{(1)}, 0) F^{\text{lag}}(U_{i-1}^{(1)}, U_i^{(2)}) (\beta_{i-1/2}^{(1,2)})^+ + \max(\alpha_{i-1}^{(2)} - \alpha_i^{(2)}, 0) F^{\text{lag}}(U_{i-1}^{(2)}, U_i^{(1)}) (\beta_{i-1/2}^{(2,1)})^+ \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы (1.2.2) находится с применением метода расщепления [4].

Первый шаг:
$$\frac{(\alpha^{(1)} U^{(1)})^{n+1/2} - (\alpha^{(1)} U^{(1)})^n}{\Delta t} + \frac{\varepsilon(XF)_{i+1/2} - \varepsilon(XF)_{i-1/2}}{\Delta x} = \varepsilon \left(F^{\text{lag}} \frac{\partial X}{\partial x} \right)_{i, \text{bound}} \quad (1.2.6)$$

Второй шаг:
$$\frac{(\alpha^{(1)} U^{(1)})^{n+1} - (\alpha^{(1)} U^{(1)})^{n+1/2}}{\Delta t} = \varepsilon \left(F^{\text{lag}} \frac{\partial X}{\partial x} \right)_{i, \text{relax}}. \quad (1.2.7)$$

1.3. Римановский солвер

Общее точное решение задачи Римана для уравнений газовой динамики с двучленным уравнением состояния состоит из элементарных решений (ударная волна, тангенциальный разрыв, волна разряжения), которые отделены друг от друга областями с постоянными значениями параметров (рис. 1), так как такие состояния также являются

точными решениями уравнений газовой динамики [5]. Все возможные конфигурации решения представлены в таблице. В ней решение для произвольного луча ξ в плоскости (x, t) , где $-\infty < \xi < +\infty$, обозначено $Z = Z(\xi) = [\rho(\xi), u(\xi), \varepsilon(\xi), p(\xi)]^T$.

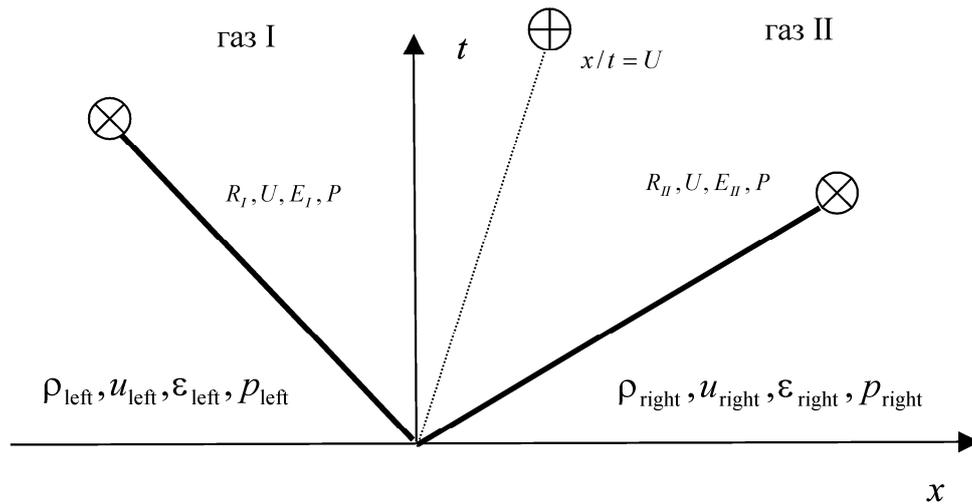


Рис. 1. Распад произвольного разрыва:

⊗ — ударная волна или волна разряжения; ⊕ — тангенциальный разрыв

Таблица. Конфигурации точного решения задачи Римана
 о распаде произвольного газодинамического разрыва [5]

Тип течения	Левая сторона	Правая сторона
Ударная волна (УВ)	Если $U > \xi$ и $P \geq P_{\text{left}}$, то $W_I = u_{\text{left}} - m_{\text{left}} / \rho_{\text{left}}$, W_I – скорость УВ, m_{left} – поток газа через УВ (см. 1.3.1). Если $\xi > W_I$, то $Z = [R_I, U, E_I, P]^T$. Если $\xi \leq W_I$, то $Z = [\rho_{\text{left}}, u_{\text{left}}, \varepsilon_{\text{left}}, \rho_{\text{left}}]^T$.	Если $U < \xi$ и $P \geq P_{\text{right}}$, то $W_{II} = u_{\text{right}} + m_{\text{right}} / \rho_{\text{right}}$, W_{II} – скорость УВ, m_{right} – поток газа через УВ (см. 1.3.2). Если $\xi < W_{II}$, то $Z = [R_{II}, U, E_{II}, P]^T$. Если $\xi \geq W_{II}$, то $Z = [\rho_{\text{right}}, u_{\text{right}}, \varepsilon_{\text{right}}, \rho_{\text{right}}]^T$.
Волна разрежения (ВР)	Если $U > \xi$ и $P < P_{\text{left}}$, то $W_I = u_{\text{left}} - c_{\text{left}}$, $W_I^* = U - c_I^*$ – границы ВР. Если $\xi > W_I^*$, то $Z = [R_I, U, E_I, P]^T$. Если $\xi < W_I$, то $Z = [\rho_{\text{left}}, u_{\text{left}}, \varepsilon_{\text{left}}, \rho_{\text{left}}]^T$. Если $W_I \leq \xi = \xi^* \leq W_I^*$, то $Z = [\rho^*, u^*, \varepsilon^*, p^*]^T$ (см. 1.3.3–1.3.7)	Если $U < \xi$ и $P < P_{\text{right}}$, то $W_{II} = u_{\text{right}} + c_{\text{right}}$, $W_{II}^* = U + c_{II}^*$ – границы ВР. Если $\xi < W_{II}^*$, то $Z = [R_{II}, U, E_{II}, P]^T$. Если $\xi > W_{II}$, то $Z = [\rho_{\text{right}}, u_{\text{right}}, \varepsilon_{\text{right}}, \rho_{\text{right}}]^T$. Если $W_{II}^* \leq \xi = \xi^* \leq W_{II}$, то $Z = [\rho^*, u^*, \varepsilon^*, p^*]^T$ (см. 1.3.8–1.3.12).

Для левой ударной волны поток газа через нее определяется следующим образом:

$$m_{\text{left}} = \sqrt{\frac{P_{\text{left}}}{2} [(P + \pi_{\text{left}})(\gamma_{\text{left}} + 1) + (P_{\text{left}} + \pi_{\text{left}})(\gamma_{\text{left}} - 1)]}, \quad (1.3.1)$$

где π_{left} и γ_{left} — параметры двучленного уравнения состояния для среды, находящейся слева от произвольного разрыва: $p = \rho e(\gamma - 1) - \gamma \pi$.

В случае правой ударной волны поток газа будет равен:

$$m_{\text{right}} = \sqrt{\frac{P_{\text{right}}}{2} [(P + \pi_{\text{right}})(\gamma_{\text{right}} + 1) + (P_{\text{right}} + \pi_{\text{right}})(\gamma_{\text{right}} - 1)]}, \quad (1.3.2)$$

где π_{right} и γ_{right} — параметры двучленного уравнения состояния для среды, находящейся справа от произвольного разрыва.

Значения термодинамических параметров внутри левой волны разрежения $W_I \leq \xi \leq W_I^*$ (W_I , W_I^* — границы волны разрежения, см. таблицу) вычисляются из выражений:

$$u^* = \xi + c^*; \quad (1.3.3)$$

$$\rho^* = \rho_{\text{left}} \left(\frac{c^*}{c_{\text{left}}} \right)^{\frac{2}{(\gamma_{\text{left}} - 1)}}; \quad (1.3.4)$$

$$p^* + \pi_{\text{left}} = (p_{\text{left}} + \pi_{\text{left}}) \left(\frac{c^*}{c_{\text{left}}} \right)^{\frac{2\gamma_{\text{left}}}{\gamma_{\text{left}} - 1}}; \quad (1.3.5)$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon(\rho^*, p^*), \quad (1.3.6)$$

где

$$c^* = \frac{2}{(\gamma_{\text{left}} + 1)} c_{\text{left}} + \frac{(\gamma_{\text{left}} - 1)}{(\gamma_{\text{left}} + 1)} (u_{\text{left}} - \xi). \quad (1.3.7)$$

Для правой волны разряжения $W_{II}^* \leq \xi \leq W_{II}$ (W_{II}^* , W_{II} — границы волны разряжения, см. таблицу) будем иметь:

$$u^* = \xi - c^*; \quad (1.3.8)$$

$$\rho^* = \rho_{\text{right}} \left(\frac{c^*}{c_{\text{right}}} \right)^{\frac{2}{\gamma_{\text{right}} - 1}}; \quad (1.3.9)$$

$$p^* + \pi_{\text{right}} = (p_{\text{right}} + \pi_{\text{right}}) \left(\frac{c^*}{c_{\text{right}}} \right)^{\frac{2\gamma_{\text{right}}}{\gamma_{\text{right}} - 1}}; \quad (1.3.10)$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon(\rho^*, p^*), \quad (1.3.11)$$

где

$$c^* = \frac{2}{(\gamma_{\text{right}} + 1)} c_{\text{right}} + \frac{(\gamma_{\text{right}} - 1)}{(\gamma_{\text{right}} + 1)} (u_{\text{right}} - \xi). \quad (1.3.12)$$

Определение давления P на тангенциальной поверхности (рис. 1) может быть проведено на основе решения единственного нелинейного уравнения [5]:

$$F(P) = f_{\text{left}}(P, p_{\text{left}}, \rho_{\text{left}}) + f_{\text{right}}(P, p_{\text{right}}, \rho_{\text{right}}) = u_{\text{left}} - u_{\text{right}}, \quad (1.3.13)$$

где

$$f_n = f_n(P, p_n, \rho_n) = \begin{cases} \frac{P - p_n}{\rho_n c_n \beta_n}, & P \geq p_n; \\ \frac{2c_n}{\gamma_n - 1} (\psi_n^x - 1), & P < p_n, \text{ n = "left" или n = "right"}; \end{cases} \quad (1.3.14)$$

$$\psi_n = \frac{P + \pi_n}{p_n + \pi_n}, \quad \chi = \frac{\gamma_n - 1}{2\gamma_n}, \quad \beta_n = \sqrt{\frac{\gamma_n + 1}{2\gamma_n} \psi_n + \frac{\gamma_n - 1}{2\gamma_n}}, \quad c_n = \sqrt{\gamma_n \frac{p_n + \pi_n}{\rho_n}}.$$

Здесь нижний индекс $n = \text{"left"}$ или $n = \text{"right"}$ соответствует двум различным уравнениям состояния слева и справа от разрыва, соответственно. Анализ поведения функции $F(P)$ показывает [5], что эта функция является монотонной и выпуклой вверх (рис. 2).

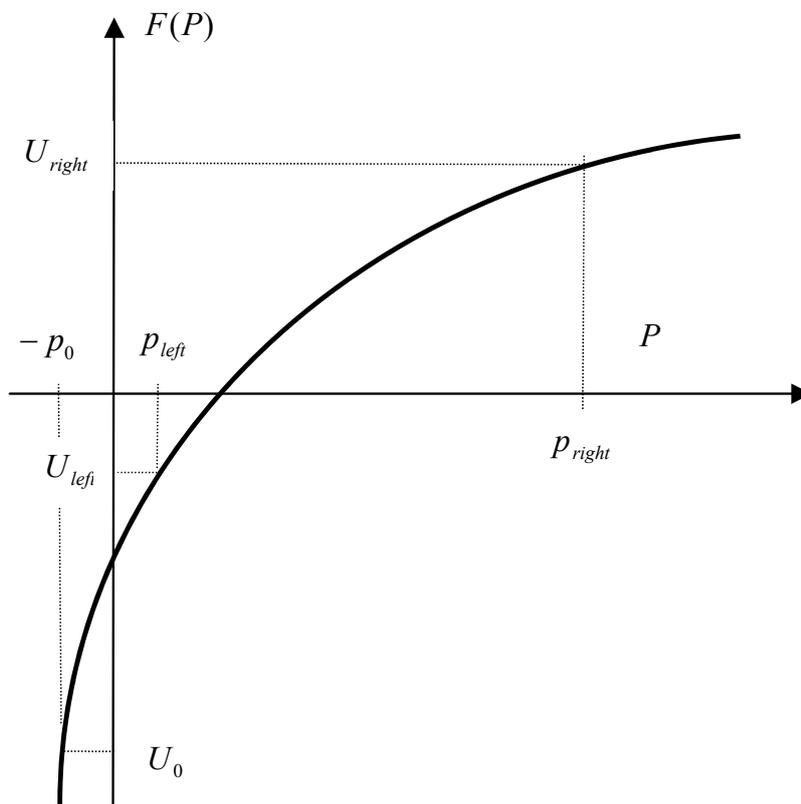


Рис. 2. График $F(P)$ (см. 1.3.13) для случая $P_{left} < P_{right}$

Вследствие этого для численного решения (1.3.13) можно воспользоваться итерационным методом Ньютона, при этом положительность первой и не положительность второй производных обеспечивают сходимость ньютоновских итераций при подходящем выборе начального приближения. В данной работе использовался итерационный процесс вида [5]:

$$P^{(m+1)} = P^{(m)} + \left[f_{left}^{(m)} + f_{right}^{(m)} - (u_{left} - u_{right}) \right] \times \left[\left(\frac{\partial f_{left}}{\partial P} \right)^{(m)} + \left(\frac{\partial f_{right}}{\partial P} \right)^{(m)} \right]^{-1}. \quad (1.3.15)$$

Здесь $m = 0, 1, 2, \dots$ — порядковый номер итерации, $P^{(0)}$ — начальное приближение. В силу не положительности второй производной в качестве $P^{(0)}$ может быть выбрано любое число, удовлетворяющее условию:

$$F(P^{(0)}) - (u_{left} - u_{right}) \leq 0. \quad (1.3.16)$$

После нахождения значения P величина U находится из выражения:

$$U = \frac{1}{2} \left[u_{left} + u_{right} + f_{right}(P, p_{right}, \rho_{right}) - f_{right}(P, p_{left}, \rho_{left}) \right]. \quad (1.3.17)$$

Исследование поведения функции $F(P)$ позволяет заранее определить конфигурацию точного решения без проведения полных вычислений. График функции $F(P)$ для случая $P_{left} < P_{right}$ представлен на рис. 2.

Значения функции $F(P)$ при $P = p_{\text{right}}$, $P = p_{\text{left}}$ и $P = -p_0 = \max(-\pi_{\text{left}}, -\pi_{\text{right}})$ равны, соответственно:

$$F(p_{\text{right}}) = U_{\text{right}} = \frac{p_{\text{right}} - p_{\text{left}}}{\rho_{\text{left}} c_{\text{left}} \beta_{\text{left}}},$$

где

$$\beta_{\text{left}} = \sqrt{\frac{\gamma_{\text{left}} + 1}{2\gamma_{\text{left}}} \Psi_{\text{left}} + \frac{\gamma_{\text{left}} - 1}{2\gamma_{\text{left}}}}, \quad \Psi_{\text{left}} = \frac{p_{\text{right}} + \pi_{\text{left}}}{p_{\text{left}} + \pi_{\text{left}}}, \quad c_{\text{left}} = \sqrt{\gamma_{\text{left}} \frac{p_{\text{left}} + \pi_{\text{left}}}{\rho_{\text{left}}}};$$

$$F(p_{\text{left}}) = U_{\text{left}} = \frac{2c_{\text{right}}}{\gamma_{\text{right}} - 1} (\Psi_{\text{right}}^{\chi} - 1),$$

где

$$\Psi_{\text{right}} = \frac{p_{\text{left}} + \pi_{\text{right}}}{p_{\text{right}} + \pi_{\text{right}}}, \quad \chi = \frac{\gamma_{\text{right}} - 1}{2\gamma_{\text{right}}}, \quad c_{\text{right}} = \sqrt{\gamma_{\text{right}} \frac{p_{\text{right}} + \pi_{\text{right}}}{\rho_{\text{right}}}};$$

$$F(-p_0) = U_0 = \frac{2c_n}{\gamma_n - 1} (\Psi_n^{\chi} - 1),$$

где индекс n соответствует среде с наибольшим значением параметра π из двучленного уравнения состояния.

В зависимости от значения $u_{\text{left}} - u_{\text{right}}$ возможна реализация следующих случаев:

1. Если $u_{\text{left}} - u_{\text{right}} > U_{\text{left}}$, то $P > p_{\text{right}} > p_{\text{left}}$ и реализуется конфигурация течения жидкости с правой и левой ударными волнами.
2. Если $U_{\text{left}} < u_{\text{left}} - u_{\text{right}} < U_{\text{right}}$, то $p_{\text{left}} < P < p_{\text{right}}$ и имеет место конфигурация, состоящая из правой волны разряжения и левой ударной волны.
3. Если $U_0 < u_{\text{left}} - u_{\text{right}} < U_{\text{left}}$, то $-p_0 < P < p_{\text{left}}$ и имеет место конфигурация, состоящая из правой и левой волн разряжения.
4. Если $u_{\text{left}} - u_{\text{right}} < U_0$, то образуется область вакуума со значениями $\rho = 0$ и $c = 0$.

Если $u_{\text{left}} - u_{\text{right}} > U_0$, то уравнение (1.3.13) имеет единственное решение. Случай, когда это уравнение не имеет решения при $u_{\text{left}} - u_{\text{right}} < U_0$, рассматривается подробно в работе [5]. В данной работе при проведении тестовых расчетов во всей расчетной области выполнялось $u_{\text{left}} - u_{\text{right}} > U_0$.

1.4. Релаксация скорости и давления

При рассмотрении системы уравнений (1.2.1–1.2.2) было отмечено, что вклад неконсервативных членов, вычисленных на внутренних интерфейсах i -й ячейки, может быть учтен отдельно с применением метода расщепления и сводится, если число внутренних интерфейсов стремится к бесконечности, к следующей системе уравнений [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} = \mu(P^{(1)} - P^{(2)}); \\ \frac{\partial(\alpha^{(1)}\rho^{(1)})}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial(\alpha^{(1)}\rho^{(1)}u^{(1)})}{\partial t} = \lambda(u^{(2)} - u^{(1)}); \\ \frac{\partial(\alpha^{(1)}\rho^{(1)}E^{(1)})}{\partial t} = \mu P_i(P^{(1)} - P^{(2)}) + \lambda V_i(u^{(2)} - u^{(1)}); \\ \frac{\partial(\alpha^{(2)}\rho^{(2)})}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial(\alpha^{(2)}\rho^{(2)}u^{(2)})}{\partial t} = -\lambda(u^{(2)} - u^{(1)}); \\ \frac{\partial(\alpha^{(2)}\rho^{(2)}E^{(2)})}{\partial t} = \mu P_i(P^{(1)} - P^{(2)}) - \lambda V_i(u^{(2)} - u^{(1)}), \end{array} \right. \quad (1.4.1)$$

где μ — динамическая вязкость сжатия, $Pa^{-1}c^{-1}$, которая характеризует скорость достижения равновесного состояния в двухфазной системе;

λ — положительный параметр или функция;

$$P_i = \sum_{k=1}^2 \alpha_k P_k \quad \text{— интерфейсное давление;} \quad (1.4.2)$$

$$V_i = \frac{\sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k u_k}{\sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k} \quad \text{— интерфейсная скорость.} \quad (1.4.3)$$

Решение системы (1.4.1) можно представить как сумму последовательных решений следующих систем, описывающих релаксацию скорости и давления:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha^{(1)})}{\partial t} = 0; \\ \frac{d}{dt}(\alpha^{(1)}\rho^{(1)}) = 0; \\ \frac{d}{dt}(\alpha^{(1)}\rho^{(1)}u^{(1)}) = +\lambda(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}); \\ \frac{d}{dt}(\alpha^{(1)}\rho^{(1)}E^{(1)}) = +\lambda V_i \times (u_i^{(2)} - u_i^{(1)}); \\ \frac{d}{dt}(\alpha^{(2)}\rho^{(2)}) = 0; \\ \frac{d}{dt}(\alpha^{(2)}\rho^{(2)}u^{(2)}) = -\lambda(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}); \\ \frac{d}{dt}(\alpha^{(2)}\rho^{(2)}E^{(2)}) = -\lambda V_i \times (u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) \end{array} \right. \quad u \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\alpha^{(1)})}{\partial t} = \mu(p_i^{(1)} - p_i^{(2)}); \\ \frac{d}{dt}(\alpha^{(1)}\rho^{(1)}) = 0; \\ \frac{d}{dt}(\alpha^{(1)}\rho^{(1)}u^{(1)}) = 0; \\ \frac{d}{dt}(\alpha^{(1)}\rho^{(1)}E^{(1)}) = +\mu P_i \times (p_i^{(1)} - p_i^{(2)}); \\ \frac{d}{dt}(\alpha^{(2)}\rho^{(2)}) = 0; \\ \frac{d}{dt}(\alpha^{(2)}\rho^{(2)}u^{(2)}) = 0; \\ \frac{d}{dt}(\alpha^{(2)}\rho^{(2)}E^{(2)}) = -\mu P_i \times (p_i^{(1)} - p_i^{(2)}). \end{array} \right. \quad (1.4.4)$$

При численном решении первой системы в предположении о мгновенной релаксации скоростей ($\lambda \rightarrow \infty$) получаются следующие выражения для новых значений скоростей обеих фаз [3]:

$$\left(u_i^{(1)}\right)^{n+1} = \left(u_i^{(2)}\right)^{n+1} = \frac{\alpha_i^{(1)} \rho_i^{(1)} u_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} \rho_i^{(2)} u_i^{(2)}}{\alpha_i^{(1)} \rho_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} \rho_i^{(2)}} \quad (1.4.5)$$

внутренних энергий:

$$\left(e_i^{(k)}\right)^{n+1} = \left(e_i^{(k)}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_i^{(1)} \rho_i^{(1)} u_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} \rho_i^{(2)} u_i^{(2)}}{\alpha_i^{(1)} \rho_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} \rho_i^{(2)}} - u_i^{(k)} \right)^2, \quad (k = 1, 2) \quad (1.4.6)$$

и давлений:

$$\left(p^{(k)}\right)^{n+1} = p \left(\left(e^{(k)}\right)^{n+1}, \left(\rho^{(k)}\right)^{n+1} \right) \quad (1.4.7)$$

Выражения (1.4.5–1.4.7) позволяют вычислить значения скорости, внутренней энергии и давления каждого из компонент смеси после процесса релаксации скорости.

Рассмотрим метод численного решения правой системы уравнений (1.4.4) для первой фазы ($k = 1$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} = \mu (P^{(1)} - P^{(2)}); \\ \frac{\partial (\alpha^{(1)} \rho^{(1)})}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial (\alpha^{(1)} \rho^{(1)} u^{(1)})}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial (\alpha^{(1)} \rho^{(1)} E^{(1)})}{\partial t} = \mu P_i (P^{(1)} - P^{(2)}). \end{array} \right. \quad (1.4.8)$$

Уравнение для полной энергии с учетом первых трех уравнений можно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial e^{(1)}}{\partial t} = - \frac{P_i}{\alpha^{(1)} \rho^{(1)}} \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t}, \quad (1.4.9)$$

где $e^{(1)}$ — внутренняя энергия первой фазы на единицу массы. Интегрируя это уравнение, получим:

$$\left(e^{(1)}\right)^* \left(\left(P^{(1)}\right)^*, \left(\rho^{(1)}\right)^* \right) = \left(e^{(1)}\right)^0 \left(\left(P^{(1)}\right)^0, \left(\rho^{(1)}\right)^0 \right) - \frac{\bar{P}_i}{\left(\alpha^{(1)}\right)^0 \left(\rho^{(1)}\right)^0} \left(\left(\alpha^{(1)}\right)^* - \left(\alpha^{(1)}\right)^0 \right), \quad (1.4.10)$$

где величины с верхним индексом «0» соответствуют начальным значениям термодинамических параметров; верхний индекс * используется для обозначения установившихся после процесса релаксации давления равновесных значений;

\bar{P}_i обозначает среднее интерфейсное давление.

Аналогичное уравнение получается для второй фазы:

$$\left(e^{(2)}\right)^* \left(\left(P^{(2)}\right)^*, \left(\rho^{(2)}\right)^* \right) = \left(e^{(2)}\right)^0 \left(\left(P^{(2)}\right)^0, \left(\rho^{(2)}\right)^0 \right) + \frac{\bar{P}_i}{\left(\alpha^{(2)}\right)^0 \left(\rho^{(2)}\right)^0} \left(\left(\alpha^{(1)}\right)^* - \left(\alpha^{(1)}\right)^0 \right). \quad (1.4.11)$$

Среднее интерфейсное давление оценивается как:

$$\bar{P}_i = 0.5(P_i^* + P_i^0), \quad (1.4.12)$$

где P_i^* вычисляется во время итерационной процедуры с использованием (1.4.2) для состояния $(\alpha^{(1)})^*, (\rho^{(1)})^*, (P^{(1)})^*$ (см. 1.4.10). Таким образом, для нахождения стационарного решения правой системы (1.4.4) необходимо решить систему уравнений (1.4.10), (1.4.11) при $(P^{(1)})^* = (P^{(2)})^* = P^*$.

В предположении, что первая фаза описывается УРС $e^{(1)} = \frac{P^{(1)}}{\rho^{(1)}(\gamma^{(1)} - 1)}$, а вторая —

$e^{(2)} = \frac{P^{(2)} + \gamma^{(2)}\pi^{(2)}}{\rho^{(2)}(\gamma^{(2)} - 1)}$, система уравнений (1.4.10, 1.4.11) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{P^*}{(\gamma^{(1)} - 1)(\rho^{(1)})^*} = \frac{(P^{(1)})^0}{(\gamma^{(1)} - 1)(\rho^{(1)})^0} - \frac{0.5 \times (P^* + P_i^0)}{(\alpha^{(1)})^0 (\rho^{(1)})^0} \left((\alpha^{(1)})^* - (\alpha^{(1)})^0 \right); \\ \frac{P^* + \gamma^{(2)}\pi^{(2)}}{(\gamma^{(2)} - 2)(\rho^{(2)})^*} = \frac{(P^{(2)})^0 + \gamma^{(2)}\pi^{(2)}}{(\gamma^{(2)} - 1)(\rho^{(2)})^0} + \frac{0.5 \times (P^* + P_i^0)}{(1 - (\alpha^{(1)})^0)(\rho^{(2)})^0} \left((\alpha^{(1)})^* - (\alpha^{(1)})^0 \right). \end{cases} \quad (1.4.13)$$

Выделяя явным образом P^* с учетом соотношений $(\alpha^{(1)})^0 (\rho^{(1)})^0 = (\alpha^{(1)})^* (\rho^{(1)})^*$ и $(\alpha^{(2)})^0 (\rho^{(2)})^0 = (\alpha^{(2)})^* (\rho^{(2)})^*$ (см. 1.4.4), а также $\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = 1$, получим:

$$\begin{cases} P^* = \frac{2(P^{(1)})^0 (1 - (\alpha^{(2)})^0) - ((\alpha^{(2)})^0 - (\alpha^{(2)})^*) (\gamma^{(1)} - 1) P_i^0}{2 - (\alpha^{(2)})^* (\gamma^{(1)} + 1) + (\alpha^{(2)})^0 (\gamma^{(1)} - 1)}; \\ P^* = \frac{2(\alpha^{(2)})^0 \left((P^{(2)})^0 + \gamma^{(2)}\pi^{(2)} \right) + (\gamma^{(2)} - 1) \left((\alpha^{(2)})^0 - (\alpha^{(2)})^* \right) P_i^0 - 2\gamma^{(2)}\pi^{(2)} (\alpha^{(2)})^*}{(\alpha^{(2)})^* (\gamma^{(2)} + 1) - (\alpha^{(2)})^0 (\gamma^{(2)} - 1)}. \end{cases} \quad (1.4.14)$$

Таким образом, система (1.4.14) эквивалентна следующему уравнению:

$$\begin{aligned} f((\alpha^{(2)})^*) &= \frac{2(P^{(1)})^0 (1 - (\alpha^{(2)})^0) - ((\alpha^{(2)})^0 - (\alpha^{(2)})^*) (\gamma^{(1)} - 1) P_i^0}{2 - (\alpha^{(2)})^* (\gamma^{(1)} + 1) + (\alpha^{(2)})^0 (\gamma^{(1)} - 1)} - \\ &= \frac{2(\alpha^{(2)})^0 \left((P^{(2)})^0 + \gamma^{(2)}\pi^{(2)} \right) + (\gamma^{(2)} - 1) \left((\alpha^{(2)})^0 - (\alpha^{(2)})^* \right) P_i^0 - 2\gamma^{(2)}\pi^{(2)} (\alpha^{(2)})^*}{(\alpha^{(2)})^* (\gamma^{(2)} + 1) - (\alpha^{(2)})^0 (\gamma^{(2)} - 1)} = 0. \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Численное решение уравнения (1.4.15) относительно искомого параметра $(\alpha^{(2)})^*$ находится при помощи итерационного метода Ньютона:

$$(\alpha^{(2)})^{(m+1)} = (\alpha^{(2)})^{(m)} - \frac{f\left((\alpha^{(2)})^{(m)}\right)}{\frac{\partial f\left((\alpha^{(2)})^{(m)}\right)}{\partial (\alpha^{(2)})}}, \quad (1.4.16)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ — порядковый номер итерации;

$(\alpha^{(2)})^{(0)}$ — начальное значение;

$$\begin{aligned} \frac{\partial f\left((\alpha^{(2)})^*\right)}{\partial (\alpha^{(2)})} = & \frac{(\gamma^{(1)} + 1) \times \left(2(P^{(1)})^0 \left(1 - (\alpha^{(2)})^0\right) - \left((\alpha^{(2)})^0 - (\alpha^{(2)})^*\right) (\gamma^{(1)} - 1) P_i^0\right)}{\left(2 - (\alpha^{(2)})^* (\gamma^{(1)} + 1) + (\alpha^{(2)})^0 (\gamma^{(1)} - 1)\right)^2} + \\ & + \frac{(\gamma^{(1)} - 1) P_i^0}{2 - (\alpha^{(2)})^* (\gamma^{(1)} + 1) + (\alpha^{(2)})^0 (\gamma^{(1)} - 1)} + \\ & + \frac{(\gamma^{(2)} + 1) \times \left(2(\alpha^{(2)})^0 \left((P^{(2)})^0 + \gamma^{(2)} \pi^{(2)}\right) + (\gamma^{(2)} - 1) \left((\alpha^{(2)})^0 - (\alpha^{(2)})^*\right) P_i^0 - 2\gamma^{(2)} \pi^{(2)} (\alpha^{(2)})^*\right)}{\left((\alpha^{(2)})^* (\gamma^{(2)} + 1) - (\alpha^{(2)})^0 (\gamma^{(2)} - 1)\right)^2} + \\ & + \frac{(\gamma^{(2)} - 1) P_i^0 + 2\gamma^{(2)} \pi^{(2)}}{(\alpha^{(2)})^* (\gamma^{(2)} + 1) - (\alpha^{(2)})^0 (\gamma^{(2)} - 1)} = 0. \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

После нахождения величины $(\alpha^{(2)})^*$ значение давления $(P^{(1)})^* = (P^{(2)})^* = P^*$ вычисляется с использованием (1.4.14), плотности фаз вычисляются из соотношений $(\alpha^{(1)})^0 (\rho^{(1)})^0 = (\alpha^{(1)})^* (\rho^{(1)})^*$ и $(\alpha^{(2)})^0 (\rho^{(2)})^0 = (\alpha^{(2)})^* (\rho^{(2)})^*$.

1.5. Метод PPM

В методе PPM все термодинамические параметры в каждой расчетной ячейке аппроксимируются кусочно-параболическим профилем. Для любого параметра f интерполяционный многочлен второго порядка имеет следующий вид [1]:

$$f(\xi) = f_{L,j} + x(\Delta f_j + f_{6,j}(1-x)), \quad (1.5.1)$$

где $x = \frac{\xi - \xi_{j-1/2}}{\Delta \xi_j}$, $\xi_{j-1/2} \leq \xi \leq \xi_{j+1/2}$,

$f_{R,j}$, $f_{L,j}$ — значения параметра f справа, слева в i -й ячейке;

$$\Delta f_j = f_{R,j} - f_{L,j};$$

$$f_{6,j} = 6 \times \left(f_j^n - \frac{1}{2}(f_{L,j} + f_{R,j}) \right);$$

$$f_{L,j} = f_{R,j-1} = f_{j+1/2}, \text{ для равномерной сетки: } f_{j+1/2} = \frac{7}{12}(f_j^n + f_{j+1}^n) - \frac{1}{12}(f_{j+2}^n + f_{j-1}^n);$$

$$f_{L,j} \rightarrow f_j^n, f_{R,j} \rightarrow f_j^n, \text{ если } (f_{R,j} - f_j^n)(f_j^n - f_{L,j}) \leq 0;$$

$$f_{L,j} \rightarrow 3f_j^n - 2f_{R,j}, \text{ если } (f_{R,j} - f_{L,j}) \left(f_j^n - \frac{1}{2}(f_{L,j} + f_{R,j}) \right) > \frac{(f_{R,j} - f_{L,j})^2}{6};$$

$$f_{R,j} \rightarrow 3f_j^n - 2f_{L,j}, \text{ если } -\frac{(f_{R,j} - f_{L,j})^2}{6} > (f_{R,j} - f_{L,j}) \left(f_j^n - \frac{1}{2}(f_{L,j} + f_{R,j}) \right).$$

Для гладких решений на равномерной сетке использование PPM обеспечивает четвертый порядок. Величины термодинамических параметров слева и справа от границы вычислительной ячейки вычисляются с использованием процедуры усреднения по области зависимости, размеры которой определяются на основе анализа собственных значений Якобиана, соответствующего данной реализации [1].

1.6. TVD-схема с ограничителем minmod

Начальные левые и правые значения некоторого параметра f в i -й ячейке вычислялись следующим образом: $(f_L)_i = f_i - 0.5 \times (\Delta f)_i$, $(f_R)_i = f_i + 0.5 \times (\Delta f)_i$, где f_i — среднее значение, $(\Delta f)_i$ наклон профиля термодинамического параметра f в ячейке. Величины наклонов $(\Delta f)_i$ находились с использованием ограничителя Minmod.

Для Minmod-ограничителя:

$$(\Delta f)_i = \max(\Delta_-(i), \Delta_-(i-1)) + \min(\Delta_+(i), \Delta_+(i-1)),$$

где

$$\Delta_-(i) = 0.5 \times (f_{i+1} - f_i - |f_{i+1} - f_i|); \quad \Delta_+(i) = 0.5 \times (f_{i+1} - f_i + |f_{i+1} - f_i|).$$

2. Результаты расчетов

С использованием адаптированной к расчету газодинамических течений в двухфазных средах с учетом их топологической микроструктуры методики PPM [1, 2], Русановской схемы [3] и TVD-схемы [4] были выполнены расчеты тестовых задач для различных состояний двухфазной среды в ударной трубе.

Сплошной линией представлены результаты расчета методом PPM, пунктирной — Русановской схемой, штрих-пунктирной — TVD-схемой с применением ограничителя minmod. Первый расчет был выполнен для однородной покоящейся двухфазной среды с объемной долей газа 0.5 в одномерной трубе длиной 1 м с учетом процессов релаксации скорости и давления. Газ и жидкость имеют начальные плотности 50 и 1000 кг/м³, соответственно. Давление двухфазной среды в левой половине трубы равно

10⁹ Па, а в правой — 10⁵ Па. Обе фазы описываются двучленным уравнением состояния: $P = (\gamma - 1)\rho e - \gamma p$. Параметры уравнения состояния для газа равны: $\gamma = 1.4$, $\pi = 0$; для жидкости: $\gamma = 4.4$, $\pi = 6 \times 10^8$ Па. Результаты расчета на момент времени 150 мкс на сетке 200 для куранта 0.8 представлены на рис. 3.

Следующий расчет был выполнен для разрывного профиля объемной доли: $\alpha^{(2)} = 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon = 10^{-6}$) при $x < 0.8$ м и $\alpha^{(2)} = \varepsilon$ при $x > 0.8$ м. В левой части трубы ($x < 0.8$ м) начальное давление 10⁹ Па, а в правой ($x > 0.8$ м) — 10⁵ Па. Результаты расчета с учетом процессов релаксации скорости и давления на сетке 400 и для куранта 0.8 представлены на рис. 4 для момента времени 300 мкс.

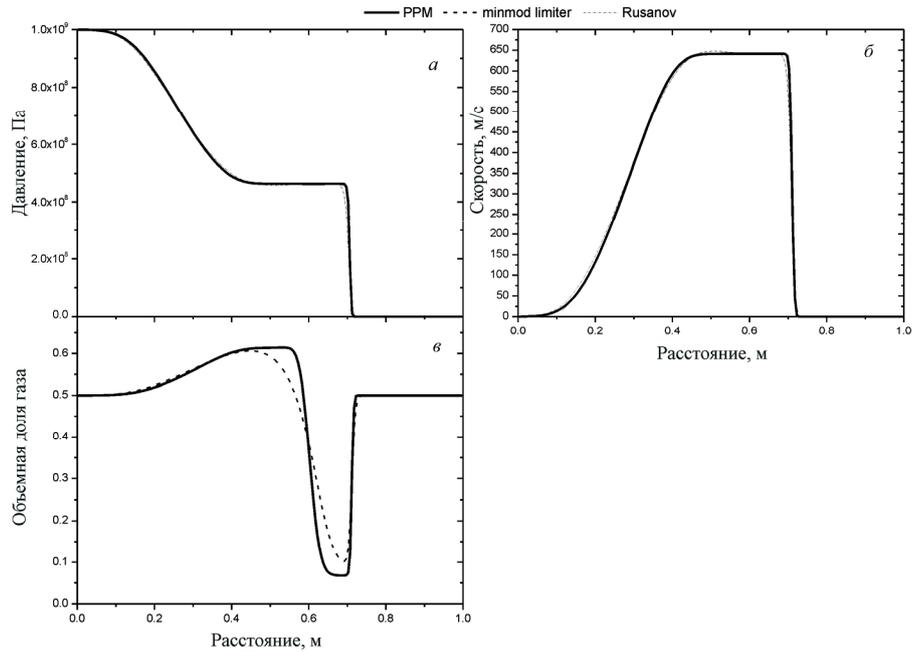


Рис. 3. Ударная труба для двухфазной среды с однородным профилем объёмной доли: *a* — давление; *б* — скорость; *в* — объёмная доля. С учетом релаксации давления и скорости

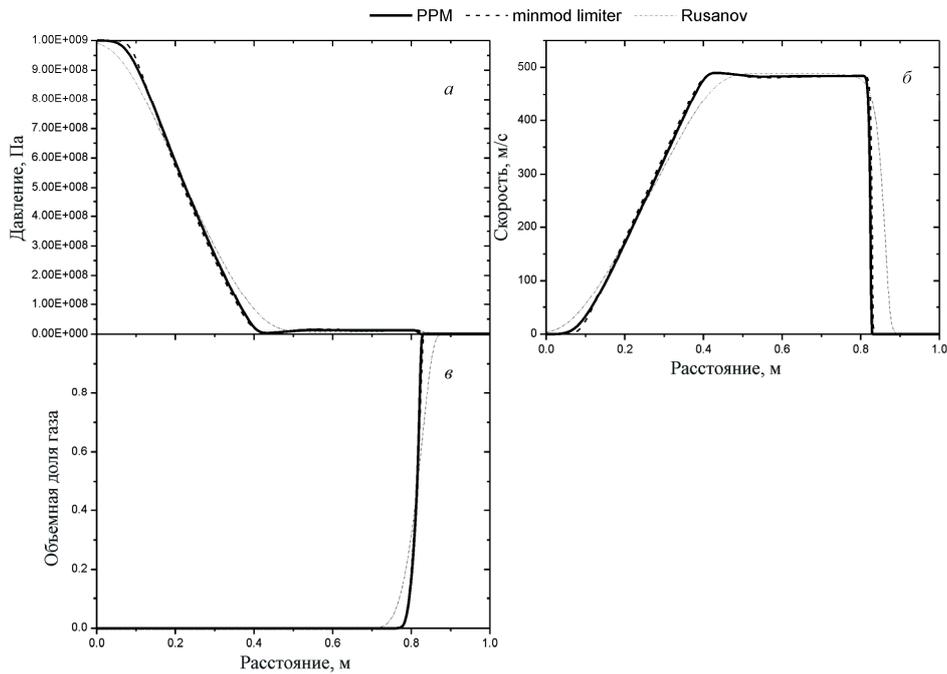


Рис. 4. Ударная труба для интерфейса, разделяющего две чистых фазы: *a* — давление; *б* — скорость; *в* — объёмная доля. С учетом релаксации давления и скорости

На рис. 5 приведены результаты расчета для предыдущей задачи, но без учета релаксационных членов. Этот тест показывает влияние неконсервативных членов в правой части системы (1.2.2) на выполнение граничных условий на интерфейсе. Увеличен-

ные профили давления и скорости вблизи интерфейса показаны на рис. 6. Видно, что граничные условия выполнены на интерфейсе автоматически. Адаптированный метод PPM обеспечивает наиболее резкий профиль термодинамических параметров.

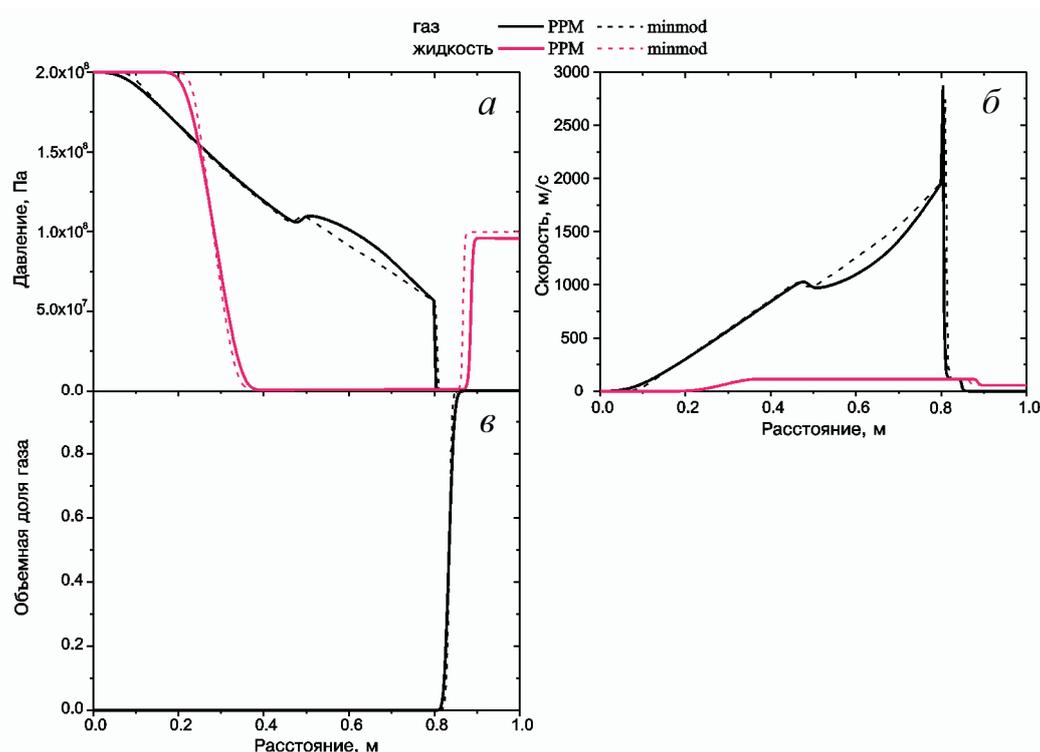


Рис. 5. Ударная труба для интерфейса, разделяющего две чистых фазы: *a* — давление; *б* — скорость; *в* — объемная доля. Без учета релаксации давления и скорости

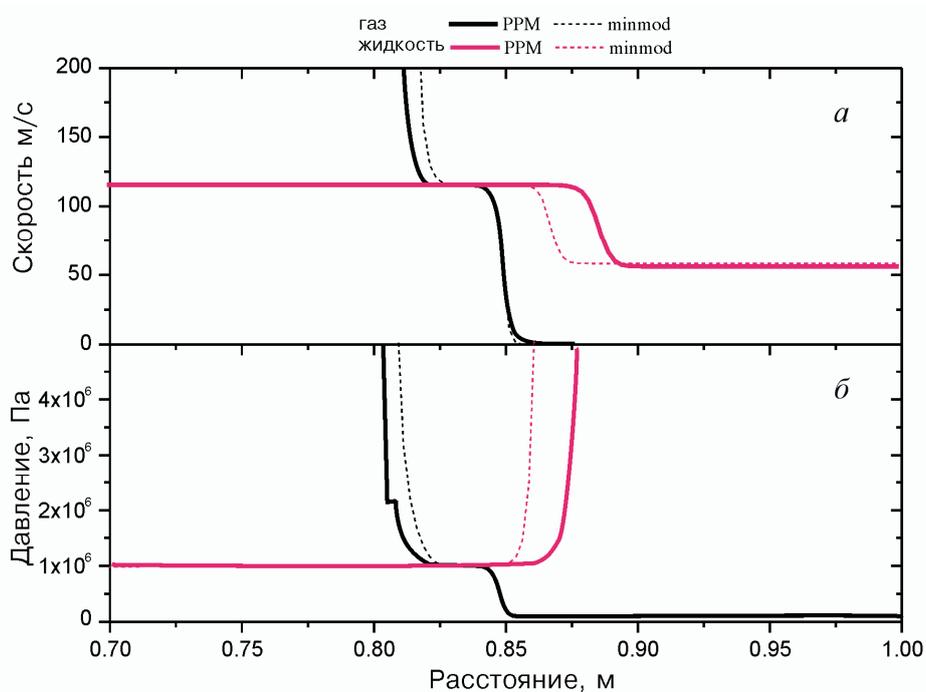


Рис. 6. Увеличенные профили: *a* — скорости; *б* — давления; из рис. 5 вблизи интерфейса

Также с использованием описанной методики был выполнен расчет задачи о водяном кране, который представляет собой

вертикальную трубу длиной 2 м, заполненную газом и водой. Нижняя часть трубы открыта, в верхнюю часть поступает вода со скоростью 10 м/с.

Начальные данные:

Вода	Газ
$\rho_l = 1000 \text{ кг/м}^3$;	$\rho_g = 1 \text{ кг/м}^3$;
$P_l = 105 \text{ Па}$;	$P_g = 105 \text{ Па}$;
$\mathfrak{D}_l = 10 \text{ м/с}$;	$\mathfrak{D}_g = 0 \text{ м/с}$;
$\alpha_l = 0.8$.	$\alpha_g = 0.2$.

Граничные условия:

	Вода	Газ
Входные условия	$\mathfrak{D}_l = 10 \text{ м/с}$;	$\mathfrak{D}_g = 0 \text{ м/с}$;
	$\alpha_l = 0.8$;	$\alpha_g = 0.2$;
Выходные условия	$P_l = 105 \text{ Па}$;	$P_g = 105 \text{ Па}$.
	α_l, α_g экстраполируются.	

Время расчета 0.1 с, $g=10 \text{ м/с}^2$

Результаты расчетов представлены для момента времени 0.1 с на рис. 7 вместе с аналитическим решением. Отличие численных расчетов от аналитического может быть связано с тем, что условия данной задачи находятся вне диапазона применимости

расчетных моделей (скорость переноса объемной доли в задаче много меньше, чем скорость распространения характеристических волн). Для численного расчета данной задачи лучше использовать неявную схему с предиктором, описанную в работе [6].

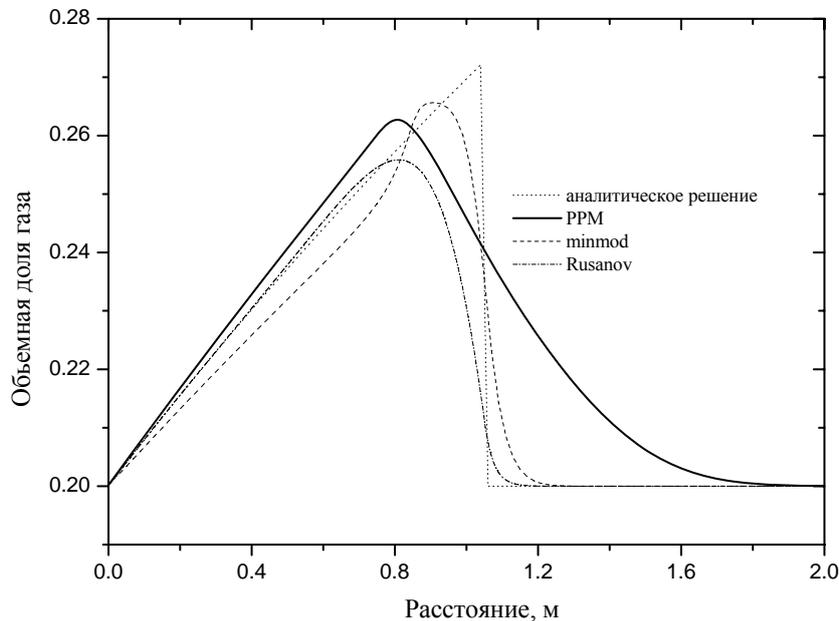


Рис. 7. Эволюция объемной доли в задаче о водяном кране (точное решение представлено точечной линией)

С использованием математической модели двухфазной среды, учитывающей её топологию, был выполнен тестовый расчет для эксперимента, в котором ударная волна проходит через разрывной профиль объемной доли [3, 4]. В вертикальной тру-

бе, заполненной воздухом, расположена прослойка из мелких частиц толщиной 2 см (рис. 8). Ударная волна распространяется снизу и взаимодействует со слоем частиц. Движение частиц моделировалось при помощи уравнения состояния сжимае

мой жидкости $P = \epsilon p(\gamma - 1) - \gamma \pi$. В результате возникают отражённая и преломлённая волны. Эффекты трения моделировались при помощи введения в уравнения движения силы трения:

$$F_d = \frac{3}{4} C_d \frac{\rho_g}{d_p} (1 - \alpha_g) |u_g - u_l| (u_g - u_l),$$

где $C_d = 0.6$ — коэффициент трения; $d_p = 2$ мм — диаметр частиц. Временная эволюция величины давления после прохождения ударной волны измеряется счетчиками, расположенными 4.3 см до слоя частиц и 11 после. Величины давления в месте расположения счетчиков в зависимости от времени представлены на рис. 9.

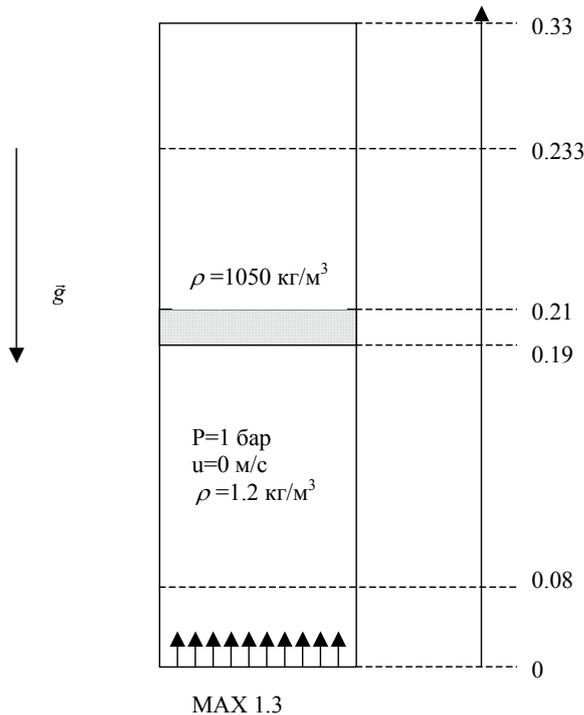


Рис. 8. Схема численного эксперимента

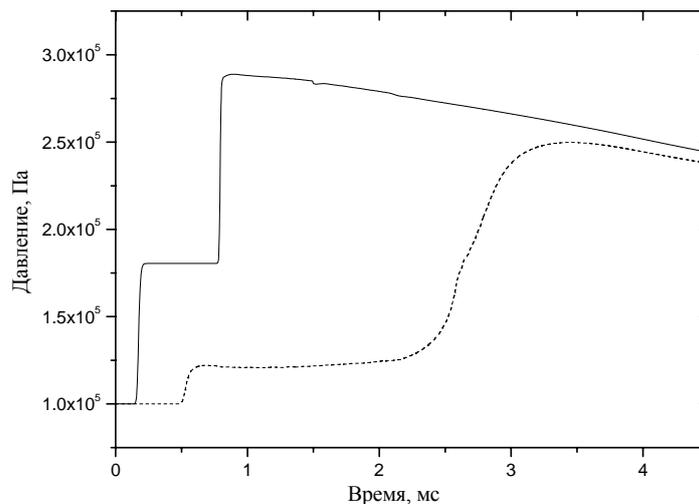


Рис. 9. Временная эволюция давления в точках с координатами 0.08 (сплошная линия) и 0.233 (штриховая линия)

Заключение

В работе представлены результаты численных расчетов двухфазных систем, выполненные с применением математической модели двухфазной среды с учетом топологической микроструктуры и усредненной модели, содержащей внешние параметры интерфейсной скорости и интерфейсного давления. Применяемые модели позволяют аппроксимировать неконсервативные члены в уравнениях, описывающих двухфазную среду, и неконсервативное уравнение переноса объёмной доли. Они применимы как для чистых фаз, так и для смесей и используют один и тот же численный алгоритм в каждой расчетной ячейке. Наиболее точным методом расчета является адаптированный к расчетам двухфазных сред метод PPM, использую-

щий точный римановский солвер. Однако, к недостаткам данной методики следует отнести большой объем вычислений и неустойчивость метода при расчетах для малых чисел Маха.

Другим перспективным направлением развития методов расчета многофазных сжимаемых течений может быть адаптация балансово-характеристического метода [7,8] с разделенными консервативными и потоковыми переменными, который существенно превосходит все остальные методы по точности на грубых сетках для однофазных расчетов, кроме того, он почти на порядок экономичнее кусочно-параболического метода.

Литература

1. Woodward, P.R., and P. Collela. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations // J. Comp. Phys. 1984. Vol. 54, № 1.
2. Чуданов, В.В., А.А. Леонов. Моделирование двухкомпонентных и двухфазных сжимаемых сред с использованием метода кусочно-параболической аппроксимации (PPM). — (Препринт / Ин-т проблем безопас. развития атом. энергетики РАН, № ИБРАЕ-2003-18). — М.: ИБРАЭ РАН, 2003.
3. Saurel, R., and R. Abgrall. A multiphase Godunov method for multifluid and multiphase flows // J. Comp. Phys. 1999. № 150. P. 425–467.
4. Abgrall, R., and R. Saurel. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures // J. Comput. Phys. 2003. № 186. P. 361–396.
5. Куликовский, А.Г., Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
6. Guillard, H., and C. Viozat. On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit // Comput. & Fluids. 1999. № 28. P. 63–86.
7. Головизин, В.М., С.А. Карабасов, И.М. Кобринский. Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. — 2003. Т. 15, № 9.
8. Головизин, В.М., Е.В. Соловьёва, А.В. Иванов. Некоторые свойства балансно-характеристических разностных схем для одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных. — (Препринт / Ин-т проблем безопас. развития атом. энергетики РАН, № ИБРАЕ-2005-05). — М.: ИБРАЭ РАН, 2005.

Моделирование двухкомпонентных и двухфазных сжимаемых сред с использованием метода кусочно-параболической аппроксимации (PPM)

А. А. Леонов, В. В. Чуданов

Введение

При решении огромного количества фундаментальных и прикладных задач возникает необходимость рассматривать многофазные и многокомпонентные газодинамические течения, в которых каждый компонент имеет свои собственные физические свойства и отделен от остальных компонентов поверхностью раздела. Классическим примером такой ситуации являются задачи о поведении газовых пузырьков в жидкости при прохождении ударной волны или о прохождении ударной волны через поверхность раздела воздуха и гелия. Обычно многофазные и многокомпонентные смеси образуются при физическом смешивании нескольких веществ (газов, жидкостей или твердых тел), но также они могут возникать при искусственном «размазывании» границы раздела веществ с различными физическими и химическими свойствами. Значительное число методов моделирования многофазных и многокомпонентных газодинамических течений основывается на численном решении уравнений Эйлера или Навье-Стокса, которые обычно дополняются одним или несколькими уравнениями, выражающими законы сохранения специфических для данной задачи физических величин (концентрация газовых пузырьков), необходимых для определения интерфейсных значений параметров

многофазной системы. Применение таких численных методов приводит к возникновению искусственной диффузии через контактные разрывы и к искусственному смешиванию веществ на границе раздела. В такой искусственной смеси значения всех термодинамических параметров вычисляются с ошибкой. При сильно различающихся параметрах веществ такой подход приводит к отрицательным значениям давления уже на втором шаге по времени [1].

В работе [2] была предложена двухфазная модель, позволяющая определять термодинамические и кинетические переменные каждого компонента смеси. При этом в любом месте расчетной сетки одним и тем же численным методом решаются одинаковые уравнения как для случая двух несмешивающихся компонентов, разделенных поверхностью раздела, так и для случая присутствия физического смешивания различных веществ. Более подробно достоинства применяемой модели описываются в работе [2]. В данной работе для моделирования двухфазных течений при помощи двухфазной модели была адаптирована методика кусочно-параболической аппроксимации [3], которая позволяет решать газодинамические задачи, в которых присутствуют резкие разрывы профилей термодинамических величин и контактные разрывы.

1. Модель двухфазной среды

Для расчета двухфазных течений использовалась модель [2], основанная на введении объемных фракций: $\alpha_K = V_K / V$ ($K=1,2$) для каждого компонента двухфазной смеси. Здесь V_K – объем, занимаемый каждым компонентом смеси; V – рассматриваемый объем смеси. Тогда полная плотность в контрольном объеме V есть: $\rho = \sum \alpha_K \rho_K$, где плотности каждой фазы в двухфазной смеси $\rho_K = n_K M_K / V_K = M_K / V_K$. Здесь n_K и M_K число молей и молярная масса каждого компонента смеси, соответственно. Давление каждой фазы определяется как: $P_K = \rho_K R_K T_K$, где T_K – температура каждого компонента смеси; а полное давление смеси: $P = \sum \alpha_K P_K$. Преимущество введения объемных фракций заключается в том,

что различные компоненты смеси могут иметь разную температуру. Хотя в этом случае необходимо знать две температуры или два значения внутренней энергии, а также два значения плотности. Описываемая модель позволяет находить эти величины.

В одномерном случае двухфазная модель включает семь уравнений, которые получаются при помощи процедуры усреднения уравнений Навье-Стокса, записанных для каждого компонента смеси [4]. Три уравнения для каждой фазы смеси выражают законы сохранения массы, импульса и энергии, седьмое уравнение описывает эволюцию объемной фракции. Эти уравнения позволяют определять термодинамические и кинетические переменные для каждого компонента смеси и записываются следующим образом [2]:

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial (\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial x} = \dot{m}; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial (\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g P_g)}{\partial x} = P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \dot{m} V_i + F_d; \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial (\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} + \frac{\partial (u_g (\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g P_g))}{\partial x} = P_i V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \dot{m} E_i + F_d V_i + Q_i; \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial (\alpha_l \rho_l)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial x} = -\dot{m}; \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l P_l)}{\partial x} = -P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - \dot{m} V_i - F_d; \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial (\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} + \frac{\partial (u_l (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l P_l))}{\partial x} = -P_i V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - \dot{m} E_i - F_d V_i - Q_i, \quad (1.7)$$

где $\alpha_g + \alpha_l = 1$; полная энергия $E_K = e_K + 1/2 u_K^2$ (e_K – внутренняя энергия).

Индекс g относится к термодинамическим величинам, описывающим состояние газа, индекс l – жидкости. Интерфейсные переменные, описывающие состояние смеси, имеют индекс i .

Левые части уравнений (1.2–1.7) выражают законы сохранения массы, импульса и энергии, записанные для каждой фазы смеси.

Правые части уравнений системы (1.2–1.7) содержат слагаемые, связанные с изменением массы данной фазы \dot{m} , силой трения F_d , конвективным теплообменом Q_i ; неконсервативные члены: $P_i(\partial\alpha_g/\partial x)$ и $P_i V_i(\partial\alpha_g/\partial x)$. Интерфейсные давление P_i и скорость V_i представляют усредненные по контрольному объему величины давления и скорости. Моделирование этих величин в общем виде представляет значительные трудности, и для их оценки используют упрощающие расчет физические предположения, допустимые для данной конкретной задачи.

После прохождения ударной волны через двухфазную среду компоненты смеси оказываются в неравновесном по давлению состоянии: $P_g \neq P_l$. Далее в двухфазной среде начинают развиваться релаксационные процессы, в результате которых давление обеих фаз уравнивается: $P_g = P_l$. Скорость достижения равновесного состояния зависит от свойств каждого компонента и от топологии смеси. В работе [5] было теоретически доказано существование переменной μ (динамическая вязкость сжатия, $\text{Па}^{-1}\text{с}^{-1}$), которая характеризует скорость достижения равновесного состояния в двухфазной системе. После прохождения ударной волны релаксационные процессы вызывают вариации объемной фракции и энергий каждого компонента смеси [2]:

$$\frac{\partial\alpha_g}{\partial t} = \mu(P_g - P_l); \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} = \mu P_i (P_g - P_l);$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} = -\mu P_i (P_g - P_l). \quad (1.9)$$

Условие равенства давлений на границе раздела двух несмешанных сред также удовлетворяет системе (1.8), (1.9) при мгновенной релаксации давления, т. е. $\mu \rightarrow \infty$. Таким образом, учет релаксационных процессов и интерфейсных условий для давления осуществляется при помощи одной и той же системы уравнений (1.8–1.9). Процесс релаксации скорости в двухфазной среде может происходить медленнее, чем релаксация давления. С одной стороны, время этого процесса зависит от скорости релаксации давления, а с другой – определяется вязкими свойствами компонентов среды. В системе (1.1–1.7) сила трения F_d выражает эффекты вязкости и может быть представлена в таком же виде, как и член, описывающий релаксационные процессы [2]:

$$F_d = \lambda(u_l - u_g), \quad (1.10)$$

где λ – положительный параметр или функция. Условие равенства скоростей на границе раздела двух несмешанных сред можно учесть, решая систему (1.1–1.7) с величиной $\lambda \rightarrow \infty$.

С учетом членов, описывающих процессы релаксации скорости и давления, система (1.1–1.7) примет вид:

$$\frac{\partial\alpha_g}{\partial t} + V_i \frac{\partial\alpha_g}{\partial x} = \mu(P_g - P_l); \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial x} = \dot{m}; \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g P_g)}{\partial x} = P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \dot{m} V_i + \lambda(u_l - u_g); \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} + \frac{\partial(u_g (\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g P_g))}{\partial x} = \\ & = P_i V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \dot{m} E_i + \mu P_i (P_g - P_l) + \lambda V_i (u_l - u_g) + Q_i; \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial x} = -\dot{m}; \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l P_l)}{\partial x} = -P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - \dot{m} V_i - \lambda(u_l - u_g); \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} + \frac{\partial(u_l (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l P_l))}{\partial x} = \\ & = -P_i V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - \dot{m} E_i - \mu P_i (P_g - P_l) - \lambda V_i (u_l - u_g) - Q_i \end{aligned} \quad (1.17)$$

В данной работе значение интерфейсного давления для двухфазной смеси оценивается следующим образом:

$$P_i = \sum_{k=1}^2 \alpha_k P_k, \quad (1.18)$$

то есть равным давлению смеси. В качестве оценки интерфейсной скорости берется скорость центра масс:

$$V_i = \frac{\sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k u_k}{\sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k}. \quad (1.19)$$

Именно с этой скоростью распространяются участки среды после релаксации всех неравновесных процессов в системе. Значения давлений жидкости и газа вычисляются из соответствующих уравнений состояния.

2. Математические свойства

Численное решение системы (1.11–1.17) можно получить при помощи последовательного применения операторов:

$$U_i^{n+1} = L_S^{\Delta t} L_R^{\Delta t} L_h^{\Delta t} U_i^n, \quad (2.1)$$

где $L_h^{\Delta t}$ – оператор, используемый для решения (1.11–1.17) с учетом только неконсервативных членов в правой части; $L_R^{\Delta t}$ – релаксационный оператор и $L_S^{\Delta t}$ – опе-

ратор, учитывающий влияние теплообмена и изменения массы на параметры каждого из компонентов смеси. Выражения для членов, описывающих изменения массы и теплообмен, получаются эмпирически и зависят от вида конкретного процесса (испарение, конденсация, взрыв). Влияние этих членов на поведение двухфазной среды можно рассматривать отдельно и в данной работе они не рассматриваются.

Система (1.11–1.17) с учетом только неконсервативных членов в правой части, записанная в примитивных переменных, имеет вид [2]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0,$$

где $W = (\alpha_g, \rho_g, u_g, P_g, \rho_l, u_l, P_l)^T$,

$$A(W) = \begin{pmatrix} V_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_g}{\alpha_g}(V_i - u_g) & u_g & \rho_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{P_g - P_i}{\alpha_g \rho_g} & 0 & u_g & \frac{1}{\rho_g} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_g c_{gi}^2}{\alpha_g}(V_i - u_g) & 0 & \rho_g c_g^2 & u_g & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_l}{\alpha_l}(V_i - u_l) & 0 & 0 & 0 & u_l & \rho_l & 0 \\ \frac{P_l - P_i}{\alpha_l \rho_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_l & \frac{1}{\rho_l} \\ \frac{\rho_l c_{li}^2}{\alpha_l}(V_i - u_l) & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_l c_l^2 & u_l \end{pmatrix},$$

$$c_k^2 = \frac{\frac{P_k}{\rho_k^2} - \frac{\partial e_k}{\partial \rho_k} \Big|_{P_k}}{\frac{\partial e_k}{\partial P_k} \Big|_{\rho_k}}, \quad c_{ki}^2 = \frac{\frac{P_i}{\rho_k^2} - \frac{\partial e_k}{\partial \rho_k} \Big|_{P_k}}{\frac{\partial e_k}{\partial P_k} \Big|_{\rho_k}}.$$

Матрица Якоби $A(W)$ имеет действительные собственные значения: $\lambda_1 = V_i$; $\lambda_2 = u_g + c_g$; $\lambda_3 = u_g - c_g$; $\lambda_4 = u_g$; $\lambda_5 = u_l + c_l$; $\lambda_6 = u_l - c_l$; $\lambda_7 = u_l$. Таким образом, оператор $L_h^{\Delta t}$ является гиперболическим.

3. Метод решения

Рассмотрим уравнения (1.1–1.4) приведенной выше системы с учетом только неконсервативных членов в правой части. Последние три уравнения этой системы (1.5–1.7) представляют подсистему, идентичную уравнениям (1.2–1.4).

Запишем уравнения (1.1–1.4) в следующем виде (индексы g и l опущены):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + V_i \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0; \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = H(U) \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad (3.2)$$

где

$$U = (\alpha \rho, \alpha \rho u, \alpha \rho E)^T;$$

$$F = (\alpha \rho u, \alpha \rho u^2 + \alpha P, u(\alpha \rho E + \alpha P))^T;$$

$$H = (0, P_i, P_i V_i)^T.$$

В явном виде система уравнений (3.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\rho u)}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial(\alpha\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\rho u^2 + \alpha P)}{\partial x} &= P_i \frac{\partial\alpha}{\partial x}; \quad (3.3) \\ \frac{\partial(\alpha\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(u(\alpha\rho E + \alpha P))}{\partial x} &= P_i V_i \frac{\partial\alpha}{\partial x}. \end{aligned}$$

Для решения системы уравнений (3.3) применялась методика кусочно-параболической аппроксимации PPM [3], [6], которая ранее использовалась для моделирования однофазных газодинамических течений. Численное решение системы (3.3) выполнялось в два этапа. На первом этапе находилось решение записанной в лагранжевых массовых координатах системы (3.3) на лагранжевой расчетной сетке, а на втором – найденные значения термодинамических параметров интерполировались на эйлерову сетку. Основное преимущество такого способа решения заключается в том, что эту методику легко обобщить на двумерный или трехмерный случай, так как в лагранжевых массовых переменных решение рассматриваемой многомерной задачи можно свести к решению локальных одномерных задач Римана вдоль соответствующих направлений при помощи метода расщепления по направлениям [6].

В системе уравнений (3.3) перейдем от эйлеровых координат к лагранжевым массовым переменным. Для этого вычтем из второго уравнения первое, умноженное на скорость, получим:

$$\alpha\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(\alpha P)}{\partial x} + P_i \frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

Разделим обе части получившегося уравнения на $\alpha\rho$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha\rho} \frac{\partial(\alpha P)}{\partial x} + \frac{P_i}{(\alpha\rho)} \frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

Аналогично, вычтя из третьего уравнения системы (3.3) первое, умноженное на E , и разделив обе части полученного выражения на $\alpha\rho$, получим:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha\rho} \frac{\partial(\alpha P u)}{\partial x} + \frac{P_i V_i}{\alpha\rho} \frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

С учетом сделанных преобразований система (3.3) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\rho u)}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\alpha\rho} \frac{\partial(\alpha P)}{\partial x} + \frac{P_i}{(\alpha\rho)} \frac{\partial\alpha}{\partial x}; \\ \frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{1}{\alpha\rho} \frac{\partial(\alpha P u)}{\partial x} + \frac{P_i V_i}{(\alpha\rho)} \frac{\partial\alpha}{\partial x}. \end{aligned}$$

Теперь перейдем к лагранжевым массовым переменным: $s = \int_{x_0}^x \rho(y, t) dy$, используя соотношения, связывающие производные по эйлеровым и массовым координатам [7]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_L} - \alpha\rho u \frac{\partial}{\partial s}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \alpha\rho \frac{\partial}{\partial s}.$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\frac{1}{\alpha\rho}\right)}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial s} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha P)}{\partial s} &= P_i \frac{\partial\alpha}{\partial s}; \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha P u)}{\partial s} &= P_i V_i \frac{\partial\alpha}{\partial s}. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Или

$$\frac{\partial U_L}{\partial t} + \frac{\partial F_L(U_L)}{\partial s} = H(U_L) \frac{\partial\alpha}{\partial s}, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} U_L &= \left(\frac{1}{\alpha\rho}, u, E \right)^T; \\ F_L(U_L) &= (-u, \alpha P, \alpha P u); \\ H(U_L) &= (0, P_i, P_i V_i)^T. \end{aligned}$$

На одномерной сетке с шагом Δs_i и на временном интервале Δt численная схема для решения системы (3.5) будет иметь вид:

$$(U_{\text{л}})_i^{n+1} = (U_{\text{л}})_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left((F_{\text{л}})_{i+1/2}^n - (F_{\text{л}})_{i-1/2}^n \right) + \Delta t H_{\text{л}} (U_{\text{л}})_i^n \Delta,$$

где Δ соответствует разностной аппроксимации производной $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$.

Способ разностной аппроксимации производной $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$ можно получить из требования, чтобы численное решение системы уравнений (3.4) удовлетворяло следующему усло-

вию [1]: если в двухфазной среде в равновесном состоянии давление и скорость каждой фазы в начальный момент времени совпадают, то они должны оставаться неизменными и в любой следующий момент времени.

Запишем численную схему для второго уравнения системы (3.4) в явном виде:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (\alpha_{i+1/2}^n P_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n P_{i-1/2}^n) + \Delta t P_i \Delta. \quad (3.6)$$

Пусть $P_g = P_l = P_i = P$ и $u_g = u_l = V_i = u$, тогда, полагая в уравнении (3.6) $P_{i-1/2}^n = P_{i+1/2}^n = P$, получим, что равенство $u_i^{n+1} = u_i^n = u$ возможно, если $\Delta = \frac{\alpha_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n}{\Delta s_i}$. Аналогично, рассмат-

ривая численную схему для первого и третьего уравнений системы (3.4), получим: $\frac{1}{(\alpha \rho)_i^n} = \frac{1}{(\alpha \rho)_i^{n+1}}$, $e_i^n(P, \rho_i^n) = e_i^{n+1}(P, \rho_i^{n+1})$. Совместное решение этих двух уравнений возможно, если:

$$\alpha_i^n = \alpha_i^{n+1} = \alpha, \quad (3.7)$$

т. е. на лагранжевой сетке значения объемных фракций не изменяются. Таким образом, получили следующую численную схему:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_i^{n+1}} &= \frac{1}{\rho_i^n} + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n); \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (\alpha_{i+1/2}^n P_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n P_{i-1/2}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta s_i} P^i (\alpha_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n); \\ E_i^{n+1} &= E_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (\alpha_{i+1/2}^n P_{i+1/2}^n u_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n P_{i-1/2}^n u_{i-1/2}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta s_i} P^i V^i (\alpha_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n). \end{aligned}$$

Аналогичная разностная схема получается и для другого компонента смеси. Значения скорости $u_{i\pm 1/2}$ и давления $(\alpha P)_{i\pm 1/2}$ в целых точках ищутся с использованием метода кусочно-параболической аппроксимации (РРМ) для решения задачи Римана о распаде разрыва на границе ячеек [3]. Значения $\alpha_{i\pm 1/2}$ также находятся при помощи аппроксимации профиля объемной доли методом РРМ.

Значения объемной фракции на эйлеровой сетке α_i^{n+1} находятся при численном решении уравнения адвекции (3.1):

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n - (V_i)_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (\alpha_{i+1/2}^n - \alpha_{i-1/2}^n).$$

Для учета релаксационных процессов в двухфазной среде необходимо решить систему $U_i^{n+1} = L_R^{\Delta t} U_i^n$ (см. п. 2) или в явном виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \mu(P_g - P_l); \\
 \frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} &= 0; \\
 \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} &= \lambda(u_l - u_g); \\
 \frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} &= \mu P_i(P_g - P_l) + \lambda V_i(u_l - u_g); \\
 \frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} &= 0; \\
 \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial t} &= -\lambda(u_l - u_g); \\
 \frac{\partial(\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} &= -\mu P_i(P_g - P_l) - \lambda V_i(u_l - u_g).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для системы (3.8) можно записать: $\partial U / \partial t = S(U)$,

где $U = (\alpha_g, \alpha_g \rho_g, \alpha_g \rho_g u_g, \alpha_g \rho_g E_g, \alpha_l \rho_l, \alpha_l \rho_l u_l, \alpha_l \rho_l E_l)^T$;

$$\begin{aligned}
 S(U) &= (\mu(P_g - P_l), 0, \lambda(u_l - u_g), V_i \lambda(u_l - u_g) - P_i \mu(P_g - P_l); \\
 &0, -\lambda(u_l - u_g), -V_i \lambda(u_l - u_g) + P_i \mu(P_g - P_l))^T.
 \end{aligned}$$

Для большей наглядности можно представить оператор $S(U)$ в виде суммы двух интегральных операторов: $S(U) = V(U) + PR(U)$, где операторы

$$V(U) = (0, 0, \lambda(u_l - u_g), V_i \lambda(u_l - u_g), 0, -\lambda(u_l - u_g), -V_i \lambda(u_l - u_g))^T \text{ и}$$

$$PR(U) = (\mu(P_g - P_l), 0, 0, -P_i \mu(P_g - P_l), 0, 0, P_i \mu(P_g - P_l))^T$$

содержат члены, описывающие процессы релаксации скорости и давления, соответственно. Решение дифференциальной задачи (3.8) находится путем последовательного применения описанных интегральных операторов: $U_i^{n+1} = L_{PR}^{\Delta t} L_V^{\Delta t} U_i^n$. Рассмотрим сначала метод решения системы уравнений:

$$U_i^{n+1} = L_V^{\Delta t} U_i^n \tag{3.9}$$

при бесконечно большом значении коэффициента λ , что соответствует мгновенной релаксации скорости. В явном виде система (3.9) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= 0; \\
 \frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} &= 0; \\
 \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} &= \lambda(u_l - u_g); \\
 \frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} &= \lambda V_i(u_l - u_g);
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial t} &= -\lambda(u_l - u_g); \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} &= -\lambda V_l(u_l - u_g).\end{aligned}$$

С учетом второго и третьего уравнения системы (3.10) для импульса газовой фракции преобразуется к виду:

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{\lambda}{\alpha_g \rho_g} (u_l - u_g). \quad (3.11)$$

Аналогично можно преобразовать уравнение для импульса жидкой фракции:

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} = \frac{\lambda}{\alpha_l \rho_l} (u_l - u_g). \quad (3.12)$$

Вычитая уравнение (3.11) из (3.12) и интегрируя полученное выражение, можно получить:

$$u_l - u_g = (u_{l0} - u_{g0}) e^{-\lambda \left[\frac{1}{\alpha_g \rho_g} + \frac{1}{\alpha_l \rho_l} \right] t}, \quad (3.13)$$

где индекс 0 обозначает величины, полученные после решения гиперболической системы уравнений (3.1), (3.2).

Решение уравнения (3.13) при бесконечно большом значении λ на ограниченном временном интервале Δt совпадает с решением уравнения, имеющего тот же вид (3.13), но с конечным значением параметра λ на неограниченном интервале времени. Так как λ положительный коэффициент, то решение уравнения

$$\alpha_g \rho_g \frac{\partial e_g}{\partial t} + \lambda u_g (u_l - u_g) = \lambda V_l (u_l - u_g) \quad \text{или} \quad \frac{\partial e_g}{\partial t} = (V_l - u_g) \frac{\partial u_g}{\partial t}.$$

Окончательно получим:

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} = V_l \frac{\partial u_g}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{u_g^2}{2} \right)}{\partial t}. \quad (3.16)$$

Приближенное интегрирование этого уравнения приводит к следующему результату:

$$e_g = e_{g0} + \bar{V}_l (u_g - u_{g0}) - 1/2 (u_g^2 - u_{g0}^2).$$

(3.13) имеет вид:

$$u_l - u_g = 0. \quad (3.14)$$

Суммирование уравнений выражений (3.11) и (3.12) приводит к следующему

результату: $\alpha_g \rho_g \frac{\partial u_g}{\partial t} + \alpha_l \rho_l \frac{\partial u_l}{\partial t} = 0.$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$\alpha_g \rho_g \frac{\partial u_g}{\partial t} + \alpha_l \rho_l \frac{\partial u_l}{\partial t} = 0. \quad \text{Далее с учетом}$$

(3.14) можно получить следующее выражение для скоростей компонентов смеси после процесса релаксации:

$$u = u_g = u_l = \frac{\alpha_g \rho_g u_{g0} + \alpha_l \rho_l u_{l0}}{\alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l}. \quad (3.15)$$

Найдем изменение внутренней энергии.

Уравнение для полной энергии газовой

фазы: $\frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} = \lambda V_l (u_l - u_g)$ с учетом

уравнений для массы: $\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} = 0$ и им-

пульса: $\alpha_g \rho_g \frac{\partial u_g}{\partial t} = \lambda (u_l - u_g)$ можно пре-

образовать к следующему виду:

Оценивая $\bar{V}_i = (V_i^n + V_i^{n+1})/2$ и $V_i^{n+1} = u_g$, получим:

$$e_g = e_{g0} + 1/2(V_i^n - u_{g0})(u_g - u_{g0}) = e_{g0} + 1/2(u_g - u_{g0})^2. \quad (3.17)$$

Аналогичное выражение получается и для внутренней энергии жидкой фазы.

Выражения (3.15) и (3.17) позволяют вычислить значения скорости и внутренней энергии каждого из компонент смеси после процесса релаксации скорости.

Рассмотрим метод численного решения системы уравнений

$$U_i^{n+1} = L_{PR}^{\Delta t} U_i^n \quad (3.18)$$

при бесконечно большом значении параметра μ . В явном виде (3.18) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \mu(P_g - P_l); \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} &= \mu P_i(P_g - P_l); \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l u_l)}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} &= -\mu P_i(P_g - P_l). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Предположение о мгновенной релаксации давления необходимо при вычислении термодинамических параметров на границе раздела сред и в случае, если теоретически или экспериментально неизвестно значение параметра μ . Предположим, что дина-

мическая вязкость сжатия имеет конечную величину, и будем искать стационарное решение системы уравнений (3.19).

Для газовой фракции эта система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \mu(P_g - P_l); \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} &= \mu P_i(P_g - P_l). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Уравнение для полной энергии с учетом первых трех уравнений можно привести к следующему виду: $\frac{\partial e_g}{\partial t} = -\frac{P_i}{\alpha_g \rho_g} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t}$. Интегрируя это уравнение, получим:

$$e_g^* \left(P_g^*, \rho_g^* = \frac{\alpha_g^0 \rho_g^0}{\alpha_g^*} \right) = e_g^0 (P_g^0, \rho_g^0) - \frac{\bar{P}_i}{\alpha_g^0 \rho_g^0} (\alpha_g^* - \alpha_g^0), \quad (3.21)$$

где величины с верхним индексом 0 соответствуют значениям, полученным после применения гиперболического оператора (2.1) и интегрального релаксационного оператора для скоростей (3.9); верхний индекс * используется для обозначения устано-

вившихся после процесса релаксации давления равновесных значений; \bar{P}_i обозначает среднее интерфейсное давление. Аналогичное уравнение получается для жидкой фракции:

$$e_l^* \left(P_l^*, \rho_l^* = \frac{\alpha_l^0 \rho_l^0}{1 - \alpha_g^*} \right) = e_l^0 (P_l^0, \rho_l^0) + \frac{\bar{P}_i}{\alpha_l^0 \rho_l^0} (\alpha_g^* - \alpha_g^0). \quad (3.22)$$

Среднее интерфейсное давление оценивается как: $\bar{P}_i = 0.5(P_i + P_i^0)$, где P_i оценивается при помощи (1.18) во время итерационной процедуры для состояния $(\alpha_g^*, \rho_g^*, P_g^*)$. Таким образом, для нахождения стационарного решения системы (3.19) необходимо

решить систему уравнений (3.21), (3.22) при $P_g^* = P_l^* = P^*$. Численное решение указанной системы с двумя искомыми параметрами (α_g^*, P^*) находится при помощи итерационного метода Ньютона.

4. Результаты

При помощи представленного выше алгоритма были решены следующие тестовые одномерные задачи: задача о распаде разрыва в ударной трубе; задача о водяном кране [8].

В задаче о распаде разрыва левая часть одномерной трубы длиной 1 м заполнена

водой, а правая — воздухом. Каждый из компонентов смеси описывается уравнением состояния: $P = (\gamma - 1)\rho e - \gamma p$, где γ и p — постоянные параметры. Начальное состояние каждой из фаз задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_l &= 1000 \text{ кг/м}^3; P_l = 10^9 \text{ Па}; u_l = 0 \text{ м/с}; \\ \gamma_l &= 4,4; \pi_l = 6 \times 10^8 \text{ Па}; \alpha_l = 1 - \varepsilon; \varepsilon = 10^{-8}, & \text{если } x < 0,7 \text{ м;} \\ \rho_g &= 50 \text{ кг/м}^3; P_g = 10^5 \text{ Па}; u_g = 0 \text{ м/с}; \\ \gamma_g &= 1,4; \pi_g = 0 \text{ Па}; \alpha_g = 1 - \varepsilon; \varepsilon = 10^{-8}, & \text{если } x > 0,7 \text{ м.} \end{aligned}$$

На рис. 1 и 2 продемонстрированы результаты численного расчета для момента времени 229 мкс на сетке из 200 и 400 точек, соответственно. На этих рисунках помещены графики для объемной доли газа, плотности двухфазной смеси, а также внутренних энергий, давлений, скоростей и плотностей каждого компонента. На графиках для

плотности смеси, давлений и скоростей каждой фазы сплошной линией представлено точное аналитическое решение. Из графиков для давлений и скоростей видно, что эти величины совпадают для обоих компонентов смеси, что является результатом учета релаксационных процессов.

Рис. 1 и 2 показывают, что численное решение сводится к аналитическому решению.

Постановка задачи о водяном кране состоит в следующем: в вертикальной трубе длиной 12 м находится вода, окруженная воздухом; на верхней границе трубы заданы объемные

доли каждой из фаз, скорость газа задается равной нулю; на нижней границе поддерживаются атмосферные условия. Под действием сил гравитации происходит сужение водяной струи. Начальные условия для данной задачи имеют вид:

вода — $\rho_l = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $P_l = 10^5 \text{ Па}$; $u_l = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\alpha_l = 0,8$;

газ — $\rho_g = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $P_g = 10^5 \text{ Па}$; $u_g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\alpha_g = 0,2$.

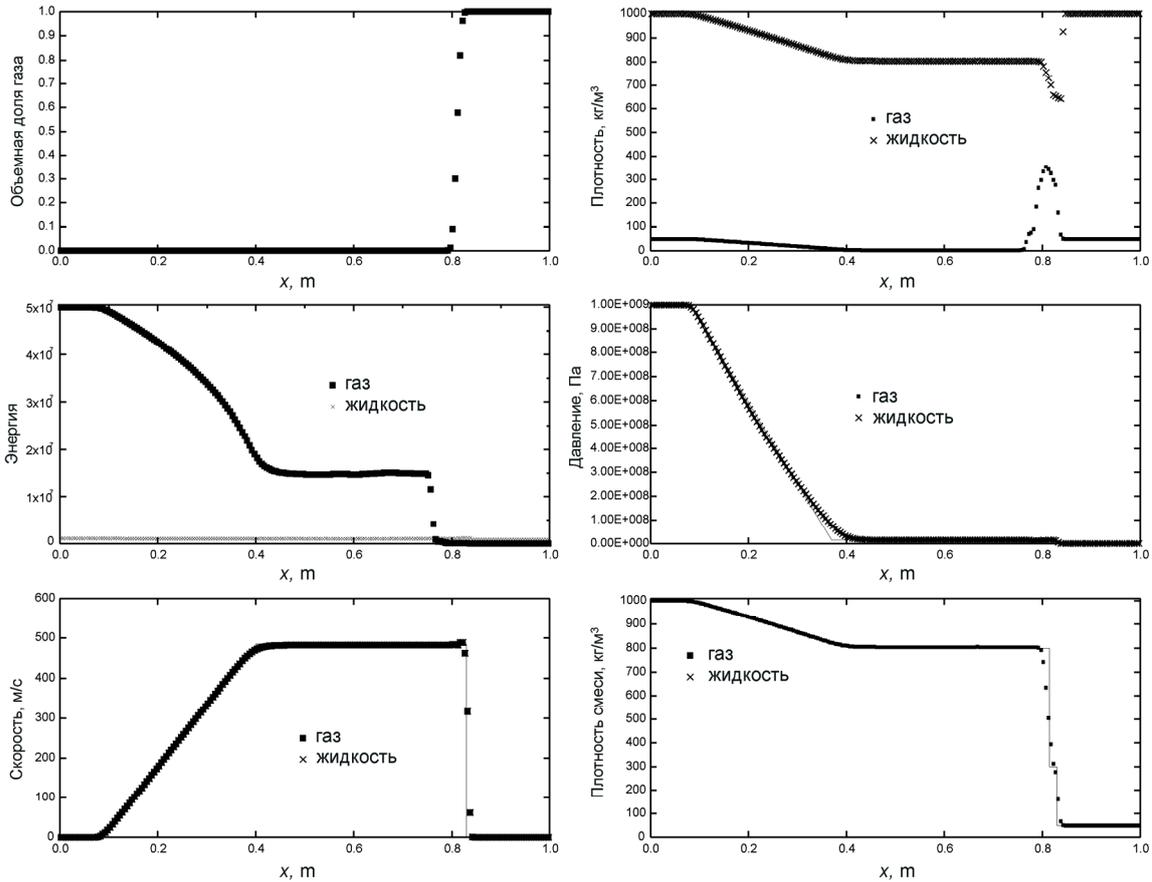


Рис. 1. Сравнение расчетного и точного решений задачи об ударной трубе для расчетной сетки из 100 точек

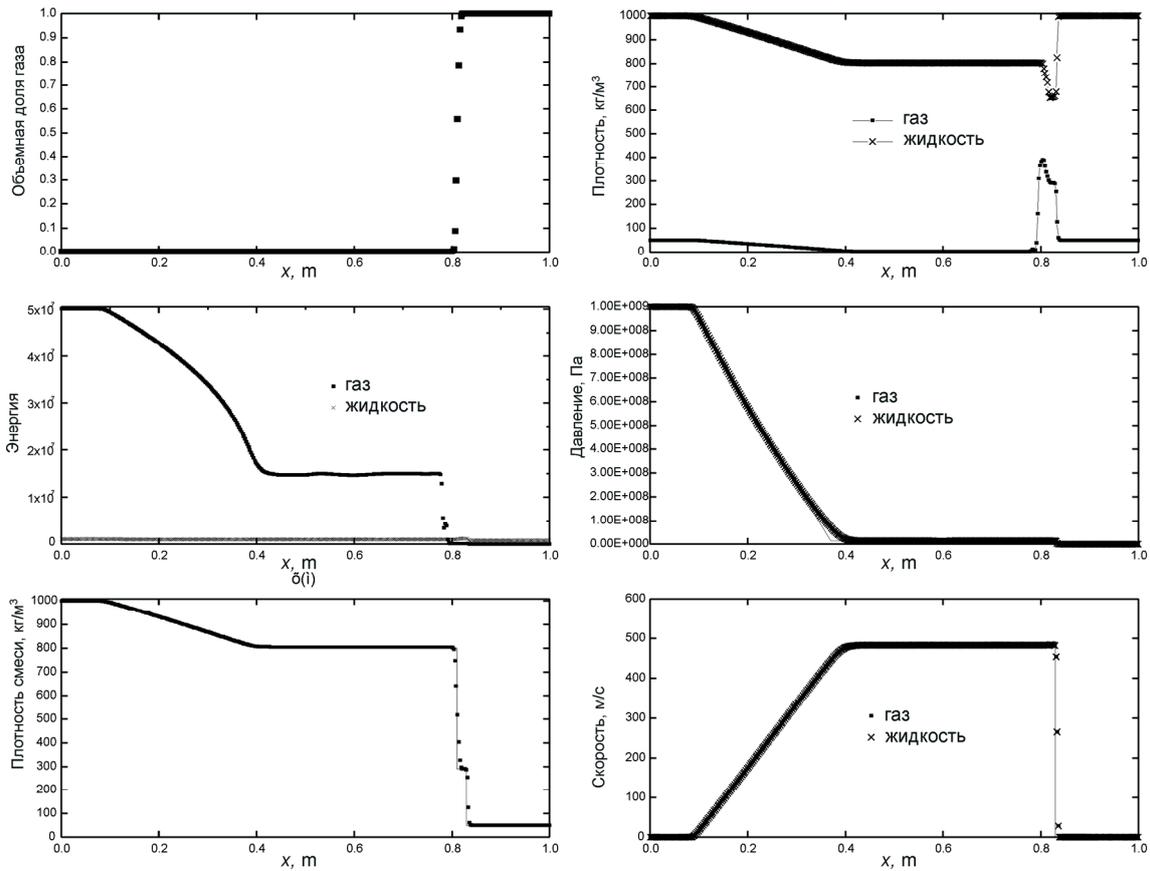


Рис. 2. Сравнение расчетного и точного решений задачи об ударной трубе для расчетной сетки из 400 точек

Граничные условия выглядят следующим образом:

$$u_l = 10 \frac{\text{М}}{\text{с}}; \quad \alpha_l = 0,8.$$

верхняя граница:

$$u_g = 0 \frac{\text{М}}{\text{с}}; \quad \alpha_g = 0,2.$$

нижняя граница:

$$P_l = 10^5 \text{ Па};$$

$$P_g = 10^5 \text{ Па}.$$

При проведении вычислений использовались следующие параметры уравнений состояния:

$$\gamma_l = 4,4; \quad \pi_l = 6 \times 10^6; \quad \gamma_g = 1,4; \quad \pi_g = 0.$$

Предполагая, что жидкость несжимаема и давление газа постоянно, можно получить выражение для изменения объемной доли газа [9]:

$$\alpha_g(x, t) = \begin{cases} 1 - \frac{(1 - \alpha_g^0) u_l^0}{\sqrt{2gx + (u_l^0)^2}}, & x \leq u_l^0 t + \frac{gt^2}{2}; \\ 0,2, & x > u_l^0 t + \frac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

где g – ускорение свободного падения.

При нахождении численного решения этой задачи процесс релаксации скорости не рассматривался, так как компоненты

двухфазной смеси имеют различные скорости. Сравнение результатов расчета на сетке из 200 точек с точным решением представлено на рис. 3.

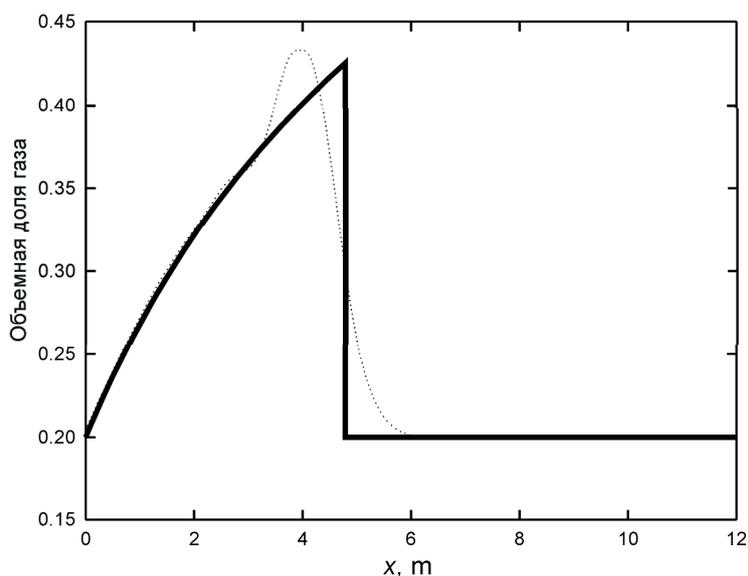


Рис. 3. Задача о водяном кране: сравнение точного и численного решения

Недостаточно хорошее разрешение разрыва профиля объемной фракции газа связано с тем, что скорость жидкости, с которой распространяется разрыв, на несколько порядков меньше скоростей акустических волн, что приводит к очень малым временным шагам и накоплению численных ошибок. С другой стороны, давление газа не являет-

ся постоянным вдоль трубы, заставляя газ подниматься вверх, размазывая интерфейсную поверхность. Тем не менее данный тестовый расчет показывает, что описанная методика позволяет рассчитывать двухфазные потоки, в которых каждый компонент имеет собственную скорость.

Заключение

- Адаптированная для расчета двухфазных смесей методика кусочно-параболической аппроксимации [3] позволяет решать газодинамические задачи, в которых присутствуют резкие разрывы профилей термодинамических величин и контактные разрывы.
- Описанную методику легко обобщить на многомерные случаи при помощи метода расщепления по направлениям.
- Решение многомерной задачи сводится к последовательному решению одномерных задач вдоль соответствующих направлений.
- Решение одномерной задачи для одного направления используется в качестве начального условия при решении одномерной задачи для другого направления [6].

Литература

1. *Abgrall, R.* How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: A quasi conservative approach // *J. Comp. Phys.* 1996. № 125. P. 150–160.
2. *Saurel, R., and R. Abgrall.* A multiphase Godunov method for multifluid and multiphase flows // *J. Comp. Phys.* 1999. № 150. P. 425–467.
3. *Woodward, P.R., and P. Collela.* The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations // *J. Comp. Phys.* 1984. № Vol. 54, no. 1.
4. *Drew, D.A., S.L. Passman.* Theory of Multicomponent fluids // *Applied Mathematical Sciences.* — New work: Springer, 1998. Vol. 135.
5. *Baer, M.R., and J.W. Nunziato.* A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // *Int. J. Multiphase Flow.* 1986. Vol. 12, no. 6. P.861–889.
6. *Ёлкина, Н.В., А.А. Леонов, В.В. Чуданов.* Моделирование сверхзвуковых течений методом кусочно-параболической аппроксимации. (Препринт / Ин-т проблем безопас. развития атом. энергетики РАН, № ИБРАЭ-2002-06). — М.: ИБРАЭ РАН, 2002.
7. *Самарский, А.А., Ю.П. Попов.* Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1980.
8. *Ransom, V.H.* Numerical benchmark tests // *Multiphase Science and Technology.* Vol. 3. Washington: Hemisphere, 1987.
9. *Coquel, F., K.E. Amine, E. Godlewski, B. Perthame, P. Rascole.* A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows // *J. Comp. Phys.* 1997. № 136. P. 272–288.

Применение РРМ-методики для моделирования двухфазных сжимаемых сред с учетом микроинерции

А. А. Леонов, В. В. Чуданов

Введение

Типичным примером среды с микроинерцией является жидкость, содержащая пузырьки с газом. Со времени появления первых работ (начало 60-х гг.) по построению математических моделей, описывающих поведение жидкости с пузырьками газа, был разработан и предложен целый ряд новых моделей. Существует, по крайней мере, два различных метода получения основных уравнений для двухфазной среды. Первый основывается на локальном усреднении законов сохранения. Второй – вариационный подход, основан на использовании принципа наименьшего действия Гамильтона. Преимущество

второго подхода заключается в том, что основные уравнения можно получить на основе одной известной скалярной функции средних величин переменных или системы Лагранжиана.

В данной работе рассматривается модель двухфазной среды с учетом микроинерции [1], полученная в результате использования вариационного подхода для случая двухфазной среды, в которой каждый компонент является сжимаемым и имеет свою собственную температуру. Этот случай связан с моделированием перехода от возгорания к взрыву в пористых материалах.

1. Математическая модель

Принцип наименьшего действия Гамильтона состоит в том, что среди множества возможных траекторий системы между двумя фиксированными точками в координатном

пространстве реализуется траектория, соответствующая экстремуму действия Гамильтона, которое определяется как интеграл Лагранжиана по времени.

1.1. Основные обозначения

Рассматриваемая двухфазная смесь состоит из двух несмешивающихся компонентов. Каждый α -й компонент имеет собственные средние величины: локальной скорости \bar{u}_α ; локальной плотности ρ_α^0 ; парциальной плотности ρ_α ; объемной доли φ_α ; локальной энтропии единицы массы η_α ; локальной внутренней энергии единицы массы $\varepsilon_\alpha(\rho_\alpha^0, \eta_\alpha)$ и локальной температуры θ_α , $\alpha=1,2$. Парциальные плотности ρ_α определяются следующим образом:

$$\rho_\alpha = \varphi_\alpha \rho_\alpha^0. \quad (1.1)$$

Эти плотности удовлетворяют уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha \bar{u}_\alpha) = 0. \quad (1.2)$$

В случае, когда процессами диссипации энергии можно пренебречь, величина локальной энтропии вдоль траекторий сохраняется:

$$\frac{d_\alpha}{dt} \eta_\alpha = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\frac{d_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \nabla.$$

Объемные парциальные энтропии определяются из выражения:

$$S_\alpha = \rho_\alpha \eta_\alpha \quad (1.4)$$

и удовлетворяют уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} S_\alpha + \text{div}(S_\alpha \vec{u}_\alpha) = 0. \quad (1.5)$$

Объемные доли φ_α удовлетворяют следующему соотношению:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1, \quad (1.6)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют непрерывной и дисперсной фазе, соответственно.

Обозначим $\varphi_2 = \varphi$, тогда

$$\varphi_1 = 1 - \varphi. \quad (1.7)$$

Также предполагается, что для каждого компонента справедливо соотношение Гиббса:

$$\theta_\alpha d\eta_\alpha = d\varepsilon_\alpha + p_\alpha d\left(\frac{1}{\rho_\alpha}\right), \quad (1.8)$$

где $p_\alpha(\rho_\alpha^0, \eta_\alpha)$ среднее локальное давление.

1.2 Полная энергия и Лагранжиан двухфазной системы

В [1] полная энергия определяется следующим выражением:

$$E = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha \frac{|\vec{u}_\alpha|^2}{2} + \frac{m}{2} \left(\frac{d_i \varphi}{dt} \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha \varepsilon_\alpha \left(\frac{\rho_\alpha}{\varphi_\alpha}, \frac{S_\alpha}{\rho_\alpha} \right) + (\rho_1 + \rho_2) e(\varphi) + \frac{k}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{d}{2} |\vec{u}_2 - \vec{u}_1|^2, \quad (1.9)$$

где первый член представляет кинетическую энергию поступательного движения;

второй — соответствует кинетической энергии пульсаций,

$$\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_i \nabla,$$

где индекс i обозначает поверхность раздела, \vec{u}_i — интерфейсная скорость (выражение для скорости \vec{u}_i должно быть выбрано априори);

— третий член представляет внутреннюю энергию единицы объема;

— четвертый соответствует потенциальной энергии, связанной с внутренней структурой, выражение для функции e должно быть известно априори;

— пятый учитывает макроскопическую неоднородность смеси;

— шестой представляет кинетическую энергию, связанную с эффектом переноса дополнительной массы.

Лагранжиан системы записывается в обычной форме $L = T - U$, где T — кинетическая энергия, U — потенциальная энергия. Из выражения для полной энергии (1.9) можно получить:

$$T = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha \frac{|\vec{u}_\alpha|^2}{2} + \frac{m}{2} \left(\frac{d_i \varphi}{dt} \right)^2 + \frac{d}{2} |\vec{u}_2 - \vec{u}_1|^2,$$

$$U = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha \varepsilon_\alpha \left(\frac{\rho_\alpha}{\varphi_\alpha}, \eta_\alpha \right) + \rho e(\varphi) + \frac{k}{2} |\nabla \varphi|^2. \quad (1.10)$$

При проведении вычислений более удобно вместо переменных \vec{u}_α и η_α использовать новые переменные: парциальный импульс $\vec{j}_\alpha = \rho_\alpha \vec{u}_\alpha$ и парциальную энтропию S_α . Тогда, Лагранжиан системы:

$$L = L(\vec{j}_1, \vec{j}_2, \rho_1, \rho_2, S_1, S_2, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi). \quad (1.11)$$

1.3. Основные уравнения

Пусть вычислительная область в пространстве-времени определена как $B \times [t_2, t_1]$. При нахождении экстремума действия Гамильтона: $\int_{t_1}^{t_2} dt \int_B L d\vec{x}$ в координатных пространствах $(\vec{j}_\alpha, \rho_\alpha, S_\alpha)$ и $(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi)$ можно получить уравнения для импульса каждого из компонентов смеси [1]:

$$\rho_\alpha \frac{\partial \vec{K}_\alpha}{\partial t} + \text{rot} \vec{K}_\alpha \times \vec{j}_\alpha - \rho_\alpha \nabla R_\alpha + S_\alpha \nabla \theta_\alpha = 0, \alpha=1,2, \quad (1.12)$$

где $\delta_{1\alpha}$ – символ Кронеккера. В данном выражении индекс «1» относится к жидкой фазе, а индекс «2» к газовой. Значение интерфейсной скорости \vec{u}_i выбрано равной скорости жидкой фазы смеси \vec{u}_1 . Это означает, что кинетическая энергия пульсаций $\frac{m}{2} \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right)^2$ предполагается сосредоточенной в жидкой фазе. Это предположение

С использованием (1.15) можно найти явный вид уравнения (1.12). Для этого выразим явным образом коэффициенты (1.13):

$$\begin{aligned} \vec{K}_\alpha &= \frac{\partial L}{\partial \vec{j}_\alpha} = \vec{u}_\alpha + m \frac{d_1 \varphi}{dt} \frac{\nabla \varphi}{\rho_1} \delta_{1\alpha}; \\ R_\alpha &= \frac{\partial L}{\partial \rho_\alpha} = -\frac{|\vec{u}_\alpha|^2}{2} - m \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right) \frac{\vec{u}_1 \nabla \varphi}{\rho_1} \delta_{1\alpha} - \frac{\partial}{\partial \rho_\alpha} (\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) - e(\varphi); \\ \theta_\alpha &= -\frac{\partial L}{\partial S_\alpha} = \frac{\partial}{\partial S_\alpha} (\rho_\alpha \varepsilon_\alpha). \end{aligned}$$

где

$$\vec{K}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \vec{j}_\alpha}, R_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \rho_\alpha}, \theta_\alpha = -\frac{\partial L}{\partial S_\alpha} \quad (1.13)$$

и уравнение для объемной доли φ [1]:

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \right) - \text{div} \left(\frac{\partial L}{\partial (\nabla \varphi)} \right) = 0. \quad (1.14)$$

Если пренебречь пятым и шестым членами в выражении для полной энергии (1.9), то соответствующая функция Лагранжа будет иметь вид:

$$L = \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{|\vec{j}_\alpha|^2}{2\rho_\alpha} + \frac{m}{2} \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right)^2 \delta_{1\alpha} \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha \varepsilon_\alpha - \rho e(\varphi), \quad (1.15)$$

допустимо лишь при малой объемной доле газовых пузырьков в смеси. Для упрощения окончательного выражения также предполагается, что коэффициент m является функцией лишь одной переменной $m = m(\varphi)$, хотя в общем случае $m = m(\varphi, \rho_1, \rho_2, S_1, S_2, |\vec{u}_1 - \vec{u}_2|)$. Этот параметр представляет массу жидкости, которая приходит в движение под влиянием пульсации газовых пузырьков.

$$\text{С учетом полученных выражений и соотношения } \text{rot} \vec{K}_\alpha \times \vec{j}_\alpha = \vec{j}_\alpha \nabla \vec{K}_\alpha - \left(\frac{\partial \vec{K}_\alpha}{\partial \vec{x}} \right)^T \vec{j}_\alpha \quad (1.12)$$

примет вид:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha \frac{d_\alpha \vec{K}_\alpha}{dt} - \left(\frac{\partial \vec{K}_\alpha}{\partial \vec{x}} \right)^T \vec{j}_\alpha - \rho_\alpha \nabla \left(-\frac{|\vec{u}_\alpha|^2}{2} - m \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right) \frac{\vec{u}_1 \nabla \varphi}{\rho_1} \delta_{1\alpha} - \frac{\partial}{\partial \rho_\alpha} (\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) - e(\varphi) \right) + \\ + S_\alpha \nabla \left(\frac{\partial}{\partial S_\alpha} (\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Учитывая соотношение Гиббса (1.8) и определение потенциала Гиббса:

$$\mu_\alpha = \varepsilon_\alpha + \frac{p_\alpha \varphi_\alpha}{\rho_\alpha} - \theta_\alpha \eta_\alpha,$$

легко получить: $d(\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) = \theta_\alpha dS_\alpha + \mu_\alpha d\rho_\alpha - p_\alpha d\varphi_\alpha$ и $S_\alpha d\theta_\alpha + \rho_\alpha d\mu_\alpha = \varphi_\alpha dp_\alpha$. С учетом последнего выражения и соотношений $\frac{\partial}{\partial \rho_\alpha} (\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) = \mu_\alpha$, $\frac{\partial}{\partial S_\alpha} (\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) = \theta_\alpha$ можно привести (1.16)

к виду:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha \frac{d_\alpha \vec{K}_\alpha}{dt} - \left(\frac{\partial \vec{K}_\alpha}{\partial \vec{x}} \right)^T \vec{j}_\alpha + \left(\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial \vec{x}} \right)^T + \varphi_\alpha d\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \frac{de}{d\varphi} \nabla \varphi + \\ + \rho_\alpha \nabla \left(m \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right) \frac{\vec{u}_1 \nabla \varphi}{\rho_1} \right) \delta_{1\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Рассмотрим случай $\alpha = 2$, тогда $\vec{K}_2 = \vec{u}_2$, $\delta_{12} = 0$ и уравнение (1.17) для импульса второго компонента смеси с учетом соотношения:

$$\text{div}(\vec{a} \otimes \vec{b}) = \vec{b} \text{div} \vec{a} + \frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \quad (1.18)$$

будет выглядеть следующим образом [1]:

$$\frac{\partial \rho_2 \vec{u}_2}{\partial t} + \text{div}(\rho_2 \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_2 + \varphi_2 p_2 I) = \left(p_2 - \rho_2 \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi. \quad (1.19)$$

Для случая $\alpha = 1$ имеем $\vec{K}_1 = \vec{u}_1 + m \frac{d_1 \varphi}{dt} \frac{\nabla \varphi}{\rho_1}$. Далее, используя (1.18), можно показать, что уравнение для импульса первого компонента смеси будет иметь вид:

$$\frac{\partial \rho_1 \vec{K}_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 \vec{u}_1 \otimes \vec{K}_1 + \varphi_1 p_1 I) = - \left(p_1 - \rho_1 \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi - m \frac{d_1 \varphi}{dt} \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \vec{x}} \right)^T \nabla \varphi. \quad (1.20)$$

Или выражая \vec{K}_1 через \vec{u}_1 , получим [1]:

$$\rho_1 \frac{d_1 \vec{u}_1}{dt} + \nabla(p_1 \varphi_1) + \rho_1 \frac{d_1}{dt} \left(m \frac{d_1 \varphi}{dt} \frac{1}{\rho_1} \right) \nabla \varphi + m \frac{d_1 \varphi}{dt} \nabla \left(\frac{d_1 \varphi}{dt} \right) = - (p_1 + \rho_1 \frac{de}{d\varphi}) \nabla \varphi. \quad (1.21)$$

Используя Лагранжиан (1.15), можно получить из (1.14) микроструктурное уравнение для объемной доли газа в явном виде:

$$\frac{d_1}{dt} \left(\frac{m(\varphi)}{2\rho_1^2} \left(\frac{d_1\varphi}{dt} \right)^2 \right) = \left(p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi} \right) \frac{d_1\varphi}{dt} \frac{1}{\rho_1^2}. \quad (1.22)$$

Обозначим $\tau = \frac{d_1\varphi}{dt} \sqrt{m}$, тогда уравнение (1.22) можно записать в виде квазилинейной системы уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{d_1\varphi}{dt} = \frac{\tau\rho_1}{\sqrt{m}}; \\ \frac{d_1\tau}{dt} = \frac{p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi}}{\rho_1\sqrt{m}}. \end{cases} \quad (1.23)$$

С учетом (1.23) уравнение для импульса первого компонента смеси (1.21) будет иметь вид:

$$\rho_1 \frac{d_1 \vec{u}_1}{dt} + \nabla \left(p_1 \varphi_1 + \frac{m}{2} \left(\frac{d_1\varphi}{dt} \right)^2 \right) = - \left(p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi. \quad (1.24)$$

Уравнения (1.2), (1.5), (1.19), (1.23) и (1.24) образуют полную записанную через обычные физические переменные систему уравнений, описывающих поведение двухфазной смеси:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \vec{u}_2) = 0; \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \vec{u}_1) = 0; \\ \rho_2 \frac{d_2 \vec{u}_2}{dt} + \nabla(p_2 \varphi_2) = \left(p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi \equiv p_i \nabla \varphi; \\ \rho_1 \frac{d_1 \vec{u}_1}{dt} + \nabla \left(p_1 \varphi_1 + \frac{\tau^2 \rho_1^2}{2} \right) = - \left(p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi} \right) \nabla \varphi \equiv -p_i \nabla \varphi; \\ \frac{d_1\varphi}{dt} = \frac{\tau\rho_1}{\sqrt{m}}; \\ \frac{d_1\tau}{dt} = \frac{p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi}}{\rho_1\sqrt{m}}; \\ \frac{d_2\eta_2}{dt} = 0; \\ \frac{d_1\eta_2}{dt} = 0. \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Здесь через $p_i = p_2 - p_1 - \rho \frac{de}{d\varphi}$ обозначено среднее интерфейсное давление.

В работе [1] показано, что система (1.25) имеет вещественные собственные значения и является гиперболической при условии $(u_2 - u_1)^2 \neq c_2^2$ (c_2 – скорость звука второго компонента смеси). Для численных вычис-

лений более удобно преобразовать последние два уравнения, выражающие закон сохранения энтропии, в уравнения для энергии. Используя соотношение Гиббса (1.8), уравнение непрерывности (1.2) и уравнение для энтропии (1.3), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_\alpha \varepsilon_\alpha + \frac{|\vec{j}_\alpha|^2}{2\rho_\alpha} \right) + \operatorname{div} \left(\vec{j}_\alpha \left(\frac{|\vec{u}_\alpha|^2}{2} + \varepsilon_\alpha + p_\alpha \frac{\varphi_\alpha}{\rho_\alpha} \right) \right) = \bar{u}_\alpha \left(\rho_\alpha \frac{d_\alpha \bar{u}_\alpha}{dt} + \nabla(p_\alpha \varphi_\alpha) \right) - p_\alpha \frac{d_\alpha \varphi_\alpha}{dt}.$$

С учетом уравнения для импульса второго компонента будем иметь [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_2 \left(\varepsilon_2 + e + \frac{|\vec{u}_2|^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho_2 \vec{u}_2 \left(\varepsilon_2 + e + \frac{|\vec{u}_2|^2}{2} + p_2 \frac{\varphi_2}{\rho_2} \right) \right) = -p_i \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (1.26)$$

С учетом уравнения для импульса первого компонента и (1.23) получим [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_1 \left(\varepsilon_1 + e + \frac{\rho_1 \tau^2}{2} + \frac{|\vec{u}_1|^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho_1 \vec{u}_1 \left(\varepsilon_1 + e + \rho_1 \tau^2 + \frac{|\vec{u}_1|^2}{2} + p_1 \frac{\varphi_1}{\rho_1} \right) \right) = p_i \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (1.27)$$

Система (1.25), в которой уравнения, выражающие закон сохранения энтропии, заменены уравнениями для энергии, имеет сходство с моделью, предложенной в работе [2]. Отличия заключаются в присутствии «турбулентных» членов в уравнениях для импульса и энергии непрерывной фазы и

в уравнении для объемной доли. В системе (1.25) вместо уравнения переноса для φ присутствует система двух уравнений для объемной доли газа и аналога радиальной скорости пульсации τ газовых пузырьков.

1.4. Учет диссипации

Дальнейшие вычисления проводятся без учета потенциальной энергии $e(\varphi)$, связанной с внутренней структурой. Тогда интерфейсное давление $p_i = p_2$. Для этого случая рассмотрим диссипативную модель с учетом трения между жидкой и газообразной фазами, схлопывания газовых пузырьков и внешней силы \vec{g} . Система (1.25) с учетом диссипации будет иметь вид (1.28). Член $\lambda(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$ представляет силу трения между газовой и жидкой фазами; λ – положительный коэффициент, зависящий от свойств среды; p_μ – сила трения, вызывающая схло-

пывание пузырьков. Для случая сферических пузырьков выражение для p_μ

имеет следующий вид [3]: $p_\mu = \frac{4\mu_l}{R} \frac{dR}{dt}$,

где μ_l – динамическая вязкость жидкости; R – радиус пузырьков газа, связанный с объемной долей газа φ и концентрацией пузырьков N соотношением

$\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3 N$. Полагая $N \approx \text{const}$ и заме-

няя $\frac{d}{dt}$ на $\frac{d_1}{dt}$, получим:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{d_1 \tau}{dt} = \frac{p_2 - p_1 - p_\mu}{\rho_1 \sqrt{m}}; \\
 & \frac{d_1 \varphi}{dt} = \frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}}; \\
 & \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \bar{u}_2) = 0; \\
 & \frac{\partial(\rho_2 \bar{u}_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \bar{u}_2 \otimes \bar{u}_2 + \varphi_2 p_2 I) = p_2 \nabla \varphi + \rho_2 \bar{g} + \lambda(\bar{u}_1 - \bar{u}_2); \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{|\bar{u}_2|^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho_2 \bar{u}_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{|\bar{u}_2|^2}{2} + p_2 \frac{\varphi_2}{\rho_2} \right) \right) = \\
 & = -p_2 \left(\frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}} - \bar{u}_1 \nabla \varphi \right) + \lambda \bar{u}_1 (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) + \rho_2 u_2 \bar{g}; \\
 & \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \bar{u}_1) = 0; \\
 & \frac{\partial(\rho_1 \bar{u}_1)}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho_1 \bar{u}_1 \otimes \bar{u}_1 + \left(\frac{\rho_1^2 \tau^2}{2} + p_1 \varphi_1 \right) I \right) = p_2 \nabla \varphi + \rho_2 \bar{g} + \lambda(\bar{u}_2 - \bar{u}_1); \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{\rho_1 \tau^2}{2} + \frac{|\bar{u}_1|^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho_1 \bar{u}_1 \left(\varepsilon_1 + \rho_1 \tau^2 + \frac{|\bar{u}_1|^2}{2} + p_1 \frac{\varphi_1}{\rho_1} \right) \right) = \\
 & = p_2 \left(\frac{\tau \rho_1}{\sqrt{m}} - \bar{u}_1 \nabla \varphi \right) - \lambda \bar{u}_1 (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) + \rho_1 u_1 \bar{g};
 \end{aligned} \right. \quad (1.28)$$

$$p_\mu = \frac{4\tau\rho_1\mu_l}{3\varphi\sqrt{m}}. \quad (1.29)$$

В случае слабых вариаций N для вычисления p_μ также используется (1.29), а изменения концентрации оцениваются из уравнения:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N \bar{u}_2) = 0. \quad (1.30)$$

Уравнение (1.30) является независимым от системы (1.28) и не изменяет ее математических свойств [2].

2. Численный метод

Численное решение системы (1.28) было выполнено для одномерного случая с использованием метода РРМ [4]. Обобщение на двумерный и трехмерный случаи может быть проведено с использованием метода расщепления по направлениям и не представляет принципиальных затруднений [5].

Введем индексы «l» и «g» для обозначения жидкой и газовой фазы, соответственно. Также будем использовать следующие обо-

значения: $u_1 = u_l$, $u_2 = u_g$, $\varphi_1 = \varphi_l$, $\varphi_2 = \varphi_g$,

$\rho_1 = \varphi_l \rho_l$ и $\rho_2 = \varphi_g \rho_g$. В одномерном случае система (1.28) будет иметь вид (2.1), где $E_g = \varepsilon_g + u_g^2/2$; $E_l = \varepsilon_l + u_l^2/2 + \varphi_l \rho_l \tau^2/2$.

Численное решение системы (2.1) находится при последовательном применении гиперболического оператора $L_h^{\Delta t}$ и инте

грального оператора L_S^M для учета релаксационных членов: $U_i^{n+1} = L_S^M L_h^M U_i^n$, где

$$U = (\tau, \varphi_g, \varphi_g \rho_g, \varphi_g \rho_g, \varphi_g \rho_g u_g, \varphi_g \rho_g E_g, \varphi_l \rho_l, \varphi_l \rho_l u_l, \varphi_l \rho_l E_l) T,$$

т.е. численное решение системы (2.1)

сводится к последовательному решению систем уравнений (2.2), (2.3) и (2.4). Значения переменных U , найденные при решении данной системы уравнений на текущем временном шаге, используются в качестве начальных значений при решении следующей системы уравнений.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} + u_l \frac{\partial \tau}{\partial x} &= \frac{p_g - p_l - p_\mu}{\varphi_l \rho_l \sqrt{m}}; \\ \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} + u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} &= \frac{\tau \varphi_l \rho_l}{\sqrt{m}}; \\ \frac{\partial \varphi_g \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g)}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g^2 + \varphi_g p_g)}{\partial x} &= p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_g \rho_g g + \lambda (u_l - u_g); \\ \frac{\partial (\varphi_g \rho_g E_g)}{\partial t} + \frac{\partial (u_g (\varphi_g \rho_g E_g + \varphi_g p_g))}{\partial x} &= \\ &= p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_g \rho_g u_g g + \lambda u_l (u_l - u_g) - p_g \frac{\tau \varphi_l \rho_l}{\sqrt{m}}; \\ \frac{\partial \varphi_l \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_l \rho_l u_l)}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial (\varphi_l \rho_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\varphi_l \rho_l u_l^2 + \varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial x} &= -p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_l \rho_l g - \lambda (u_l - u_g); \\ \frac{\partial (\varphi_l \rho_l E_l)}{\partial t} + \frac{\partial \left(u_l \left(\varphi_l \rho_l E_l + \varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right) \right)}{\partial x} &= \\ &= -p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_l \rho_l u_l g - \lambda u_l (u_l - u_g) - p_g \frac{\tau \varphi_l \rho_l}{\sqrt{m}}. \end{aligned} \right. \quad (2.1)$$

Рассмотрим метод численного решения гиперболической системы (2.2). Решение системы (2.2) находилось с использованием метода РРМ, изначально предназначенного для моделирования простых газодинамических течений. Основное преимущество такого способа решения заключается в том, что эту методику легко обобщить на двумерный или трехмерный случай, так как в лагранжевых массовых переменных решение рассматриваемой многомерной задачи

можно свести к решению локальных одномерных задач Римана вдоль соответствующих направлений [5]. В системе уравнений (2.2) перейдем от эйлеровых координат к лагранжевым массовым переменным, используя соотношения, связывающие производные по эйлеровым и массовым координатам:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_{II}} - (\varphi \rho) u \frac{\partial}{\partial s}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = (\varphi \rho) \frac{\partial}{\partial s}.$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial \tau}{\partial t} + u_l \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0; \\
 & \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} + u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} = 0; \\
 & \frac{\partial (\varphi_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g)}{\partial x} = 0; \\
 & \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g^2 + \varphi_g p_g)}{\partial x} = p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_g \rho_g g; \\
 & \frac{\partial (\varphi_g \rho_g E_g)}{\partial t} + \frac{\partial (u_g (\varphi_g \rho_g E_g + \varphi_g p_g))}{\partial x} = p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_g \rho_g u_g g; \\
 & \frac{\partial \varphi_l \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_l \rho_l u_l)}{\partial x} = 0; \\
 & \frac{\partial (\varphi_l \rho_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\varphi_l \rho_l u_l^2 + \varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial x} = -p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_l \rho_l g; \\
 & \frac{\partial (\varphi_l \rho_l E_l)}{\partial t} + \frac{\partial \left(u_l \left(\varphi_l \rho_l E_l + \varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right) \right)}{\partial x} = -p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \varphi_l \rho_l u_l g.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{p_g - p_l - p_\mu}{\varphi_l \rho_l \sqrt{m}}; \\
 & \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} = \frac{\tau \varphi_l \rho_l}{\sqrt{m}}; \\
 & \frac{\partial (\varphi_g \rho_g)}{\partial t} = 0; \\
 & \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g)}{\partial t} = 0; \\
 & \frac{\partial (\varphi_g \rho_g E_g)}{\partial t} = -p_g \frac{\tau \varphi_l \rho_l}{\sqrt{m}}; \\
 & \frac{\partial \varphi_l \rho_l}{\partial t} = 0; \\
 & \frac{\partial (\varphi_l \rho_l u_l)}{\partial t} = 0; \\
 & \frac{\partial (\varphi_l \rho_l E_l)}{\partial t} = p_g \frac{\tau \varphi_l \rho_l}{\sqrt{m}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0; \\
 & \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} = 0; \\
 & \frac{\partial (\varphi_g \rho_g)}{\partial t} = 0; \\
 & \frac{\partial (\varphi_g \rho_g u_g)}{\partial t} = \lambda (u_l - u_g); \\
 & \frac{\partial (\varphi_g \rho_g E_g)}{\partial t} = \lambda u_l (u_l - u_g); \\
 & \frac{\partial \varphi_l \rho_l}{\partial t} = 0; \\
 & \frac{\partial (\varphi_l \rho_l u_l)}{\partial t} = -\lambda (u_l - u_g); \\
 & \frac{\partial (\varphi_l \rho_l E_l)}{\partial t} = -\lambda u_l (u_l - u_g).
 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

В результате получим следующую систему уравнений в лагранжевых массовых координатах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d_l \tau}{dt} = 0; \\ \frac{d_l \varphi_g}{dt} = 0; \\ \frac{d_g \left(\frac{1}{\varphi_g \rho_g} \right)}{dt} + \frac{\partial u_g}{\partial s_g} = 0; \\ \frac{d_g u_g}{dt} + \frac{\partial (\varphi_g p_g)}{\partial s_g} = p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_g} + g; \\ \frac{d_g E_g}{dt} + \frac{\partial (\varphi_g p_g u_g)}{\partial s_g} = p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_g} + u_g g; \\ \frac{d_l \left(\frac{1}{\varphi_l \rho_l} \right)}{dt} + \frac{\partial u_l}{\partial s_l} = 0; \\ \frac{d_l u_l}{dt} + \frac{\partial (\varphi_l p_l)}{\partial s_l} + \frac{\partial \left(\frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial s_l} = -p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l} + g; \\ \frac{d_l E_l}{dt} + \frac{\partial (\varphi_l p_l u_l)}{\partial s_l} + \frac{\partial \left(u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial s_l} = -p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l} + u_l g, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

где $\frac{d_l}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_l \frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{d_g}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x}$ — лагранжевы производные. Выделим из (2.5) уравнения, которые содержат дифференцирование по лагранжевым координатам жидкой фазы S_l или полные производные на лагранжевой сетке:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d_l \tau}{dt} = 0; \\ \frac{d_l \varphi_g}{dt} = 0; \\ \frac{d_l \left(\frac{1}{\varphi_l \rho_l} \right)}{dt} + \frac{\partial u_l}{\partial s_l} = 0; \\ \frac{d_l u_l}{dt} + \frac{\partial (\varphi_l p_l)}{\partial s_l} + \frac{\partial \left(\frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial s_l} = -p_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l} + g; \\ \frac{d_l E_l}{dt} + \frac{\partial (\varphi_l p_l u_l)}{\partial s_l} + \frac{\partial \left(u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)}{\partial s_l} = -p_g u_l \frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l} + u_l g. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Оставшиеся три уравнения для газовой фазы из (2.5) образуют подсистему системы (2.6) и решаются аналогично. На лагранжевой сетке для жидкой фазы величины τ и φ не меняются. Получим численную схему для решения последних трех уравнений. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} U' &= \left(\frac{1}{\varphi_l \rho_l}, u_l, E_l \right)^T; \\ F' &= \left(u_l, \varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2}, \varphi_l p_l u_l + u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)^T; \\ H' &= (0, -p_g, -p_g u_l)^T; \\ H'' &= (0, g, u_l g)^T. \end{aligned} \quad (2.7)$$

На одномерной сетке с шагом Δs_l на временном шаге Δt получим в обозначениях (2.7) следующую систему разностных уравнений:

$$(U')_i^{n+1} = (U')_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left((F')_{i+1/2}^n - (F')_{i-1/2}^n \right) + \Delta t \times [H'((U')_i^n) \times \Delta + H''], \quad (2.8)$$

где Δ соответствует численной аппроксимации производной $\frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l}$. Способ разност-

ной аппроксимации производной $\frac{\partial \varphi_g}{\partial s_l}$

можно найти из условия, чтобы численное решение системы уравнений (2.8) удовлетворяло следующему принципу: если в двухфазной среде в равновесном состоянии давление и скорость каждой фазы в начальный момент

времени совпадают, то они останутся неизменными и в любой следующий момент времени. Полагая в (2.8)

$(p_l)_{i-1/2}^n = (p_l)_{i+1/2}^n = (p_l)_i^n = P$, получим, что равенство $(u_l)_i^{n+1} = (u_l)_i^n = u$ возмож-

но, если $\Delta = \left(\frac{(\varphi_l)_{i+1/2}^n - (\varphi_l)_{i-1/2}^n}{\Delta s_i} \right)$. Таким

образом, получили следующую разностную схему для решения (2.8):

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{(\varphi_l \rho_l)_i^{n+1}} = \frac{1}{(\varphi_l \rho_l)_i^n} + \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left((u_l)_{i+1/2}^n - (u_l)_{i-1/2}^n \right); \\ & (u_l)_i^{n+1} = (u_l)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left(\left(\varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i=1/2}^n - \left(\varphi_l p_l + \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i-1/2}^n \right) - \\ & \quad - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (p_g)_i^n \left((\varphi_l)_{i+1/2}^n - (\varphi_l)_{i-1/2}^n \right) + g \Delta t; \\ & (E_l)_i^{n+1} = (E_l)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} \left(\left(u_l \varphi_l p_l + u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i=1/2}^n - \left(u_l \varphi_l p_l + u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i-1/2}^n \right) - \\ & \quad - \frac{\Delta t}{\Delta s_i} (u_l p_g)_i^n \left((\varphi_l)_{i+1/2}^n - (\varphi_l)_{i-1/2}^n \right) + u_l g \Delta t. \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

Аналогичная разностная схема получается и для уравнений другой фазы. Значения скорости и давления в полуцелых точках ищутся с использованием метода РРМ и решения задачи Римана о распаде разрыва на границе ячеек [4]. Так как жидкость описывается уравнением состояния, отличным от уравнения идеального газа, то при решении задачи Римана для вычисления скорости звука использовалось выражение:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_l + \pi}{\rho_l}}, \quad (2.10)$$

которое можно получить с использованием уравнения состояния [2]: $p = (\gamma - 1)\rho e - \gamma\pi$, где e – внутренняя энергия; π – постоянный коэффициент. Значения производных

$$\frac{((\varphi_l)_{i+1/2}^n - (\varphi_l)_{i-1/2}^n)}{\Delta s_i},$$

$$\frac{\left(\left(\frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i+1/2}^n - \left(\frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i-1/2}^n \right)}{\Delta s_i} \text{ и}$$

$$\frac{\left(\left(u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i+1/2}^n - \left(u_l \frac{(\varphi_l \rho_l \tau)^2}{2} \right)_{i-1/2}^n \right)}{\Delta s_i}$$

3. Тестовые расчеты

Представленная в настоящей работе модель, впервые предложенная в [1], объединяет описание микроскопического и макроскопического движений двухфазной смеси при помощи гиперболической системы уравнений (1.28). С целью оценки применимости методики РРМ для численного решения (1.28) были проведены тестовые расчеты, аналогичные представленным в работе [1].

Первая тестовая задача связана с описанием поведения газовых пузырьков в трубке с жидкостью. Первоначально обе фазы однородны и находятся в покое. Каждая фаза имеет собственное давление. Таким обра-

находились с использованием метода кусочно-параболической аппроксимации (РРМ) профиля физических величин. После решения системы (2.9) и нахождения величин термодинамических параметров на лагранжевой сетке проводилась интерполяция найденных значений на эйлерову сетку с использованием вычисленных величин скоростей в полуцелых точках. Значения величин φ_g и τ на эйлеровой сетке из (2.6) также находились при помощи метода интерполяции.

Решение системы (2.3) находилось при помощи обычного численного интегрирования с двумя итерациями.

Для решения системы (2.4) использовался метод, предложенный в работе [2]. В результате, учитывая, что в данном случае $u_i \equiv u_g$ и $p_i \equiv p_l$, получаются следующие соотношения для новых значений скорости и внутренней энергии:

$$(u_l)_i^{n+1} = (u_g)_i^{n+1} = (u_g)_i^n; (e_g)_i^{n+1} = (e_g)_i^n;$$

$$(e_l)_i^{n+1} = (e_l)_i^n + \frac{1}{2} \left((u_l)_i^{n+1} - (u_g)_i^{n+1} \right)^2. \quad (2.11)$$

зом, любой пузырек газа является независимым и его поведение описывается уравнением Релея-Лемба [6]:

$$R\ddot{R} + 3/2\dot{R}^2 = (p_g - p_l) / \rho_l \sqrt{2}. \quad (3.1)$$

Это уравнение эквивалентно системе (1.23), если в ней пренебречь потенциальной энергией $e(\varphi)$, связанной с внутренней структурой, и сделать подстановки:

$$\rho_1^0 = \rho_l \approx \text{const}, \quad \varphi = \frac{4}{3} \pi R^3 N,$$

$$m(\varphi) = \frac{\rho_l}{3} \left(\frac{3}{4\pi N} \right)^{2/3} \varphi^{-1/3}.$$

Для сравнения аналитического решения (3.1) с численным решением системы (1.23) необходимо сделать следующие предположения:

- однородность смеси;
- постоянство давления жидкой фазы (2×10^5 Па).

Значения начальных параметров физических величин, используемые при расчете поведения газовых пузырьков в однородной смеси, следующие:

Жидкость

Плотность — 953 кг/см^3 ;

Параметры уравнения состояния — $\gamma=3$, $P_\infty=3,04 \times 10^8$ Па;

Давление — 2×10^5 Па.

Газ

Молярная масса — 146 г;

Отношение теплоемкостей — $\gamma=1,09$;

Начальная температура — $T=309$ К;

Начальное давление — 1×10^5 Па;

Объемная доля — 0,00232.

Результаты численного решения системы (1.23) совместно с решением уравнения Релея-Лемба (3.1) показаны на рис 1.

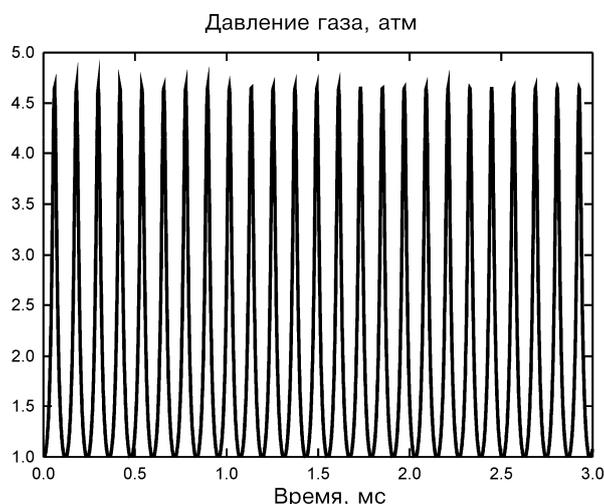


Рис. 1. Сравнение решений уравнения Релея-Лемба и решения системы (1.23) для однородной смеси

Вторая тестовая задача связана с моделированием распространения ударной волны в жидкой среде с пузырьками газа. Первые эксперименты по изучению распространения ударной волны в жидкой среде с пузырьками газа были проведены более 30 лет назад. Однако из-за недостатка точности измерений физических величин и присутствия растворенного газа, вызывающего образование новых пузырьков, первые экспериментальные данные имели

большую неопределенность. Более надежные данные были получены лишь несколько лет назад с использованием жидкой среды, в которой практически отсутствовали растворенные газы [7]. В этом эксперименте удалось обеспечить сохранение однородного начального пространственного распределения газовых пузырьков. Экспериментальная установка представляла собой вертикальную трубку (рис. 2).

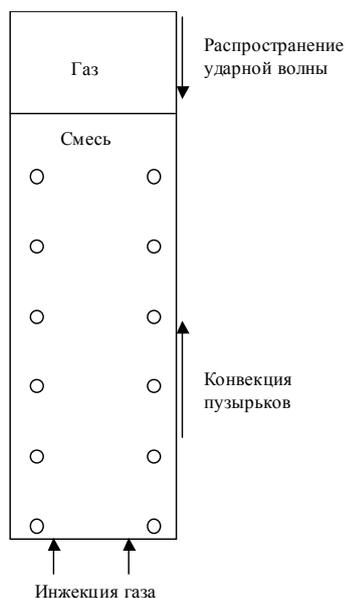


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

Пузырьки газа инжескировались с нижнего конца трубки и поднимались вверх за счет естественной и вынужденной конвекции. Ударная волна взаимодействовала со свободной поверхностью смеси

и распространялась вниз. Прибор, измеряющий давление, располагался на расстоянии 1,462 м от нижней части трубки. Полная длина трубки составляла 4 м.

Для сравнения с экспериментом по распространению ударной волны в жидкой среде с пузырьками газа использовалась одномерная модель (2.1). При проведении численного расчета использовались те же начальные значения физических величин (рис. 3), что и при проведении эксперимента. Начальная концентрация пузырьков газа задавалась однородной и равнялась $N = 2,42 \times 10^6 \text{ см}^{-3}$. Динамическая вязкость жидкой фазы принималась равной $\mu = 0,00415 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Так как объемная доля газа невелика и плотность жидкой фазы во много раз больше плотности газа, то относительным скольжением фаз можно пренебречь и использовать коэффициент релаксации скорости $\lambda \rightarrow +\infty$. Вместо моделирования ударной волны в газовой камере на входе трубки с двухфазной смесью поддерживалась постоянная скорость 0,427 м/с.

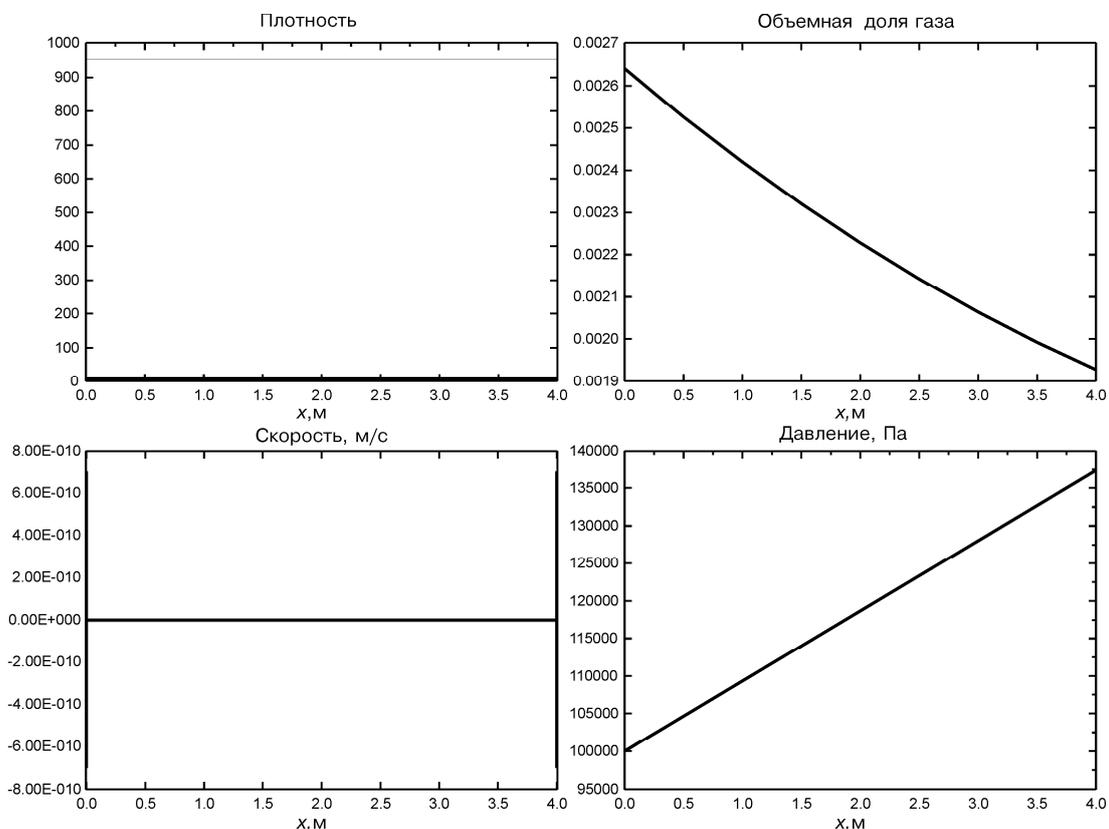


Рис. 3. Начальные условия для задачи взаимодействия ударной волны с двухфазной средой

Результаты численного расчета на сетке 2500 точек для моментов времени 1,92 ; 3,84 и 5,76 мс представлены на рис. 4 и 5. Из рисунков видно, что микроскопическое движение (пульсации) оказывает значительное влияние на макроскопические параметры двухфазной системы.

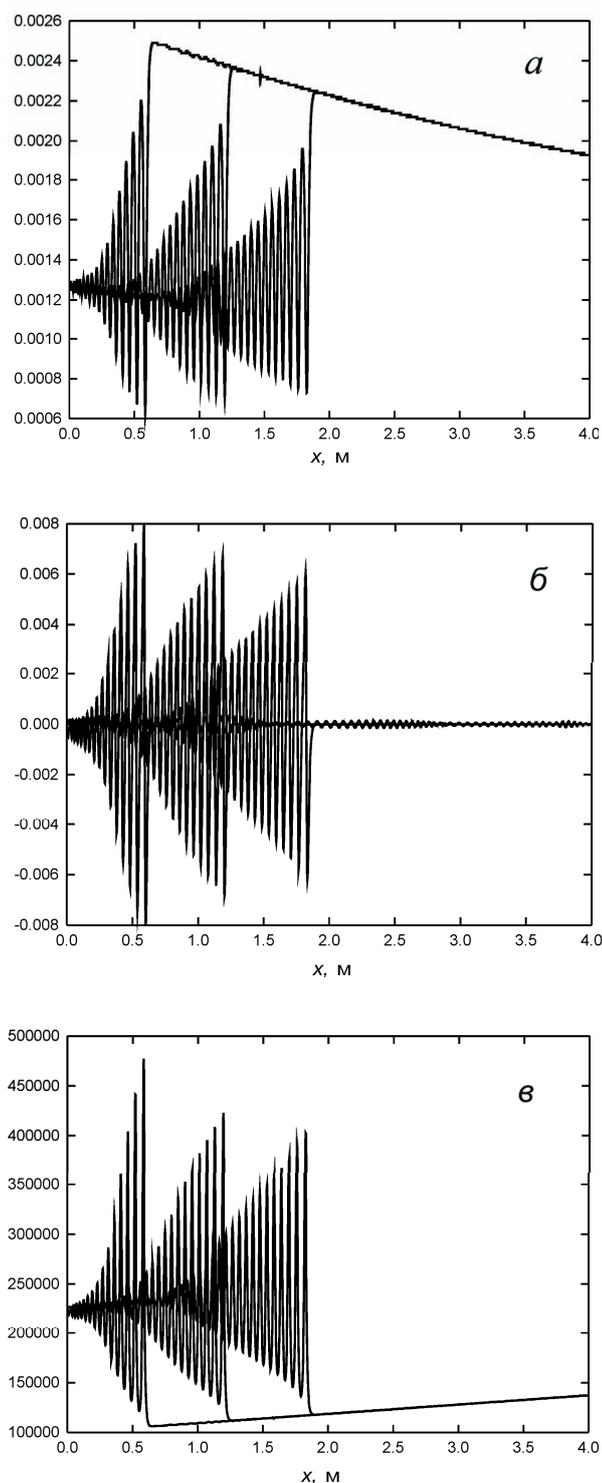


Рис. 4. Профили физических параметров двухфазной среды, полученные с использованием модели (2.1)
 a — объемная доля газа; $б$ — аналог радиальной скорости; $в$ — давление газа

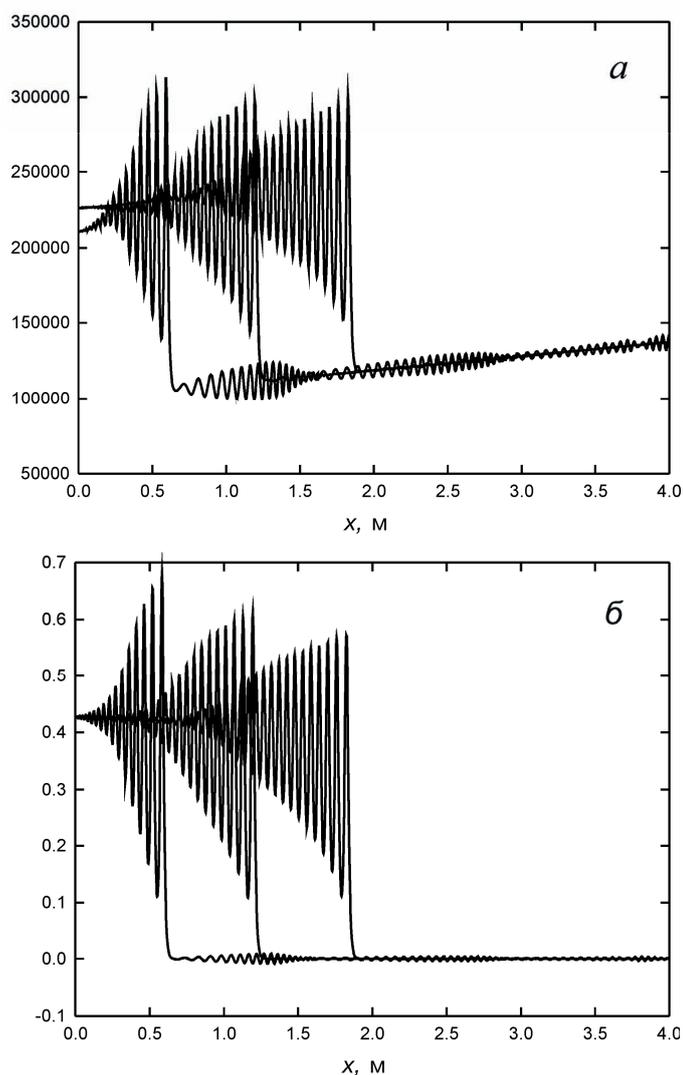


Рис. 5. Профили физических параметров двухфазной среды, полученные с использованием модели (2.1):

a — давление жидкости; *б* — скорость смеси

На рис. 6 приведено сравнение результатов расчета с экспериментальными данными, полученными при помощи прибора, расположенного на расстоянии 1,462 м от нижнего конца вертикальной трубки [7]. Очевидно хорошее совпадение первых трех осцилляций разности величин мгновенного и гидростатического давлений. Следующие осцилляции совпадают с ре-

зультатами расчета значительно хуже, однако расчетные значения остаются в пределах экспериментальной ошибки 15 КПа. Кроме того, модель (2.1) предсказывает существование волны-предвестника, которая действительно была обнаружена в другом эксперименте [8]. Аналогичные результаты, но полученные другим численным методом, представлены в работе [1].

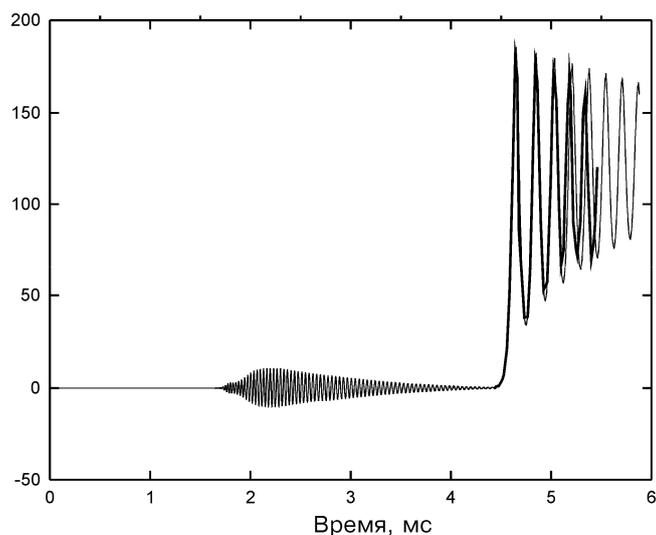


Рис. 6. Сравнение экспериментальных (жирная линия [7]) и расчетных (тонкая линия) данных

Заключение

Из сравнения с результатами, полученными в работе [1], можно сделать вывод о применимости модифицированной методики PPM для расчета двухфазных потоков. Обобщение на двумерный и трехмерный случаи может быть проведено с использованием метода расщепления по направлениям.

Литература

1. Gavriluk, S., and R. Saurel. Mathematical and Numerical modeling of Two-Phase Compressible Flows with Micro-Inertia // J. Comp. Phys. 2002. № 175. P. 326–360.
2. Saurel, R., and R. Abgrall. A multiphase Godunov method for multifluid and multiphase flows // J. Comp. Phys. 1999. № 150. P. 425–467.
3. Plesset, M.S., and A. Prosperetti. Bubble dynamics and cavitation // Ann. Rev. Fluid Mech. 1977. № 9. P. 145.
4. Woodward, P.R., and P. Collela. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations // J. Comp. Phys. 1984. № Vol. 54, no. 1.
5. Ёлкина, Н.В., А.А. Леонов, В.В. Чуданов. Моделирование сверхзвуковых течений методом кусочно-параболической аппроксимации. — (Препринт / Ин-т проблем безопас. развития атом. энергетики РАН, № IBRAE-2002-06). — М.: ИБРАЭ РАН, 2002.
6. Lamb, H. Hydrodynamics. — Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1932.
7. Kamada, M., N. Shimaura, F. Higashino, Y. Matsumoto. Shock waves in uniform bubbly flow // Phys. Fluids. 998. № 10(10). P. 2661.
8. Кердинский, В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. — Новосибирск: Наука, 2000.

Расчет ударно-волновых и интерфейсных процессов в сжимаемых двухфазных средах с применением модифицированной численной схемы Годунова

А. А. Леонов, В. В. Чуданов

Введение

В настоящей работе представлены расчеты двухфазных сжимаемых газодинамических течений для задачи о распаде разрыва, задачи о водяном кране, задачи о прохождении ударной волны через слой из частиц шарообразной формы и задачи о кавитации. Вычисления были выполнены с применением математической модели многофазных сжимаемых течений, впервые предложенной в работе [1] для расчетов детонации во взрывчатых гранулированных материалах. Затем эта модель была модифицирована в работе [2] для расчетов интерфейсных процессов между двумя чистыми (беспримесными) сжимаемыми средами.

Безусловная гиперболичность математической модели позволяет использовать один и тот же численный метод для расчетов различных физических задач, связанных как с наличием двух различных скоростей в двухфазной среде, так и с развитием интерфейсных процессов на границе раздела сред, имеющих одинаковые значения давления и скорости. В частности, при помощи этой модели могут быть описаны процессы истечения смеси воды и пара из трубы под высоким давлением при авариях трубопроводов, а также запроектные ситуации на АЭС, которые обычно характеризуются наличием больших градиентов термодинамических величин в двухфазных средах.

При реализации математической модели двухфазных сжимаемых газодинамических течений использовался римановский солвер [3],

учитывающий наличие неконсервативных членов, также особое внимание уделялось учету процессов релаксации скорости и давления [2,4]. Применяемый римановский солвер основывается на локальном решении линейризованной задачи Римана на границах ячеек расчётной сетки. В результате, найденные интерфейсные значения потоковых величин позволяют применить численную схему Годунова для нахождения значений газодинамических параметров каждой из фаз на новом временном слое. Численная аппроксимация неконсервативных членов находится при выполнении требования постоянства фоновых значений скорости и давления [2]. Полученная таким образом численная схема является консервативной и согласованной для консервативных систем даже без выполнения условия Ro_u для матрицы Якобиана. Таким образом, данный численный метод не требует вычисления матрицы Ro_u , что является затратной и громоздкой процедурой, особенно для больших систем уравнений и сложных уравнений состояния [3].

В первой части кратко рассматривается математическая модель двухфазных сжимаемых газодинамических течений. *Во второй и третьей частях* описывается численный метод. *Четвёртая часть* содержит результаты численных расчётов.

1. Математическая модель

Для описания одномерных двухфазных сжимаемых течений в данной работе используется следующая система уравнений [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + V_{\text{int}} \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = \mu (P_g - P_l); \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g P_g)}{\partial x} = P_{\text{int}} \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \lambda (u_l - u_g); \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} + \frac{\partial u_g (\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g P_g)}{\partial x} = P_{\text{int}} V_{\text{int}} \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \lambda (u_l - u_g) V_{\text{int}} - \mu P_{\text{int}} (P_g - P_l); \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l P_l)}{\partial x} = -P_{\text{int}} \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - \lambda (u_l - u_g); \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l E_l}{\partial t} + \frac{\partial u_l (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l P_l)}{\partial x} = -P_{\text{int}} V_{\text{int}} \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - \lambda (u_l - u_g) V_{\text{int}} \mu + P_{\text{int}} (P_g - P_l), \end{array} \right. \quad (1.1)$$

где индексы g и l обозначают газовую и жидкую фазы соответственно;

α , ρ , u , P , $E = e + \frac{u^2}{2}$ — объёмная доля, плотность, скорость, давление и полная энергия;

$P_{\text{int}} = \alpha_g P_g + \alpha_l P_l$ — интерфейсное давление; (1.2)

$V_{\text{int}} = \frac{\alpha_g \rho_g u_g + \alpha_l \rho_l u_l}{\alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l}$ — интерфейсная скорость. (1.3)

Система уравнений (1.1) замыкается двумя уравнениями состояния:

$$P_k = (\gamma_k - 1) \rho_k e_k - \gamma_k \pi_k, \quad k = g, l, \quad (1.4)$$

где γ_k и π_k — константы, характеризующие различные фазы,

и соотношением насыщения для объёмных долей:

$$\alpha_g + \alpha_l = 1, \quad (1.5)$$

λ и μ — параметры, определяющие, соответственно, быстроту процессов релаксации скорости и давления в двухфазной среде.

Для исследования математических свойств системы (1.1) удобно записать её в примитивных переменных:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} = S, \quad (1.6)$$

где $W = (\alpha_g, \rho_g, u_g, P_g, \rho_l, u_l, P_l)$ — вектор примитивных переменных;

S — вектор, содержащий недифференциальные члены;

$$A(W) = \begin{pmatrix} V_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_g}{\alpha_g}(u_g - V_{\text{int}}) & u_g & \rho_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{P_g - P_{\text{int}}}{\alpha_g \rho_g} & 0 & u_g & \frac{1}{\rho_g} & 0 & 0 & 0 \\ (u_g - V_{\text{int}}) \frac{\rho_g c_{\text{int},g}^2}{\alpha_g} & 0 & \rho_g c_g^2 & u_g & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho_l}{\alpha_l}(u_l - V_{\text{int}}) & 0 & 0 & 0 & u_l & \rho_l & 0 \\ -\frac{P_l - P_{\text{int}}}{\alpha_l \rho_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_l & \frac{1}{\rho_l} \\ -(u_l - V_{\text{int}}) \frac{\rho_l c_{\text{int},l}^2}{\alpha_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_l c_l^2 & u_l \end{pmatrix} \text{ — матрица Якобиана ; (1.7)}$$

$$c_k^2 = \frac{\left. \frac{P_k}{\rho_k^2} - \frac{\partial e_k}{\partial \rho_k} \right|_{P_k}}{\left. \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right|_{\rho_k}} \text{ — скорость звука фазы } k \quad k = g, l;$$

$$c_{\text{int},k}^2 = \frac{\left. \frac{P_{\text{int}}}{\rho_k^2} - \frac{\partial e_k}{\partial \rho_k} \right|_{P_k}}{\left. \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right|_{\rho_k}} \text{ — интерфейсная скорость звука фазы } k \quad k = g, l.$$

Собственные значения матрицы (1.7) равны:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= V_{\text{int}}; \\ \lambda_2 &= u_g + c_g; \\ \lambda_3 &= u_g - c_g; \\ \lambda_4 &= u_g; \\ \lambda_5 &= u_l + c_l; \\ \lambda_6 &= u_l - c_l; \\ \lambda_7 &= u_l, \end{aligned} \tag{1.8}$$

соответствующие собственные правые вектора:

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_g \alpha_l \sigma_1 \sigma_2 \\ -\alpha_l \sigma_2 (\rho_g (\sigma_1 - c_{\text{int},g}^2) + P_g - P_{\text{int}}) \\ \alpha_l \sigma_2 (u_g - V_{\text{int}}) (P_g - P_{\text{int}} - \rho_g c_{\text{int},g}^2) / \rho_g \\ \alpha_l \sigma_2 (\rho_g c_{\text{int},g}^2 (u_g - V_{\text{int}})^2 - c_g^2 (P_g - P_{\text{int}})) \\ -\alpha_g \sigma_1 (\rho_l (c_{\text{int},l}^2 - \sigma_2) - P_l + P_{\text{int}}) \\ \alpha_g \sigma_1 (u_l - V_{\text{int}}) (-P_l + P_{\text{int}} + \rho_l c_{\text{int},l}^2) / \rho_l \\ \alpha_g \sigma_1 (-\rho_l c_{\text{int},l}^2 (u_l - V_{\text{int}})^2 - c_l^2 (P_l - P_{\text{int}})) \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

$$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_g \\ c_g \\ \rho_g c_g^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

$$\vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_g \\ -c_g \\ \rho_g c_g^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

$$\vec{r}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

$$\vec{r}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_l \\ c_l \\ \rho_l c_l^2 \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

$$\vec{r}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_l \\ -c_l \\ \rho_l c_l^2 \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

$$\vec{r}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

где $\sigma_1 = c_g^2 - (u_g - V_{\text{int}})^2$; $\sigma_2 = c_l^2 - (u_l - V_{\text{int}})^2$. Левые собственные вектора матрицы (1.7):

$$\vec{l}_1 = \left(\frac{1}{\alpha_g \alpha_l [c_g^2 - (u_g - V_{\text{int}})^2] [c_l^2 - (u_l - V_{\text{int}})^2]}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right); \quad (1.16)$$

$$\vec{l}_2 = \left(\frac{(P_g - P_{\text{int}})c_g + \rho_g c_{\text{int},g}^2 (u_g - V_{\text{int}})}{\alpha_g \rho_g c_g (u_g + c_g - V_{\text{int}}) \times 2c_g}, 0, \frac{1}{2c_g}, \frac{1}{2\rho_g c_g^2}, 0, 0, 0 \right); \quad (1.17)$$

$$\vec{l}_3 = \left(-\frac{(P_g - P_{\text{int}})c_g - \rho_g c_{\text{int},g}^2 (u_g - V_{\text{int}})}{\alpha_g \rho_g c_g (u_g - c_g - V_{\text{int}}) \times 2c_g}, 0, -\frac{1}{2c_g}, \frac{1}{2\rho_g c_g^2}, 0, 0, 0 \right); \quad (1.18)$$

$$\vec{l}_4 = \left(\frac{\rho_g (c_g^2 - c_{\text{int},g}^2)}{\alpha_g c_g^2}, 1, 0, -\frac{1}{c_g^2}, 0, 0, 0 \right); \quad (1.19)$$

$$\vec{l}_5 = \left(\frac{(P_l - P_{\text{int}})c_l + \rho_l c_{\text{int},l}^2 (u_l - V_{\text{int}})}{\alpha_l \rho_l c_l (V_{\text{int}} - u_l - c_l) \times 2c_l}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2c_l}, \frac{1}{2\rho_l c_l^2} \right); \quad (1.20)$$

$$\vec{l}_6 = \left(-\frac{(P_l - P_{\text{int}})c_l - \rho_l c_{\text{int},l}^2 (u_l - V_{\text{int}})}{\alpha_l \rho_l c_l (V_{\text{int}} - u_l + c_l) \times 2c_l}, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{2c_l}, \frac{1}{2\rho_l c_l^2} \right); \quad (1.21)$$

$$\vec{l}_7 = \left(\frac{\rho_l (c_{\text{int},l}^2 - c_l^2)}{\alpha_l c_l^2}, 0, 0, 0, 1, 0, -\frac{1}{c_l^2} \right). \quad (1.22)$$

Для левых (1.16–1.22) и правых (1.9–1.15) собственных векторов выполняется соотношение:

$$(\vec{l}_i)^T \vec{r}_j = \delta_{ij}.$$

Система (1.1) является гиперболической при условии линейной независимости собственных векторов. Это условие нарушается только в том случае, если параметры

двухфазной среды удовлетворяют какому-либо из соотношений:

$$\alpha_g = 0; \quad \alpha_l = 0; \quad \sigma_1 = 0 \quad \text{или} \quad \sigma_2 = 0.$$

Гиперболичность системы (1.1) является следствием сжимаемости компонентов двухфазной среды, поэтому другой выбор аппроксимации интерфейсных параметров (1.2, 1.3) не приводит к нарушению гиперболичности математической модели.

2. Численный метод

Решение системы (1.1) находится при помощи метода расщепления [5]:

$$V_i^{n+1} = L_S^\Delta L_h^\Delta V_i^n, \quad (2.1)$$

где $V_i^n = (\alpha_g, \alpha_g \rho_g, \alpha_g \rho_g u_g, \alpha_g \rho_g E_g, \alpha_l \rho_l, \alpha_l \rho_l u_l, \alpha_l \rho_l E_l)$ — вектор переменных состояния двухфазной среды в i -й ячейке расчётной сетки в момент времени t_n ;

L_h^Δ — оператор численного решения гиперболической части системы (1.1), включающий неконсервативные члены;

L_S^Δ — интегрирующий оператор, содержащий релаксационные члены системы (1.1).

2.1. Гиперболический оператор

Гиперболическая часть системы (1.1) имеет вид:

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + V_{\text{int}} \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = 0; \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = H \frac{\partial \alpha_g}{\partial x}, \quad (2.3)$$

где $U_i = (\alpha_g \rho_g, \alpha_g \rho_g u_g, \alpha_g \rho_g E_g, \alpha_l \rho_l, \alpha_l \rho_l u_l, \alpha_l \rho_l E_l) \triangleright$;

$$f(U) = \begin{pmatrix} \alpha_g \rho_g u_g, & \alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g P_g, & \alpha_g \rho_g u_g E_g + \alpha_g u_g P_g, \\ \alpha_l \rho_l u_l, & \alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l P_l, & \alpha_l \rho_l u_l E_l + \alpha_l u_l P_l \end{pmatrix};$$

$$H = (0, P_{\text{int}}, P_{\text{int}} V_{\text{int}}, 0, -P_{\text{int}}, -P_{\text{int}} V_{\text{int}}).$$

Численное решение (2.3) определяется с использованием схемы Годунова:

$$(U)_i^{n+1} = (U)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \times \left(f(U_{i+1/2}^*(U_i^n, U_{i+1}^n)) - f(U_{i-1/2}^*(U_{i-1}^n, U_i^n)) \right) + \Delta t \times H \times \Delta, \quad (2.4)$$

где Δ — численная аппроксимация производной $\frac{\partial \alpha_g}{\partial x}$.

Значения на границах ячеек расчётной сетки: $U_{i+1/2}^*$ вычислялись с использованием приближенного решения задачи Римана для системы (2.2), (2.3), записанной в примитивных переменных:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0. \quad (2.5)$$

Приближенное решение задачи Римана W^* для системы (2.5) с использованием метода VFRoe [6] определяется как:

$$W^* = W_L + \sum_{\lambda_i < 0} a_i \vec{r}_i = W_R - \sum_{\lambda_i > 0} a_i \vec{r}_i, \quad (2.6)$$

где W_L и W_R — вектора левых и правых состояний, соответственно (рис. 1);

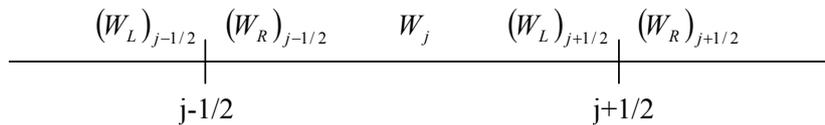


Рис. 1. Схема левых и правых состояний для локальной задачи Римана

λ_i — собственные значения матрицы Якоби $A(\bar{W})$ (1.8), вычисленные для промежуточного состояния:

$$\bar{W} = \frac{W_L + W_R}{2};$$

\vec{r}_i — соответствующие правые собственные вектора (1.9–1.15), вычисленные для промежуточного состояния:

$$\bar{W} = \frac{W_L + W_R}{2};$$

a_i — коэффициенты разложения по базису собственных правых векторов $W_R - W_L = \sum_{\lambda_i} a_i \vec{r}_i$, которые вычисляются следующим образом [6]:

$$a_i = ((a_i)_R - (a_i)_L) = (\vec{l}_i)^T (W_R - W_L),$$

\vec{l}_i — левые собственные вектора (1.16)–(1.22), вычисленные для промежуточного состояния $\bar{W} = \frac{W_L + W_R}{2}$.

Зная величины интерфейсных значений вектора примитивных переменных W^*

из (2.6), легко найти интерфейсные значения для вектора консервативных переменных U^* , что позволяет полностью определить численную схему Годунова (2.4). Численная аппроксимация производной $\frac{\partial \alpha_g}{\partial x}$ в неконсервативных членах системы (2.4) находится при выполнении требования постоянства фоновых значений скорости и давления [2, 3]:

$$\Delta = \frac{1}{\Delta x} \left((\alpha_g^*)_{i+1/2} - (\alpha_g^*)_{i-1/2} \right), \quad (2.7)$$

что также определяет численную аппроксимацию уравнения (2.2).

В результате численная схема для решения системы уравнений (2.2), (2.3) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (\alpha_g)_i^{n+1} &= (\alpha_g)_i^n - (u_g)_i^n \times \frac{\Delta t}{\Delta x} \times \left((\alpha_g^*)_{i+1/2}^n - (\alpha_g^*)_{i-1/2}^n \right); \\ (\alpha_g \rho_g)_i^{n+1} &= (\alpha_g \rho_g)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \times \left((\alpha_g \rho_g u_g)_i^*_{i+1/2} - (\alpha_g \rho_g u_g)_i^*_{i-1/2} \right); \\ (\alpha_g \rho_g u_g)_i^{n+1} &= (\alpha_g \rho_g u_g)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \times \left((\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g P_g)_i^*_{i+1/2} - (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g P_g)_i^*_{i-1/2} \right) + \\ &\quad + (P_{\text{int}})_i^n \times \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_g^*)_{i+1/2} - (\alpha_g^*)_{i-1/2} \right); \\ \left((\alpha_g \rho_g E_g)_i \right)^{n+1} &= (\alpha_g \rho_g E_g)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \times \left((\alpha_g \rho_g u_g E_g + \alpha_g P_g u_g)_i^*_{i+1/2} - (\alpha_g \rho_g u_g E_g + \alpha_g P_g u_g)_i^*_{i-1/2} \right) + \\ &\quad + (P_{\text{int}} V_{\text{int}})_i^n \times \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_g^*)_{i+1/2} - (\alpha_g^*)_{i-1/2} \right); \\ (\alpha_l \rho_l)_i^{n+1} &= (\alpha_l \rho_l)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \times \left((\alpha_l \rho_l u_l)_i^*_{i+1/2} - (\alpha_l \rho_l u_l)_i^*_{i-1/2} \right); \\ (\alpha_l \rho_l u_l)_i^{n+1} &= (\alpha_l \rho_l u_l)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \times \left((\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l P_l)_i^*_{i+1/2} - (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l P_l)_i^*_{i-1/2} \right) - \\ &\quad - (P_{\text{int}})_i^n \times \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_g^*)_{i+1/2} - (\alpha_g^*)_{i-1/2} \right); \\ \left((\alpha_l \rho_l E_l)_i \right)^{n+1} &= (\alpha_l \rho_l E_l)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \times \left((\alpha_l \rho_l u_l E_l + \alpha_l P_l u_l)_i^*_{i+1/2} - (\alpha_l \rho_l u_l E_l + \alpha_l P_l u_l)_i^*_{i-1/2} \right) - \\ &\quad - (P_{\text{int}} V_{\text{int}})_i^n \times \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_g^*)_{i+1/2} - (\alpha_g^*)_{i-1/2} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Однако известно, что численная аппроксимация (2.6) может привести к появлению не физических решений из-за отсутствия диссипации [6]. Для режекции нефизических решений нужно модифицировать солвер (2.6) следующим образом [6].

Пусть имеется p собственных значений для матрицы Якоби гиперболической системы уравнений: $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial U}(U) = 0$ и поставлена задача Римана на интерфейсе при

$x = 0$ (рис. 2). Если существуют такие $(U_L)_j = \sum_{i=1}^{j-1} a_i \bar{r}_i$ и $(U_R)_j = (U_L)_j + a_j \bar{r}_j$, что: $\lambda_j((U_L)_j) < 0 < \lambda_j((U_R)_j)$, $j = 1, \dots, p$, то приближённое решение задачи Римана нужно вычислять как:

$$\bar{U}_{\text{modif}} = (U_L)_j + \frac{{}^T(\bar{l}_j)U_R + {}^T(\bar{l}_j)U_L}{2} \bar{r}_j. \quad (2.9)$$

Таким образом, модифицированный римановский солвер будет иметь вид:

$$U^* = \begin{cases} U_{\text{modif}}, & \text{если } \exists j \in \{1, \dots, p\}: \lambda_j((U_L)_j) < 0 < \lambda_j((U_R)_j); \\ U_L + \sum_{\lambda_i < 0} a_i \bar{r}_i, & \text{иначе} \end{cases} \quad (2.10)$$

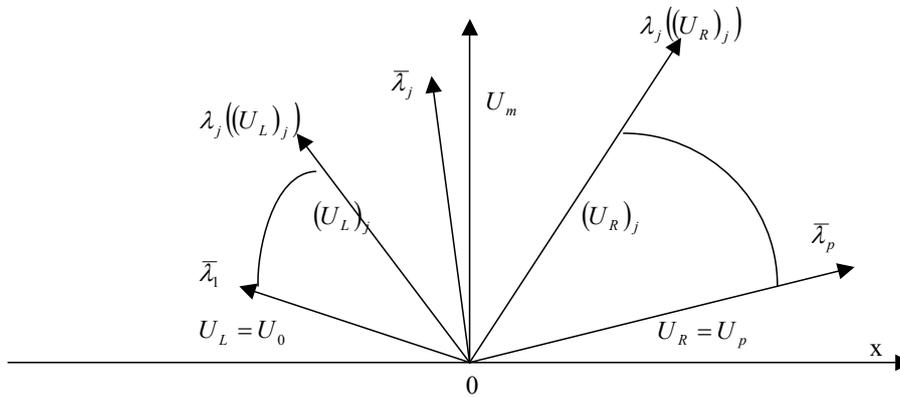


Рис. 2. Схема коррекции приближённого решения (2.6) задачи Римана

2.2. Оператор релаксации

Интегрирующая часть системы (1.1), связанная с наличием релаксационных членов, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = \mu(P_g - P_l); \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial t} = \lambda(u_l - u_g); \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} = \lambda(u_l - u_g) V_{\text{int}} - \mu P_{\text{int}} (P_g - P_l); \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial t} = -\lambda(u_l - u_g); \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l E_l}{\partial t} = -\lambda(u_l - u_g) V_{\text{int}} \mu + P_{\text{int}} (P_g - P_l). \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Интегрирующий оператор $L_S^{\Delta t}$ из (2.1) с учётом (2.11) можно представить в виде:

$$V_i^{n+1} = L_S^{\Delta t} V_i^n = L_{PR}^{\Delta t} L_V^{\Delta t} V_i^n, \quad (2.12)$$

где $L_V^{\Delta t}$ — оператор, содержащий члены, зависящие от скорости;

$L_{PR}^{\Delta t}$ — оператор, содержащий члены, зависящие от давления.

В явном виде (2.12) записывается как:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = \mu(P_g - P_l); \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial t} = \lambda(u_l - u_g); \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} = \lambda(u_l - u_g) V_{iint} - \mu P_{int} (P_g - P_l) = \\ = \frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial t} = -\lambda(u_l - u_g); \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l E_l}{\partial t} = -\lambda(u_l - u_g) V_{iint} \mu + P_{int} (P_g - P_l) = \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial t} = \lambda(u_l - u_g); \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} = \lambda(u_l - u_g) V_{iint} + \\ + \frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial t} = -\lambda(u_l - u_g); \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l E_l}{\partial t} = -\lambda(u_l - u_g) V_{iint} \mu. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = \mu(P_g - P_l); \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} = -\mu P_{int} (P_g - P_l); \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial t} = \\ = \frac{\partial \alpha_l \rho_l E_l}{\partial t} = P_{int} (P_g - P_l). \end{array} \right. \quad (2.13)$$

2.2.1. Релаксация скорости

При численном решении первой системы уравнений из (2.13) в предположении о мгновенной релаксации скоростей ($\lambda \rightarrow \infty$) легко получить следующие выражения для новых значений скоростей обеих фаз [2]:

$$(u_g)_i^{n+1} = (u_l)_i^{n+1} = \frac{(\alpha_g \rho_g u_g)_i^n + (\alpha_l \rho_l u_l)_i^n}{(\alpha_g \rho_g)_i^n + (\alpha_l \rho_l)_i^n}; \quad (2.14)$$

внутренних энергий:

$$(e_g)_i^{n+1} = (e_g)_i^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{(\alpha_g \rho_g u_g)_i^n + (\alpha_l \rho_l u_l)_i^n}{(\alpha_g \rho_g)_i^n + (\alpha_l \rho_l)_i^n} - (u_g)_i^n \right)^2; \quad (2.15)$$

$$(e_l)_i^{n+1} = (e_l)_i^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{(\alpha_g \rho_g u_g)_i^n + (\alpha_l \rho_l u_l)_i^n}{(\alpha_g \rho_g)_i^n + (\alpha_l \rho_l)_i^n} - (u_l)_i^n \right)^2. \quad (2.16)$$

и давлений:

$$(P_g)_i^{n+1} = P((e_g)_i^{n+1}, (\rho_g)_i^{n+1}) = (\gamma_g - 1) \rho_g e_g - \gamma_g \pi_g; \quad (2.17)$$

$$(P_l)_i^{n+1} = P((e_l)_i^{n+1}, (\rho_l)_i^{n+1}) = (\gamma_l - 1) \rho_l e_l - \gamma_l \pi_l. \quad (2.18)$$

Значения объёмной доли и плотностей обеих фаз при этом не изменяются:

$$(\alpha_g)_i^{n+1} = (\alpha_g)_i^n, (\alpha_l)_i^{n+1} = (\alpha_l)_i^n, (\rho_g)_i^{n+1} = (\rho_g)_i^n, (\rho_l)_i^{n+1} = (\rho_l)_i^n.$$

2.2.2. Релаксация давления

Вторая система уравнений из (2.13) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\alpha_g \rho_g E_g)}{\partial t} = -P_{\text{int}} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t}; \\ \frac{\partial(\alpha_l \rho_l E_l)}{\partial t} = P_{\text{int}} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t}. \end{cases} \quad (2.19)$$

Интегрируя (2.19) с некоторого начального момента времени T_0 до момента конца процесса релаксации T_* , получим:

$$\begin{cases} (\alpha_g \rho_g E_g)^* - (\alpha_g \rho_g E_g)^0 = - \int_{T_0}^{T_*} P_{\text{int}} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} dt; \\ (\alpha_l \rho_l E_l)^* - (\alpha_l \rho_l E_l)^0 = \int_{T_0}^{T_*} P_{\text{int}} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} dt. \end{cases}$$

Окончательно, после ведения переменной $d\alpha_g = \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} dt$ будем иметь:

$$\begin{cases} (\alpha_g \rho_g E_g)^* - (\alpha_g \rho_g E_g)^0 = - \int_{\alpha_g^{(0)}}^{\alpha_g^*} P_{\text{int}} d\alpha_g; \\ (\alpha_l \rho_l E_l)^* - (\alpha_l \rho_l E_l)^0 = \int_{\alpha_g^{(0)}}^{\alpha_g^*} P_{\text{int}} d\alpha_g. \end{cases} \quad (2.20)$$

Метод решения системы (2.20) зависит от величины вариации интерфейсного давления в процессе релаксации. Для большинства расчётов двухфазных потоков изменение давления невелико, так как величины скорости или числа Маха фаз малы [4]. Для этого случая интеграл в правой части системы (2.20) можно аппроксимировать следующим образом:

$$\int_{\alpha_g^{(0)}}^{\alpha_g^*} P_{\text{int}} d\alpha_g \approx \frac{P_{\text{int}}^{(0)} + P_{\text{int}}^{(*)}}{2} \Delta\alpha_g^*, \quad (2.21)$$

где $\Delta\alpha_g^* = \alpha_g^* - \alpha_g^{(0)}$.

Принимая во внимание соотношение $E_k = e_k + \frac{u_k^2}{2}$ $k = g, l$, где e_k — внутренняя массовая энергия фазы k , а также постоянство фазовых плотностей $(\alpha_k \rho_k)^{(0)} = (\alpha_k \rho_k)^{(*)}$ в процессе релаксации, система (2.20) примет вид:

$$\begin{cases} (\alpha_g \rho_g)^{(0)} (e_g^* - e_g^{(0)}) = -\frac{P_{\text{int}}^{(0)} + P_{\text{int}}^{(*)}}{2} \Delta\alpha_g^*; \\ (\alpha_l \rho_l)^{(0)} (e_l^* - e_l^{(0)}) = \frac{P_{\text{int}}^{(0)} + P_{\text{int}}^{(*)}}{2} \Delta\alpha_g^*. \end{cases} \quad (2.22)$$

Используя уравнения состояния (1.4), получим:

$$\begin{cases} (\alpha_g \rho_g)^{(0)} \left[\frac{P_g^{(0)} + \gamma_g \pi_g}{(\gamma_g - 1)(\alpha_g \rho_g)^{(0)}} \alpha_g^{(0)} - \frac{P_g^* + \gamma_g \pi_g}{(\gamma_g - 1)(\alpha_g \rho_g)^{(0)}} \alpha_g^* \right] = -\frac{P_{\text{int}}^{(0)} + P_{\text{int}}^{(*)}}{2} \Delta\alpha_g^*; \\ (\alpha_l \rho_l)^{(0)} \left[\frac{P_l^* + \gamma_l \pi_l}{(\gamma_l - 1)(\alpha_l \rho_l)^{(0)}} \alpha_l^* - \frac{P_l^{(0)} + \gamma_l \pi_l}{(\gamma_l - 1)(\alpha_l \rho_l)^{(0)}} \alpha_l^{(0)} \right] = \frac{P_{\text{int}}^{(0)} + P_{\text{int}}^{(*)}}{2} \Delta\alpha_g^*. \end{cases} \quad (2.23)$$

Записывая систему (2.23) для неизвестных переменных $\Delta\alpha_g^*$, P_{int}^* и учитывая, что $P_{\text{int}}^* = P_g^* = P_l^*$, будем иметь:

$$\begin{cases} P_{\text{int}}^{(*)} = \frac{\alpha_g^{(0)} P_g^{(0)} - \left(\frac{\gamma_g - 1}{2} P_{\text{int}}^{(0)} + \gamma_g \pi_g \right) \Delta\alpha_g^*}{\alpha_g^{(0)} + \frac{\gamma_g + 1}{2} \Delta\alpha_g^*}; \\ P_{\text{int}}^{(*)} = \frac{\alpha_l^{(0)} P_l^{(0)} - \left(\frac{\gamma_l - 1}{2} P_{\text{int}}^{(0)} + \gamma_l \pi_l \right) \Delta\alpha_g^*}{\alpha_l^{(0)} - \frac{\gamma_l + 1}{2} \Delta\alpha_g^*}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Используя (2.24), легко получить для нахождения величины $\Delta\alpha_g^*$ следующее уравнение:

$$C_2 (\Delta\alpha_g^*)^2 + C_1 \Delta\alpha_g^* + C_0 = 0, \quad (2.25)$$

где

$$\begin{cases} C_0 = \alpha_g^{(0)} \alpha_l^{(0)} \Delta P^{(0)}, \quad \Delta P^{(0)} = P_g^{(0)} - P_l^{(0)} \\ C_1 = -\frac{\gamma_l + 1}{2} \alpha_g^{(0)} P_g^{(0)} - \frac{\gamma_g + 1}{2} \alpha_l^{(0)} P_l^{(0)} - \frac{\alpha_l^{(0)} (\gamma_g - 1) + \alpha_g^{(0)} (\gamma_l - 1)}{2} P_{\text{int}}^{(0)} - (\alpha_l^{(0)} \gamma_g \pi_g + \alpha_g^{(0)} \gamma_l \pi_l); \\ C_2 = \frac{\gamma_g - \gamma_l}{2} P_{\text{int}}^{(0)} + \frac{\gamma_l + 1}{2} \gamma_g \pi_g - \frac{\gamma_g + 1}{2} \gamma_l \pi_l. \end{cases} \quad (2.26)$$

Система (2.23) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \alpha_g^{(0)} (P_g^{(0)} - P_{\text{int}}^*) = \left[\frac{(\gamma_g - 1)}{2} P_{\text{int}}^{(0)} + \frac{(\gamma_g + 1)}{2} P_{\text{int}}^* + \gamma_g \pi_g \right] \Delta \alpha_g^*; \\ \alpha_l^{(0)} (P_{\text{int}}^* - P_l^{(0)}) = \left[\frac{(\gamma_l - 1)}{2} P_{\text{int}}^{(0)} + \frac{(\gamma_l + 1)}{2} P_{\text{int}}^* + \gamma_l \pi_l \right] \Delta \alpha_g^*. \end{cases} \quad (2.27)$$

При помощи выражения (2.27) можно вывести соотношение:

$$\Delta P^{(0)} = \left[\frac{1}{\alpha_g^{(0)}} \left(\frac{\gamma_g - 1}{2} P_{\text{int}}^{(0)} + \frac{\gamma_g + 1}{2} P_{\text{int}}^* + \gamma_g \pi_g \right) + \frac{1}{\alpha_l^{(0)}} \left(\frac{\gamma_l - 1}{2} P_{\text{int}}^{(0)} + \frac{\gamma_l + 1}{2} P_{\text{int}}^* + \gamma_l \pi_l \right) \right] \Delta \alpha_g^*, \quad (2.28)$$

из которого видно, что

$$\text{sign}(\Delta \alpha_g^*) = \text{sign}(\Delta P^{(0)}). \quad (2.29)$$

В предположении $\gamma_l > \gamma_g$, $C_2 < 0$, поэтому произведение корней уравнения (2.25) имеет тот же знак, что и $-\Delta P^{(0)}$. Если значение $\Delta P^{(0)}$ положительно, то оба корня уравнения (2.25) имеют противоположные знаки, и нужно отбросить отрицательный корень. Если величина $\Delta P^{(0)}$ отрицательна, то оба корня уравнения (2.25) также отрицательны, и нужно брать значение $\Delta \alpha_g^*$, удовлетворяющее соотношению: $\alpha_g^* = \alpha_g^{(0)} + \Delta \alpha_g^* \in [0, 1]$. Далее, подставляя значение $\Delta \alpha_g^*$ в (2.24), находим величину давления $P_{\text{int}}^* = P_g^* = P_l^*$ после процесса релаксации.

3. Введение второго порядка аппроксимации

Для повышения точности численной схемы, аппроксимирующей систему уравнений (1.1), кусочно-непрерывный постоянный профиль термодинамических величин W_i^n из (1.6) заменяется линейным профилем с использованием метода ограниченных наклонов MUSCL (рис. 1):

$$(W_R)_{i-1/2} = W_i^n - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_i, \quad (W_L)_{i+1/2} = W_i^n + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_i,$$

где $\bar{\sigma}_i$ — ограниченные наклоны.

На шаге предиктор вычисляются новые значения левых и правых состояний W_L и W_R [3]:

$$\begin{aligned} (\bar{W}_R)_{i-1/2} &= (W_R)_{i-1/2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A(W_i^n) \left((W_L)_{i+1/2} - (W_R)_{i-1/2} \right); \\ (\bar{W}_L)_{i+1/2} &= (W_L)_{i+1/2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A(W_i^n) \left((W_L)_{i+1/2} - (W_R)_{i-1/2} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

4. Численные расчеты

Описанная в предыдущих разделах методика расчета двухфазных сжимаемых течений была использована для расчетов задач о распаде разрыва, о водяном кране и кавитации.

4.1. Распад разрыва в ударной трубе

В данном расчете рассматривалась одномерная труба длиной 1 м, заполненная слева ($x < 0.7$ м) покоящейся жидкостью, а справа ($x > 0.7$ м) покоящимся газом при различных давлениях. Каждая из фаз описывается двучленным уравнением состояния вида: $P_k = (\gamma_k - 1)\rho_k e_k - \gamma_k \pi_k$; $k = g, l$. Параметры уравнения состояния для газа равны: $\gamma_g = 1.4$, $\pi_g = 0$; для жидкости: $\gamma_l = 4.4$, $\pi_l = 6 \times 10^8$. Газ и жидкость имеют начальные плотности 50 и 1000 кг/м³,

соответственно. Давление жидкости в левой части трубы равно 10^9 Па, а давление газа в правой — 10^6 Па. Объемная доля газа в левой части трубы равна 10^{-6} , а в правой — $1-10^{-6}$. На рис. 3 представлены результаты расчета с учетом процессов релаксации скорости и давления в момент времени 220 мкс, выполненные для значения куранта 0.9, на различных сетках. Показаны профили давлений (а), скоростей (б), плотностей (в) каждой из фаз, также представлен профиль объемной доли газа (г). Видна сходимость результатов расчёта.

4.2. Задача о водяном кране

Следующая тестовая задача связана с расчётом истечения жидкости из трубы в присутствии газовой фазы под действием гравитационного поля. Согласно [7], в этом тесте рассматривается вертикальная труба длиной 12 м, заполненная газом и водой. Нижняя часть трубы открыта при

атмосферных условиях, в верхнюю часть поступает вода со скоростью 10 м/с при фиксированном значении объемной доли покоящегося газа. Под действием гравитации происходит сужение вытекающей струи. Для данной задачи известно точное аналитическое решение, которое имеет вид:

$$\alpha_g(x, t) = \begin{cases} 1 - \frac{(1 - \alpha_g^{(0)})u_l^{(0)}}{\sqrt{2gx + (u_l^{(0)})^2}}, & \text{если } x \leq u_l^{(0)}t + \frac{gt^2}{2}; \\ 0.2, & \text{если } x > u_l^{(0)}t + \frac{gt^2}{2}, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\alpha_g^{(0)}$ — объемная начальная доля газа;

$u_l^{(0)}$ — начальная скорость жидкости;

g — ускорение свободного падения.

Начальные данные для данного тестового расчёта имеют вид:

Вода	Газ
$\rho_l = 1000$ кг/м ³ ;	$\rho_g = 1$ кг/м ³ ;
$P_l = 10^5$ Па;	$P_g = 10^5$ Па;
$\vartheta_l = 10$ м/с;	$\vartheta_g = 0$ м/с;
$\alpha_l = 0.8$.	$\alpha_g = 0.2$.

Граничные условия:

	Вода	Газ
Входные условия	$\vartheta_l = 10$ м/с; $\alpha_l = 0.8$;	$\vartheta_g = 0$ м/с; $\alpha_g = 0.2$;
Выходные условия	$P_l = 10^5$ Па.	$P_g = 10^5$ Па.
	α_l, α_g экстраполируются	

Время расчета 0.4 с, $g = 10$ м/с². При численном решении поставленной задачи использовались следующие значения параметров уравнения состояния (1.4) для жидкости: $\gamma_l = 4.4$, $\pi_l = 6 \times 10^6$ и для газа: $\gamma_g = 1.4$, $\pi_g = 0$.

На рис. 4 представлены результаты расчёта величины объёмной доли газа для значения числа Куранта 0.9 и на различных сетках, также приведено аналитическое решение (4.1). В данном расчёте

применялась процедура учёта релаксации давления. Недостаточно точное разрешение разрывной области может быть связано с тем, что скорость звука в жидкости много больше скорости звука в газе, поэтому приходится выбирать очень малые шаги по времени при выполнении условия Куранта, что, в свою очередь, приводит к численным ошибкам. С другой стороны, давление газа в трубе не является постоянным, что также приводит к «смазыванию» разрывной области [3].

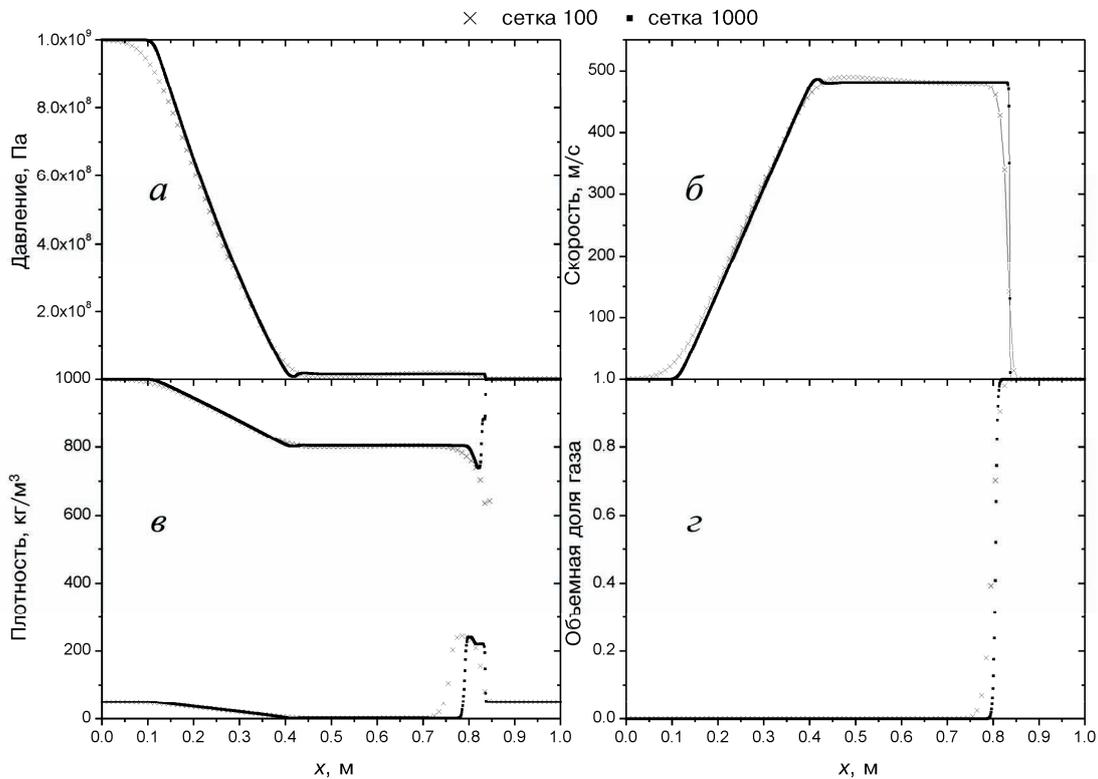


Рис. 3. Расчет задачи об ударной трубе: а — профили давлений; б — скоростей; в — плотностей; з — объёмной доли газа; на сетках 100 и 1000

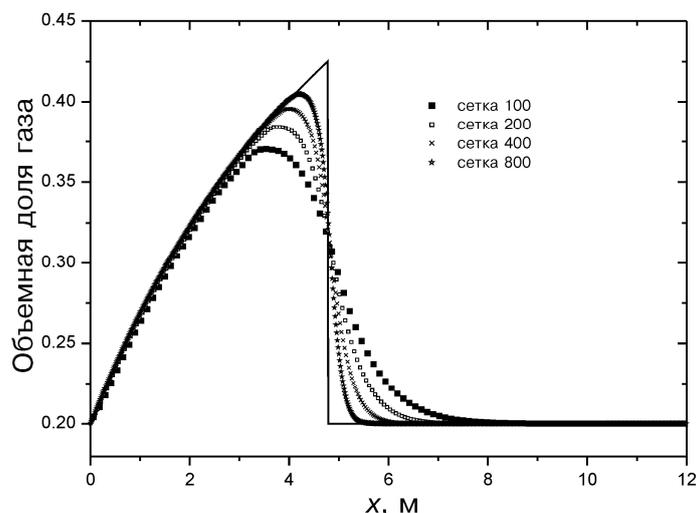


Рис. 4. Расчет задачи о водяном кране: расчётные профили объёмной доли газа на сетках 100, 200, 400 и 800. Также приведено аналитическое решение (сплошная линия)

4.3. Задача о кавитации

Явление кавитации заключается в быстром локальном понижении давления жидкости до значения насыщения, при этом начинает происходить переход в газообразную фазу. Сложность численного расчёта данного явления связана с тем, что жидкая и газообразная фазы описываются уравнениями состояния с разными параметрами, поэтому необходимо либо использовать некоторое усреднённое уравнение состояния в равновесном приближении (температурном, термохимическом, ...), либо использовать неравновесную двухфазную модель, в которой каждая фаза имеет своё собственное уравнение состояния.

В данной работе рассматривалась упрощённая модель кавитации, когда изначально имеется двухфазная смесь с малой долей газа. Задача состоит из трубы длиной 1 м, которая заполнена жидкостью, содержащей 1 % газовой фазы. В начальный момент времени правая часть трубы приходит в движение со скоростью 100 м/с, а левая — со скоростью 100 м/с. При проведении вычислений

учитывались процессы релаксации скорости и давления. На рис. 5 представлены результаты расчёта на сетке 100 для четырёх моментов времени и для профилей плотностей каждой из фаз (ρ), профиля плотности смеси ($\bar{\rho}$), профилей скоростей каждой из фаз (v), а также профиля объёмной доли газа (α). Из рисунка видно, что плотность жидкости меняется очень слабо, в то время как плотность газа уменьшается при прохождении волны разрежения, а затем опять уменьшается в результате процесса релаксации давления. Таким образом, плотность газа в центре трубы составляет очень малую величину. В результате процесса релаксации давления объёмная доля газа возрастает и плотность смеси уменьшается, как и ожидалось. Профиль скорости также стремится к ожидаемому решению. Важно отметить, что в центре трубы образуется две границы раздела фаз, которые движутся в разных направлениях. Таким образом, применяемая численная методика позволяет описывать процесс динамического разделения фаз.

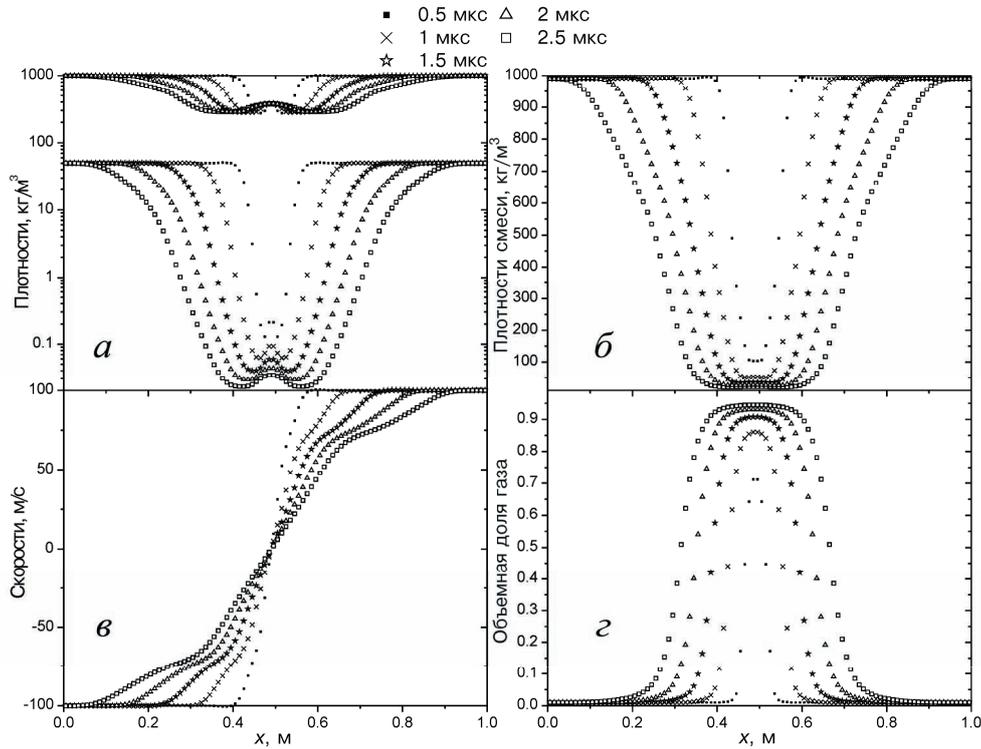


Рис. 5. Задача о кавитации: *a* — профили плотностей каждой из фаз; *б* — плотностей смеси; *в* — скоростей каждой из фаз; *г* — объемной доли газа; в моменты времени 0.5, 1, 1.5, 2 и 2.5 м

4.4. Прохождение ударной волны через слой частиц [2]

Данный расчёт заключается в моделировании процесса распространения ударной волны в заполненной воздухом при атмосферном давлении вертикальной трубе, в которой расположен слой частиц шарообразной формы. При прохождении ударной волны через слой частиц под действием сил трения и градиента давления частицы приходят в движение, а ударная волна частично отражается и ослабляется. В результате образуются отражённая и прошедшая волны.

Эволюция давления измеряется при помощи двух приборов, установленных на 11 см ниже и на 4.3 см выше нижней границы слоя частиц. Схема геометрии расчёта показана на рис. 6. Толщина слоя частиц равна 2 см.

Частицы моделируются как сжимаемая среда с уравнением состояния вида (1.4). Параметры уравнения состояния для газа

равны: $\gamma_g = 1.4$, $\pi_g = 0$; для частиц: $\gamma_l = 4.4$, $\pi_l = 6 \times 10^6$. Для моделирования эффектов трения частиц вводится сила трения:

$$F_d = \frac{3}{4} C_d \frac{\rho_g}{d_p} (1 - \alpha_g) |u_g - u_l| (u_g - u_l),$$

где $C_d = 0.6$ — коэффициент трения; $d_p = 2$ мм — диаметр частиц.

Газ и частицы имеют начальные плотности 1.2 и 1050 кг/м³, соответственно. Начальная объемная доля газа в слое частиц равна 0.35. Результаты расчёта представлены на рис. 7. Точность вычислений может быть улучшена, если в математическую модель (1.1) добавить учёт поверхностных эффектов. Тем не менее проведённый расчёт демонстрирует применимость модели для более сложных, чем эйлера, систем.

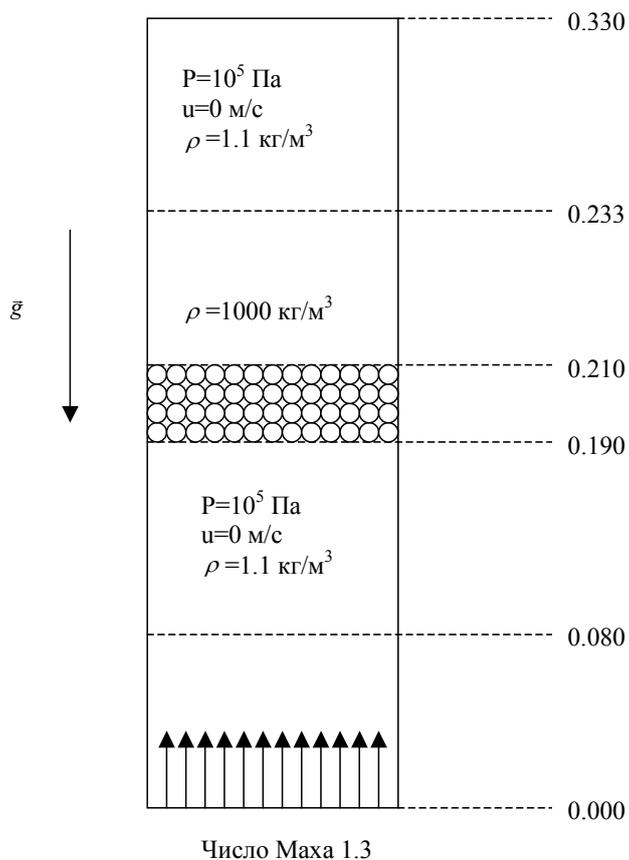


Рис. 6. Схема расчёта распространения ударной волны через слой частиц

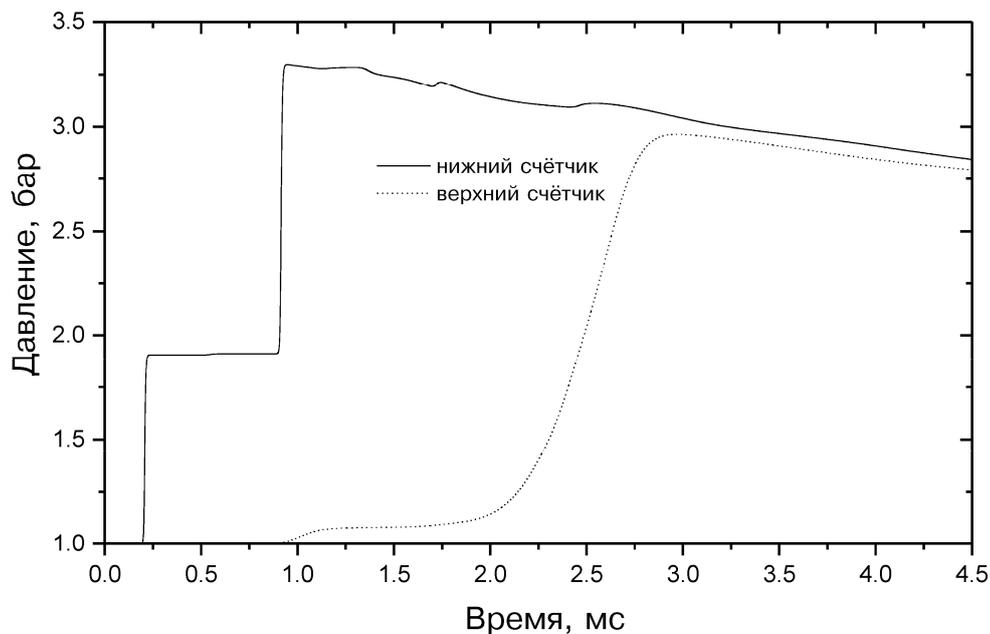


Рис. 7. Эволюция давления при распространении ударной волны в воздушной трубе, содержащей слой частиц

Заключение

В работе представлены тестовые расчёты различных процессов, происходящих в двухфазных средах: распад разрыва в трубе, истечение из трубы в гравитационном поле, распространение ударной волны через слой из частиц шарообразной формы и кавитации в двухфазной среде. Расчёты были выполнены с применением гиперболической математической модели двухфазных сжимаемых потоков, которая позволяет моделировать как неконсервативные члены в уравнениях для импульса и энергии каждой из фаз, так и неконсервативное уравнение переноса для объёмной доли. Численная аппроксимация неконсервативных членов находится в отсутствии скачков в профилях давления и скорости на разрыве профиля объёмной доли. Гиперболичность модели обеспечивается

отсутствием требования равенства давлений каждой из фаз в двухфазной среде для основной системы уравнений. Для выполнения этого требования равенства давлений (и скоростей, если необходимо) вводится отдельная процедура релаксации давления (скорости). При численной реализации данной модели используется римановский солвер схемы VFRoe, учитывающий возможные вклады от всех характеристик.

Приведённые результаты свидетельствуют о применимости используемой двухфазной модели и численной методики в широком классе расчётных задач. Используемая модель расчёта двухфазных сжимаемых течений может использоваться как для моделирования смесей, так и для моделирования чистых беспримесных сред.

Литература

1. Baer, M.R., and J.W. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // *Int. J. Multiphase Flow*. 1986. Vol. 12, № 6. P. 861–889.
2. Saurel, R., and R. Abgrall. A multiphase Godunov method for multifluid and multiphase flows // *J. Comp. Phys*. 1999. 150. P. 425–467.
3. Andrianov, N., R. Saurel, and G. Warnecke. A simple method for compressible multiphase mixtures and interfaces // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2003. 41. P. 109–131. (DOI:10.1002/d.424).
4. Lallemand, M.H., and R. Saurel. Pressure relaxation procedures for multiphase compressible flows: Rapport de recherche no. 4038. October 2000. — ISRN INRIA/RR-4038-FR+ENG.
5. Strang, G. On the construction and comparison of difference schemes // *SIAM J. Numer. Anal.* 1968. 5, № 3. P. 506–517.
6. Gallouet, T., and J.-M. Masella. A rough godunov scheme // *Compte Rendus a l'Academie des Sciences*. Paris, 1996. P. 77.
7. Ransom, V.H. Numerical benchmark tests // *Multiphase Science and Technology*. Vol. 3 / G.F. Hewitt, J.M. Delhaye, N. Zuber (eds). — Washington: Hemisphere, 1987.

Научное издание

Труды ИБРАЭ РАН

Под общей редакцией чл.-кор. РАН Л. А. Большова

Выпуск 4

**ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ
УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ
В ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ**

*Утверждено к печати Ученым советом
Института проблем безопасного развития атомной энергетики
Российской академии наук*

Издательство «Наука»
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

Зав. редакцией *М. В. Грачева*

Редактор *Г.В. Зенина*

Оригинал-макет подготовлен издательством ООО «Комтехпринт»
Список литературы и иллюстрации приведены в авторской редакции

Сдано в набор 12 октября 2008 г. Подписано в печать 12 ноября 2008 г.
Формат 60 x 90^{1/8}. Бумага офсетная 80 г/м². Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 12. Тираж 500. Заказ 17734.

Заказное

Отпечатано с готовых диапозитивов типографией ООО «Инфолио-Принт»