

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО
РАЗВИТИЯ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ**

ТРУДЫ ИБРАЭ

Под общей редакцией члена-корреспондента РАН *Л.А. Большова*

Выпуск 2

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЕСТЕСТВЕННО-КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Научный редактор доктор физико-математических наук *В.Ф. Стрижов*

Издательство «Наука»
Москва, 2007

УДК 621.039
ББК 31.4
Т78

Т78 Численные исследования естественно-конвективных течений затвердевающей жидкости/
под науч. ред. докт. физ.-мат. наук В. Ф. Стрижова // — Труды ИБРАЭ РАН /
под общей ред. чл.-кор. РАН Л. А. Большова. Вып. 2. — М: Наука, 2007. — 190 с. : ил.

В результате проведенных авторами исследований получен ряд важных выводов и отмечены интересные закономерности, которые могут применяться при разработке упрощенных кодов для анализа отдельных стадий тяжелой аварии, при удержании расплавленных топливосодержащих масс внутри корпуса.

Первая часть сборника посвящена изложению численных методов решения двумерных задач гидродинамики затвердевающей жидкости, а вторая – изложению результатов параметрического численного исследования основных закономерностей тепло- и массопереноса тепловыделяющей жидкости при удержании расплава корпусом реактора. Авторы акцентируют свое внимание на изучении основных закономерностей тепло- и массопереноса тепловыделяющей жидкости с учетом фазовых превращений с помощью применения вычислительного алгоритма, построенного на базе метода фиктивных областей в переменных “функция тока, завихренность”. Преимуществом используемого подхода является технологичность вычислений, позволяющая для решаемого класса задач в произвольных областях использовать унифицированный вычислительный алгоритм.

Оригинальность и эффективность предлагаемого авторами подхода позволяет рекомендовать его для ознакомления с ним как научной общественности, занимающейся проблемами атомной энергетики, так и смежных с ней областей.

Numerical Investigations of Naturally-convective Flows in Solidifying Liquid / Edited by Professor V. F. Strizhov // Proceedings of Nuclear Safety Institute RAS (IBRAE RAS) / Edited by corresponding member of RAS L. A. Bolshov. — Issue 2. — Moscow: Nauka, 2007. — 190 p.: illustrations.

In the course of performed investigations several important outcomes were achieved and a series of interesting mechanisms were identified that may be of use while developing simplified codes for analysis of individual severe-accident phases for cases of retention of molten fuel-containing masses inside the vessel.

The first section describes numerical methods for solution of 2D hydrodynamics problems for solidifying liquid, the second section provides the results of parametric numerical investigation of main heat- and mass-transfer mechanisms of heat-generating liquid for the case of melt retention by reactor vessel. The attention is focused on studying major heat- and mass-transfer mechanisms of heat-generating liquid taking account of phase transitions through the application of a computational algorithm based on the fictitious-area method under “flow function, vorticity” variables. Effectiveness of calculations, being an advantage of the approach used, enables application of a unified computational algorithm within arbitrary areas for the category of problems under consideration. Owing to its originality and efficiency, the offered approach may be recommended to specialists of nuclear-power industry and adjacent areas.

ISBN 978–5–02–036789–0

© Институт проблем безопасного развития атомной энергетики, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

Численные методы для решения двумерных задач гидродинамики затвердевающей жидкости (Часть 1)

A Numerical Study of Natural Convection A Heat-Generating Fluid in Rectangular Enclosures <i>V.V. Chudanov, P.N. Vabishchevich, A.G. Churbanov, V.F. Strizhov</i>	5
Operator-splitting schemes for the stream function-vorticity formulation <i>V.V. Chudanov, A. G. Popkov, A.G. Churbanov, P.N. Vabishchevich, M.M. Makarov</i>	17
Численное моделирование проблем тепло- и массопереноса с фазовыми превращениями <i>А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов, А.Г. Чурбанов</i>	32
Численное моделирование свободноконвективной тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями <i>А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов</i>	46
Численное моделирование свободной конвекции жидкости в пористой среде <i>А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов</i>	58
Численные подходы к моделированию задачи диффузии/конвекции с учетом плавления <i>А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов, А.Г. Чурбанов</i>	71

Параметрические численные исследования теплопередачи затвердевающей жидкости (Часть 2)

Численное исследование теплообмена тепловыделяющей жидкости с учетом плавления и затвердевания в зависимости от чисел Остроградского и Релея <i>А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов</i>	88
Численное моделирование свободно–конвективных движений стратифицированной тепловыделяющей жидкости <i>А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов, В.Ф. Стрижов</i>	110
Численное исследование некоторых особенностей поведения тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания <i>А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов</i>	124
Численное исследование тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания при различных режимах охлаждения на границах (Раздел 1) <i>А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов</i>	141
Численное исследование тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания при различных режимах охлаждения на границах (Раздел 2) <i>А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов</i>	159
Естественно–конвективный теплообмен тепловыделяющей затвердевающей жидкости при различных режимах охлаждения <i>А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов</i>	173

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ (ЧАСТЬ 1)

A NUMERICAL STUDY OF NATURAL CONVECTION A HEAT-GENERATING FLUID IN RECTANGULAR ENCLOSURES

V.V. Chudanov, P. N. Vabishchevich, A.G.Churbanov, V.F. Strizhov

Introduction

Many problems of practical interest deal with buoyant flows in enclosures. Flows driven by temperature gradients have been studied extensively in many experimental and computational works. A comprehensive survey on this subject has been presented by Ostrach [1].

A more complicated situation, where there are volumetric energy sources in cavities with isothermal and/or adiabatic rigid walls, is very important for applications. In the present work the peculiarities of laminar convective heat transfer in a heat-generating fluid layer are examined numerically with particular emphasis on nuclear reactor safety analysis. This problem has various formulations from the viewpoint of geometry of the domain under the consideration (cylindrical, hemispherical, horizontal layer, etc.) as well as in terms of imposing boundary conditions (isothermal or adiabatic). A comprehensive review of different formulations and the results obtained is presented in ref. [2]. Some preliminary results have been obtained by the authors of the present work for cylindrical and hemispherical

enclosures [3]. In the present work this problem is considered for an enclosure of a rectangular section with uniform isothermal or thermally insulated rigid walls. Such a formulation agrees with the measurement conditions [4-7], as well as with the formulation of numerical [8, 9] and combined numerical-experimental [10] works, that allows to employ some results of these researches for the verification of accuracy of the mathematical model used in our calculations and for the validation of prediction reliability.

The urgency of the problem is conditioned by the necessity to predict correctly the behaviour of a molten heat-generating corium for various scenarios of hypothetical accidents at a Pressurized Water Reactor (PWR). The situation, where a molten corium flowed down to the bottom of a PWR vessel and a buoyancy-driven corium flow occurred there, can be considered as an example of such scenarios. The scenario of the accident at the Three Mile Island NPP in the USA developed approximately in a similar way.

Governing Equations

Laminar natural convection of a heat-generating fluid with uniform volumetric energy sources is governed by the energy equation and the unsteady Navier-Stokes equations with the Boussinesq

approximation for buoyancy. In the temperature-vorticity-stream function formulation for the 2D case these equations can be written in the following dimensionless form:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 1 \right] \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{Ra}{\text{Pr}} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (3)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

Here θ, ω, ψ, u and v stand for the dimensionless temperature, vorticity, stream function, horizontal and vertical velocity components, respectively; x, y are dimensionless cartesian coordinates and τ is the dimensionless time. Next, $\text{Pr}(v/\alpha)$ is Prandtl number; $Ra\left[\frac{g\beta s H^5}{(\alpha\nu k)}\right]$ is the modified Rayleigh number, based not on the reference temperature difference but on the volumetric heat generation value, since the temperature difference is unknown a priori in this problem. Uniformly distributed internal heat sources are considered in the problem. Normalization is done here via the cavity height H , the kinematic viscosity ν and the value sH^2/k , proportional to a temperature difference.

Numerical Method

A common drawback of most commonly used numerical algorithms based on the stream function-vorticity formulation is an explicit evaluation of the vorticity on no-slip rigid walls that induces an essential restriction on a time-step [11]. To solve equations of convective heat transfer (1–4) with boundary conditions (5–6), a new efficient finite-difference technique [12, 13] has been developed and employed. Let us briefly discuss its primary merits. A new additive implicit difference scheme based on the operator-splitting technique [14, 15] has been developed and applied in the present study. Boundary values of the vorticity are calculated fully implicitly in this approach. The scheme is unconditionally stable for linearized equations, i.e. a time-step does not practically depend on a spatial grid and is evaluated only from the temporal accuracy constraint for nonlinear phenomena considered. Further, convective terms are approximated via special second-order formulae based on the central differences. Doing so, we can obtain accurate results on enough coarse grids. And finally, in our predictions we employ modern high-performance iterative

Three-dimensional and turbulent effects are neglected in this study.

A flow domain is an enclosed rectangular cavity with the fixed rigid walls and the following boundary conditions:

no-slip, no-permeability conditions for the velocity vector;

$$\psi = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (5)$$

isothermal or adiabatic thermal conditions;

$$\theta = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

where n denotes the normal to the corresponding wall.

From equations (1–4) at prescribed boundary conditions and the aspect ratio we can obtain numerical solutions for various Rayleigh and Prandtl numbers. The quiescent state $\theta = \omega = \psi = 0$ was used as the initial condition for the time integration in all predictions.

solvers of preconditioned conjugate gradient-type which have a very high convergence rate and are capable to solve equations without the diagonal dominance. All these peculiarities of the numerical method provide a possibility of solving complex transient physical problems on personal computers such as IBM AT 486. More details of the method are available in [12, 13].

The uniform grid used in calculations was 40×40 steps for $H/L = 1$ and increased in the horizontal direction in proportion to enlarging the rectangular cavity in this direction. The sufficiency of grids employed in our predictions was validated via preliminary comparative calculations on more fine grids derived by means of division in two (for instance, 80×80 and 160×160 grids have been used in the grid validation procedure for a square cavity). Steady-state solutions (if they exist) have been obtained as a limit of a time-evolution process. The temporal accuracy of periodic solutions was verified on predictions with various time-steps.

Results and Discussion

Free convection of a heat-generating fluid has been studied extensively in a great deal of experimental [4-7] as well as numerical [8-10] works. Data presented in them have been used where it was possible to verify our mathematical model and numerical results. A comprehensive verifying and validation of our numerical method on the problems with internal heat sources as well as the further parametrical investigations have been performed for rectangular enclosures in the following range of parameter values:

Rayleigh number: $10^5 \leq Ra \leq 10^8$;

Aspect ratio: $0.25 \leq H/L \leq 1$.

The Prandtl number was fixed in all calculations $Pr = 7$. Various thermal boundary conditions have been considered: the case with all isothermal walls; next, configuration with isothermal horizontal and adiabatic side walls; and finally, the variant with isothermal top and insulated others surfaces was investigated, too. The range of parameters considered in our predictions is very close to regimes studied

experimentally in [4, 6, 7, 10] for salted water heated by an alternating electric current.

At the beginning of this work a verification of the developed numerical method has been made on the basis of experimental and calculated data for the given class of problems. Detailed measurements [7] and calculations [9] form the basis for such a comparison. These results have been obtained for the cavity of the square section (aspect ratio equals to 1) with all four isothermal rigid walls. It should be noted, that the following relations take place due to some distinction in the normalization procedure: $Ra[7,9]=Ra/64$, $\theta [7,9]=8\theta$ and $Nu[7,9]=4Nu$. The chosen range of Rayleigh numbers corresponds to laminar steady or unsteady periodical flow regimes.

The results of calculations are given in Figures 1-13 in the following form. Flow patterns and temperature fields are presented via streamlines and isotherms, respectively. The contour values are defined equidistantly between the function extremes as follows (for instance, for the stream function):

$$\Psi_i = \Psi_{\max} - (\Psi_{\max} - \Psi_{\min}) / (m + 1) \quad i = 1, m \quad (7)$$

As a rule, the isolines number m was equal to 18 for the stream function and 8 for the temperature. As for temporal histories for the heat transfer process, in the plots there are shown the maximum temperature θ_{\max} and the average Nusselt number \overline{Nu} for the corresponding surface, defined as:

$$\overline{Nu} = 1 / L \int_0^L Nu dl \quad (8)$$

where l denotes the x - or y -coordinates along the corresponding wall.

Figure 1 presents the calculated steady-state regime for $Ra = 6.4 \times 10^5$. A fluid circulates in the square cavity as two symmetrical counter-rotating rolls, moving upward at the center of the cavity and downward near the cold side walls. Two local maximums of the temperature are shifted upward to the side walls.

As it was obtained in the previous works, the structure of thermal and hydrodynamic fields

becomes more complicated with the increase of Rayleigh number up to 3.2×10^6 (see Fig. 2).

Two additional secondary vortices occur near the top wall that leads to the appearance of a downward-moving flow near the centerline in the vicinity of the upper surface. Such a change of the vertical velocity sign at [9] data. Due to the four-vortex structure of the flow, two local maximums of the predictions [9], but has not been the upper surface. Moreover, the flow in such a regime becomes periodically oscillating, temperature occur in the flow bulk and two maximums of thermal flux appear at the what can be clearly seen in our calculations. This fact has also been obtained in centerline in the upper part of the cavity for this Rayleigh number is confirmed by experimental [5, 7] as well as numerical observed in measurements [7]. Instantaneous flow patterns and thermal fields are depicted in Fig. 2 for two moments of the period. One of them demonstrates practically symmetric solution whereas the second shows that symmetry is disturbed in the vicinity of the upper surface due to shifting of secondary vortices in the upper part of the cavity.

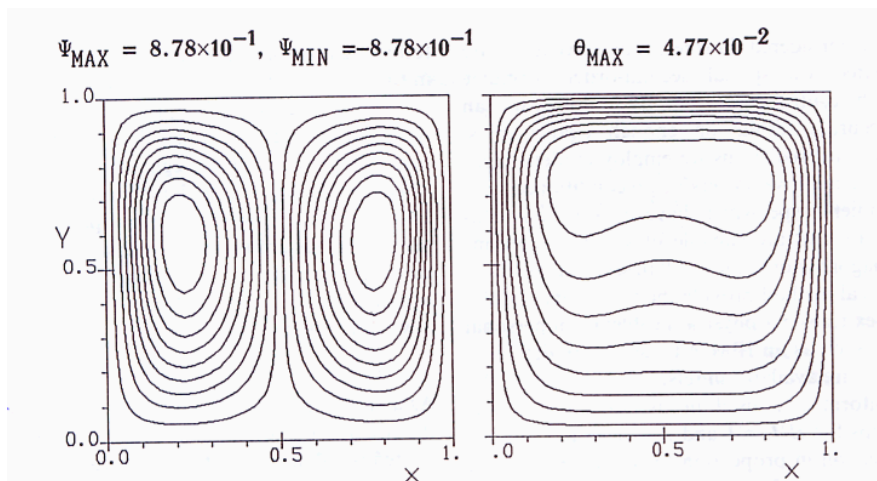


Fig.1. Steady-state flow pattern and thermal field, $Ra = 6.4 \times 10^5$

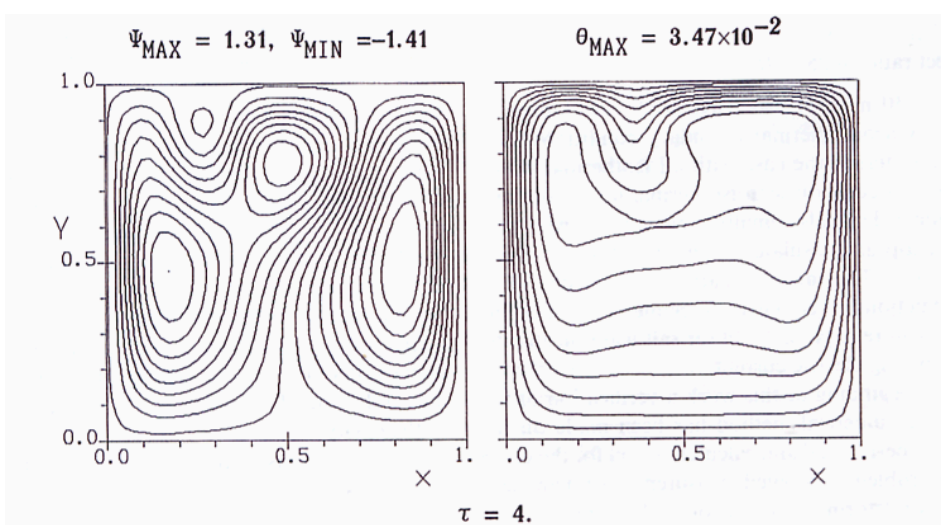
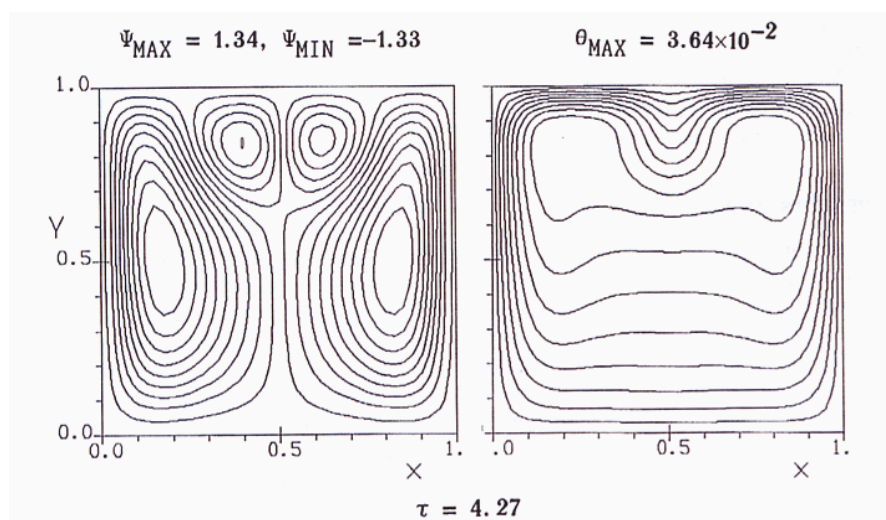


Fig. 2. Periodic oscillations, $Ra = 3.2 \times 10^6$

Time variations of the temperature maximum and average Nusselt numbers through the top and left surfaces of the cavity for this Rayleigh number are shown in Fig. 3. A comparison with similar periodic results [9] demonstrates a good agreement in the character of oscillations, but our results provide a larger period value and a smaller oscillation amplitude. At the same

time time-averaged values of θ_{\max} obtained in our predictions are more close to experimental data (discrepancy is less than 3%), than the above mentioned calculations. It should be noted, that with increasing Rayleigh number the value of θ_{\max} is reduced.

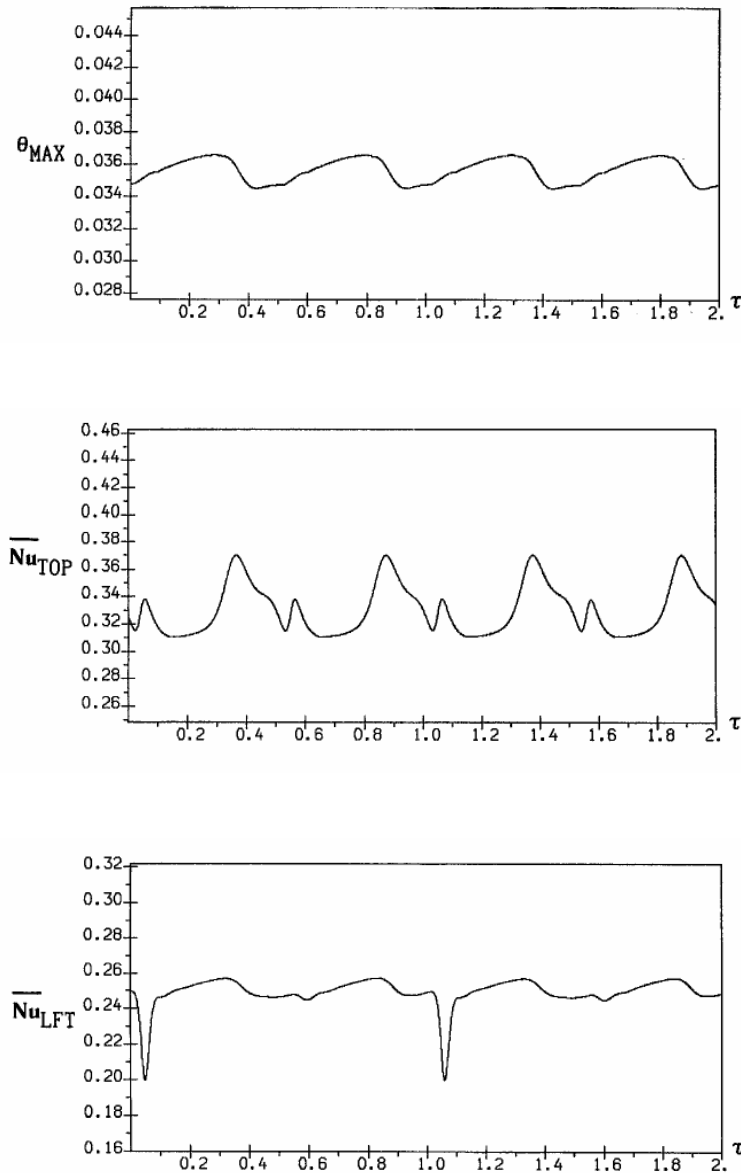


Fig. 3. Temperature maximum and \overline{Nu} through the top and left surfaces vs. time, $Ra = 3.2 \times 10^6$

Oscillations become more pronounced at higher Rayleigh numbers. Starting from $Ra = 10^8$ the flow becomes random fluctuating (see Fig. 4), that indicates possible transition from the laminar to turbulent regime. The range of Rayleigh number for

the steady-state flow regime as well as for the periodic one were found to be practically the same that have been obtained numerically in ref. [2] for a hemispherical cavity of the unit radius.

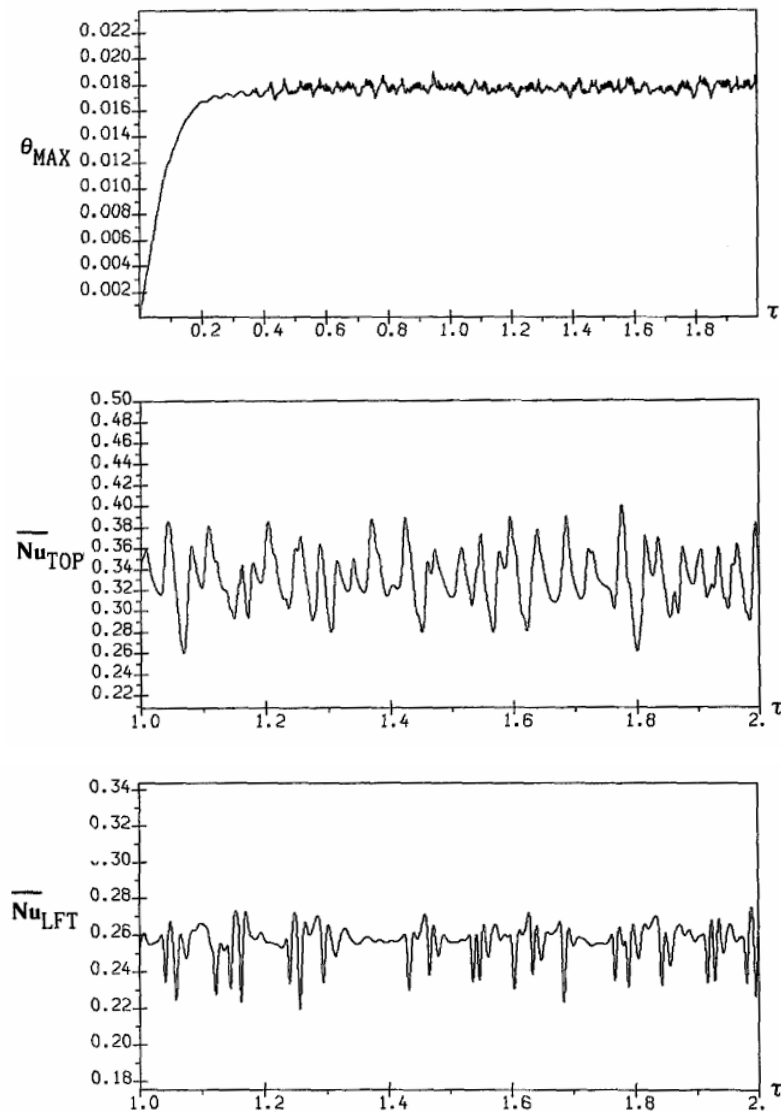


Fig. 4. Random fluctuating solution, $Ra = 10^8$

Similar results have been obtained for lower aspect ratio cavities, too. At low Rayleigh numbers a flow is also steady-state and shows the two-cell symmetric structure, but the values of the temperature maximum and average Nusselt numbers are higher in compare with the square cavity. With increasing Rayleigh number periodical oscillations of all basic parameters occur again. At the same time, for both

$H/L = 0.5$ and 0.25 the transition to periodic oscillations and to random fluctuations comes even at $Ra = 5 \times 10^5$ and 10^7 , respectively, i.e. these two critical values of Rayleigh number are both lowered approximately by a factor of 10. The oscillating flow for $Ra = 5 \times 10^5$ and $H/L = 0.5$ is shown in Fig. 5.

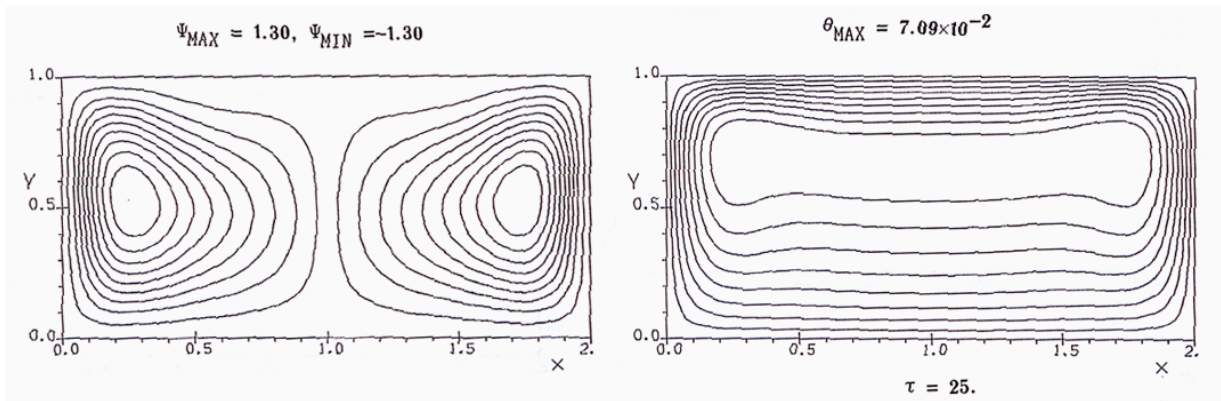


Fig. 5. Slightly-oscillating regime, $Ra = 10 \times 10^5$

There are only two slightly-oscillating vortices in this case, that provides practically constant θ_{max} but periodically varying average Nusselt numbers for the upper and left surfaces (see Fig. 6). At higher Ra

values two main vortices break down into a multicellular structure due to a cavity low aspect ratio that is typical for free convection in thin layers.

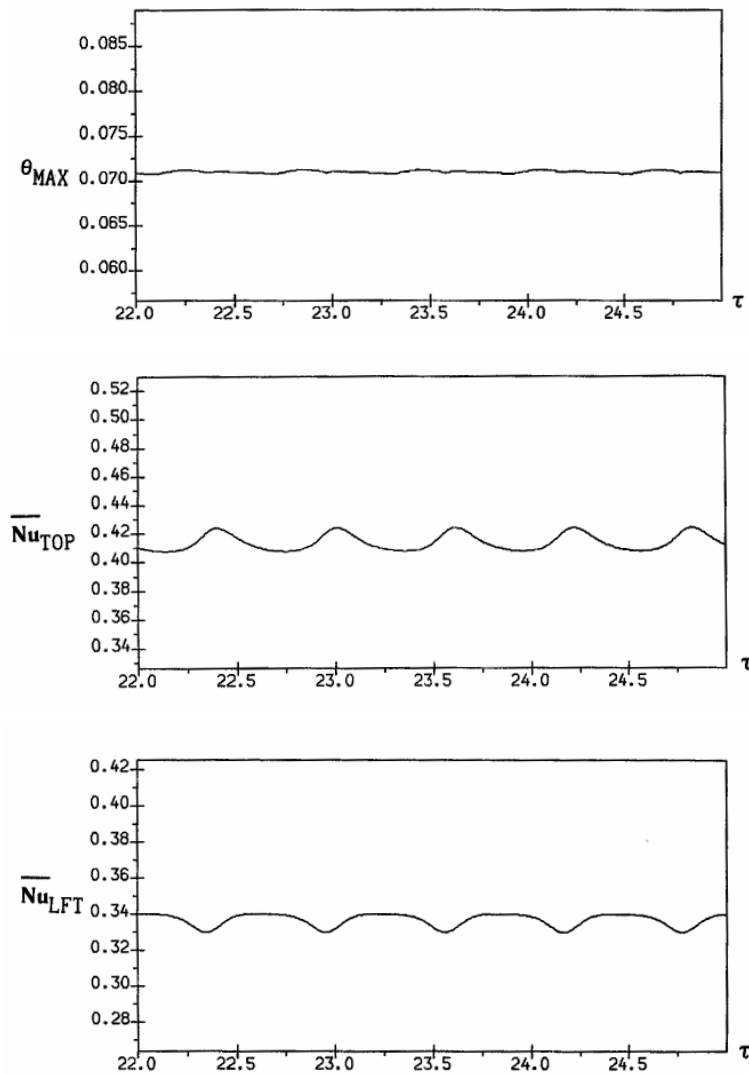


Fig. 6. Temporal variations of thermal parameters, $Ra = 10 \times 10^5$

Figure 7 presents such a multicellular structure of the oscillating flow in the cavity with aspect ratio $H/L = 0.25$ and $Ra = 10^6$. The main tendency of the heat transfer evolution is conserved: with increasing Rayleigh number the average Nusselt number through the upper surface also increases but the maximum temperature value decreases.

The cases of two (side) and three (side and lower) adiabatic boundaries have been also

studied for the aspect ratio equals to 0.5. The main regularity for both these formulations is the same as it was found for the previous (isothermal) case with this aspect ratio. Namely, starting from $Ra = 5 \times 10^5$ thermal and hydrodynamic fields become periodically oscillating, whereas the random fluctuation regime begins at $Ra \approx 10^7$. However, oscillations observed with these boundary conditions are much weaker.

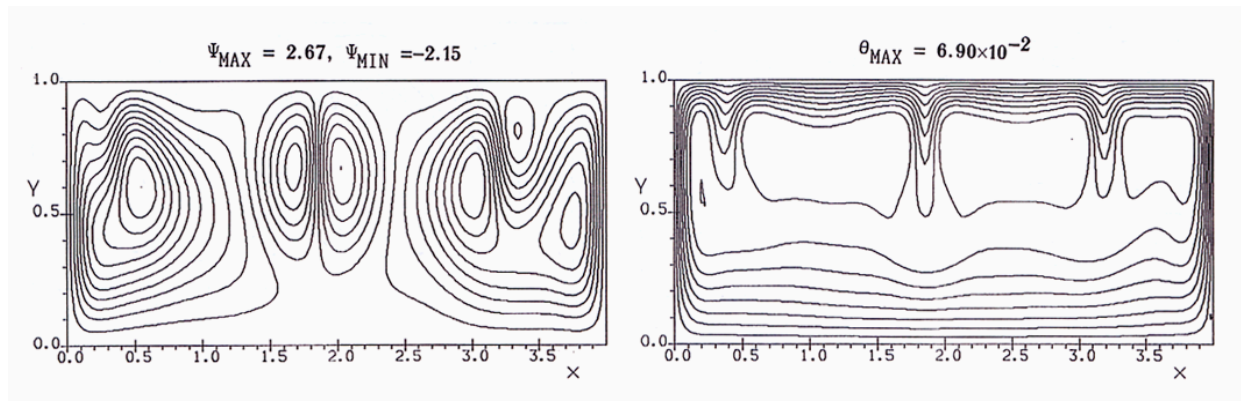


Fig. 7. Multicellular oscillating regime, $Ra = 10^6$

The steady-state solution for the cavity with two thermally insulated sides at $Ra = 10^5$ is presented in Fig. 8. The solution is fundamentally different kind from the same regime with all isothermal boundaries (see Fig. 5 with close Ra value for a comparison). There are already

four vortices in this flow pattern. Moreover, a fluid circulates in diametrically opposite direction: downward at the symmetry line and upward between large and small rolls (it is clearly visible from the isotherm structure).

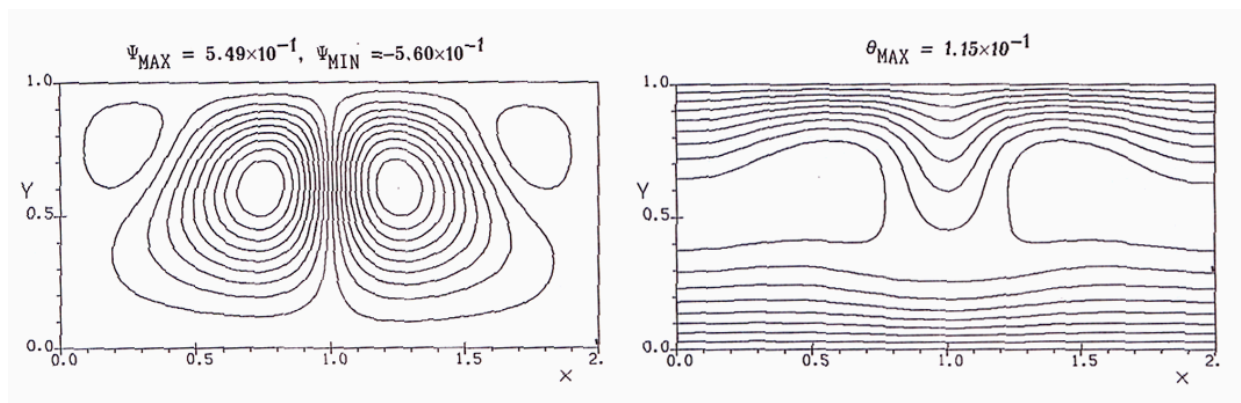


Fig. 8. Steady-state solution for adiabatic sides, $Ra = 10^5$

Very weak oscillations occur at $Ra = 5 \times 10^5$, i.e. the solution is practically quasi-steady with the structure depicted in Fig. 9. This prediction is in a good agreement with data of computational and real experiments [10] obtained for $Ra = 7 \times 10^5$.

Only at $Ra = 10^6$ oscillations become more pronounced (see Fig. 10, 11) due to the fact that convective motion is decomposed into evolving vortical cells of different size.

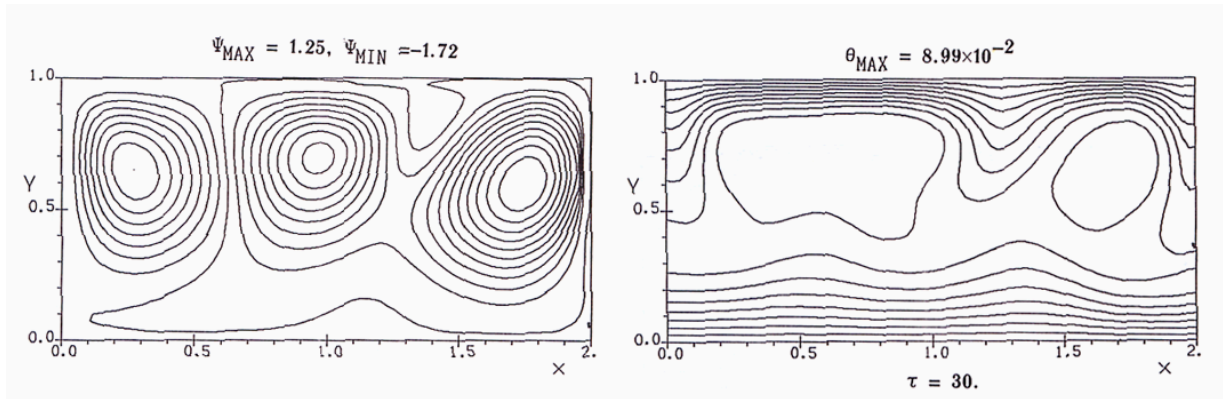


Fig. 9. Weak oscillations, $Ra = 5 \times 10^5$

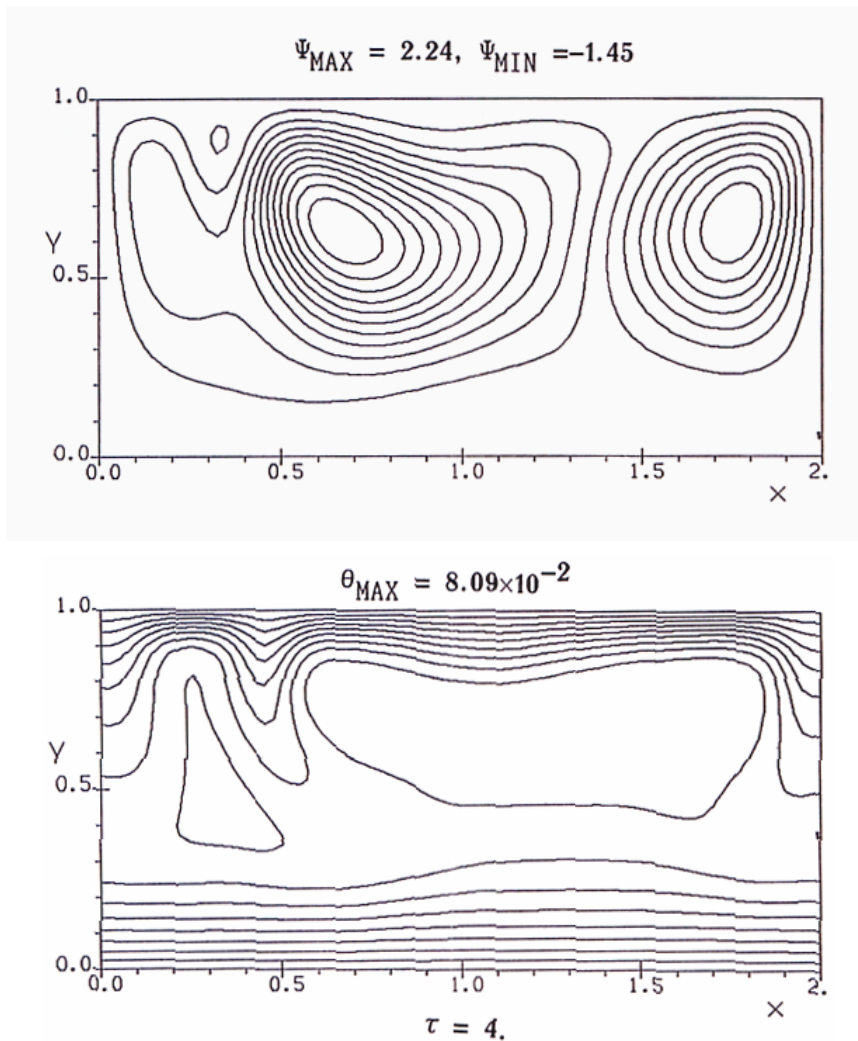


Fig. 10. Oscillating heat and fluid flow, $Ra = 10^6$

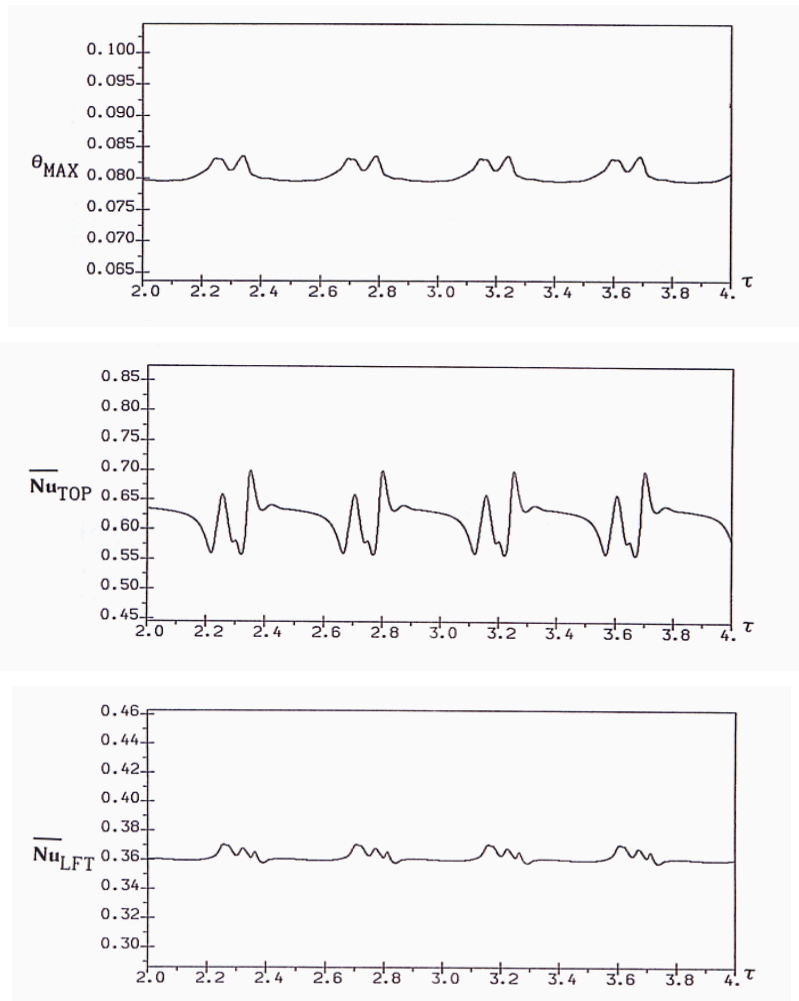


Fig. 11. Time variations of heat transfer, $Ra = 10^6$

It was found that the further change of thermal conditions at the bottom into adiabatic ones slightly smoothes the spatial nonuniformity of the hydrodynamical field (decreases the number of vortices), but as a whole it does not affect considerably the main features of convective heat transfer.

A typical solution for this problem is depicted in Fig. 12, 13 for $Ra = 10^6$. Obviously, the further reduction of oscillation amplitudes take place for thermal parameters in this flow regime in compare with similar predictions with two adiabatic sides (see Fig. 10, 11).

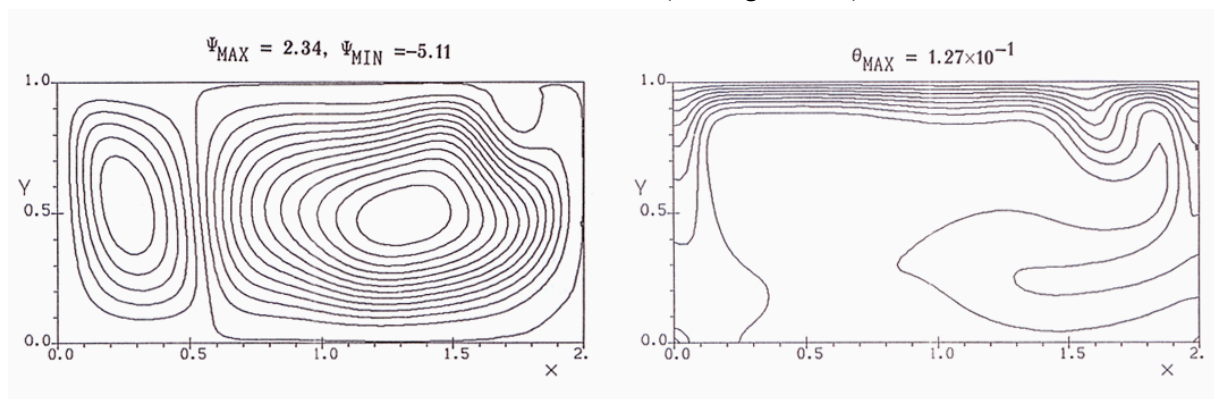


Fig. 12. Oscillations for adiabatic sides and bottom, $Ra = 10^6$

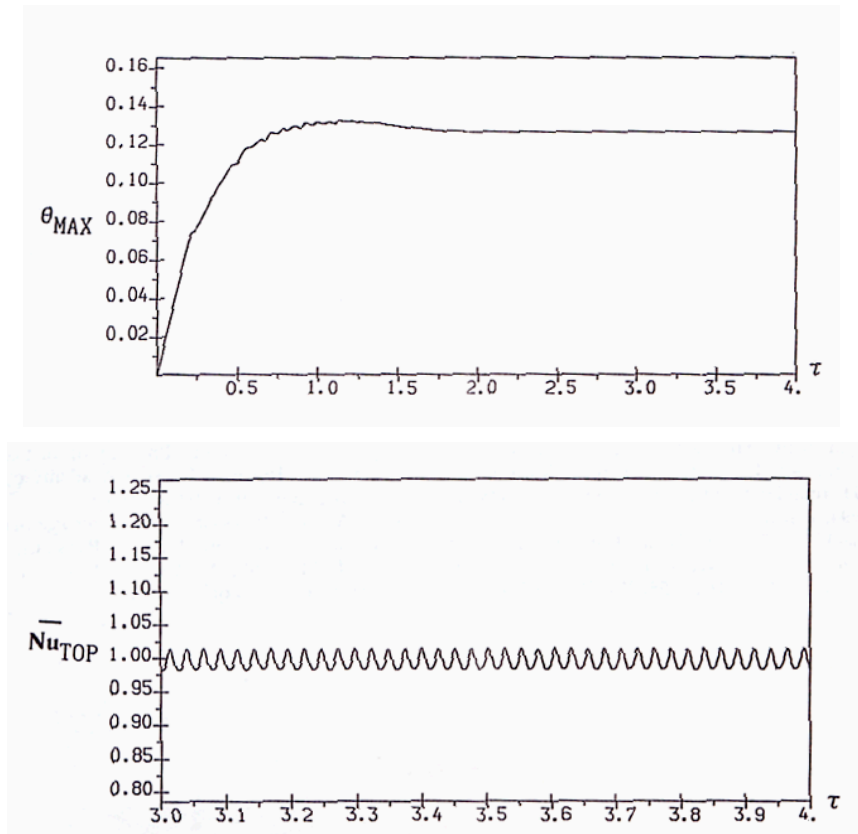


Fig. 13. Histories of the heat transfer process, $Ra = 10^6$

Conclusions

New numerical algorithm developed by the authors to solve convective heat transfer problems demonstrates high accuracy and efficiency properties when applied to problems with internal heat generation. A comprehensive comparison with numerical and experimental results of various authors indicates that with the help of this method it is possible to obtain correct numerical results for this very important class of thermal problems. New temporal and spatial dependencies of heat transfer are obtained on the basis of this method for a rectangular cavity with a heat-generating fluid in a wide range of thermal and geometric parameters. For various aspect ratios the

ranges of Rayleigh number are obtained for steady-state and oscillating flow regimes. It was found that a flow in a square cavity becomes periodically oscillating at $Ra = 3.2 \times 10^6$ and random fluctuating at 10^8 , respectively. With decreasing the aspect ratio up to 0.25 the critical Rayleigh numbers corresponding to the transition to the periodical regime as well as to the random fluctuation one are both reduced approximately by a factor 10. Change of boundary conditions at sides and bottom from isothermal into adiabatic lead to some depressing of oscillation amplitudes, but provide the same ranges of Rayleigh number for steady and periodic regimes.

References

1. S. Ostrach, Natural convection in enclosures, *ASME J. Heat Transfer*, 110, 1175-1190 (1988).
2. K.M. Kelkar, R.C. Schmidt and S.V. Patankar, Numerical analysis of laminar natural convection of an internally heated fluid in a hemispherical cavity. *Proc. National Heat Transfer Conf.*, pp.355-364. San Diego, USA (1992).
3. L.A. Bolshov, R.V. Arutyunyan, A.G. Popkov, V.V. Chudanov, P.N. Vabishchevich and A.G. Churbanov, Numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in nuclear reactor safety problems. Submitted to the 4th Int. Topical Meeting on Nuclear Thermal Hydraulics, Operations and Safety, April 5-8, 1994, Taipei, Taiwan.
4. F.A. Kulacki and R.J. Goldstein, Thermal convection in a horizontal fluid layer with uniform volumetric energy sources, *J. Fluid Mech.* 55, 271-287 (1972).
5. R. Farhadieh and R.S. Tankin, Interferometric study of two-dimensional Benard convection cells, *J. Fluid Mech.* 66, 739-752 (1974).
6. F.A. Kulacki and A.A. Emara, Steady and transient thermal convection in a fluid layer with uniform volumetric energy sources, *J. Fluid Mech.* 83, 375-395 (1977).
7. J.-H. Lee and R.J. Golstein, An experimental study on natural convection heat transfer in an inclined square enclosure containing internal energy sources, *ASME J. Heat Transfer* 110, 345-349 (1988).
8. A.A. Emara and F.A. Kulacki, A numerical investigation of thermal convection in a heat-generating fluid layer, *ASME J. Heat Transfer* 102, 531-537 (1980).
9. H.-O. May, A numerical study on natural convection in an inclined square enclosure containing internal heat sources, *Int. J. Heat Mass Transfer* 34, 919-928 (1991).
10. M. Jahn and H.H. Reineke, Free convection heat transfer with internal heat sources: calculations and measurements. *Proc. 5th Int. Heat Transfer Conf.*, pp.74-78. Tokyo, Japan (1974).
11. P.J. Roache, *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico (1976).
12. P.N. Vabishchevich, M.M. Makarov, A.G. Popkov, V.V. Chudanov and A.G. Churbanov, Numerical solution of hydrodynamics problems in the stream function-vorticity formulation. Preprint of Institute for Mathematical Modeling Russian Ac.Sci. No. 22, Moscow (1993), in Russian.
13. P.N. Vabishchevich, M.M. Makarov, V.V. Chudanov and A.G. Churbanov, Numerical simulation of convective flows in the stream function-vorticity-temperature formulation. Preprint of Institute for Mathematical Modeling Russian Ac.Sci. No. 28, Moscow (1993), in Russian.
14. A.A. Samarskii, *Theory of Difference Schemes*. Nauka Publishers, Moscow (1989), in Russian.
15. G.I. Marchuk, *Methods of Numerical Mathematics*. Springer, New York (1975).

OPERATOR-SPLITTING SCHEMES FOR THE STREAM FUNCTION-VORTICITY FORMULATION

V. V. Chudanov, A. G. Popkov, A. G. Churbanov, P. N. Vabishchevich, M. M. Makarov

1. Introduction

The stream function-vorticity variables are in general use for the numerical simulation of incompressible flows (see e.g. Refs [1-3]). There do exist pro and con arguments in using such a formulation, but evidently this approach seems to be suitable and efficient enough for two-dimensional flow predictions in simply connected calculation domains.

At the present time, there is a variety of numerical studies on the basis of this formulation with emphasis on the approximation of convective terms and the implementation of the boundary conditions. Different upwinding strategies developed to derive monotone high-accurate approximations of convective terms have been described by Roache [2]. As for the issue of the vorticity evaluation at rigid walls, the mathematical problem is concerned not only with constructing correct and accurate approximations of the boundary conditions, but also with their implicit implementation in time-dependent computations (a non-iterative implementation for steady-state equations, respectively). In most cases the vorticity at the walls is evaluated separately from the internal points via special explicit formulae [2, 3]. Even though the vorticity transport equation is calculated in an implicit way, such an uncoupled treatment of the boundary values necessarily leads to a strong time-step restriction similar to the stability limit of the explicit scheme for the diffusion equation. To implement the boundary conditions implicitly, we have to consider both no-slip and no-permeability conditions as the boundary conditions for the stream function. Then we have to solve the vorticity transport and stream func-

tion equations in a coupled manner (as e.g. in [4]) or to eliminate the vorticity and turn to a single nonlinear biharmonic equation for the stream function (see e.g. Refs [1, 5-9]). In both cases a solution procedure becomes much more complicated and less flexible to modifications.

In the present work, a new efficient class of difference schemes is developed for two-dimensional time-dependent problems of a viscous incompressible fluid in the stream function-vorticity formulation. Starting from the stream function formulation, an appropriate operator-splitting scheme (Douglas-Rachford type) is constructed and only then the vorticity is introduced into the derived two equations in order to reduce them to the equations with second-order derivatives only. Doing so, we obtain an uncoupled solution procedure for the stream function-vorticity variables with the fully implicit implementation of the boundary conditions. The schemes are unconditionally stable (in linear sense), i.e. the time-step is practically independent of the spatial grid. The only restriction exists due to the nonlinearity of convection problems. Transition to the next time level in these linearized schemes involves the solution of linear elliptic equations for the vorticity and stream function. New skew-symmetric second-order approximations are developed for the convective terms. For any time-step used, an *a priori* estimate is valid for the discrete solution, similar to that obtained for the original continuous differential problem. A lid-driven cavity flow has been predicted to examine stability and accuracy of the schemes for Reynolds number 100, 400, 1000 and 3200 on the grids with 41×41 and 81×81 points.

2. Governing Equations

Let us consider a time-dependent incompressible flow in a 2D rectangular cavity

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

Such a flow is governed by the following momentum equation:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + V(v)v + \text{grad } p - \nu \Delta v = f(x, t), \quad x \in \Omega, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

and the incompressibility constraint:

$$\text{div } v = 0, \quad x \in \Omega, 0 < t \leq T. \quad (2)$$

Here $v = (v_1, v_2)$ is the velocity vector, p —the pressure normalized with respect to the density, $V(v)$ —the convective transport operator, ν —the kinematic viscosity, Δ —the Laplace operator and $f(x, t)$ —the vector of volumetric forces.

The cavity boundary $\partial\Omega$ is assumed to be rigid and fixed, so the no-slip and no-permeability conditions are imposed:

$$v(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, 0 < t \leq T. \quad (3)$$

The quiescent state is considered as the initial condition:

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

The problem (1–4) provides the complete description of fluid motion in Ω at any time moment $t > 0$.

To reduce the number of the dependent variables, let us introduce the new ones. The velocity components can be expressed via the stream function $\psi(x, t)$ as follows:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (5)$$

and hence, the incompressibility constraint (2) holds identically. Next, for the vorticity ω we have:

$$\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (6)$$

Taking into account definitions (5) and (6), the momentum equation (1) can be rewritten as the vorticity transport equation:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + V(v)\omega - \nu \Delta \omega = \varphi(x, t), \quad x \in \Omega, 0 < t \leq T, \quad (7)$$

where $\varphi = \partial f_2 / \partial x_1 - \partial f_1 / \partial x_2$. For the stream function we obtain the Poisson equation:

$$-\Delta \psi = \omega, \quad x \in \Omega, 0 < t \leq T. \quad (8)$$

This system of equations is complemented by the boundary and initial conditions:

$$\psi(x, t) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (9)$$

$$\psi(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

where n stands for the outer normal vector.

Eliminating the vorticity from the couple of equations (7), (8), we derive a single fourth-order equation for the stream function:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + VV(v)\Delta \psi - v\Delta \psi^2 = -\varphi(x, t) \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (11)$$

In equation (7) [or (11)] the convective terms may be written in different ways. For example, we can introduce the following divergence form of the convective terms:

$$V(v) = \sum_{\alpha=1}^2 V_{\alpha}(v_{\alpha}), \quad V_{\alpha}(v_{\alpha})\omega = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(v_{\alpha}\omega), \quad \alpha = 1, 2 \quad (12)$$

and using definition (5) we get:

$$V_1(v_1)\omega = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \omega \right), \quad V_2(v_2)\omega = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \omega \right). \quad (13)$$

For this definition of the convective terms we have the following fundamental property:

$$(V(v)\omega, \psi) = 0. \quad (14)$$

For the problem (7–10) [or for (9–11), that is equivalent in the continuous case] with (14), we shall derive a simple *a priori* estimate of the kinetic energy integral. Let $H = L_2(\Omega)$ be a Hilbert space with the norm $\|\cdot\|$ and scalar product (\cdot, \cdot) . Multiplying equation (7) by ψ term-by-term, we get

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\text{grad } \psi\|^2 \leq v \|\omega\|^2 + 2 \|f\| \|\text{grad } \psi\|.$$

Hence the inequality

$$\|\text{grad } \psi(x, t)\| \leq \|\text{grad } \psi(x, 0)\| + 2 \int_0^t \|f(x, s)\| ds \quad (15)$$

holds. The estimate (15), which expresses boundedness of the solution of the differential problem, will serve as a check point in the construction of difference schemes.

Formulation of convective terms should be given a special consideration (see e.g. Arakawa [10] or Gresho [11]). It is clear that different forms of convective terms are equivalent in the continuum case, but generally not equivalent in the discrete one. Aimed at using linearized schemes, we can employ neither the divergence form (12), (13) nor the advective (non-divergence) form due to the fact that the fulfilment of a discrete analog of property (14) is hardly expected.

Using equations (5), (6) we can rewrite the convective terms as follows

$$V(v)\omega = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \omega \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \omega \right) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \psi \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \psi \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \psi \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \psi \right) \right).$$

Introducing the vector w

$$w = \{w_1, w_2\}, \quad w_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \quad w_2 = -\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \quad (16)$$

we can rewrite the convective transport of the vorticity as

$$V(v)\omega = -\tilde{V}(w)\psi \equiv -\frac{1}{2}(V(w) - V^*(w))\psi, \quad (17)$$

i.e., we treat the convective transport of the vorticity as an effective transport of the stream function. Doing so, we obtain the skew-symmetric form of the convective terms in the (ψ, ω) variables. The skew-symmetric property is of great importance for a simulation to be numerically stable in time. In the primitive variables, the skew-symmetric form has been used, for instance, in the work by Zang [12] and the previous study of the present authors [13]. A similar form is derived here for the (ψ, ω) -formulation. Really, in light of (12), the adjoint operator in (17) has the form

$$V^*(v) = \sum_{\alpha=1}^2 V_{\alpha}^*(v_{\alpha}), \quad V_{\alpha}^*(v_{\alpha})\omega = -v_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \omega, \quad \alpha = 1, 2$$

and corresponds to the non-divergence form of convective terms. Now with the operator formulation (16), (17), the fundamental constraint (14) is fulfilled for all vectors w .

3. Discretization in Space

To solve equations (7–10) [or (9–11)] approximately, difference methods are used. Let us introduce in Ω a uniform grid $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \partial\omega_h$ with steps h_1 and h_2 . Let ω_h be the set of internal points, i.e.

$$\omega_h = \{x \mid x = (x_1, x_2), \quad x_{\alpha} = i_{\alpha} h_{\alpha}, \quad i_{\alpha} = 1, 2, \dots, N_{\alpha} - 1, \quad N_{\alpha} h_{\alpha} = l_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2\},$$

and $\partial\omega_h$ —the set of the boundary points. We shall use the common index-free notation of the theory of difference schemes [14]. For the forward and backward difference derivatives we have, respectively

$$w_{x_{\alpha}}^+ = \frac{w(x_{\alpha} + h_{\alpha}) - w(x_{\alpha})}{h_{\alpha}}, \quad w_{x_{\alpha}}^- = \frac{w(x_{\alpha}) - w(x_{\alpha} - h_{\alpha})}{h_{\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2.$$

The central differences are defined by:

$$w_{x_{\alpha}}^{\cdot} = \frac{1}{2} (w_{x_{\alpha}}^+ + w_{x_{\alpha}}^-) = \frac{w(x_{\alpha} + h_{\alpha}) - w(x_{\alpha} - h_{\alpha})}{2h_{\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Let us define the discrete Laplace operator on the set of grid functions $y \in H$, which are equal to zero at the boundary:

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha} y, \quad \Lambda_{\alpha} y = -y_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (18)$$

The scalar product in the finite-dimensional grid Hilbert space H is defined as

$$(y, z) = \sum_{x \in \omega_h} y(x) z(x) h_1 h_2.$$

The operator Λ in H is selfadjoint and positive definite [14, 15], i.e. $\Lambda = \Lambda^* > 0$.

In accordance with (16), (17) and using central difference approximations for derivatives, we approximate the convective terms as follows:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(w) &= \sum_{\alpha=1}^2 \tilde{V}_{\alpha}(w_{\alpha}), \\ \tilde{V}_1(w_1)\psi &= \frac{1}{2} \left(w_{\bar{x}_2} \psi_{\dot{x}_1} + (w_{\dot{x}_2} \psi)_{\dot{x}_1} \right), \\ \tilde{V}_2(w_2)\psi &= -\frac{1}{2} \left(w_{\dot{x}_1} \psi_{\dot{x}_2} + (w_{\dot{x}_1} \psi)_{\dot{x}_2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

For this approximation of convective transport we have

$$(\tilde{V}(w)\psi, \psi) = 0, \quad (20)$$

that means, that the operator \tilde{V} is a skew-symmetric in H , i.e. $(\tilde{V} = -\tilde{V}^*)$. Moreover, both operators $\tilde{V}_{\alpha}(w_{\alpha}), \alpha = 1, 2$, are also skew-symmetric.

We shall use below the same notation for the discrete solutions as for the exact ones. Let us consider the following semidiscrete (continuous in time and difference in space) problem for biharmonic equation (11):

$$\frac{d}{dt} \Lambda \psi - \tilde{V}(w)\psi + \nu \Lambda^2 \psi + \nu \rho(x)\psi = \varphi(x, t), \quad x \in \omega_h, 0 < t \leq T. \quad (21)$$

This equation is derived on the basis of second-order central differences and leads to the standard 13-point stencil at the internal points of a spatial grid (see, e.g., Refs [1] or [5]). It should be noted that both Dirichlet and Neumann boundary conditions for the stream function are already substituted into this equation. Namely, the difference Laplace operator is defined on the set of grid functions, which are equal to zero at the boundary as it was already mentioned above. As for the additional term in the approximation of the biharmonic operator, it appears from the eliminations of the ψ -values outside of the rectangle and nonzero boundary values of $\Lambda \psi$ and has the following form:

$$\rho(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_{\alpha}(x_{\alpha}),$$

$$\rho_\alpha(x_\alpha) = \begin{cases} 0, & h_\alpha < x_\alpha < l_\alpha - h_\alpha, \\ \frac{2}{h_\alpha^4}, & x_\alpha = h_\alpha, l_\alpha - h_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2.$$

It is clear that this grid function can be treated as the implementation of the common Thom approximation for the vorticity [2, 3], decomposed from the discrete biharmonic operator. Usually this formula is derived from a Taylor-series expansion at the boundary and, for instance, can be written for the left wall as follows;

$$\omega(0, x_2) = -\frac{2}{h_1^2} \psi(h_1, x_2). \quad (22)$$

Let us rewrite equation (21) in the following operator form, convenient for the further numerical implementation:

$$\frac{d}{dt} \Lambda \psi + (A_1 + A_2) \psi = \varphi, \quad (23)$$

where

$$A_1 = \nu \Lambda^2, \quad A_2 = -\tilde{V}(w) + \nu \rho(x) E. \quad (24)$$

and E is the identity operator. Thus, in this equation we split the operators into two parts, where the first one is associated with diffusion whereas the second one is nothing but convection and the boundary conditions. Due to the above mentioned properties (18), (20) and the peculiarities of the grid function $\rho(x)$ we have that $A_1 = A_1^* > 0$ and $A_2 \geq 0$ for any w .

4. Time Discretization by Operator-Splitting

To construct a difference scheme, let us introduce a uniform grid in time with step $\tau > 0$:

$$\omega_\tau = \{t | t = t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_\tau, N_\tau \tau = T\}$$

and let $y_n = y(t_n)$.

The simplest difference schemes for (23), (24) are based on a natural linearization, when the operator $\tilde{V}(w)$ is determined by the solution at the previous time level. Due to the non-negativeness of operators A_α , $\alpha = 1, 2$, various difference schemes based on operator-splitting technique (see e.g. Refs [14, 16] for general issues and [17] on applications to fluid dynamics) can be considered: factorized schemes, additive approximation schemes,

etc., which are unconditionally stable in the case of splitting of the equation into two non-negative operators (it is the sufficient condition of the scheme stability [14]). Here we shall use an extension of earlier proposed [18, 19] scheme that provides the implicit implementation of the boundary conditions. It should be noted that the viscosity is omitted below due to the normalization procedure.

When a purely implicit factorized scheme (an analog of the Douglas-Rachford [20] scheme) is employed, we have at the first stage, in view of (24), the difference equation:

$$\frac{\Lambda \Psi_{n+1/2} - \Lambda \Psi_n}{\tau} - \tilde{V}(w_n) \Psi_n + \Lambda^2 \Psi_{n+1/2} + \rho(x) \Psi_n = \varphi_n, \quad (25)$$

Thus, the convective transports as well as the data for the boundary conditions are taken from the previous time level. Substituting now

the vorticity $\omega_{n+1/2} = \Lambda \Psi_{n+1/2}$, equation (25) can be written as an equation for the vorticity transport:

$$\frac{\omega_{n+1/2} - \omega_n}{\tau} - \tilde{V}(w_n) \Psi_n + \Lambda \omega_{n+1/2} + \rho(x) \Psi_n = \varphi_n \quad (26)$$

The second stage consists in the correction in convective transport and the boundary conditions:

$$\frac{\Lambda \Psi_{n+1} - \Lambda \Psi_{n+1/2}}{\tau} + (\rho(x) - \tilde{V}(w_n)) (\Psi_{n+1} - \Psi_n) = 0. \quad (27)$$

Finally, after evaluation of ψ at the new time level, in order to go to the vorticity transport equation (26), again, we have to calculate the vorticity at the internal points (via its definition $\omega = \Lambda \psi$) and on the boundary [by means of the Thom formula (22)]. The calculation procedure can be summarized as follows

1. Initial values or the previous time level values are considered as the current ones.
2. The effective velocity w of the stream function convective transport is evaluated using its definition (16) via second-order approximations.
3. The intermediate values of the vorticity are found as a solution of the selfadjoint elliptic problem (26). It should be noted that the sum of the third and fourth terms in this equation yields the standard Laplace operator with the nonzero boundary values of the vorticity which are known from the previous time level.
4. The new values of the stream function are evaluated from equation

(27). In contrast to common solution procedures [2, 3], we have for the stream function the non-selfadjoint problem.

5. The new values of the vorticity are calculated at the internal points (via its definition $\omega = \Lambda \psi$) and on the boundary [through the Thom formula (22)].
6. Computations are directed to step 2 and continued until it satisfies the required criteria. It should be noted again, that in this unconditionally stable (in linear sense) operator-splitting scheme we essentially use the non-negativeness of operators A_α , $\alpha = 1, 2$. Other ordinary approximations of the vorticity at the boundary (Jensen, Woods, etc., see [2, 3]) do not provide the necessary properties of these operators and so, they cannot be implemented in an implicit way on the basis of the present numerical procedure.

5. A Priori Estimate for the Discrete Solution

Now we shall derive a proper estimate for the linearized difference scheme (25), (27). Let us define grid functions $z_{n+\alpha/2} = \Lambda^{1/2} \Psi_{n+\alpha/2}$, $\alpha = 1, 2$. Acting on (25) and (27) from the left by $\Lambda^{-1/2}$, we get

$$\frac{z_{n+1/2} - z_n}{\tau} + \tilde{A}_1 z_{n+1/2} + \tilde{A}_2 z_n = \Lambda^{-1/2} \varphi_n, \quad (28)$$

$$\frac{z_{n+1} - z_{n+1/2}}{\tau} + \tilde{A}_2 (z_{n+1} - z_n) = 0, \quad (29)$$

Where $\tilde{A}_\alpha = \Lambda^{-1/2} A_\alpha \Lambda^{-1/2} \geq 0$, $\alpha = 1, 2$, $\tilde{\varphi}_n = \Lambda^{-1/2} \varphi_n$.

Let us rewrite equations (28), (29) into the form

$$(E + \tau \tilde{A}_1) z_{n+1/2} = (E - \tau \tilde{A}_2) z_n + \tau \tilde{\varphi}_n, \quad (30)$$

$$(E + \tau \tilde{A}_2) z_{n+1} = z_{n+1/2} + \tau \tilde{A}_2 z_n. \quad (31)$$

The right-hand side of (31) can be transformed, in view of (30), as

$$\begin{aligned} (z_{n+1/2} + \tau \tilde{A}_2) z_n &= z_{n+1/2} + \frac{1}{2} (E + \tau \tilde{A}_2) z_n - \frac{1}{2} (E - \tau \tilde{A}_2) z_n \\ &= z_{n+1/2} + \frac{1}{2} (E + \tau \tilde{A}_2) z_n - \frac{1}{2} (E + \tau \tilde{A}_1) z_{n+1/2} - \frac{1}{2} \tilde{\varphi}_n \\ &= \frac{1}{2} (E + \tau \tilde{A}_2) z_n + \frac{1}{2} (E - \tau \tilde{A}_1) z_{n+1/2} - \frac{1}{2} \tilde{\varphi}_n. \end{aligned}$$

The substitution into (31) gives

$$(E + \tau \tilde{A}_2) z_{n+1} = \frac{1}{2} (E + \tau \tilde{A}_2) z_n + \frac{1}{2} (E - \tau \tilde{A}_1) z_{n+1/2} - \frac{\tau}{2} \tilde{\varphi}_n. \quad (32)$$

For any operator $S \geq 0$, there takes place an estimate

$$\|(E - S)y\| \leq \|(E + S)y\|,$$

hence, from (30) we have

$$\|(E + \tau \tilde{A}_1) z_{n+1/2}\| \leq \|(E - \tau \tilde{A}_2) z_n\| + \tau \|\tilde{\varphi}_n\|,$$

and then from (32) it follows

$$\|(E + \tau \tilde{A}_2) z_{n+1}\| \leq \frac{1}{2} \|(E + \tau \tilde{A}_2) z_n\| + \frac{1}{2} \|(E + \tau \tilde{A}_1) z_{n+1/2}\| + \frac{\tau}{2} \|\tilde{\varphi}_n\| \leq \|(E + \tau \tilde{A}_2) z_n\| + \tau \|\tilde{\varphi}_n\|.$$

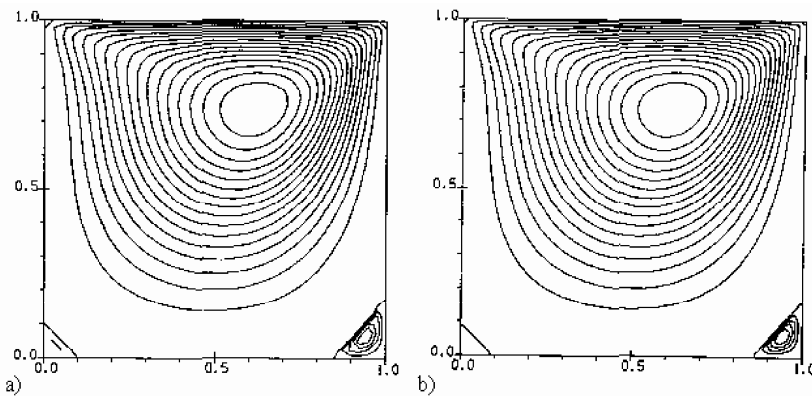


Fig. 1. Flow pattern for $Re = 100$ predicted on various grids: (a) 41×41 , (b) 81×81

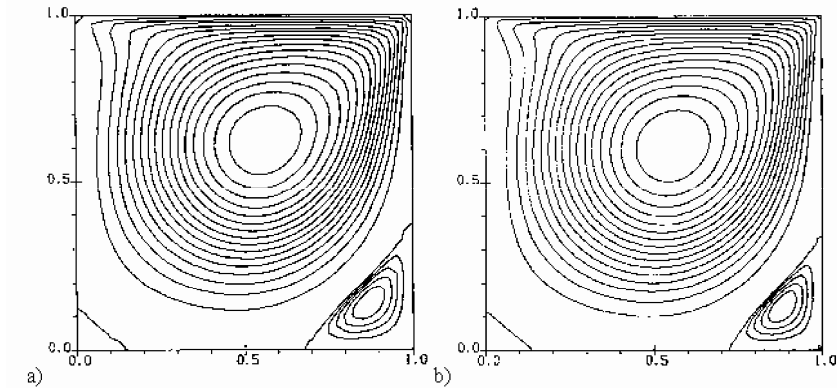


Fig. 2. Flow pattern for $Re = 400$ predicted on various grids: (a) 41×41 , (b) 81×81

Thus, for difference scheme (28), (29), validity of the estimate

$$\left\| (E + \tau \tilde{A}_2) z_{n+1} \right\| \leq \left\| (E + \tau \tilde{A}_2) z_n \right\| + \tau \left\| \Lambda^{-1/2} \varphi_n \right\| \quad (33)$$

has been shown. This leads to the following estimate:

$$\left\| (E + \tau \Lambda^{-1} A_2(t_n)) \psi_{n+1} \right\|_{\Lambda} \leq \left\| (E + \tau \Lambda^{-1} A_2(t_n)) \psi_n \right\|_{\Lambda} \quad (34)$$

The estimate (34) was obtained without any restrictions on grid parameters, and can be regarded as a difference analog of *a priori* estimate (15). It should be noted that the estimate obtained here is similar to those derived in [21, 22] for schemes in the primitive variable formulation.

6. Nonlinearity Predictor

Based on scheme (25), (27), various linearized difference schemes can be constructed, aimed at achieving accuracy with respect to time, consideration of nonlinearity, etc. As an example, let us consider a scheme with an additional explicit predictor on nonlinearity. In this case, at the first (predictor) stage the vorticity is evaluated via the explicit scheme

$$\frac{\tilde{\omega}_{n+1/2} - \omega_n}{\tau} - \tilde{V}(w_n) \psi_n + \Lambda \omega_n + \rho(x) \psi_n = \varphi_n. \quad (35)$$

This solution is used then in the computation of the convective transport, when the equation

$$\frac{\Lambda \psi_{n+1/2} - \Lambda \psi_n}{\tau} - \tilde{V}(\tilde{w}_n) \psi_n + \Lambda^2 \psi_{n+1/2} + \rho(x) \psi_n = \varphi_n$$

is used instead of (25). The additional computation work involved in (35) is insignificant. At the same time, one can expect that such a modification of the scheme allows for larger time-steps to be used.

7. Numerical Results

To study the features of the developed schemes, a lid-driven cavity flow of an incompressible fluid has been considered for a wide range of Reynolds numbers. Abundant data have been accumulated on the numerical solution of this problem [7, 23]. The benchmark solutions of Ghia *et al.* [23] obtained on the fine grid of 257×257 points have been used for a comparison. Another application of the scheme is presented in [24].

The vorticity transport in the unit square $\Omega (l_\alpha = 1, \alpha = 1, 2)$ is governed by the equation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + V(v)\omega - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega = 0, \quad x \in \Omega, 0 < t \leq T,$$

where Re is Reynolds number. Let Γ stand for the part of boundary $\partial\Omega$ where $x_2 = 1$ (the upper side of the square Ω). In the problem at hand, the second boundary condition (9) is non-homogeneous:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \Gamma, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = 1, \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t \leq T.$$

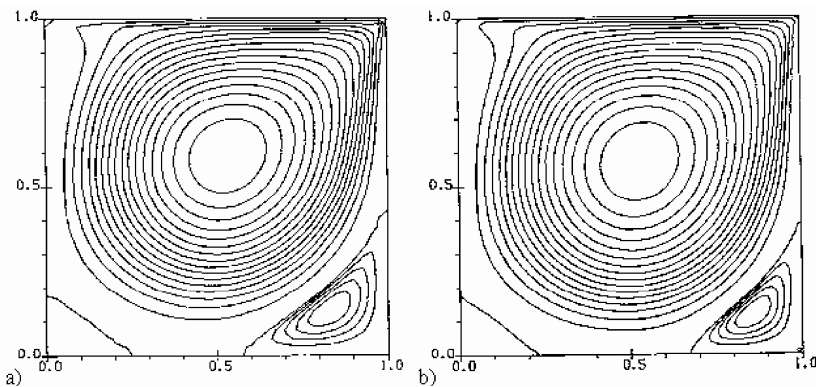


Fig. 3. Flow pattern for $Re = 1000$ predicted on various grids: (a) 41×41 , (b) 81×81

Systems of grid equations were solved in our calculations using the following iterative solvers [25]: modified incomplete Cholesky-conjugate gradient method (ICCG) for the symmetric vorticity equation (26) and preconditioned conjugate gradient method [ORTHOMIN(1)] for the unsymmetric equation (27) of the stream function. A very efficient implementation of these popular methods (Refs [26, 27]), designed on the basis of recent developments in this field, has been employed in our predictions.

To obtain steady-state solutions, the following criterion for the calculation termination has been used:

$$\left\| \frac{\Psi^{n+1} - \Psi^n}{\tau} \right\| + \left\| \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} \right\| \leq \varepsilon,$$

where ε was as low as 10^{-5} . The quiescent state was used as the initial condition for the time integration. All predictions have been performed on a personal computer IBM PC 486.

Figures 1-4 demonstrate the calculated flow patterns plotted equidistantly with constant but different intervals $\delta\psi^+$ for the positive and $\delta\psi^-$ for negative values of the stream function, respectively. In these figures the results have been obtained on the uniform grids 41×41 and 81×81 [parts (a) and (b) of each figure, respectively] and Reynolds numbers $Re = 100, 400, 1000$ and 3200 . It was found that at high Reynolds numbers the flow structure is predicted unsatisfactorily if a coarse grid is employed [see Fig. 4(a)].

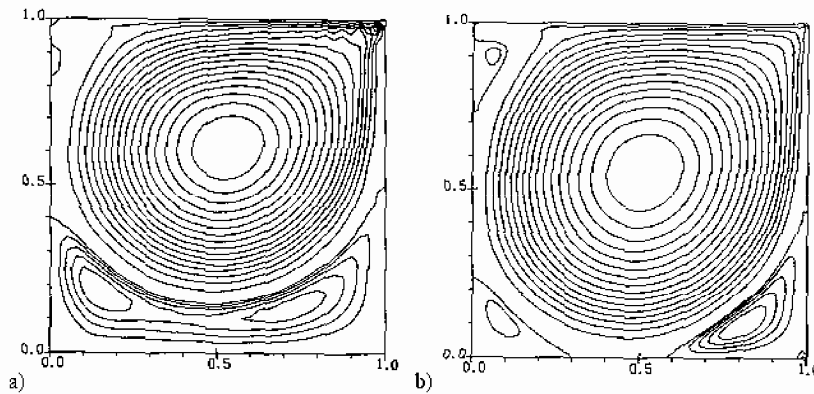


Fig. 4. Flow pattern for $Re = 3300$ predicted on various grids: (a) 41×41 , (b) 81×81

The corresponding minimum and maximum values of the stream function are listed in Table 1 (ψ_{\min} as a numerator, ψ_{\max} as a denominator). The benchmark solutions of Ghia *et al.* [23] are also presented here for a comparison. It is easy to see that our numerical results indicate a good enough agreement with the high-accurate benchmark solutions of Ghia *et al.*

Table 1.

Re Grid	100	400	1000	3200
41×41	<u>-0.102032</u>	<u>-0.106527</u>	<u>-0.100467</u>	<u>-0.069090</u>
	0.000018	0.000808	0.001867	0.002083
81×81	<u>-0.103125</u>	<u>-0.112209</u>	<u>-0.114915</u>	<u>-0.111123</u>
	0.000014	0.000683	0.001777	0.002567
Ghia	<u>-0.103423</u>	<u>-0.113909</u>	<u>-0.117929</u>	<u>-0.120377</u>
	0.000012	0.000642	0.001751	0.003140

Methodical computations have been performed to reveal the quality of the proposed difference schemes in predicting essentially nonstationary flows. For this purpose the problem of the flow evolution has been considered for a cavity with a suddenly moved upper lid. The time-evolution of the initial state was observed until the steady-state regime. The flow patterns for this problem with $Re = 400$ are depicted in Fig. 5 for four different time moments: (a) $t = 1.25$, (b) $t = 2.5$, (c) $t = 5$, (d) $t = 10$. The results corresponding to $Re = 1000$ are shown in Fig.6 at the same time moments. Computations

were done on the grid 81×81 with time step $\tau = 0.01$. The minimum and maximum values of the stream function are listed in Table 2.

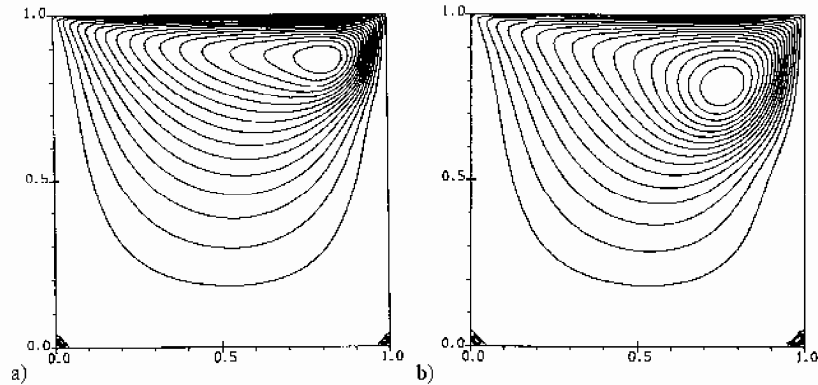


Fig. 5. Flow pattern for $Re = 400$ at different time moments: (a) $t = 1.25$. (b) $t = 2.5$

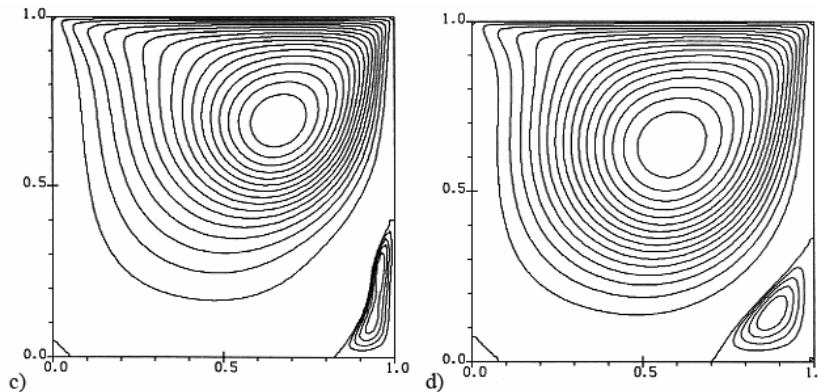


Fig. 5. Flow pattern for $Re = 400$ at different time moments: (c) $t = 5$, (d) $t = 10$

The advantages of the scheme with a predictor on nonlinearity are illustrated by the character of dependence of $|\psi_{\min}|$ on time. This dependence is shown in Fig. 7 for the problem with $Re = 400$, solved on the grid 41×41 with various time steps. It can be seen that for $\tau \geq 0.075$ within the considered evolution period, the linearized scheme (25–27) fails to provide a correct solution. A smaller time step ($\tau = 0.05$) was needed in this case. The scheme with a predictor as in (35) yields a qualitatively correct solution when the twice as large time step is used. The same conclusion can be deduced from the consideration of the problem with $Re = 1000$ (see Fig. 8). Usage of the finer spatial grid (81×81) shows the same tendency. It should be noted that the refinement of the spatial grid very slightly influences the admissible time step.

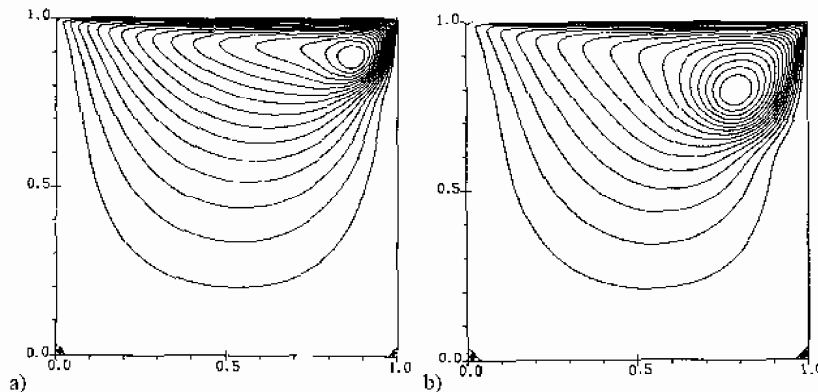


Fig. 6. Flow pattern for $Re = 1000$ at different time moments: (a) $t = 1.25$. (b) $t = 2.5$

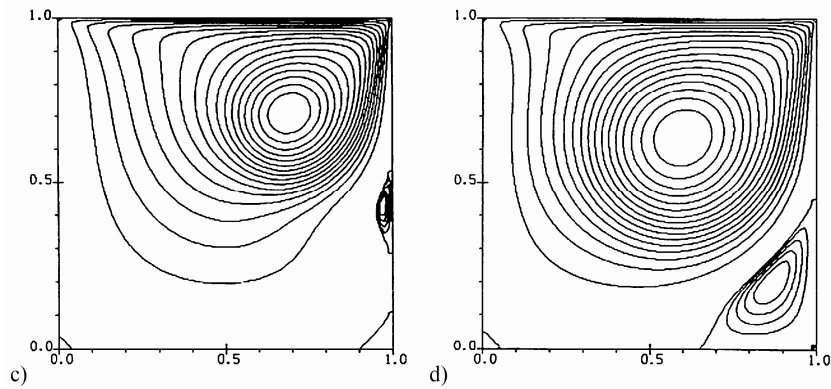


Fig. 6. Flow pattern for $Re = 1000$ at different time moments (c) $t = 5$, (d) $t = 10$

Table 2.

t	1.25	2.5	5	10
400	-0.052998 0.0000002	-0.071744 0.0000003	-0.089055 0.0000291	-0.104264 0.000503
1000	-0.039447 0.0000001	-0.058048 0.0000001	-0.077058 0.0000313	-0.095961 0.000670

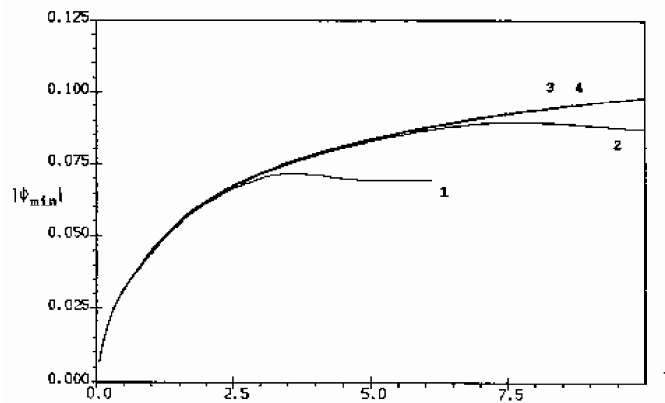


Fig. 7. Histories of $|\Psi_{\min}|$ for $Re = 400$ at different time steps: (1) $\tau = 0.1$, (2) $\tau = 0.075$, (3) $\tau = 0.05$, (4) $\tau = 0.1$ (with nonlinearity predictor)

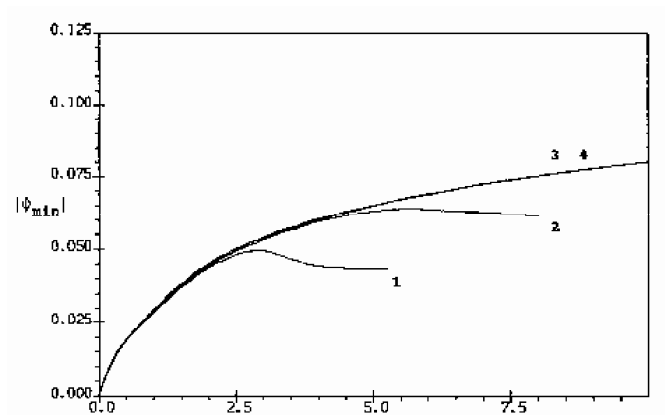


Fig. 8. Histories of $|\Psi_{\min}|$ for $Re = 1000$ at different time steps: (1) $\tau = 0.075$, (2) $\tau = 0.05$, (3) $\tau = 0.025$, (4) $\tau = 0.075$ (with nonlinearity predictor)

Conclusions

The proposed schemes for solving the Navier-Stokes equations in the stream function-vorticity formulation indicate some undeniable merits. Among the principal ones, we emphasize that they have the second-order accuracy in space. This is achieved by using a new skew-symmetric approximation of convective terms, based on usual central differences. Next, the fully implicit implementation of both no-slip and no-permeability boundary conditions is constructed on the basis of the operator-splitting technique. The proposed schemes are linear and the transition to the next time level is performed by solving elliptic problems. For

the discrete solution, an *a priori* estimate of the kinetic energy integral is valid without any restrictions on the grid parameters.

The schemes have been evaluated on test problems and proved their robustness and efficiency. It was found that the time step is practically independent of the spatial grid parameters. This is also true when nonuniform spatial grids are considered. Schemes with a predictor on nonlinearity have to be paid particular attention. These schemes allow for a more accurate consideration of nonlinearity in problems of an incompressible viscous fluid.

References

1. T. Cebeci, R. S. Hirsh, H. B. Keller and P. G. Williams, Studies of numerical methods for the plane Navier-Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* 27, 13 (1981).
2. P. J. Roache, *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa, Albuquerque (1982).
3. R. Peyret and T. D. Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow*. Springer, New York (1985).
4. O. S. Mazhorova and Yu. P. Popov, On numerical methods for the Navier-Stokes equations. *Z. Vych. Mat. Mat. Fiz.* 20, 1005 (1980) (in Russian).
5. P. J. Roache and M. A. Ellis, The BID method for the steady-state Navier-Stokes equations. *Computers & Fluids* 3, 305 (1975).
6. Y. D. Schkalle, F. Thiele and H. Wagner, A numerical method to solve the steady-state Navier-Stokes equations for natural convection in enclosures. *Recent Contributions to Fluid Mechanics* (Edited by W. Haase), pp. 222-234. Springer, Berlin (1982).
7. R. Schreiber and H. B. Keller, Driven cavity flows by efficient numerical techniques. *J. Comput. Phys.* 49, 310 (1983).
8. R. C. Mittal and P. K. Sharma, Fast finite difference solution for steady-state Navier-Stokes equations using the BID method. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 7, 911 (1987).
9. A. Lippke and H. Wagner, A reliable solver for nonlinear biharmonic equations. *Computers & Fluids* 18, 405 (1990).
10. A. Arakawa, Computational design of longterm numerical integration of the equations of fluid motion—1. Two-dimensional incompressible flow. *J. Comput. Phys.* 1, 119 (1966).
11. P. M. Gresho, Incompressible fluid dynamics: some fundamental formulation issues. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 23, 41. (1991).
12. T. A. Zang, On the rotation and skew-symmetric forms for incompressible flow simulations. *Appl. Numer. Math.* 7, 27 (1991).
13. A. G. Churbanov, A. N. Pavlov and P. N. Vabishchevich, Operator-splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations on non-staggered grids. Part 1: First-order schemes. Submitted to *Int. J. Numer. Methods Fluids*.

14. A. A. Samarskii, *Theory of Difference Schemes*. Nauka, Moscow (1989) (in Russian).
15. A. Samarskii and E. Nikolaev, *Numerical Methods for Grid Equations*, Vol. 1, 2. Birkhauser Verlag, Basel (1989).
16. G. I. Marchuk, *Methods of Numerical Mathematics*. Springer, Berlin (1982).
17. M. O. Bristeau, R. Glowinski and J. Periaux, Numerical methods for the Navier-Stokes equations. Applications to the simulation of compressible and incompressible viscous flows. *Comput. Phys. Reports* 6, 73 (1987).
18. P. N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Free Boundary Problems Solution*. Moscow Univ. Publishers (1987) (in Russian).
19. P. N. Vabishchevich, Implicit difference schemes for the unsteady Navier-Stokes equations in the stream function-vorticity formulation. *DifferentsiaVnye Uravneniya* 23, 1127 (1987) (in Russian).
20. J. Douglas and H. H. Rachford, On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* 82, 421 (1956).
21. O. A. Ladysenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows*. Gordon & Breach, New York (1969).
22. R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*. North-Holland, Amsterdam (1984).
23. U. Ghia, K. N. Ghia and C. T. Shin, High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.* 48, 387 (1982).
24. A. G. Churbanov, P. N. Vabishchevich, V. V. Chudanov and V. F. Strizhov, A numerical study on natural convection of a heat-generating fluid in rectangular enclosures. *Int. J. Heat Mass Transfer* 37, 2969 (1994).
25. L. A. Hageman and D. M. Young, *Applied Iterative Methods*. Academic Press, New York (1981).
26. A. B. Kutcherov and M. M. Makarov, An approximate factorization method for solving finite-difference elliptic problems with mixed boundary conditions. In *Numerical Methods in Mathematical Physics*, pp. 54-65. Moscow State Univ., Moscow (1984) (in Russian).
27. O. P. Iliev, M. M. Makarov and P. S. Vassilevski, Performance of certain iterative methods in solving implicit difference schemes for 2-D Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Methods Engng* 33, 1465 (1992).

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОБЛЕМ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА С ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ

А. Е. Аксенова, П. Н. Вабищевич, В. В. Чуданов, В. Г. Чурбанов

1. Введение

В настоящее время большое внимание уделяется проблемам разработки вычислительных алгоритмов решения задач тепло- и массообмена с фазовыми превращениями твердое тело – жидкость [1]. Моделирование проводится на основе приближения Буссинеска для несжимаемой жидкости. Для двумерных задач тепловой конвекции с фазовыми превращениями чаще всего используются вычислительные алгоритмы на основе переменных "функция тока, вихрь скорости, температура".

В работе строится линеаризованная разностная схема для решения задачи конвекции с фазовыми превращениями в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура" подобная рассмотренной в [2]. Конвективные члены аппроксимируются со вторым

порядком на основе центральных разностей. Используется разностная схема расщепления, для реализации которой на каждом временном слое решаются сеточные эллиптические задачи для нахождения функции тока, вихря скорости, температуры.

В качестве модельной рассматривается задача о свободноконвективном течении частично затвердевающей жидкости в полости квадратного сечения с боковым подогревом. Такая задача численно исследовалась в работах [3–8].

Представлены данные расчетов при различных числах Релея: $Ra = 10^5, 10^6, 10^7$, на последовательности сеток $41 \times 41, 81 \times 81$ и, кроме того, для $Ra = 10^7$ представлена динамика развития плавления на сетке 161×161 .

2. Математическая формулировка задачи

Рассматривается двумерная задача конвекции с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения. Температура левой боковой поверхности выше, а правой — ниже температуры фазового перехода, верхняя и нижняя грани теплоизолированы. В этих условиях часть вещества находится в жидком, а часть — в твердом состоянии.

Пусть

$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l, \alpha = 1, 2\}$ —

область, в которой необходимо найти решение задачи. Введем следующее обозначение для границы фазового перехода, где температура $u(x, t)$ принимает значение, равное температуре фазового перехода u^* :

$$S(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) = u^*\}.$$

Граница $S(t)$ разбивает область Ω на две подобласти. В области $D(t)$, где $D(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) > u^*\}$, находится жидкая фаза вещества, в оставшейся части $D_0 = \Omega/D$ — твердая. Задача рассматривается в нестационарной постановке.

Для описания процессов тепло- и массопереноса в жидкой фазе используется система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска. Так для скорости $v = (v_1, v_2)$ и нормализованного на плотность давления p (за вычетом гидростатического) имеем уравнение движения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} v - \beta g e u = 0, \quad (1)$$

$$x = (x_1, x_2) \in D, 0 < t \leq T,$$

где g — ускорение свободного падения, u — отклонение температуры от равновесной, ν — кинематическая вязкость, β — коэффициент объемного расширения, $e = (0, 1)$ — вектор, определяющий направление выталкивающей силы. Уравнение (1) дополняется уравнением несжимаемости

$$\operatorname{div} v = 0, x \in D, 0 < t \leq T. \quad (2)$$

Поле температур во всей области Ω , при наличии конвекции с учетом энтальпии фазового перехода, описывается уравнением теплопроводности в виде:

$$\left(c(u) + \lambda \delta(u - u^*) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \operatorname{grad} u \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = 0, \quad (3)$$

$$x \in \Omega, 0 < t \leq T,$$

где u^* — температура фазового перехода, δ — дельта-функция, а λ — энтальпия фазового перехода. Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда коэффициенты теплоемкости и теплопроводности постоянны в твердой и жидкой фазах и не меняются при фазовом превращении.

На границах полости ∂D условия прилипания и непротекания приводят к граничным условиям вида:

$$v(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T. \quad (4)$$

Нижняя и верхняя части границы считаются теплоизолированными и, следовательно:

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = 0, 1, \quad 0 < x_1 < 1. \quad (5)$$

Левая и правая границы изотермичны, т.е.:

$$u(0, x_2, t) = \chi_0 = \operatorname{const} > u^*, \quad u(1, x_2, t) = \chi_1 = \operatorname{const} < u^*. \quad (6)$$

Поскольку в начальный момент времени жидкость неподвижна, имеет место следующее начальное условие для скорости

$$v(x, 0) = 0, x \in D(0), \quad (7)$$

а начальное условие для температуры определяется соотношением

$$u(x, 0) = \chi_1 + \frac{x}{l} (\chi_0 - \chi_1), x \in \Omega. \quad (8)$$

Таким образом, задача (1)-(8) описывает свободную конвекцию тепла с учетом фазовых превращений в области Ω на любой момент времени $t > 0$. Вычислительный алгоритм её приближенного решения строится на базе переменных "функция тока, вихрь скорости". Компоненты скорости выражаются через функцию тока $\psi(x, t)$ следующим образом:

$$v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, v_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \quad (9)$$

поэтому условие несжимаемости (2) всегда выполнено. Для вихря скорости имеем соотношение

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (10)$$

Для унификации записи слагаемых конвективного переноса введем для произвольного вектора $q = (q_1, q_2)$ дифференциальный оператор $V(q)$ таким образом, что:

$$V(q) = \sum_{\alpha=1}^2 V_{\alpha}(q_{\alpha}), \quad (11)$$

$$V_{\alpha}(q_{\alpha})z = \frac{1}{2} \left(q_{\alpha} \frac{\partial z}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial z}{\partial x_{\alpha}} (q_{\alpha} z) \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

С учетом (9–11) из уравнения движения (1) будем иметь следующее выражение для вихря скорости в безразмерных переменных

$$\frac{\partial w}{\partial t} + V(v)w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_{\alpha}^2} - Gr \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (12)$$

$$x \in D, 0 < t \leq T,$$

где число Грасгофа для задачи (1)-(8) определяется соотношением

$$Gr = \frac{\beta l^3 g \Delta u}{\nu^2}.$$

Для функции тока имеем уравнение Пуассона

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_{\alpha}^2} = w, x \in D, 0 < t \leq T. \quad (13)$$

В безразмерных переменных уравнение для температуры имеет вид

$$(1 + Ste \delta(u - u^*)) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + V(v)u \right) - \frac{1}{Pr} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2} = 0, \quad (14)$$

$$x \in \Omega, 0 < t \leq T,$$

где $Pr = \nu/\alpha$ — число Прандтля, $Ste = \lambda/(c \cdot (\chi_0 - \chi_1))$ — число Стефана.

Здесь безразмерная температура определяется соотношением $(u - \chi_1)/(\chi_0 - \chi_1)$.

Система уравнений (12)–(14) дополняется граничными и начальными условиями, вытекающими из (4)–(8). Условия прилипания и непротекания (4) на границе единичного квадрата Ω записываются в виде

$$\Psi(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad 0 < t \leq T, \quad (16)$$

где n — внешняя нормаль к ∂D .

Из условия (7) следует

$$\Psi(x, 0) = 0, \quad x \in D. \quad (17)$$

И, наконец, в безразмерных переменных изотермические граничные условия имеют вид

$$u(0, x_2, t) = 1, \quad u(1, x_2, t) = 0. \quad (18)$$

Остальные условия для температуры (см. (5),(8)) остаются без изменений.

3. Метод фиктивных областей

Для приближенного решения задачи (12–18) с расчетом поля течения в изменяющейся области $D(t)$ используется метод фиктивных областей [8]. Вычислительный алгоритм сквозного счета строится на основе варианта метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам. Задача рассматривается во всем единичном квадрате Ω .

Пусть ε — малый параметр, $\Psi^\varepsilon, w^\varepsilon, u^\varepsilon$ — приближенные решения. Они определяются из уравнений:

$$\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t} + V(v^\varepsilon)w^\varepsilon + c^\varepsilon(u^\varepsilon)\Psi^\varepsilon - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_\alpha^2} - Gr \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} = 0 \quad (19)$$

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \Psi^\varepsilon}{\partial x_\alpha^2} = w^\varepsilon, \quad (20)$$

$$(1 + Ste \delta(u^\varepsilon)) \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + V(v^\varepsilon)u^\varepsilon \right) - \frac{1}{Pr} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_\alpha^2} = 0. \quad (21)$$

Здесь коэффициент продолжения $c^\varepsilon(u^\varepsilon)$ определяется выражением

$$c^\varepsilon(u^\varepsilon) = \begin{cases} 0, & x \in D(t) \quad (u^\varepsilon > u^*) \\ \varepsilon^{-2}, & x \in \Omega \setminus D(t) \quad (u^\varepsilon < u^*). \end{cases}$$

Система уравнений (19–21) дополняется соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\Psi^\varepsilon(x, t) = 0, \quad x \in \partial \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (23)$$

$$\psi^\varepsilon(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (24)$$

$$u^\varepsilon(0, x_2, t) = 1, \quad u^\varepsilon(1, x_2, t) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = 0, 1; \quad 0 < x_1 < 1, \quad (26)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (27)$$

При достаточно малом ε решение задачи (19–27) в Ω дает приближенное решение исходной задачи (12–18) в меньшей области D , т.е. $\psi^\varepsilon(x, t) \rightarrow \psi(x, t)$, $x \in D, t > 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$.

4. Дискретизация по пространству

В области Ω введем равномерную по каждому направлению сетку $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \partial\omega_h$ с шагами h_1 и h_2 , соответственно. Множество ω_h — содержит все внутренние узлы, т.е. $\omega_h = \{x | x = (x_1, x_2), x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, N_\alpha h_\alpha = 1, \alpha = 1, 2\}$, а $\partial\omega_h$ — граничные узлы.

Для написания разностной схемы воспользуемся стандартными обозначениями теории разностных схем [9]. Для направленных разностей имеем следующие соотношения:

$$w_{x_\alpha} = \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha)}{h_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$w_{x_\alpha}^- = \frac{w(x_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{h_\alpha},$$

а для центральных разностей используется выражение

$$w_{\dot{x}_\alpha} = \frac{1}{2} (w_{x_\alpha} + w_{x_\alpha}^-) = \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{2h_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Определим сеточный оператор Лапласа на множестве сеточных функций $y \in H$, обращающихся в нуль на границе сетки, как:

$$\Delta y = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = -y_{x_\alpha x_\alpha}^-, \quad \alpha = 1, 2. \quad (28)$$

В конечномерном сеточном гильбертовом пространстве H введем скалярное произведение

$$(y, z) = \sum_{x \in \omega_h} y(x)z(x)h_1h_2.$$

Заметим, что в H оператор Λ самосопряжен и положительно определен [10], т.е. $\Lambda = \Lambda^* > 0$.

Для аппроксимации конвективных слагаемых определим вектор

$$w = \{w_1, w_2\}, \quad w_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad w_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}. \quad (29)$$

Это позволяет нам записать конвективный перенос вихря в виде

$$V(v)w = -V(w)\psi, \quad (30)$$

т.е. интерпретировать конвективный перенос вихря скорости как некий эффективный перенос функции тока. Обращение к такой форме записи обусловлено тем, что для любых векторов w будет выполняться условие $(V(v)w, \psi) = 0$.

Для приближенных решений будем использовать те же обозначения, что и для точных. Тогда с учетом соотношений (11), (29), (30) для аппроксимации конвективных слагаемых будем иметь:

$$V(w) = \sum_{\alpha=1}^2 V_{\alpha}(w_{\alpha}),$$

$$V_1(w_1)\psi = \frac{1}{2} \left(w_{x_2} \psi_{x_1} + (w_{x_2} \psi)_{x_1} \right), \quad (31)$$

$$V_2(w_2)\psi = -\frac{1}{2} \left(w_{x_1} \psi_{x_2} + (w_{x_1} \psi)_{x_2} \right).$$

При такой аппроксимации конвективного переноса

$$(V(w)\psi, \psi) = 0, \quad (32)$$

т.е. в гильбертовом пространстве H оператор $V(w)$ кососимметричен ($V(w) = -V^*(w)$). Аналогичная аппроксимация $V(v)$ используется для конвективных слагаемых в уравнении для температуры.

Аппроксимация уравнений (19–20) с использованием формулы Тома [11] для вихря скорости во внутренних узлах сетки приводит к дифференциально-разностному уравнению вида:

$$\frac{d}{dt} \Lambda \psi - V(w)\psi + \Lambda^2 \psi + (\rho(x) + c^{\varepsilon}(u))\psi = \text{Gr } u_{x_1}, \quad (33)$$

$$x \in \omega_h, \quad 0 < t \leq T.$$

В этом уравнении сеточная функция $\rho(x)$ при граничных условиях Тома для вихря скорости определяется соотношением

$$\rho(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_{\alpha}(x_{\alpha}),$$

$$\rho_{\alpha}(x_{\alpha}) = \begin{cases} 0, & h_{\alpha} < x_{\alpha} < l_{\alpha} - h_{\alpha}, \\ \frac{2}{h_{\alpha}^4}, & x_{\alpha} = h_{\alpha}, l_{\alpha} - h_{\alpha}, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2.$$

Принимая во внимание особенности вычислительной реализации, удобно переписать уравнение (33) в виде

$$\frac{d}{dt}\Lambda\Psi + (A_1 + A_2)\Psi = Gr u_{i_1}, \quad (34)$$

где
$$A_1 = \Lambda^2, \quad A_2 = -V(w) + (\rho(x) + c^\varepsilon(u))E. \quad (35)$$

Учитывая свойство кососимметричности оператора $V(w)$ (см. (32)), в (35) имеем $A_1 = A_1^* > 0$, а $A_2 \geq 0$ при любых w .

Для аппроксимации уравнения теплопроводности выделим множество узлов $\omega'_h = \{x | x = (x_1, x_2), x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1, i_2 = 0, 1, \dots, N_2, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$.

Для сеточных функций y , обращающихся в нуль в узлах вне сетки ω'_h , определим гильбертово пространство H' со скалярным произведением

$$(y, z)' = \sum_{x \in \omega'_h} y(x)z(x)h_1 h_2(x_2),$$

Где $h_2(x_2) = h_2$ при $0 < x_2 < l_2$ и $h_2(x_2) = 0.5h_2$ при $x_2 = 0$ при $x_2 = l_2$.

Сеточный оператор Лапласа с учетом смешанных граничных условий представим в виде

$$\Lambda'y = \Lambda_1 y + \Lambda'_2 y, \quad x \in \omega'_h, \quad (36)$$

где

$$\Lambda'_2 y = \begin{cases} -\frac{2}{h_2} y_{x_2}, & x_2 = 0, \\ -y_{x_2 x_2}, & 0 < x_2 < l_2, \\ \frac{2}{h_2} y_{x_2}, & x_2 = l_2. \end{cases} \quad (37)$$

В гильбертовом пространстве H' оператор Λ' , определяемый соотношениями (36), (37), самосопряжен и положительно определен [10] ($\Lambda' = (\Lambda')^* > 0$).

С учетом вышесказанного, уравнение теплопроводности (21) принимает вид

$$(1 + Ste \delta(u, \Delta)) \left(\frac{du}{dt} + V(v)u \right) + \frac{1}{Pr} \Lambda'u = \varphi(v, x, t), \quad (38)$$

$$x \in \omega'_h, \quad 0 < t \leq T.$$

В (38) $\delta(u, \Delta)$ аппроксимирует δ -функцию, т.е. δ -функция заменяется δ -образной функцией $\delta(u - u^*, \Delta)$, отличной от нуля лишь на интервале $(u^* - \Delta, u^* + \Delta)$ и удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{u^* - \Delta}^{u^* + \Delta} \delta(u - u^*, \Delta) du = 1.$$

В нашем случае для $\delta(u, \Delta)$ использовалось следующее представление:

$$\delta(u, \Delta) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, & |u| \leq \Delta \\ 0, & |u| > \Delta, \end{cases}$$

где Δ — полуширина сглаживания δ -функции. Сеточная функция $\varphi(v, x, t)$ в уравнении (38) определяется в соответствии с неоднородным граничным условием (18) и отлична от нуля только в узлах примыкающих к левой границе.

5. Разностные схемы расщепления

Для построения разностной схемы введем равномерную сетку по времени с шагом $\tau > 0$:

$$\omega_\tau = \{t | t = t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_\tau, N_\tau \tau = T\}$$

и пусть $y_n = y(t_n)$. Разностная схема для системы уравнений (33), (38) основана на естественной линеаризации, когда операторы

конвективного переноса $V(w)$, $V(v)$ — определяются решением на предыдущем временном слое. Для решения задачи используется чисто неявная факторизованная схема (аналог схемы Дугласа-Рэкфорда).

На первом шаге рассчитывается вихрь скорости $w_{n+1/2} = \Lambda \psi_{n+1/2}$ из уравнения

$$\frac{\Lambda \psi_{n+1/2} - \Lambda \psi_n}{\tau} - V(w_n) \psi_n + \Lambda^2 \psi_{n+1/2} + (\rho(x) + c^\varepsilon(u_n)) \psi_n = Gr(u_{n+1})_{\dot{x}_1}, \quad x \in \omega_h \quad (39)$$

т.е. конвективный перенос и граничное условие для вихря берутся с предыдущего временного слоя. С учетом введенных обо-

значений уравнение (39) может быть представлено в виде

$$\frac{w_{n+1/2} - w_n}{\tau} - V(w_n) \psi_n + \Lambda w_{n+1/2} + (\rho(x) + c^\varepsilon(u_n)) \psi_n = Gr(u_{n+1})_{\dot{x}_1}, \quad x \in \omega_h \quad (40)$$

На втором шаге проводится коррекция по конвективному переносу и граничному условию для вихря скорости:

$$\frac{\Lambda \psi_{n+1} - \Lambda \psi_{n+1/2}}{\tau} + (\rho(x) + c^\varepsilon(u_n) - V(w_n)) (\psi_{n+1} - \psi_n) = 0. \quad (41)$$

Таким образом, при переходе на новый временной слой вихрь скорости определяется как решение самосопряженной задачи (40), а для определения функции тока име-

ем несамосопряженную задачу (41). Для вычисления температуры во внутренних узлах сетки используется линеаризованное разностное уравнение вида:

$$\left(1 + Ste \delta(u_n, \Delta)\right) \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + V(v_n) u_{n+1}\right) + \frac{1}{Pr} \Lambda' u_{n+1} = \varphi(v_n, x, t_n), \quad x \in \omega'_h.$$

Схема (39–41) хорошо зарекомендовала себя при решении задач свободной конвек-

ции при боковом подогреве, конвекции тепловыделяющих жидкостей.

6. Результаты расчетов

Сначала представим результаты расчетов стационарного решения для чисел Рейля $Ra = Gr = 10^5, 10^6, 10^7$ и $Pr = 1$ на равномерных сетках 41×41 , 81×81 ($N = 40,80$ ($N = N_1 = N_2$)). Стационарное решение было получено методом установления. Расчеты были выполнены для числа Стефана $Ste = 0.25$ и полуширины сглаживания δ -функции $\Delta = 0.025$. В качестве начального условия для температуры был задан линейный градиент температур — чисто тепловое стационарное состояние.

При обработке данных расчетов основное внимание уделялось минимальной величине функции тока, которая определяет интенсивность конвективного перемешивания, и тепловым потокам на боковые грани. Ниже в таблицах 1-3 приводятся следующие важные параметры, характеризующие стационарное решение:

$|\psi|_{mid}$ — абсолютная величина функции тока в центре полости,
 $|\psi|_{max}$ — максимум модуля функции тока, во всей полости,

v_{1max} — максимум горизонтальной скорости в среднем вертикальном сечении,

v_{2max} — максимум вертикальной скорости в среднем горизонтальном сечении,

X_{1melt} — координата фронта плавления на нижней грани,

X_{2melt} — координата фронта плавления в среднем горизонтальном сечении,

X_{3melt} — координата фронта плавления на верхней грани.

В расчетах использовалась равномерная сетка с числом шагов $N = 40,80$ ($N = N_1 = N_2$).

На рис. 1-3 представлены изотермы и линии тока для стационарного решения, а также положение фронта плавления на сетке 81×81 при различных числах Рейля. Заметим, что для задачи с $Ra = 10^7$ и $Pr = 1$ на равномерной сетке 81×81 стационарное решение получено не было, однако слабые изменения во времени границы фронта плавления позволяют говорить о квазистационарном решении.

Таблица 1. $Ra = 10^5$

N	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	$ Nu_l _{max}$	$ Nu_r _{max}$	X_{1melt}	X_{2melt}	X_{3melt}
40	8.280	9.218	30.73	51.90	3.776	3.253	0.500	0.750	0.850
80	7.946	8.957	29.59	51.08	3.653	3.051	0.513	0.749	0.849

Таблица 2. $Ra = 10^6$

N	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	$ Nu_l _{max}$	$ Nu_r _{max}$	X_{1melt}	X_{2melt}	X_{3melt}
40	16.497	17.590	79.89	170.59	8.442	9.316	0.625	0.850	0.950
80	15.235	16.125	74.49	165.69	8.066	7.860	0.624	0.849	0.937

Таблица 3. $Ra = 10^7$

N	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	$ Nu_l _{max}$	$ Nu_r _{max}$	X_{1melt}	X_{2melt}	X_{3melt}
40	39.336	43.581	187.76	632.46	18.177	34.887	0.700	0.900	1.000
80	29.487	30.617	127.76	549.58	18.425	19.931	0.737	0.925	0.975

Затем, на рис. 4–8 для $Ra = 10^7$ на сетке 161×161 показана динамика развития плавления во времени. На отдельные моменты времени приводятся линии тока и изотермы. Эти результаты были получены для шага по времени $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ и начального условия для температуры:

$$u = \begin{cases} 1, & u(x,t) > u^* \\ 0 & u(x,t) < u^* \end{cases}$$

На рисунке 9 представлены зависимости координат фронта плавления от времени. Кривая 1 характеризует изменение координаты фронта плавления на нижней грани, кривая 2 описывает её изменение в среднем

горизонтальном сечении, и, наконец, кривая 3 соответствует положению фронта плавления на верхней грани.

На рисунке 10 представлены временные зависимости максимального значения числа Нуссельта на боковых гранях. Кривая 1 характеризует изменение максимального значения числа Нуссельта на левой боковой поверхности полости, кривая 2 — на правой.

Как показывают вычислительные эксперименты, с увеличением числа Ra увеличивается размывание твердой фазы и увеличивается область, занимаемая жидкой фазой, причем скорость проплавления наиболее интенсивна в верхней части рассматриваемой области.

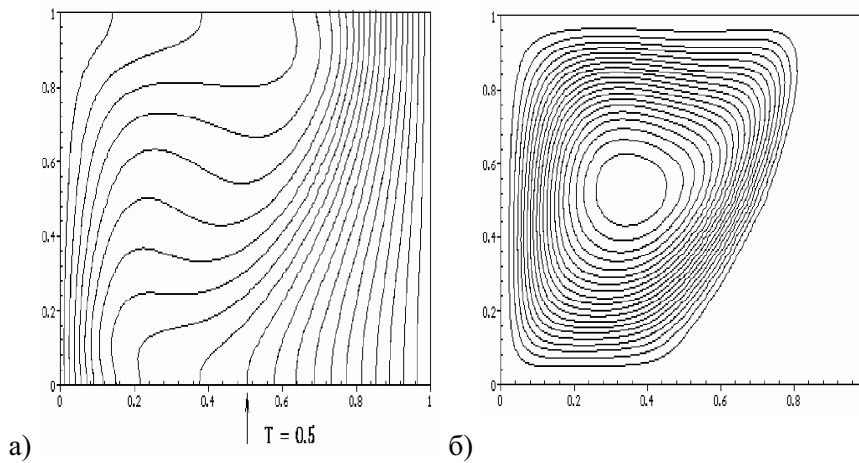


Рис. 1. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^5$

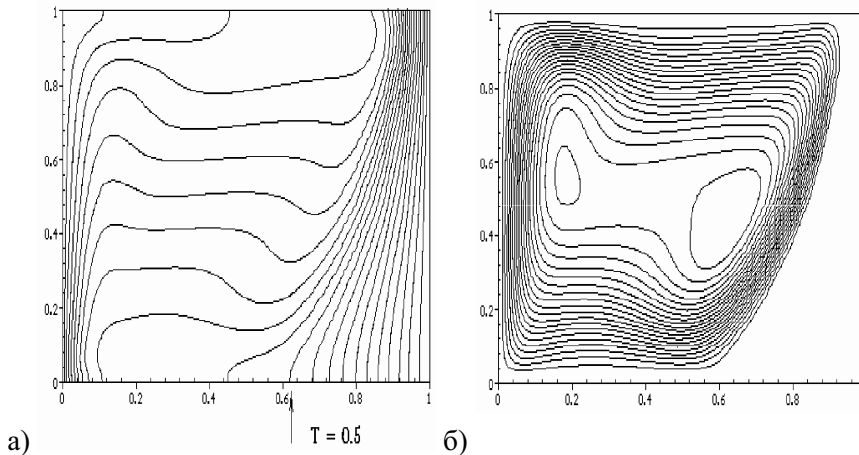


Рис. 2. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^6$

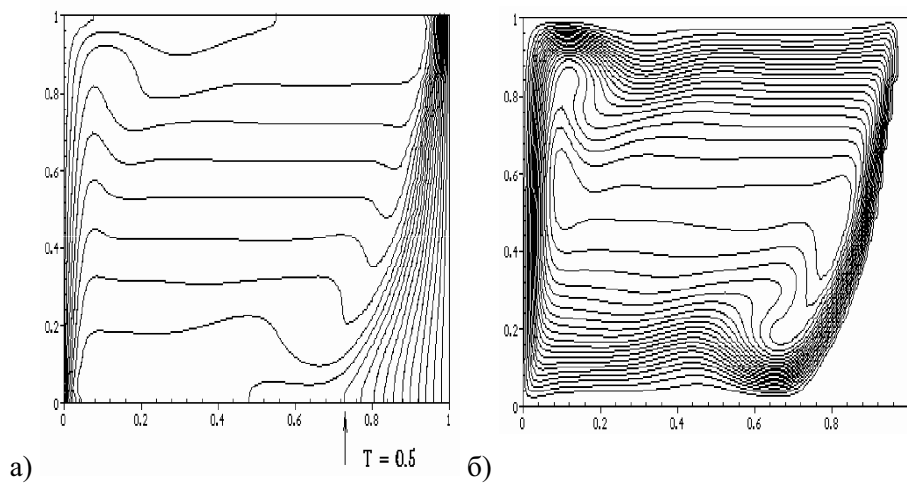


Рис. 3. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$

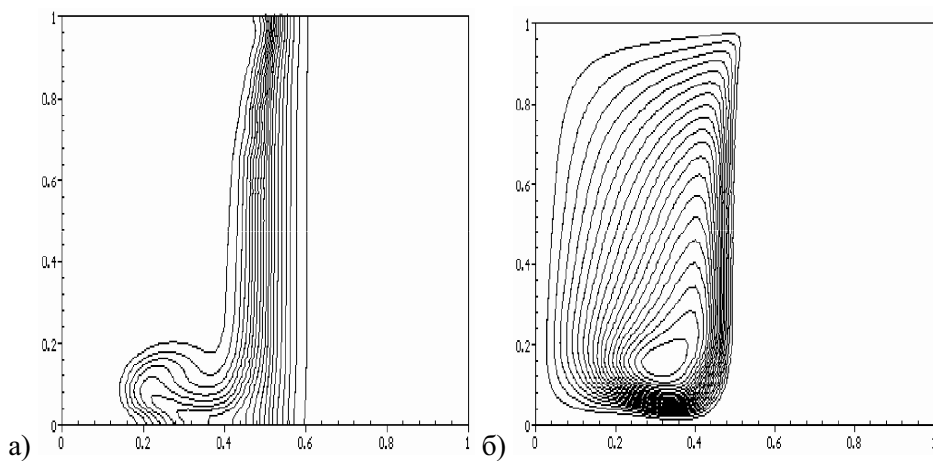


Рис. 4. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$ на момент времени $t = 0.001$

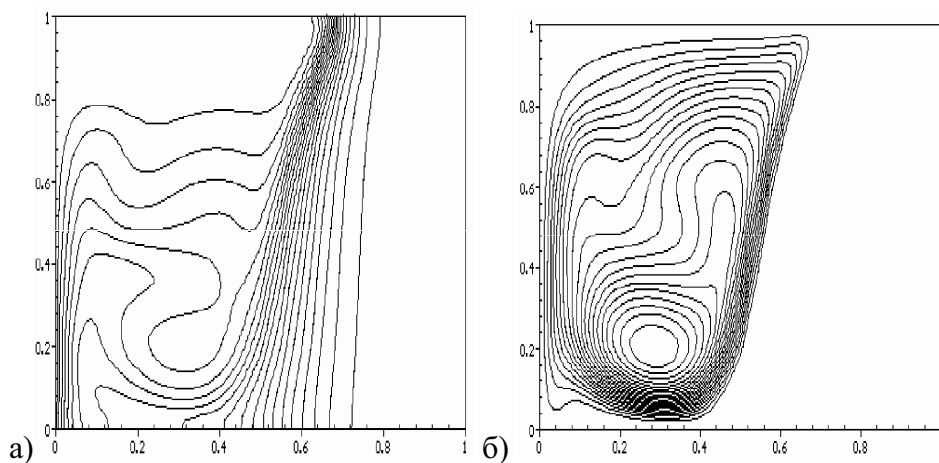


Рис. 5. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$ на момент времени $t = 0.005$

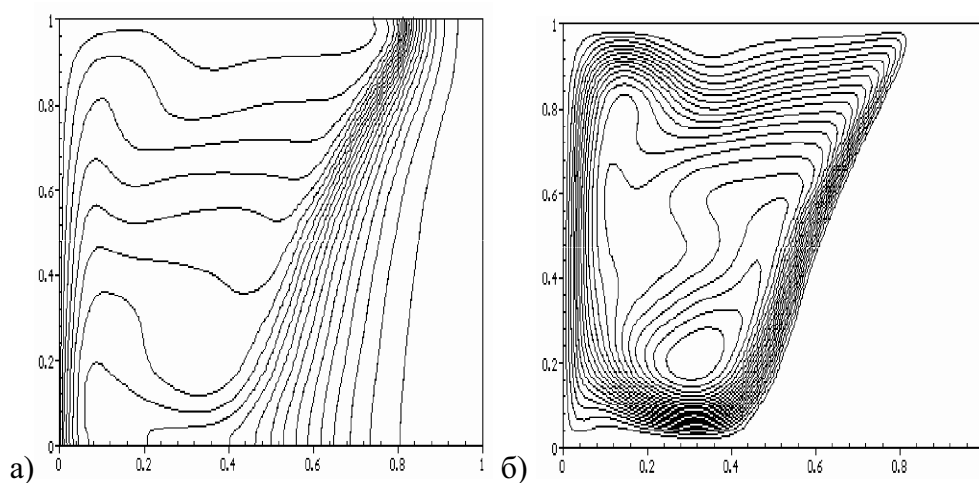


Рис. 6. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$ на момент времени $t = 0.009$

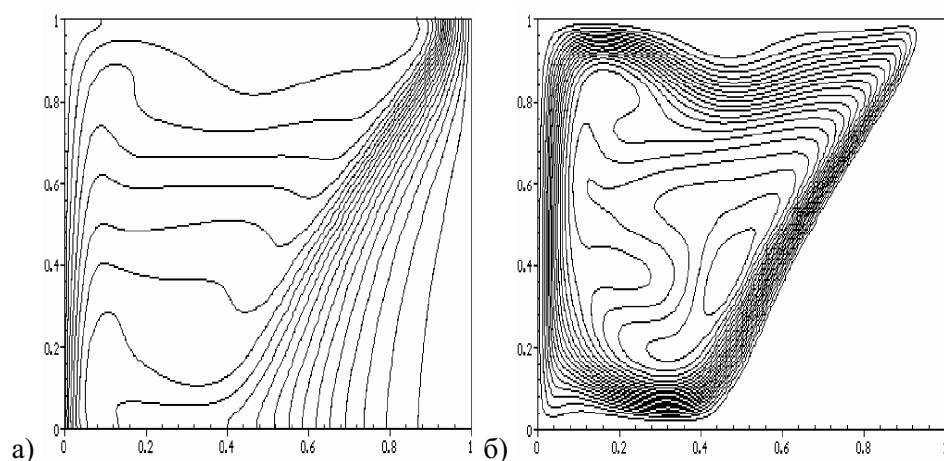


Рис. 7. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$ на момент времени $t = 0.013$

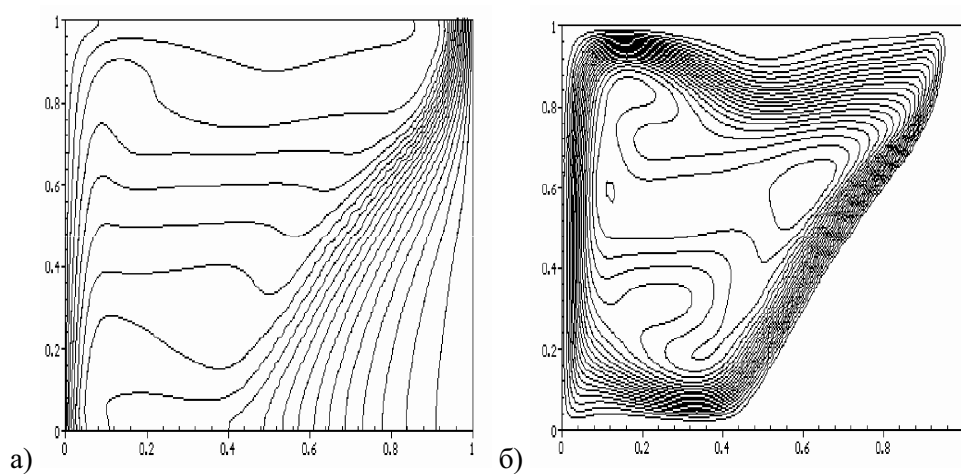


Рис. 8. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$ на момент времени $t = 0.017$

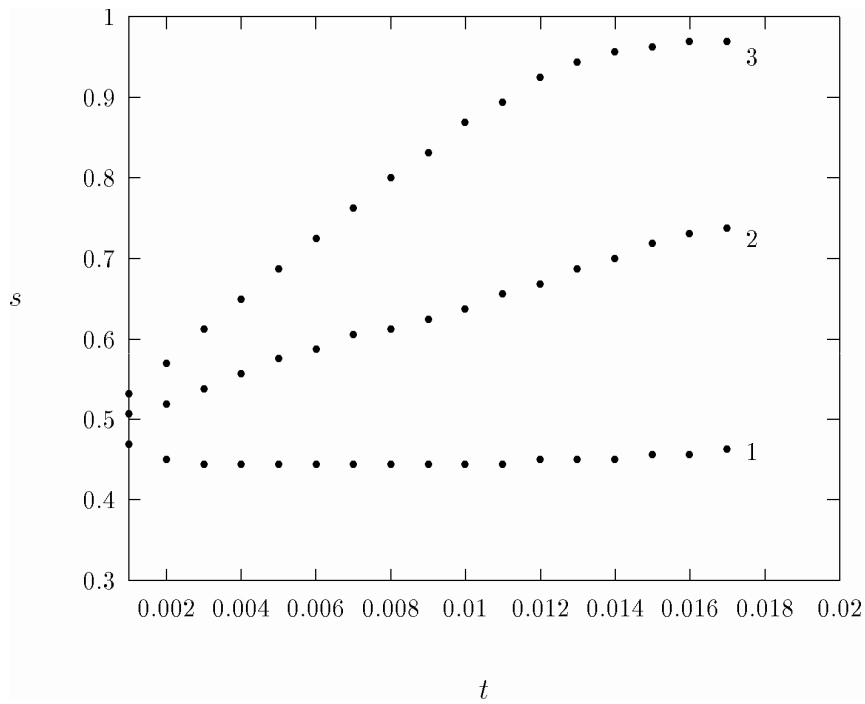


Рис. 9. Зависимости $X_{1melt}(t)$, $X_{2melt}(t)$, $X_{3melt}(t)$ для задачи $Ra = 10^7$ на сетке 161×161

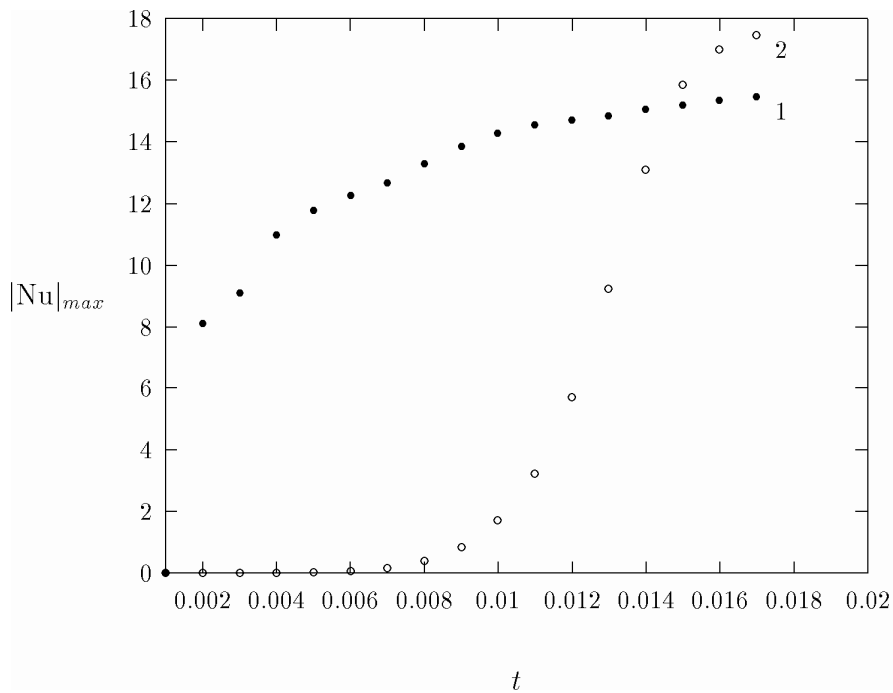


Рис. 10. Временная зависимость $|Nu|_{max}$ для задачи $Ra = 10^7$ на сетке 161×161

Литература

1. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N., Iliev O.P. and Churbanov A.G, Numerical simulation of convective/diffusion phase change problems - a review, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, No. 17, pp. 4095-4106, 1993.
2. Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное моделирование конвективных течений в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура", ИММ РАН, Препринт No. 28, Москва, 1993.
3. Вабищевич П.Н., Илиев О.П. Численное решение сопряженных задач тепло- и массопереноса с учетом фазового перехода. // *Дифференциальные уравнения*. 1987. Т. 23, No. 7. С. 1127-1132.
4. Ramachandran N., Gupta J.P. and Jaluria Y., Thermal and fluid flow effects during solidification in a rectangular enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer* 25, 187-194(1982).
5. Lacroix M., Computation of heat transfer during melting of a pure substance from an isothermal wall, *Numer. Heat Transfer, Part B* 15, 191-210(1989).
6. Voller V.R., Cross M. and Markatos N.C., An enthalpy method for convection/diffusion phase change, *Int. Numer. Methods Engng* 24, 271-284(1987).
7. Brent A.D., Voller V.R. and Reid K.J., Enthalpy-porosity technique for modeling convection-diffusion phase change: application to the melting of a pure metal, *Numer. Heat Transfer* 13(3), 297-318(1988).
8. Вабищевич П.Н., Метод фиктивных областей в задачах математической физики, Из-во МГУ, 1991.
9. Самарский А.А., Теория разностных схем, Наука, 1989.
10. Самарский А.А., Николаев Е.С., Методы решения сеточных уравнений, Наука, 1978.
11. Роч П., Вычислительная гидродинамика, Мир, 1980.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНО–КОНВЕКТИВНОЙ ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ

А. Е. Аксенова, П. Н. Вабищевич, В. В. Чуданов

1. Введение

В работе строится линейризованная разностная схема для решения задачи конвекции тепло выделяющей жидкости с фазовыми превращениями в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура", подобная рассмотренной в [1]. Аппроксимация конвективных слагаемых проводится со вторым порядком на основе центральных разностей. Для получения приближенного решения задачи используется вариант метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам [2]. Для реализации разностной схемы расщепления на каждом временном слое решаются сеточные эллиптические задачи для нахождения функции тока, вихря скорости, температуры.

Численное моделирование задач свободной конвекции с учетом фазовых переходов для задач с разнотемпературными стенками можно найти, например, в работах [3–9]. В этой работе рассматривается задача о свободноконвективном течении тепло выделяющей жидкости с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения с изотермическими граничными условиями. Моделирование проводится в приближении Буссинеска для несжимаемой жидкости.

Приводятся данные расчетов для чисел Релея из диапазона $10^5 \leq Ra \leq 10^9$ и различных чисел Даммкёлера на равномерной сетке 81×81 .

2. Модельная задача

Рассматривается двумерная задача конвекции тепло выделяющей жидкости с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения с изотермическими граничными условиями.

Пусть

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\} \quad \text{—}$$

область, в которой будем искать решение поставленной задачи. Введем следующее обозначение для границы фазового перехода $S(t)$:

$$S(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) = u^*\},$$

где u^* — температура фазового перехода.

Последняя разбивает область Ω на две подобласти. Определим область, содержащую жидкую фазу вещества как $D(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) > u^*\}$, а область, содержащую твердую фазу вещества — $D_0 = \Omega / D$. Задачу будем рассматривать в нестационарной постановке.

Для описания процессов тепло- и массопереноса в тепло выделяющей жидкости с однородным объемным источником тепла, с учетом фазовых превращений, используются нестационарные уравнения Навье–Стокса в приближении Буссинеска совместно с уравнением для температуры:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} v - \beta g e u = 0, x \in D, 0 < t \leq T \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, x \in D, 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$\left(c(u) + \lambda \delta(u - u^*) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \operatorname{grad} u \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) = q, x \in \Omega, 0 < t \leq T, \quad (3)$$

Здесь $v = (v_1, v_2)$ обозначает вектор скорости, p — нормализованное на плотность давления (за вычетом гидростатического), g — ускорение свободного падения, u — отклонение температуры от равновесной, ν — кинематическую вязкость, β — коэффициент объемного расширения, $e = (0, 1)$ — вектор, определяющий направление выталкивающей силы, q — мощность однородного теплового источника, δ — дельта-функцию, λ — энтальпию фазового перехода, $c(u)$ — коэффициент теплоемкости, $k(u)$ — коэффициент теплопроводности. Для простоты ограничимся

$$u(x, t) = u_c = \text{const}, \quad x = (x_1, x_2) \quad 0 < x_{\alpha} < 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad (5)$$

где u_c — температура стенки. В силу того, что в начальный момент времени жидкость покоится и имеет равновесную температуру, начальное условие для скорости имеет вид

$$v(x, 0) = 0, x \in D, \quad (6)$$

а начальное условие для температуры определяется соотношением

$$u(x, 0) = 0, x \in \Omega. \quad (7)$$

Поскольку первоначально вся область представляет собой жидкую фазу вещества, то $D(0) = \Omega$.

Таким образом, задача (1–7) полностью описывает свободную конвекцию тепловыделяющей жидкости с учетом фазовых превращений в области Ω на любой момент времени $t > 0$. Вычислительный алгоритм её приближенного решения строится на базе переменных "функция тока, вихрь скорости". Компоненты скорости выражаются через функцию тока $\psi(x, t)$ как:

рассмотрением случая постоянных коэффициентов теплоемкости и теплопроводности в твердой и жидкой фазах, неменяющихся при фазовом превращении.

Рассматриваемая область течения представляет собой замкнутую полость с неподвижными твердыми стенками, поэтому на границах полости ∂D задаются условия прилипания и непротекания вида:

$$v(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T. \quad (4)$$

В качестве тепловых условий выбраны изотермические граничные условия, что соответствует внешнему охлаждению полости:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (8)$$

поэтому условие несжимаемости (2) всегда выполнено. Для вихря скорости имеем соотношение

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (9)$$

Для аппроксимации конвективных слагаемых введем для произвольного вектора $q = (q_1, q_2)$ дифференциальный оператор $V(q)$ таким образом, что:

$$V(q) = \sum_{\alpha=1}^2 V_{\alpha}(q_{\alpha}), \quad (10)$$

$$V_{\alpha}(q_{\alpha})z = \frac{1}{2} \left(q_{\alpha} \frac{\partial z}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial z}{\partial x_{\alpha}} (q_{\alpha} z) \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

Тогда с учетом соотношений (8–10) из уравнения движения (1) для вихря скорости

получим следующее выражение в безразмерных переменных

$$\frac{\partial w}{\partial t} + V(v)w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_{\alpha}^2} - \frac{Ra_q}{Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0,$$

$$x \in D, 0 < t \leq T$$

с модифицированным числом Релея, получаемым по мощности теплового источника q , равным

$$Ra_q = \frac{\beta g q l^5}{\alpha \nu k}$$

и числом Прандтля

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Для дальнейших расчетов нам потребуется иная форма записи безразмерного уравнения движения, а именно

$$\frac{\partial w}{\partial t} + V(v)w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_{\alpha}^2} - \frac{Ra_u Da}{Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (11)$$

$$(1 + Ste \delta(u - u^*)) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + V(v)u \right) - \frac{1}{Pr} \left[\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2} + 1 \right] = 0, \quad (13)$$

$$x \in \Omega, 0 < t \leq T,$$

где число Стефана определяется из соотношения $Ste = \lambda / (c \cdot (u^* - u_c))$. Обезразмеривание здесь проведено по высоте полости l , коэффициенту кинематической вязкости ν и величине $q l^2 / k$, пропорциональной перепаду температуры.

Система уравнений (11–13) дополняется граничными и начальными условиями, вытекающими из (4–7). Условия прилипания и непротекания (4) на границе единичного квадрата Ω дают соотношения

$$\psi(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T, \quad (14)$$

где использовано число Релея, определяемое по характерному перепаду температур

$$Ra_u = \frac{\beta g (u^* - u_c) l^3}{\alpha \nu}$$

и число Дамкёлера

$$Da = \frac{q l^2}{k (u^* - u_c)}.$$

Здесь и далее будем использовать для безразмерных переменных те же обозначения, что и для точных величин.

Из уравнения несжимаемости (2) будем иметь уравнение Пуассона для функции тока

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{\alpha}^2} = w, x \in D, 0 < t \leq T. \quad (12)$$

Уравнение энергии (3) в безразмерных переменных переписывается в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T, \quad (15)$$

где n — внешняя нормаль к ∂D . Из условия (6) имеем

$$\psi(x, 0) = 0, x \in D. \quad (16)$$

Изотермические граничные условия в безразмерных переменных имеют вид

$$u(x, t) = 0, x = (x_1, x_2) \quad 0 < x_{\alpha} < 1, \alpha = 1, 2. \quad (17)$$

Начальное условие для температуры остается без изменений.

3. Метод фиктивных областей

Для приближенного решения задачи (11–17) с расчетом поля течения в изменяющейся области $D(t)$ используется метод фиктивных областей [2]. Вычислительный алгоритм сквозного счета строится на основе варианта метода фиктивных областей

с продолжением по младшим коэффициентам. Задача рассматривается во всем единичном квадрате Ω .

Пусть ε — малый параметр, $\psi^\varepsilon, w^\varepsilon, u^\varepsilon$ — приближенные решения, которые определяются из уравнений:

$$\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t} + V(v^\varepsilon)w^\varepsilon + c^\varepsilon(u^\varepsilon)\psi^\varepsilon - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_\alpha^2} - \frac{Ra_u Da}{Pr} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} = 0 \quad (18)$$

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \psi^\varepsilon}{\partial x_\alpha^2} = w^\varepsilon, \quad (19)$$

$$(1 + Ste \delta(u^\varepsilon)) \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + V(v^\varepsilon)u^\varepsilon \right) - \frac{1}{Pr} \left[\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_\alpha^2} + 1 \right] = 0. \quad (20)$$

Коэффициент продолжения $c^\varepsilon(u^\varepsilon)$ определяется выражением

$$c^\varepsilon(u^\varepsilon) = \begin{cases} 0, & x \in D(t) \quad (u^\varepsilon > u^*) \\ \varepsilon^{-2}, & x \in \Omega \setminus D(t) \quad (u^\varepsilon < u^*) \end{cases}$$

Система уравнений (18–20) дополняется соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\psi^\varepsilon(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, 0 < t \leq T, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial n}(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, 0 < t \leq T, \quad (22)$$

$$\psi^\varepsilon(x, 0) = 0, x \in \Omega, \quad (23)$$

$$u^\varepsilon(x, t) = 0, x = (x_1, x_2) \quad 0 < x_\alpha < 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad (24)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = 0, x \in \Omega. \quad (25)$$

При достаточно малом ε решение задачи (18–25) в Ω дает приближенное решение исходной задачи (11–17) в меньшей области D , т.е. $\psi^\varepsilon(x, t) \rightarrow \psi(x, t)$, $x \in D, t > 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$.

4. Дискретизация по пространству

В области Ω введем равномерную по каждому направлению сетку $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \partial\omega_h$ с шагами h_1 и h_2 , соответственно. Обозначим через ω_h множество всех внутренних узлов, т.е. $\omega_h = \{x | x = (x_1, x_2), x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, N_\alpha h_\alpha = 1, \alpha = 1, 2\}$, а через $\partial\omega_h$ множество всех граничных узлов сетки.

Для написания разностной схемы воспользуемся стандартными обозначениями теории разностных схем [10]. Для направленных разностей справедливы следующие соотношения:

$$w_{x_\alpha} = \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha)}{h_\alpha},$$

$$\alpha = 1, 2,$$

$$w_{x_\alpha}^- = \frac{w(x_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{h_\alpha},$$

а для центральных разностей —

$$w_{x_\alpha} = \frac{1}{2}(w_{x_\alpha} + w_{x_\alpha}^-) = \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{2h_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Введем сеточный оператор Лапласа на множестве сеточных функций $y \in H$, обращающихся в нуль на границе сетки следующим образом:

$$\Delta y = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = -y_{x_\alpha x_\alpha}^-, \quad \alpha = 1, 2. \quad (26)$$

В конечномерном сеточном гильбертовом пространстве H введем скалярное произведение

$$(y, z) = \sum_{x \in \omega_h} y(x)z(x)h_1h_2.$$

Заметим, что в H оператор Δ самосопряжен и положительно определен [11], т.е. $\Delta = \Delta^* > 0$.

Для аппроксимации конвективных слагаемых определим вектор

$$w = \{w_1, w_2\}, \quad w_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad w_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}. \quad (27)$$

Это позволяет нам записать конвективный перенос вихря в виде

$$V(v)w = -V(w)\psi. \quad (28)$$

Обращение к такой форме записи обусловлено тем, что для любых векторов w будет выполняться условие

$$(V(v)w, \psi) = 0.$$

Для приближенных решений будем использовать те же обозначения, что и для точных. Тогда с учетом соотношений (10), (27), (28) для аппроксимации конвективных слагаемых будем иметь:

$$V(w) = \sum_{\alpha=1}^2 V_\alpha(w_\alpha),$$

$$V_1(w_1)\psi = \frac{1}{2} \left(w_{x_2} \psi_{x_1} + (w_{x_2} \psi)_{x_1} \right), \quad (29)$$

$$V_2(w_2)\psi = -\frac{1}{2} \left(w_{x_1} \psi_{x_2} + (w_{x_1} \psi)_{x_2} \right).$$

При такой аппроксимации конвективного переноса

$$(V(w)\psi, \psi) = 0, \quad (30)$$

т.е. в гильбертовом пространстве H оператор $V(w)$ кососимметричен ($V(w) = -V^*(w)$).

Аналогичная аппроксимация $V(v)$ используется для конвективных слагаемых в уравнении для температуры.

Аппроксимация уравнений (18), (19) с использованием формулы Тома [12] для вихря скорости во внутренних узлах сетки приво-

дит к дифференциально-разностному уравнению вида:

$$\frac{d}{dt} \Lambda \psi - V(w) \psi + \Lambda^2 \psi + (\rho(x) + c^\varepsilon(u)) \psi = \frac{Ra_u Da}{Pr} u_{x_1}, \quad (31)$$

$$x \in \omega_h, 0 < t \leq T.$$

В этом уравнении сеточная функция $\rho(x)$ при граничных условиях Тома для вихря скорости определяется соотношением

$$\rho(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_\alpha(x_\alpha),$$

$$\rho_\alpha(x_\alpha) = \begin{cases} 0, & h_\alpha < x_\alpha < l_\alpha - h_\alpha, \\ \frac{2}{h_\alpha^4}, & x_\alpha = h_\alpha, l_\alpha - h_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2.$$

Принимая во внимание особенности вычислительной реализации, удобно переписать уравнение (31) в виде

$$\frac{d}{dt} \Lambda \psi + (A_1 + A_2) \psi = \frac{Ra_u Da}{Pr} u_{x_1}, \quad (32)$$

где

$$A_1 = \Lambda^2, \quad A_2 = -V(w) + (\rho(x) + c^\varepsilon(u))E. \quad (33)$$

Учитывая свойство кососимметричности оператора $V(w)$ (см. (30)), в (33) имеем $A_1 = A_1^* > 0$, а $A_2 \geq 0$ при любых w .

Уравнение теплопроводности (20) принимает вид

$$(1 + Ste \delta(u, \Delta)) \left(\frac{du}{dt} + V(v)u \right) + \frac{1}{Pr} (\Lambda u + 1) = 0, \quad (34)$$

$$x \in \omega_h, \quad 0 < t \leq T.$$

В (34) $\delta(u, \Delta)$ аппроксимирует δ -функцию, т.е. δ -функция заменяется δ -образной функцией $\delta(u, \Delta)$ вида

$$\delta(u, \Delta) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, & |u| \leq \Delta \\ 0, & |u| > \Delta, \end{cases}$$

где Δ — полуширина сглаживания δ -функции.

5. Разностные схемы расщепления

Для построения разностной схемы введем равномерную сетку по времени с шагом $\tau > 0$:

$\omega_\tau = \{t | t = t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_\tau, N_\tau \tau = T\}$ и пусть $y_n = y(t_n)$. Разностная схема для системы уравнений (31), (34) основана на естественной линеаризации, когда операторы конвективного переноса

$$\frac{\Lambda \psi_{n+1/2} - \Lambda \psi_n}{\tau} - V(w_n) \psi_n + \Lambda^2 \psi_{n+1/2} + (\rho(x) + c^\varepsilon(u_n)) \psi_n = \frac{Ra_u Da}{Pr} (u_{n+1})_{x_1}, \quad x \in \omega_h \quad (35)$$

т.е. конвективный перенос и граничное условие для вихря берутся с предыдущего временного слоя. С учетом введенных обо-

$V(w)$, $V(v)$ — определяются решением на предыдущем временном слое. Для решения задачи используется чисто неявная факторизованная схема (аналог схемы Дугласа-Рэкфорда).

На первом шаге рассчитывается вихрь скорости $w_{n+1/2} = \Lambda \psi_{n+1/2}$ из уравнения

значений уравнение (35) может быть представлено в виде

$$\frac{w_{n+1/2} - w_n}{\tau} - V(w_n) \psi_n + \Lambda w_{n+1/2} + (\rho(x) + c^\varepsilon(u_n)) \psi_n = \frac{Ra_u Da}{Pr} (u_{n+1})_{x_1}, \quad x \in \omega_h. \quad (36)$$

На втором шаге проводится коррекция по конвективному переносу и граничному условию для вихря скорости:

$$\frac{\Delta\psi_{n+1} - \Delta\psi_{n+1/2}}{\tau} + (\rho(x) + c^\varepsilon(u_n) - V(w_n))(\psi_{n+1} - \psi_n) = 0. \quad (37)$$

Таким образом, при переходе на новый временной слой вихрь скорости определяется как решение самосопряженной задачи (36), а для определения функции тока име-

ем несамосопряженную задачу (37). Для вычисления температуры во внутренних узлах сетки используется линейризованное разностное уравнение вида:

$$(1 + Ste \delta(u_n, \Delta)) \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + V(v_n) u_{n+1} \right) + \frac{1}{Pr} (\Delta u_{n+1} + 1) = 0, \quad x \in \omega_h.$$

Схема (35–37) хорошо зарекомендовала себя при решении задач свободной конвекции тепло-выделяющих жидкостей.

6. Результаты расчетов

Сначала были проведены расчеты стационарного решения для модифицированного числа Рейля $Ra_q = 10^5$ и числа Прандтля

$Pr = 1$ на последовательности равномерных сеток 41×41 ; 81×81 ; 161×161 . Решение было получено методом установления. Расчеты были выполнены для числа Стефана $Ste = 0$ и числа Дамкёлера $Da = 50$ на сетках с чис-

лом шагов $N_1 = N_2 = 40, 80, 160$, соответственно.

На рис.1 представлены изотермы и линии тока для стационарного решения на сетке 81×81 . Максимум температуры немного смещен вверх и расположен на оси симметрии. Жидкость в полости циркулирует в виде двух симметричных конвективных вихрей с незначительно смещенными вверх центрами.

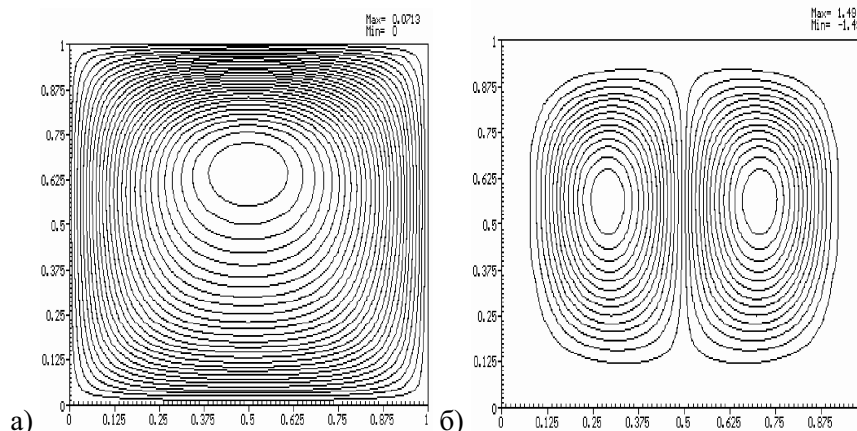


Рис. 1. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra_q = 10^5$ и $Da = 50$

Далее были зафиксированы основные параметры, входящие в модифицированное число Релея Ra_q , кроме характерного размера рассматриваемой области l . При таком предположении варьирование размеров рассматриваемой полости ведет к изменению значений чисел Ra_q и Da . Так, увеличение характерного размера области l в $10^{1/5}$ раза будет сопровождаться ростом модифицированного числа Релея на порядок и одновременным увеличением числа Даммкёлера на величину $10^{2/5}$.

В этой связи была проведена серия расчетов для различных пар чисел Ra_q и Da (см. табл. 1). При обработке данных расчетов основное внимание уделялось минимальной величине функции тока, которая определяет интенсивность конвективного перемешивания, и объему, занимаемому твердой фазой вещества. Расчеты были выполнены для числа

Стефана $Ste = 0$ и числа Прандтля $Pr = 1$ на равномерной сетке 81×81 .

Таблица 1. Безразмерные параметры для серии 1

Ra_q	Da
10^5	50
10^6	125.5
10^7	312.5
10^8	769.2

На рис. 2 представлено стационарное решение для $Ra_q = 10^6$ и соответствующего числа Даммкёлера. Картина течения в этом случае подобна той, что получена для $Ra_q = 10^5$. Однако максимум температуры гораздо сильнее смещен вверх по сравнению с предыдущим расчетом (см. рис.1), что объясняется увеличением характерного размера полости l примерно в 1.5 раза.

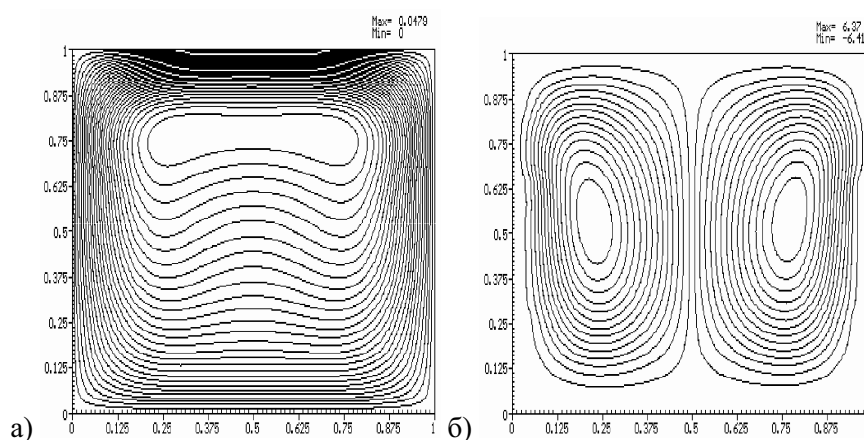


Рис. 2. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra_q = 10^6$ и $Da=125.5$

На рис. 3 отражена структура нестационарного теплового и гидродинамического полей для $Ra_q = 10^7$ и $Da = 312.5$. По сравнению с предыдущим расчетом характер течения существенно усложняется: в верхней части полости образуются два вторичных вихря, что приводит к возникновению двух локальных максимумов температуры в объеме полости и двух максимумов теплового потока на её верхней поверхности. Картина течения, в результате смещения вторичных вихрей в верхней части полости, существенно несимметрична.

На рис. 4 показано нестационарное течение для $Ra_q = 10^8$ и $Da = 769.2$, характер которого указывает на возможность превращения режима течения из ламинарного в переходный.

Как показывают вычислительные эксперименты, с увеличением размеров расчетной области пространство, занимаемое твердой фазой вещества, сокращается, а начиная с $Ra_q = 10^8$ корки практически исчезают, так как с увеличением размеров области происходит уменьшение безразмерной разности температур $(u^* - u_c)$, что снижает возможность образования корок.

Поскольку в этой серии расчетов при числе Релея равном 10^8 корки практически полностью отсутствовали, представлялось интересным повторить аналогичные вычисления с меньшим числом Дамкёлера $Da = 5$. Значения чисел Ra_q и Da для второй серии расчетов приведены в таблице 2.

Таблица 2. Безразмерные параметры для серии 2

Ra_q	Da
10^5	5
10^6	12.5
10^7	31.25
10^8	76.92
10^9	200.0

На рис. 5 отражено стационарное решение для $Ra_q = 10^5$, где жидкость в полости циркулирует в виде двух симметричных конвективных ячеек, а максимум температуры расположен в центре полости. Малый объем области, занимаемый функциями тока, свидетельствует о почти полном замерзании жидкости в полости, в отличие от аналогичного расчета из серии 1. Такая разница в объемах твердой фазы объясняется более высокой разницей температур $(u^* - u_c)^1$ при $Da = 5$ нежели, чем при $Da = 50$.

На рис. 6 показаны изотермы и линии тока для случая $Ra_q = 10^6$ и соответствующего числа Дамкёлера $Da = 12.5$. Картина течения аналогична полученной для предыдущего расчета, несмотря на то, что в данном случае стационарное решение получено не было.

$$^1 (u^* - u_c) \sim 1/Da$$

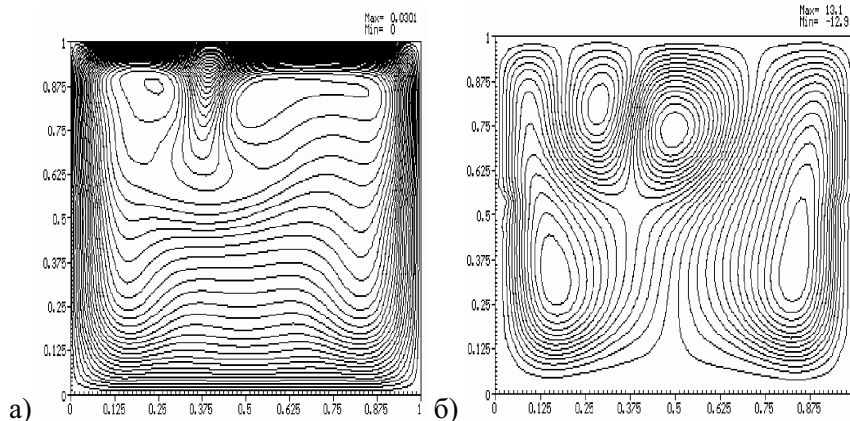


Рис. 3. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra_q = 10^7$ и $Da=312.5$

Постоянство средней по объему температуры полости позволяет говорить о квазистационарном решении.

Квазистационарное решение для $Ra_q = 10^7$ демонстрирует рис.7, где показана четырехвихревая структура течения с двумя локальными максимумами температуры в объеме полости и двумя максимумами теплового потока на её верхней поверхности. В данном случае наблюдается ярко выраженная стратификация теплового поля с повышением уровня теплоотдачи через верхнюю границу. В отличие от аналогичного расчета серии 1 имеется практически симметричное решение.

Для случая $Ra_q = 10^8$ течение становится периодически осциллирующим (рис. 8). Нарушение симметрии вблизи верхней поверхности полости происходит из-за смещения вторичных вихрей.

С увеличением числа Релея до 10^9 ($Da = 200$) течение приобретает существенно нестационарный характер (см. рис. 9), что указывает на возможность превращения режима течения из ламинарного в переходный режим.

Как показывают вычислительные эксперименты, в размерах области затвердевания для двух проведенных серий расчетов наблюдается существенное различие. Так, в серии 2 жидкость в полости при низких числах Релея ($Ra_q = 10^5, 10^6$) (см. рис. 5 и рис. 6) практически полностью замерзает, в отличие от аналогичных расчетов серии 1, где корки занимают существенно меньшую область. Кроме того, наблюдаются корки при $Ra_q = 10^9$, тогда как для серии 1 они практически полностью исчезают при $Ra_q = 10^8$. Это объясняется наличием значительной разницы в температурах фазового перехода и стенки.

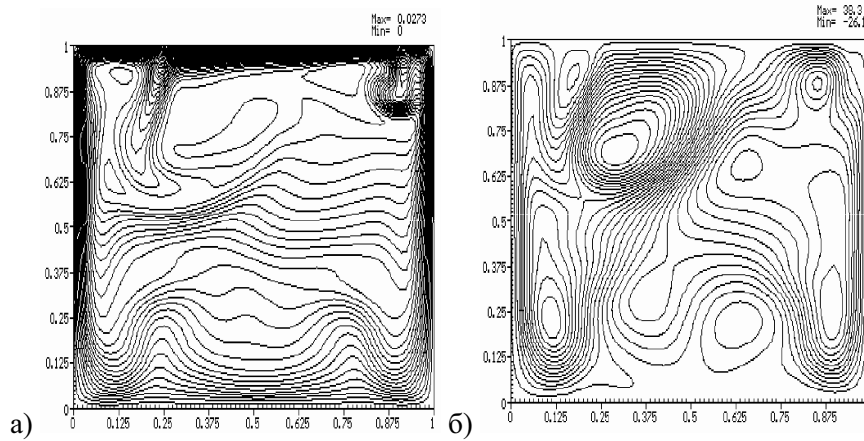


Рис. 4. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra_q = 10^8$ и $Da = 769.2$

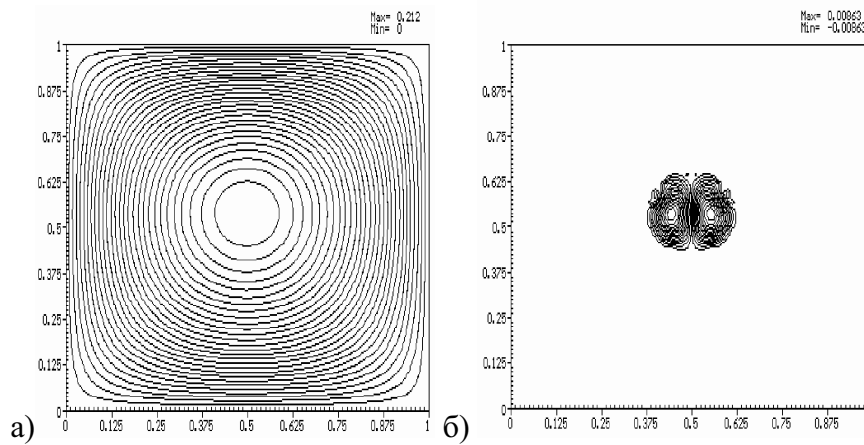


Рис. 5. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra_q = 10^5$ и $Da = 5$

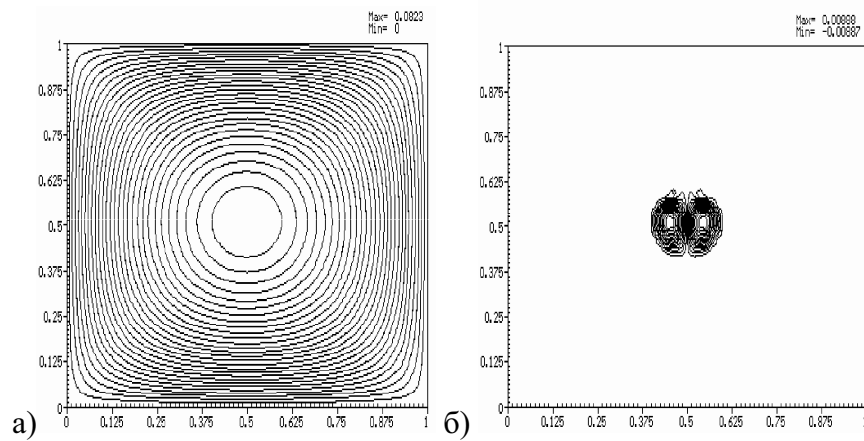


Рис. 6. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra_q = 10^6$ и $Da = 12.5$

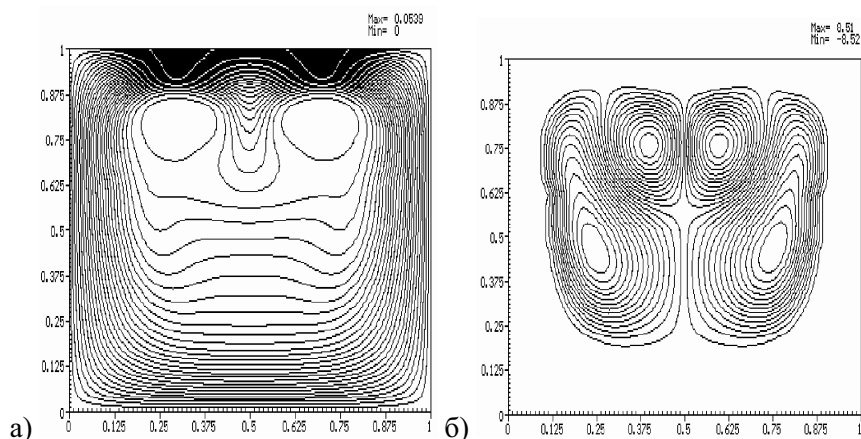


Рис. 7. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra_q = 10^7$ и $Da=31.25$

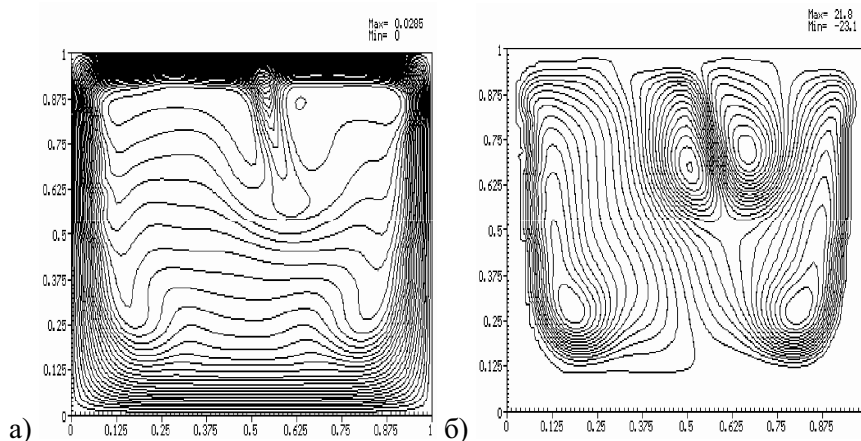


Рис. 8. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra_q = 10^8$ и $Da=76.92$

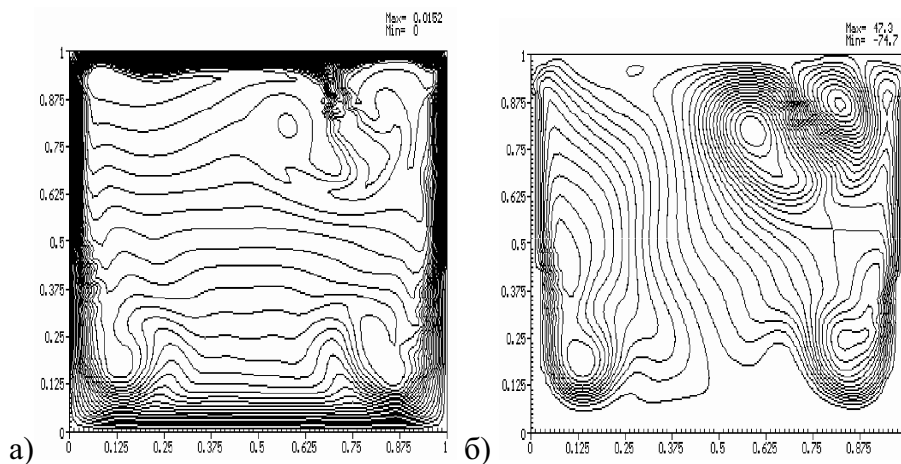


Рис. 9. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra_q = 10^9$ и $Da=200$

Литература

1. Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное моделирование конвективных течений в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура", ИММ РАН, Препринт No. 28, Москва, 1993.
2. Вабищевич П.Н., Метод фиктивных областей в задачах математической физики, Из-во МГУ, 1991
3. Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное моделирование проблем тепло- и массопереноса с фазовыми превращениями, ИБРАЭ РАН, Препринт No. NSI-04-94, Москва, 1994.
4. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N., Iliev O.P. and Churbanov A.G, Numerical simulation of convective/diffusion phase change problems – a review, Int. J. Heat Mass Transfer 36, No. 17, 4095-4106(1993).
5. Вабищевич П.Н., Илиев О.П. Численное решение сопряженных задач тепло- и массопереноса с учетом фазового перехода. // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, No. 7. С. 1127-1132.
6. Ramachandran N. Gupta J.P. and Jaluria Y., Thermal and fluid flow effects during solidification in a rectangular enclosure, Int. J. Heat Mass Transfer 25, 187-194(1982).
7. Lacroix M., Computation of heat transfer during melting of a pure substance from an isothermal wall, Numer. Heat Transfer, Part B 15, 191-210(1989).
8. Voiler V.R., Cross M. and Markatos N.C., An enthalpy method for convection/diffusion phase change, Int. J. Numer. Methods Engng 24, 271-284(1987).
9. Brent A.D., Voller V.R. and Reid K.J., Enthalpy-porosity technique for modeling convection-diffusion phase change: application to the melting of a pure metal, Numer. Heat Transfer 13(3), 297-318(1988).
10. Самарский А.А., Теория разностных схем, Наука, 1989.
11. Самарский А. А., Николаев Е.С., Методы решения сеточных уравнений, Наука, 1978.
12. Роуч П., Вычислительная гидродинамика, Мир, 1980.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А. Е. Аксенова, П. Н. Вабищевич, В. В. Чуданов

1. Введение

В работе строится линеаризованная разностная схема для решения задачи конвекции жидкости в пористой среде в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура". Аппроксимация конвективных слагаемых проводится со вторым порядком на основе центральных разностей. Для реализации разностной схемы расщепления на каждом временном слое решаются сеточные эллиптические задачи для нахождения функции тока, вихря скорости, температуры.

В качестве тестовой задачи в литературе обычно рассматривается задача о свободноконвективных течениях жидкости в полости квадратного сечения, заполненной

пористой средой. Моделирование таких течений проводится в различных приближениях [1–5]. Как показывают натурные и численные эксперименты, использование классического приближения Дарси для моделирования конвективных течений в пористой среде не всегда оправдано. Поэтому в настоящей работе для анализа конвекции жидкости в пористой полости с боковым подогревом привлекается наиболее полная модель Дарси с расширением Бринкмана-Форхгеймера.

Расчеты выполнены на более подробных сетках и для более широких диапазонов опережающих безразмерных параметров.

2. Модельная задача

Рассматривается двумерная задача конвекции в пористой среде для случая полости квадратного сечения. Вертикальные стенки полости поддерживаются при различных постоянных температурах, верхняя и нижняя грани считаются теплоизолированными. Термофизические свойства жидкости предполагаются неизменяемыми с учетом температурного расширения в модели Бусинеска. Пористая среда считается однородной и изотропной, кроме того, она насыщена жидкостью, т.е. жидкость находится в локальном термодинамическом равновесии с твердой матрицей. Задача рассматривается в нестационарной постановке.

Пусть

$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\}$ — область, в которой будем искать решение поставленной задачи. Для описания процессов тепло- и массопереноса в насыщенной пористой среде используются уравнения Дарси с расширением Бринкмана-Форхгеймера. Так для скорости $v = (v_1, v_2)$ имеем уравнение движения вида:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \operatorname{grad} v \right) = -\operatorname{grad} p + \mu_{\text{eff}} \operatorname{div} \operatorname{grad} v - \left(\frac{\mu_f}{K} + \frac{\rho C}{\sqrt{K}} |v| \right) v + \rho g \beta (u - u_c), \quad (1)$$

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

где p — давление, μ_{eff} — эффективная динамическая вязкость, μ_f — динамическая вязкость жидкости, K — проницаемость пористой среды, C — коэффициент инерции, ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, β — коэффициент объемного расширения, u — температура, u_c — температура холодной стенки. Уравнение (1) дополняется уравнением несжимаемости

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (2)$$

Поле температур в области Ω , заполненной насыщенной пористой средой, описывается уравнением теплопроводности в виде:

$$c_f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \operatorname{grad} u \right) = k_{eff} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad (3)$$

где c_f — коэффициент удельной теплоемкости жидкости, k_{eff} — коэффициент теплопроводности.

Рассматриваемая область представляет собой замкнутую полость с неподвижными твердыми стенками, поэтому на границах полости $\partial\Omega$ задаются условия прилипания и непротекания вида:

$$v(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

Нижняя и верхняя части границы считаются теплоизолированными и, следовательно:

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = 0, 1, \quad 0 < x_1 < 1. \quad (5)$$

Левая и правая границы изотермичны, т.е.:

$$\begin{aligned} u(0, x_2, t) &= \chi_0 = \text{const}, \\ u(1, x_2, t) &= \chi_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (6)$$

В начальный момент времени жидкость неподвижна, имеет место следующее начальное условие для скорости

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega(0), \quad (7)$$

а начальное условие для температуры определяется соотношением

$$u(x, 0) = \chi_1 + \frac{x}{l}(\chi_0 - \chi_1), \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

Таким образом, задача (1–8) описывает свободную конвекцию тепла в области Ω , заполненной пористой средой, на любой момент времени $t > 0$. Вычислительный алгоритм её приближенного решения строится на базе переменных "функция тока, вихрь скорости". Для этого предварительно проводится обезразмеривание задачи в предположении, что:

- 1) инерционный коэффициент C , представляющий собой функцию микроструктуры пористой среды, для большинства сред постоянен и равен 0.55 [6];
- 2) $\mu_{eff} = \mu_f$.

Компоненты скорости выражаются через функцию тока $\psi(x, t)$ следующим образом:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (9)$$

поэтому условие несжимаемости (2) всегда выполнено. Для вихря скорости имеем соотношение

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (10)$$

Для унификации записи слагаемых конвективного переноса, также как и в работах [7],[8] вводится для произвольного вектора $q = (q_1, q_2)$ дифференциальный оператор $V(q)$ таким образом, что:

$$V(q) = \sum_{\alpha=1}^2 V_\alpha(q_\alpha), \quad (11)$$

$$V_\alpha(q_\alpha)z = \frac{1}{2} \left(q_\alpha \frac{\partial z}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial z}{\partial x_\alpha} (q_\alpha z) \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

С учетом (9–11) из уравнения движения (1) будем иметь следующее выражение для вихря скорости в безразмерных переменных

$$\frac{\partial w}{\partial t} + V(v)w - \text{Pr} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + \left(\frac{\text{Pr}}{Da} + \frac{C}{\sqrt{Da}} |v| \right) w - Ra \text{Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (12)$$

$$x \in \Omega, 0 < t \leq T$$

где числа Релея, Прандтля и Дарси для задачи (1–8) определяется с помощью соотношений

$$Ra = \frac{\rho g \beta (u_h - u_c) L^3 c_f}{\mu_f k_{eff}},$$

$$\text{Pr} = \frac{v_f c_f}{k_{eff}}$$

и

$$Da = \frac{K}{L^2},$$

соответственно. В этих выражениях использованы следующие обозначения: u_h — температура горячей стенки, L — длина полости.

Для функции тока имеем уравнение Пуассона

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_\alpha^2} = w, x \in \Omega, 0 < t \leq T. \quad (13)$$

В безразмерных переменных уравнение для температуры имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V(v)u = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad (14)$$

$$x \in \Omega, 0 < t \leq T.$$

Здесь безразмерная температура определяется соотношением $(u - \chi_1) / (\chi_0 - \chi_1)$.

Система уравнений (12–14) дополняется граничными и начальными условиями, вытекающими из (4–8). Условия прилипания и непротекания (4) на границе единичного квадрата Ω записываются в виде

$$\psi(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, 0 < t \leq T, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, 0 < t \leq T, \quad (16)$$

где n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Из условия (7) следует

$$\psi(x, 0) = 0, x \in \Omega. \quad (17)$$

И, наконец, в безразмерных переменных изотермические граничные условия имеют вид

$$u(0, x_2, t) = 1, u(1, x_2, t) = 0. \quad (18)$$

Остальные условия для температуры (см. (5), (8)) остаются без изменений.

3. Дискретизация по пространству

В области Ω введем равномерную по каждому направлению сетку $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \partial\omega_h$ с шагами h_1 и h_2 , соответственно. Множество ω_h — содержит все внутренние узлы, т.е. $\omega_h = \{x | x = (x_1, x_2), x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, N_\alpha h_\alpha = 1, \alpha = 1, 2\}$, а $\partial\omega_h$ — граничные узлы.

Для написания разностной схемы воспользуемся стандартными обозначениями теории разностных схем [9]. Для направленных разностей имеем следующие соотношения:

$$w_{x_\alpha} = \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha)}{h_\alpha},$$

$$\alpha = 1, 2,$$

$$w_{x_\alpha}^- = \frac{w(x_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{h_\alpha},$$

а для центральных разностей используется выражение

$$w_{\dot{x}_\alpha} = \frac{1}{2} (w_{x_\alpha} + w_{x_\alpha}^-) = \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{2h_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Определим сеточный оператор Лапласа на множестве сеточных функций $y \in H$, обращающихся в нуль на границе сетки, как:

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = -y_{x_\alpha x_\alpha}^-, \quad \alpha = 1, 2. \quad (19)$$

В конечномерном сеточном гильбертовом пространстве H введем скалярное произведение

$$(y, z) = \sum_{x \in \omega_h} y(x)z(x)h_1h_2.$$

Заметим, что в H оператор Λ самосопряжен и положительно определен [10], т.е. $\Lambda = \Lambda^* > 0$.

Для аппроксимации конвективных слагаемых определим вектор

$$w = \{w_1, w_2\}, \quad w_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad w_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}. \quad (20)$$

Это позволяет нам записать конвективный перенос вихря в виде

$$V(v)w = -V(w)\psi, \quad (21)$$

т.е. интерпретировать конвективный перенос вихря скорости как некий эффективный перенос функции тока. Обращение к такой форме записи обусловлено тем, что для любых векторов w будет выполняться условие $(V(v)w, \psi) = 0$.

$$\frac{d}{dt} \Lambda \psi - V(w)\psi + \text{Pr} \Lambda^2 \psi + \left(\frac{\text{Pr}}{Da} + \frac{C}{\sqrt{Da}} |v| \right) \Lambda \psi + \rho(x)\psi = Ra \text{Pr} u_{\dot{x}_1}, \quad (24)$$

$$x \in \omega_h, \quad 0 < t \leq T.$$

В этом уравнении сеточная функция $\rho(x)$ при граничных условиях Тома для вихря скорости определяется соотношением

Для приближенных решений будем использовать те же обозначения, что и для точных. Тогда с учетом соотношений (11), (20), (21) для аппроксимации конвективных слагаемых будем иметь:

$$V(w) = \sum_{\alpha=1}^2 V_\alpha(w_\alpha),$$

$$V_1(w_1)\psi = \frac{1}{2} \left(w_{\dot{x}_2} \psi_{\dot{x}_1} + (w_{\dot{x}_2} \psi)_{\dot{x}_1} \right), \quad (22)$$

$$V_2(w_2)\psi = -\frac{1}{2} \left(w_{\dot{x}_1} \psi_{\dot{x}_2} + (w_{\dot{x}_1} \psi)_{\dot{x}_2} \right).$$

При такой аппроксимации конвективного переноса

$$(V(w)\psi, \psi) = 0, \quad (23)$$

т.е. в гильбертовом пространстве H оператор $V(w)$ кососимметричен $(V(w) = -V^*(w))$. Аналогичная аппроксимация $V(v)$ используется для конвективных слагаемых в уравнении для температуры.

Аппроксимация уравнений (12), (13) с использованием формулы Тома [11] для вихря скорости во внутренних узлах сетки приводит к дифференциально-разностному уравнению вида:

$$\rho(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \rho_{\alpha}(x_{\alpha}),$$

$$\rho_{\alpha}(x_{\alpha}) = \begin{cases} 0, & h_{\alpha} < x_{\alpha} < l_{\alpha} - h_{\alpha}, \\ \frac{2}{h_{\alpha}^4}, & x_{\alpha} = h_{\alpha}, l_{\alpha} - h_{\alpha}, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2.$$

Принимая во внимание особенности вычислительной реализации, удобно переписать уравнение (24) в виде

$$\frac{d}{dt} \Lambda \psi + (A_1 + A_2) \psi = Ra \Pr u_{x_1}, \quad (25)$$

где

$$A_1 = \Pr \Lambda^2 + \left(\frac{\Pr}{Da} + \frac{C}{\sqrt{Da}} |v| \right) \Lambda, \quad A_2 = -V(w) + \rho(x) E. \quad (26)$$

Учитывая свойство кососимметричности оператора $V(w)$ (см. (23)), в (26) имеем $A_1 = A_1^* > 0$, а $A_2 \geq 0$ при любых w .

Для аппроксимации уравнения теплопроводности выделим множество узлов $\omega'_h = \{x | x = (x_1, x_2), x_{\alpha} = i_{\alpha} h_{\alpha}, i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1, i_2 = 0, 1, \dots, N_2, N_{\alpha} h_{\alpha} = l_{\alpha}, \alpha = 1, 2\}$. Для сеточных функций y , обращающихся в нуль в узлах вне сетки ω'_h , определим гильбертово пространство H' со скалярным произведением

$$(y, z)' = \sum_{x \in \omega'_h} y(x) z(x) h_1 h_2(x_2),$$

где $\hat{h}_2(x_2) = h_2$ при $0 < x_2 < l_2$ и $\hat{h}_2(x_2) = 0.5h_2$ при $x_2 = 0$ при $x_2 = l_2$.

Сеточный оператор Лапласа с учетом смешанных граничных условий представим в виде

$$\Lambda' y = \Lambda_1 y + \Lambda_2' y, \quad x \in \omega'_h, \quad (27)$$

где

$$\Lambda_2' y = \begin{cases} -\frac{2}{h_2} y_{x_2}, & x_2 = 0, \\ -y_{x_2 x_2}^-, & 0 < x_2 < l_2, \\ \frac{2}{h_2} y_{x_2}^-, & x_2 = l_2. \end{cases} \quad (28)$$

В гильбертовом пространстве H' оператор Λ' , определяемый соотношениями (27), (28), самосопряжен и положительно определен [10] ($\Lambda' = (\Lambda')^* > 0$).

С учетом вышесказанного, уравнение теплопроводности (14) принимает вид

$$\frac{du}{dt} + V(v)u + \Lambda' u = \varphi(v, x, t), \quad (29)$$

$$x \in \omega'_h, \quad 0 < t \leq T.$$

Сеточная функция $\varphi(v, x, t)$ в уравнении (29) определяется в соответствии с неоднородным граничным условием (18) и отлична от нуля только в узлах, примыкающих к левой границе.

4. Разностные схемы расщепления

Для построения разностной схемы введем равномерную сетку по времени с шагом $\tau > 0$:
 $\omega_\tau = \{t \mid t = t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_\tau, N_\tau \tau = T\}$
 и пусть $y_n = y(t_n)$. Разностная схема для системы уравнений (24), (29) основана на естественной линеаризации, когда операторы конвективного переноса $V(w)$, $V(v)$ — определяются

$$\frac{\Lambda \psi_{n+1/2} - \Lambda \psi_n}{\tau} - V(w_n) \psi_n + \text{Pr} \Lambda^2 \psi_{n+1/2} + \left(\frac{\text{Pr}}{Da} + \frac{C}{\sqrt{Da}} |v| \right) \Lambda \psi_{n+1/2} + \rho(x) \psi_n = Ra \text{Pr}(u_{n+1})_{\dot{x}_1}, \quad x \in \omega_h \quad (30)$$

т.е. конвективный перенос и граничное условие для вихря берутся с предыдущего временного слоя. С учетом введенных обо-

решением на предыдущем временном слое. Для решения задачи используется чисто неявная факторизованная схема (аналог схемы Дугласа–Рэкфорда).

На первом шаге рассчитывается вихрь скорости $w_{n+1/2} = \Lambda \psi_{n+1/2}$ из уравнения

значений уравнение (30) может быть представлено в виде

$$\frac{w_{n+1/2} - w_n}{\tau} - V(w_n) \psi_n + \text{Pr} \Lambda w_{n+1/2} + \left(\frac{\text{Pr}}{Da} + \frac{C}{\sqrt{Da}} |v| \right) w_{n+1/2} + \rho(x) \psi_n = Ra \text{Pr}(u_{n+1})_{\dot{x}_1}, \quad x \in \omega_h \quad (31)$$

На втором шаге проводится коррекция по конвективному переносу и граничному условию для вихря скорости:

$$\frac{\Lambda \psi_{n+1} - \Lambda \psi_{n+1/2}}{\tau} + (\rho(x) - V(w_n)) (\psi_{n+1} - \psi_n) = 0. \quad (32)$$

Таким образом, при переходе на новый временной слой вихрь скорости определяется как решение самосопряженной задачи (31), а для определения функции тока име-

ем несамосопряженную задачу (32). Для вычисления температуры во внутренних узлах сетки используется линеаризованное разностное уравнение вида:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + V(v_n) u_{n+1} + \Lambda' u_{n+1} = \varphi(v_n, x, t_n), \quad x \in \omega'_h.$$

Соответствующие сеточные эллиптические задачи решаются итерационно.

5. Результаты расчетов

Сначала представим результаты расчетов стационарного решения для чисел Релея $Ra=10^5, 10^8, 10^{12}$ и $\text{Pr}=1$ на равномерной сетке 81×81 . Стационарное решение было получено методом установления. Расчеты были выполнены для чисел Дарси $Da=10^{-1}, 10^{-4}, 10^{-8}$, соответственно.

При обработке данных расчетов основное внимание уделялось минимальной величине функции тока, которая определяет интенсивность конвективного перемешивания, и тепловым потокам на боковые грани. Ниже в таблицах 1–6 приводятся следующие важные параметры, характеризующие стационарное решение:

$|\psi|_{mid}$ — абсолютная величина функции тока в центре полости,

$|\psi|_{max}$ — максимум модуля функции тока, во всей полости,

v_{1max} — максимум горизонтальной скорости на среднем вертикальном сечении,

v_{2max} — максимум вертикальной скорости на среднем горизонтальном сечении,

Nu_0 — среднее значение числа Нуссельта на левой грани,

Nu_{max} — максимальное значение числа Нуссельта на левой грани полости,

Nu_{min} — минимальное значение числа Нуссельта на этой грани.

На рис. 1–3 показаны изотермы и линии тока для стационарного решения на сетке 81×81 для различных чисел Ra и Da . Как показывают вычислительные эксперименты, с ростом числа Релея наблюдается изменение ориентации линий тока. Так, если при $Ra=10^5$ линии тока вытянуты относительно линии, соединяющей левый верхний и правый нижний координатные углы, то с ростом числа Релея они разворачиваются относительно второй диагонали квадрата.

Таблица 1.

Ra	Da	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu_0	Nu_{max}	Nu_{min}
10^5	10^{-1}	8.989	9.254	30.29	63.44	4.4	7.999	0.632
10^8	10^{-4}	34.828	34.829	158.73	814.21	18.8	66.390	0.428
10^{12}	10^{-8}	63.377	63.378	307.69	2189.48	28.9	84.479	0.405

Поскольку представленное на рисунке 3 поле температур не является монотонным вблизи боковых стенок, был проведен дополнительный расчет на неравномерной сетке для случая $Ra = 10^{12}$, $Da = 10^{-8}$. При этом использовались одинаковые по обоим направлениям сетки с максимальным числом шагом вблизи центра полости и минимальным около границы. Отношение двух соседних шагов равнялось одной и той же

величине q (коэффициенту сгущения). Проведение расчета на сгущающейся сетке позволило существенно уточнить решение, особенно его экстремальные характеристики, и избавиться от немонотонности в приграничном слое. Результаты расчетов на неравномерной сетке приведены в таблице 2, картина течения и поле температур показаны на рисунке 4.

Таблица 2. $Ra=10^{12}$, $Da = 10^{-8}$

сетка	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu_0	Nu_{max}	Nu_{min}
равн.	63.377	63.378	307.69	2189.48	28.9	84.479	0.405
неравн.	65.858	65.858	307.59	3192.69	36.4	163.768	0.181

Влияния неравномерных сеток на точность получаемых результатов иллюстрируется также данными из табл. 3. Расчеты на по-

следовательности сгущающихся сеток были выполнены для случая $Ra = 10^5$, $Da = 10^{-1}$.

Таблица 3. $Ra=10^5$, $Da=10^{-1}$, $N = 80$

h_{max}/h_{min}	q	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu_0	Nu_{max}	Nu_{min}
1	0.999	8.989	9.254	30.29	63.44	4.40	7.999	0.632
3	0.968	8.954	9.216	30.38	63.77	4.39	7.947	0.633
10	0.942	8.951	9.218	30.57	64.00	4.39	7.929	0.633
сетка	q	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu_0	Nu_{max}	Nu_{min}
161	0.999	8.946	9.211	30.10	63.63	4.39	7.936	0.633

Сравнение с приведенными здесь же данными на существенно более подробной сетке 161×161 позволило сделать следующий вывод: правильно подобранная неравномерная сетка (коэффициент сгущения q) позволяет существенно повысить точность расчетов.

Была выполнена серия расчетов для чисел $Ra = 10^5, 10^6, 10^7$ с коэффициентом сгущения сетки $q = 0.942$ (см. табл. 4). Числа Дарси для этих расчетов выбирались с учетом соотношения $RaDa = 10^4$.

Таблица 4. $N = 80, q = 0.942$

Ra	Da	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu_0	Nu_{max}	Nu_{min}
10^5	10^{-1}	8.950	9.219	30.57	64.03	4.40	7.941	0.634
10^6	10^{-2}	15.055	15.248	55.18	179.22	8.08	18.237	0.652
10^7	10^{-3}	22.992	23.089	96.99	426.83	13.50	41.746	0.560

Картинки течения для каждого из приведенных в таблице 4 случаев представлены на рис. 5–7. Сравнение поведения эквидистантных линий тока с расчетами для двумерной нестационарной задачи конвекции в полости квадратного сечения с боковым подогревом (отсутствует пористая среда) [7] позволяет говорить о качественном совпадении результатов. Отсюда можно сделать вывод, что при $RaDa = 10^4$ и $C = 0.55$ свободноконвективный теплообмен в квадратной полости с боковым подогревом, заполненной насыщенно пористой средой незначительно отличается от процессов происходящих при свободноконвективном

течении жидкости в отсутствии такой среды. Таким образом, при выбранной комбинации параметров Ra, Pr, Da, C , расширение Бринкмана-Форхгеймера уравнений Дарси не оказывает существенного влияния на процессы теплообмена.

Также проведены расчеты для случая $Ra = 10^6$ и различных значениях числа Дарси $Da = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ (см. таблицу 5). Изотермы и линии тока для этих случаев показаны на рисунках 8,6,9, соответственно. Влияние пористости (числа Дарси) проявляется в уменьшении интенсивности течения и изменении его общей картины.

Таблица 5. $Ra = 10^6, N = 80$

Da	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu_0	Nu_{max}	Nu_{min}
10^{-3}	10.871	10.877	38.79	110.93	6.32	16.782	0.387
10^{-2}	15.055	15.248	55.18	179.22	8.08	18.237	0.652
10^{-1}	16.664	17.011	62.11	210.37	8.70	18.292	0.833
[7]	16.870	17.170	66.93	221.79	8.88	17.996	0.971
[12]	16.320	16.750	64.63	219.36	8.82	17.925	0.989

Влияние нелинейных (инерционных) эффектов на конвекцию жидкости в пористой среде исследовалось во многих работах (см., например, [5]). Здесь мы ограничимся

лишь данными расчетов для варианта $Ra = 10^6, Da = 10^{-2}$. Экстремальные характеристики решения для этих случаев представлены в таблице 6.

Таблица 6 $Ra=10^6, Da=10^{-2}, N = 80$

C	$ \psi _{mid}$	$ \psi _{max}$	v_{1max}	v_{2max}	Nu_0	Nu_{max}	Nu_{min}
0.0	16.671	17.044	62.22	215.81	8.78	18.353	0.846
0.55	15.055	15.248	55.18	179.22	8.08	18.237	0.652
2.0	12.930	12.961	45.91	134.74	7.08	17.473	0.496

На рис.10,11 показаны результаты расчетов при $C = 0$ и $C = 2$, соответственно. Как показывают вычислительные эксперименты, с

ростом влияния инерционных эффектов (C) наблюдается сглаживание картины течения и снижение интенсивности последнего.

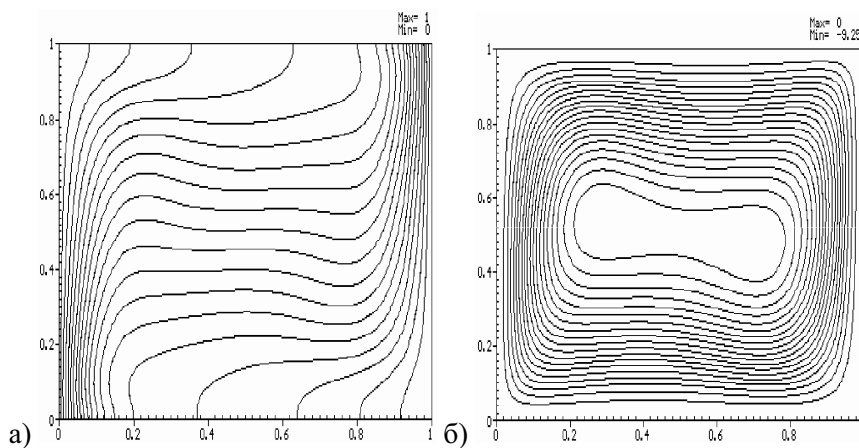


Рис. 1. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^5$, $Da = 10^{-1}$

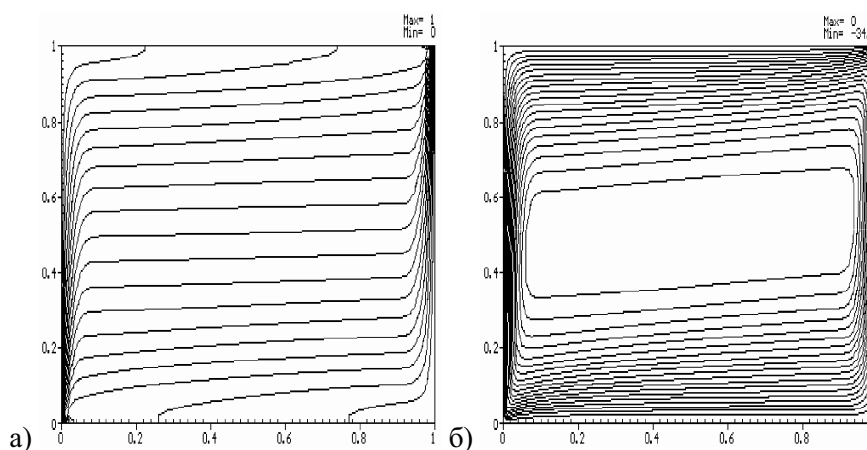


Рис. 2. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^8$, $Da = 10^{-4}$

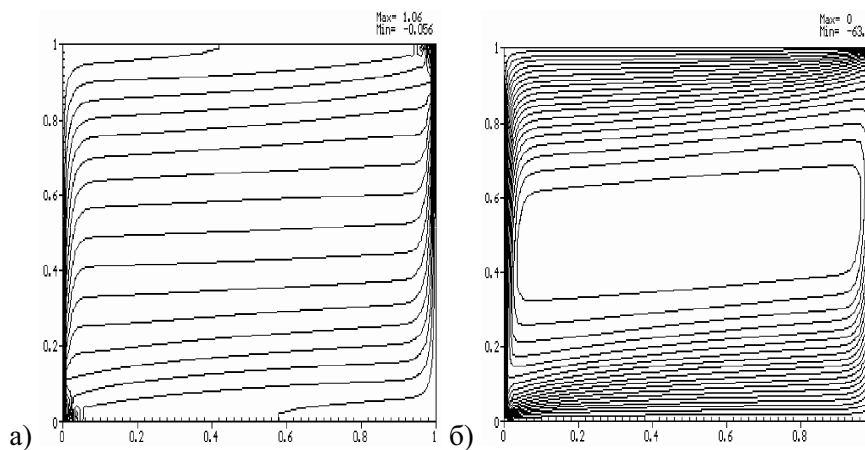


Рис. 3. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^{12}$, $Da = 10^{-8}$

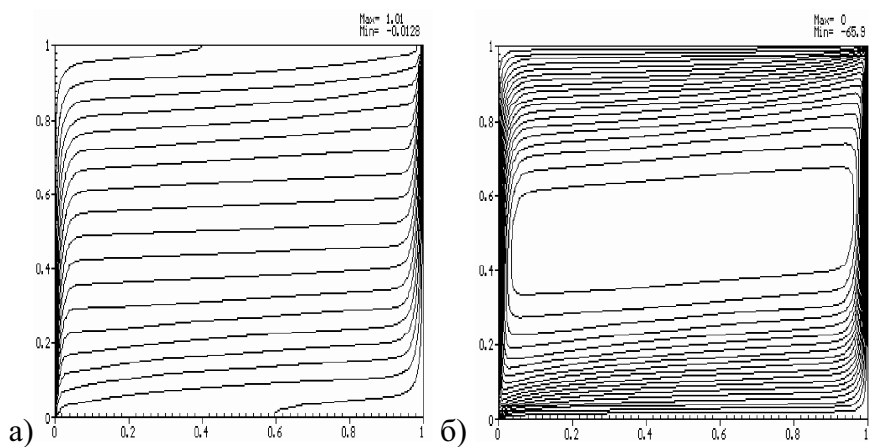


Рис. 4. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^{12}$, $Da = 10^{-8}$, $q = 0.968$

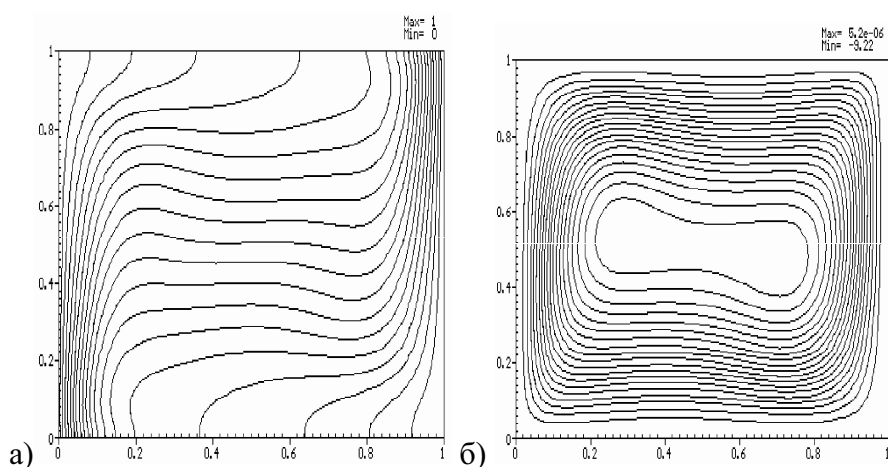


Рис. 5. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^5$, $Da = 10^{-1}$, $q = 0.942$

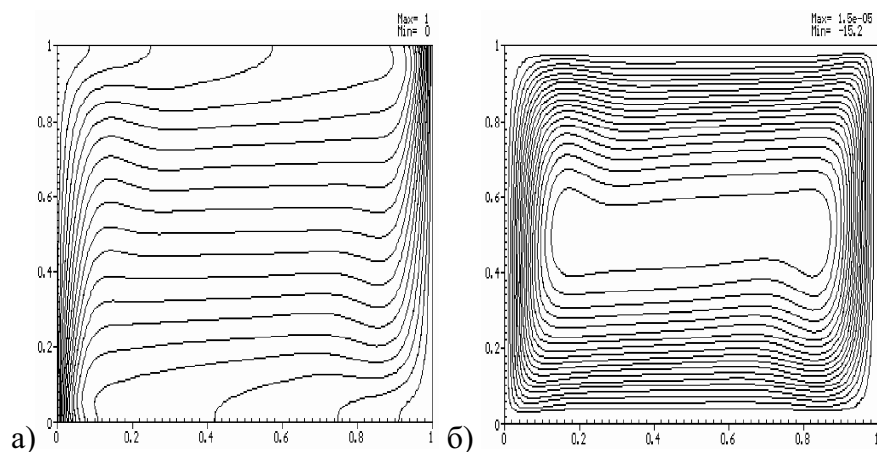


Рис. 6. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-2}$, $q = 0.942$

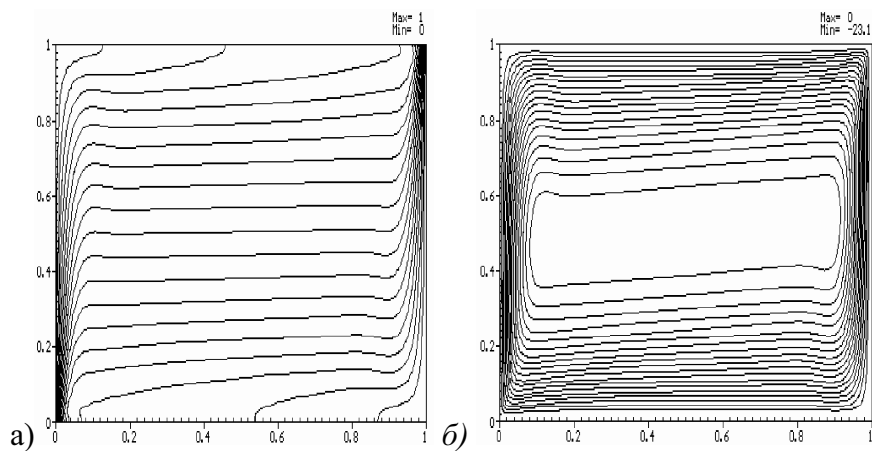


Рис. 7. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^7$, $Da = 10^{-3}$, $q = 0.942$

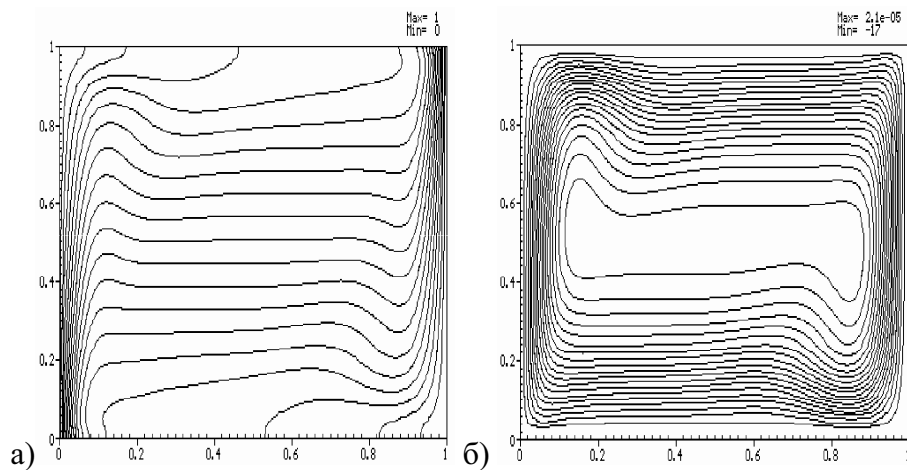


Рис. 8. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-1}$, $q = 0.942$

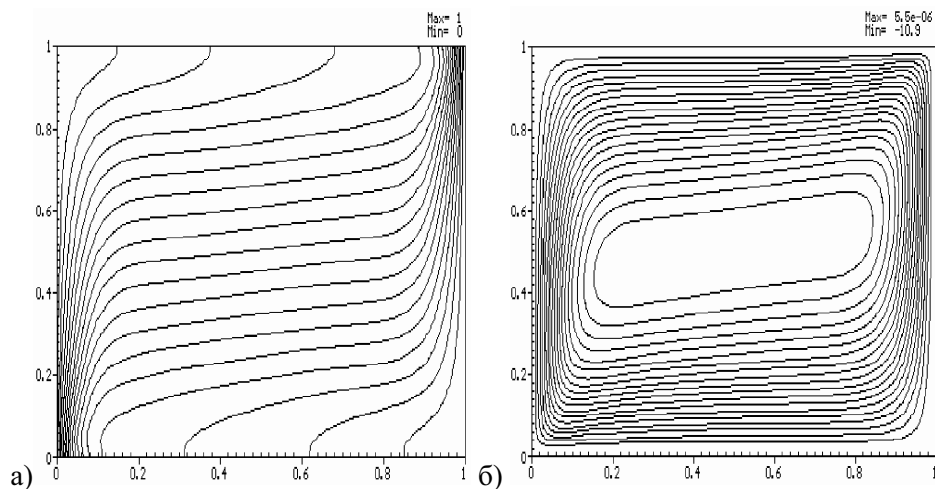


Рис. 9. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-3}$, $q = 0.942$

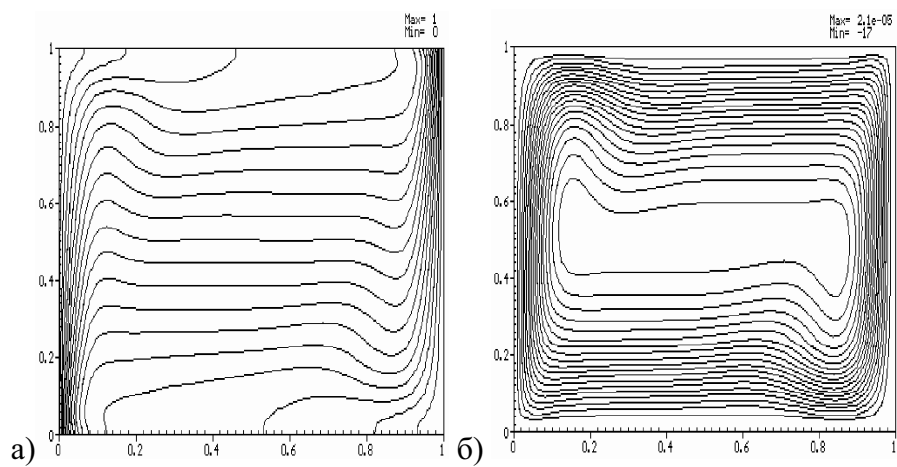


Рис. 10. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-2}$, $q = 0.942$, $C=0$

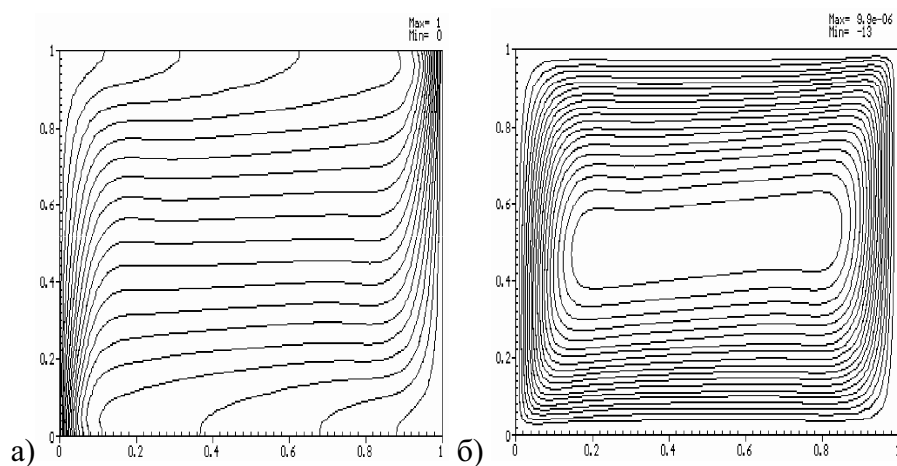


Рис. 11. Изотермы и линии тока для задачи с $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-2}$, $q = 0.942$, $C=2$

Литература

1. K.L. Walker and G.M. Homsey, Convection in a Porous Cavity, *J. Fluid. Mech.*, vol. 87, pp. 449-474, 1978.
2. C.E. Hickox and D.K. Gartling, A Numerical Study of Natural Convection in a Horizontal Porous Layer Subjected to an End-to-End Temperature Difference, *ASME J. Heat Transfer*, vol. 103, pp. 797-802, 1981.
3. G.S. Shiralkar, M. Haajizadeh and C.L. Tien, Numerical Study of High Rayleigh Number Convection in a Vertical Porous Enclosure, *Numer. Heat Transfer*, vol. 6, pp. 223-234, 1983.
4. B.K.C Chan, C.M. Ivey and J.M. Barry, Natural Convection in Enclosed Porous Media with Rectangular Boundaries, *ASME J. Heat Transfer*, vol. 92, pp. 21-27, 1970.
5. C. Beckermann, R. Viskanta, and S. Ramadhyani, A Numerical Study of Non-Darcian Natural Convection in a Vertical Enclosure Filled with a Porous Medium, *J. Numer. Heat Transfer*, vol. 10, pp. 557-578, 1986.
6. J.C. Ward, Turbulent Flow in Porous Media, *J. Hydraul. Div. ASCE*, vol. 90, pp. 1-12, 1964.
7. Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное моделирование конвективных течений в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура", ИММ РАН, Препринт No. 28, Москва, 1993.
8. Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное моделирование проблем тепло- и массопереноса с фазовыми превращениями, ИБРАЭ РАН, NSI-04-94, Москва. 1994.
9. Самарский А.А., Теория разностных схем, Наука, 1989.
10. Самарский А.А., Николаев Е.С., Методы решения сеточных уравнений, Наука, 1978.
11. Роуч П., Вычислительная гидродинамика, Мир, 1980.
12. G. de Vahl Davis and I.P. Jones, Natural Convection in a Square Cavity — a Comparison Exercise, *Int. J. Num. Methods Fluids*, vol. 3, pp. 227-248, 1983.

ЧИСЛЕННЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ/КОНВЕКЦИИ С УЧЕТОМ ПЛАВЛЕНИЯ

А. Е. Аксенова, П. Н. Вабищевич, В. В. Чуданов, А. Г. Чурбанов

1. Введение

Анализ процессов плавления/затвердевания является составной частью многих задач науки и техники. Аналитические решения для задач с фазовыми переходами известны для весьма ограниченного числа случаев, экспериментальные же исследования являются весьма дорогостоящим делом. Все это стимулирует развитие численных методик для моделирования физических и технологических процессов, сопровождающихся фазовыми превращениями. За последние годы появилось значительное число работ, посвященных разработке численных методов для сопряженных задач тепло- и массопереноса при фазовом переходе жидкость/твердое тело с учетом конвекции в жидкой фазе и свободной границей между фазами. Сопоставительный анализ различных численных алгоритмов для задач со свободными границами и основные тенденции их развития приведены в обзорных работах [1– 4].

Впервые к проблеме численного моделирования фазовых переходов с учетом конвек-

ции в жидкой фазе обратились в связи с исследованием металлургических процессов. При затвердевании или плавлении относительно больших объемов металлов и сплавов роль конвекции становится существенной. В настоящее время такие задачи приходится решать при анализе литья и плавления металлов, выращивания кристаллов, аккумулирования энергии, лазерной обработки металлов, замораживания пищевых продуктов, получения пластмасс, в геологии и т.д.

Целью настоящей работы является обсуждение основных подходов к численному решению задач фазового перехода с учетом конвекции. При этом основное внимание уделяется методам решения многомерной задачи Стефана с использованием алгоритмов сквозного счета (fixed grid techniques). Приводятся результаты численных расчетов, проведенных с использованием температурной формулировки и методов сквозного счета.

2. Постановка задачи и основные уравнения

При анализе конвективно-диффузионных процессов с учетом фазовых превращений жидкость/твердое тело используется следующая модель:

- используется обычное параболическое уравнение теплопроводности, базирующееся на законе Фурье;
- рассматриваются чистые материалы, для которых на границе

раздела фаз выполняются условия Стефана;

- естественная и/или концентрационная конвекция в жидкой фазе рассматривается на основе уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска для ламинарных течений;
- изменением плотности при фазовом переходе пренебрегают.

В указанных предположениях математическая модель рассматриваемых процессов включает в себя следующие уравнения, основанные на законах сохранения энергии, массы, количества движения [5].

Распределение температуры в твердой фазе описывается обычным уравнением теплопроводности:

$$\rho_l C_l \left(\frac{\partial T_l}{\partial t} + (v, \text{grad}) T_l \right) = \text{div}(\kappa_l \text{grad } T_l) + S_l^T. \quad (2)$$

В случае затвердевания чистых материалов на границе раздела фаз $\Gamma(t)$, предполагаемой достаточно гладкой, температура постоянна и равна температуре фазового перехода:

$$\Gamma(t) = \{(x, y, z) | T = (x, y, z, t) = T^*\}. \quad (3)$$

На границе фазового перехода $\Gamma(t)$ удовлетворяются обычные условия Стефана (непрерывность температуры и скачок теплового потока, пропорциональный скорости движения границы):

$$\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (v, \text{grad}) T \right) = \text{div}(\kappa \cdot \text{grad } T) + S^* \quad (6)$$

При этом естественно считать $v \equiv 0$ в твердой фазе. Уравнение (6) используется для изучения затвердевания как чистых материалов, так и сплавов и солей — при этом следует определить подходящим образом источник S^* . Такой подход, когда условия Стефана выделены в отдельный источник, успешно развивается в работах Voller с соавторами [6, 7].

В работах [8, 9, 10] показано, что в случае затвердевания чистых материалов (т.е. решения задачи Стефана) условия (4) и (5)

$$\rho C_{ef} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (v, \text{grad}) T \right) = \text{div}(\kappa \cdot \text{grad } T) + S^T, \quad (7)$$

где

$$C_{ef} = \begin{cases} C + L\delta(T - T^*), & \text{для чистых материалов} \\ C + \frac{d\Psi}{dT}, & \text{для сплавов} \end{cases}. \quad (8)$$

Формулировка уравнения энергии с эффективной теплоемкостью является очень популярной как у нас в стране [12, 13, 14], так и за рубежом [15].

$$\rho_s C_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \text{div}(\kappa_s \text{grad } T_s) + S_s^T \quad (1)$$

В достаточно общей форме уравнения распределения температуры в жидкой зоне с учетом кондуктивного и конвективного теплообмена записывается в следующем виде:

$$[T] = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma(t), \quad (4)$$

$$\left[k \frac{\partial T}{\partial n} \right] = -\rho L V_n, \quad (x, y, z) \in \Gamma(t) \quad (5)$$

Здесь через $[\phi]$ обозначен скачок величины ϕ при переходе через $\Gamma(t)$ со стороны твердой в жидкую фазу. Отметим, что условия (4) и (5) могут быть учтены в источниковом члене и тогда вместо уравнений (1–5) можно во всей расчетной области рассматривать одно уравнение:

эквивалентны выбору источников члена S^* в виде $S^* = S^T - \rho L \delta(T - T^*)(\partial T / \partial t)$, где через S^T обозначены источники, несвязанные с выделением скрытой теплоты кристаллизации. В случае затвердевания сплавов источниковый член S^* может быть представлен в виде $S^* = S^T - \rho L (d\Psi / dT)$ (см., например, [11]). После этого уравнение (6) переписывается как:

Наконец, уравнение (7) можно преобразовать с помощью введения энтальпии h к виду:

$$\rho \left(\frac{\partial h}{\partial t} + (v, \text{grad}) h \right) = \text{div}(\kappa \cdot \text{grad } T) + S^T, \quad (9)$$

где

$$h = \int_{T_0}^T C_s dT, T \leq T^*, \quad (10)$$

$$h = \int_{T_0}^T C_l dT + L, T > T^*. \quad (11)$$

Если ввести единичную функцию Хевисайда:

$$f_l(T - T^*) = \begin{cases} 0, & T < T^*, \\ 1, & T > T^*, \end{cases} \quad (12)$$

то вместо двух уравнений (10),(11) получаем единое уравнение для определения энтальпии:

$$h = \int_{T_0}^T C_s dT + f_l(T - T^*)L. \quad (13)$$

Таким образом, вместо дельта-функции в уравнение энергии входит функция Хевисайда. Очевидно, что эту функцию можно трактовать как долю жидкой фазы, которая для чистых материалов имеет всего два значения (единичная ступенька с нулем в твердой фазе и единицей в жидкости). Такая формулировка

уравнения энергии является наиболее популярной и успешно развивается под руководством Voller.

Следует подчеркнуть следующее. Все три вышеуказанные формулировки единого уравнения для твердой и жидкой фаз (с источником членом, эффективной теплоемкостью и энтальпийная формулировка) абсолютно эквивалентны не только на дифференциальном уровне, но и приводят к одним и тем же трудностям в их численном решении. А именно, приходится решать уравнения, содержащие в том или ином члене либо дельта-функцию, либо разрывную единичную функцию Хевисайда, причем обе эти функции привязаны к температуре плавления. Точность и эффективность решения уравнения энергии сводится к построению хорошей аппроксимации для одной из этих не очень хороших с точки зрения дискретизации функций.

Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости в приближении Буссинеска записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \text{grad}) v = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \text{div}(v \cdot \text{grad } v) + S^V, \quad (14)$$

$$\text{div } v = 0. \quad (15)$$

Для удобства изложения в последующих частях работы будут рассмотрены численные методы, предназначенные для решения модельной задачи о затвердевании металла

в охлаждаемой сбоку прямоугольной полости с теплоизолированными верхним и нижним основаниями. Эта ситуация схематично отображена на рис. 1.

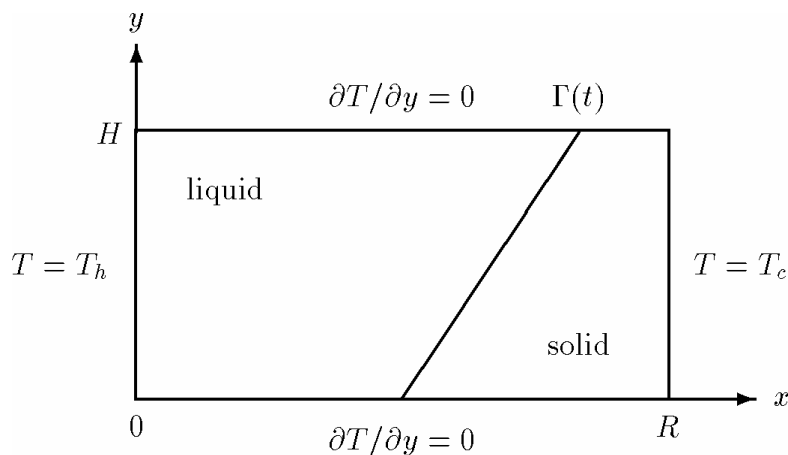


Рис. 1.

Естественно, что в случае классической задачи Стефана (чисто тепловая задача) граница между фазами плоская. Отклоне-

ние от этой границы является мерой влияния конвекции в расплаве на процессы теплопереноса.

3. Методы расчета с выделением границы фазового перехода

Численные алгоритмы для решения задач конвекции/диффузии с фазовыми переходами можно разделить на две основные группы. Первая группа включает в себя методы с выделением границ твердое тело/жидкость. Поскольку граница раздела двух фаз движется, то подстраивание используемых в конкретном алгоритме дискретных элементов должно проводиться динамически в пространстве и времени. Для этого можно использовать систему координат, привязанную к занимаемой жидкостью области. После построения соответствующего преобразования $\xi = \xi(x, y, t)$ и $\eta = \eta(x, y, t)$ вместо исходных уравнений (1–5), (14), (15) (или же других уравнений гидродинамики, записанных в терминах преобразованных переменных завихренность-функция тока), рассматриваемых в физической области со сложной меняющейся во времени формой, решаются преобразованные уравнения в расчетной области простой фиксированной структуры. В качестве примеров использования такого подхода можно привести, например, работы [16, 17, 18] и цикл работ Lacroix с соавторами [19, 20, 21, 22, 23].

Методы с выделением границы фазового перехода обладают очевидными достоинствами и недостатками. Адаптация к границам расчетной области и, в особенности, к изменяющейся границе твердое тело/жидкость обеспечивает высокую точность получаемых численных результатов. Однако для этого необходимо на каждом временном слое рассчитывать преобразование координат, которое только в простейших случаях может сводиться к простейшим алгебраическим формулам и, более того, для многомерных задач с несколькими движущимися фронтами может стать вообще трудноразрешимой задачей. Кроме того, при работе в обобщенных криволинейных координатах существенно усложняются и сами алгорит-

мы расчета уравнений гидродинамики. Таким образом, за высокую точность приходится платить увеличением вычислительных затрат и сужением класса задач, для которых применение данного подхода было бы эффективным. В силу этого интенсивно развивается альтернативный подход, включающий в себя методы без выделения фронта плавления/кристаллизации, т.е. алгоритмы сквозного счета с размазыванием фазового перехода (fixed grid techniques) и решением уравнений конвекции/диффузии в рассматриваемой физической области. В упомянутой выше совместной работе Lacroix и Voller [21], которых в настоящее время можно рассматривать как руководителей двух противоположных направлений — transformed grids и fixed grids — на стандартной тестовой задаче о плавлении галлия проведен сопоставительный анализ точности и эффективности этих двух различных подходов. Главный вывод, полученный в этой работе, заключается в следующем. При достаточно эффективных генераторах сетки и одинаковом числе узлов расчетной сетки эти два подхода имеют очень близкие характеристики, как по точности расчета, так и по его эффективности. Таким образом, представляется разумным использовать для решения сложных прикладных задач, включающих в себя помимо фазовых превращений и другие сложные физико-химические превращения, именно методы сквозного счета. В рамках этого подхода с приемлемой точностью удается решать задачи сопряженного теплообмена в сложных областях с большим числом разнородных конструктивных элементов, легко реализовать различные модели mushy zone, пористой среды и т.д. В следующем разделе будет проведен более подробный анализ различных вариантов алгоритма сквозного счета и особенностей их численной реализации.

4. Методы сквозного счета

В методах сквозного счета рассчитываются единые уравнения для тепла и импульса во всей рассматриваемой области, включающей в себя твердую и жидкую фазы. Аппроксимация функции Хевисайда (или же дельта-функции для температурной формулировки) неизбежно приводит к размазыванию теплового фронта, что можно трактовать как введение плавления/затвердевания не в одной точке, а в заданном диапазоне температуры (переход от чистых материалов к сплавам). Более того, иногда из соображений последовательности введения такой mushy zone размазыванию под-

вергается и гидродинамический фронт, т.е. та граница, на которой происходит торможение скорости. Примерами использования таких алгоритмов для чисто тепловых задач являются работы [24, 25] для температурной формулировки и работа [26] для энтальпийной формулировки.

Простейшей и наиболее естественной является кусочно-линейная аппроксимация ступеньки Хевисайда, означающая линейный рост доли жидкой фазы в заданном интервале температуры ($T^* - \eta, T^* + \eta$):

$$\tilde{f}_l(T, \eta) = \begin{cases} 0, & T < T^* - \eta, \\ \frac{1}{2\eta} [T - (T^* - \eta)], & T^* - \eta \leq T \leq T^* + \eta, \\ 1, & T > T^* + \eta. \end{cases} \quad (16)$$

Аналогично $\tilde{f}_l(T, \eta)$ строится эффективная теплоемкость $\tilde{C}(T, \eta)$ из условия сохранения тепла на заданном интервале

$$\int_{T^* - \eta}^{T^* + \eta} (C + L\delta(T - T^*)) dT = \int_{T^* - \eta}^{T^* + \eta} \tilde{C}(T, \eta) dT. \quad (17)$$

Для приведенной выше линейной аппроксимации доли жидкой фазы (16) эквивалентной является следующая ступенчатая эффективная теплоемкость:

$$\tilde{C}(T, \eta) = \begin{cases} C, & T < T^* - \eta, \\ C + L/(2\eta), & T^* - \eta \leq T \leq T^* + \eta, \\ C, & T > T^* + \eta. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь плотность и теплоемкость считаются одинаковыми в обеих фазах. При этом вместо уравнения

$$\rho(C + L\delta(T - T^*)) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\kappa \cdot \text{grad } T) \quad (19)$$

решается уравнение

$$\rho \tilde{C} \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\kappa \cdot \text{grad } T). \quad (20)$$

Различные варианты аппроксимационных зависимостей для \tilde{f}_l (и соответственно для \tilde{C}) можно найти в вышеупомянутых обзорах [1, 2]. В работах [27, 28] предложены и апробированы гладкие нелинейные аппроксимации этих функций, обеспечивающие

более высокую точность. Следует подчеркнуть, что все эти аппроксимационные зависимости содержат управляющий параметр η (полуширина размазывания фронта), оказывающий существенное влияние на точность получаемых результатов и имеющий свои для каждой модели оптимальные значения, определяемые из численных экспериментов.

Для решения алгоритмами сквозного счета уравнений гидродинамики в естественных переменных возможно применение двух вариантов МФО — с продолжением по младшим производным и с продолжением по старшим производным [29]. Оба они нашли широкое применение в моделировании плавления/затвердевания в присутствии конвекции [1].

Продолжение по младшим производным основано на использовании модели пористой среды. Вместо уравнений (14),(15) в

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + (v_\varepsilon, grad) v_\varepsilon = \frac{1}{\rho} grad p + div(v \cdot grad v_\varepsilon) - C_\varepsilon v_\varepsilon + S_\varepsilon^V, \quad (21)$$

$$div v_\varepsilon = 0. \quad (22)$$

Для члена, описывающего гидравлическое сопротивление в уравнении (21), могут применяться различные формулы, основанные на аналогии этого члена с различными моделями пористой среды. При этом коэффициент C_ε трактуется как некоторый коэффициент сопротивления. Простейшая модель соответствует отсутствию размазывания границы фазового перехода в уравнениях гидродинамики, т.е. скачкообразное переключение ('switch off' по терминологии Voller [30, 31]) с жидкости на твердое тело. При этом коэффициент продолжения C_ε и правая часть S_ε^V выбираются следующим образом:

$$C_\varepsilon = \begin{cases} 0, & (x, y) \in G^*(t), \\ \varepsilon^{-2}, & (x, y) \in G/G^*(t). \end{cases} \quad (23)$$

$$S_\varepsilon^V = \begin{cases} S^V, & (x, y) \in G^*(t), \\ 0, & (x, y) \in G/G^*(t). \end{cases} \quad (24)$$

где значение ε достаточно мало. Такой подход с резким переходом твердое тело/жидкость в уравнениях гидродинамики до сих пор применяется для решения задачи Стефана (смотри, например, работы [12, 14], где уравнение энергии решалось в температурной формулировке с использованием простейшей аппроксимации (18) для эффективной теплопроводности. Однако в исследованиях Voller с соавторами [30, 31, 32, 33] более перспективным было признано использование размазывание гидродинамического фронта с помощью линейных и даже нелинейных зависимостей для члена сопротивления Дарси.

А именно, для коэффициента сопротивления C_ε в члене Дарси были предложены и исследованы применительно к энтальпийной формулировке следующая линейная и экспоненциальная зависимости от доли жидкой фазы \tilde{f}_l , обеспечивающие согласо-

ванное размазывание теплового и гидродинамического фронтов: линейный Дарси

$$C_\varepsilon = \varepsilon^{-2} (1 - \tilde{f}_l), \quad (25)$$

нелинейный Дарси

$$C_\varepsilon = \varepsilon^{-2} [\exp(1 - \tilde{f}_l) - 1], \quad (26)$$

показавшие хорошую работоспособность и преимущество перед методами с переменной вязкостью (т.е. с продолжением по старшим производным).

Наиболее подробное изложение разрабатываемого Voller с соавторами fixed grid подхода для моделирования плавления чистых материалов приведено в работе [35]. В ней на основе энтальпийной формулировки и модели пористой среды рассчитывалось плавление чистого галлия в подогреваемой сбоку каверне и приводилось сравнение с экспериментальными данными. При этом для коэффициента сопротивления использовалась формула Козени-Кармана, в которой доля жидкой фазы трактовалась как пористость:

$$C_\varepsilon = \alpha \frac{(1 - \tilde{f}_l)^2}{\tilde{f}_l^3 + b}, \quad (27)$$

где коэффициент b аналогичен ε (т.е. обеспечивает большие значения коэффициента сопротивления в твердой фазе), а коэффициент α учитывает морфологию моделируемой таким способом mushy zone. В расчетах использовались следующие значения этих параметров: $b = 10^{-3}$ и $\alpha = 1.6 \times 10^6$. Причем отмечалось, что можно использовать и линейный закон Дарси (25). Что же касается ступенчатого выключения (23) без размазывания фронта в уравнениях гидродинамики, то оно не рекомендуется, поскольку при малых ε (т.е. при резком торможении скорости в твердой фазе) приводит к осцилляциям решения и даже к его расходимости. В работе [36] эта методика успешно использо-

валась для моделирования нестационарного режима затвердевания в охлажденной трубе (цилиндрические координаты) и также использовалось размазывание гидродинамического фронта, но уже по нелинейному закону Дарси (26). При этом отмечалось важность правильного подбора коэффициента ε , управляющего в этой формуле (наряду с f_i) за постепенность торможения скорости. Он должен быть не слишком маленьким и не слишком большим и требует экспериментальной настройки.

Обсуждаемый здесь подход, развитый для моделирования фазовых переходов в чистых материалах, основан на размазывании теплового и гидродинамического фронта и поэтому естественным путем переносится на анализ сплавов с mushy zone [34]. Наряду с изучением конкретных про-

цессов авторы вышеперечисленных работ работали и над усовершенствованием численного алгоритма. Особое внимание уделялось определению эффективного коэффициента сопротивления C_ε при работе со сплавами. В работах [37, 38] демонстрируется существенное влияние способа определения C_ε на результаты расчетов и предлагается более удачный, по мнению авторов, подход к его определению по сравнению с предыдущими работами авторов. Дальнейшему изучению возможностей определения этого коэффициента посвящены работы [39, 40]. В них определение коэффициента сопротивления базируется на имеющейся информации о природе двухфазной зоны.

5. Эталонные решения: предсказания и эксперименты

Стандартным тестом, на котором проверяются численные методики для расчета фазовых переходов в чистых материалах, является задача о плавлении галлия в прямоугольной полости [42] в постановке, приведенной на рис. 1. В этой работе приведены экспериментально полученные профили фронта жидкость/твердое тело на разные моменты времени. Следует отметить особенность используемого в экспериментах материала: теплопроводность твердого поликристаллического галлия анизотропна и по разным направлениям может отличаться в 5 раз. Тем не менее, считается, что в задаче о плавлении (в отличие от кристаллизации) такая неопределенность в свойствах твердой фазы несущественна. Поэтому эта задача используется как нестационарный тест для двумерных расчетов в декартовых координатах. Име-

ются обширные данные численных расчетов, полученные как методами сквозного счета [21, 35, 41], так и алгоритмами с выделением фронта [19, 43] и включающие в себя не только профили раздела двух фаз, но и картины течения и некоторыми локальными и интегральными характеристиками.

В качестве аналогичного теста для осесимметричной геометрии можно рассматривать задачу о затвердевании чистого олова в цилиндрической полости [44], в которой помимо свободной конвекции существенную роль играет и термокапиллярная. В этой работе сопоставляются экспериментальные данные и численные результаты, полученные алгоритмом сквозного счета из [35] с использованием линейного закона Дарси (уравнение (25)).

6. Численные эксперименты

Приведенный выше анализ различных подходов к решению задач плавления/затвердевания показывает, что наиболее оптимальными явля-

ются алгоритмы, основанные на методах сквозного счета. Они не имеют геометрических ограничений, связанных с количеством и каче-

ством (гладкостью с точки зрения построения преобразования координат) фронтов фазового перехода, а также, что весьма существенно, легко адаптируются на существующие алгоритмы и программы для решения задач конвективного тепло- и массообмена. Основные трудности, возникающие при использовании такого подхода, связаны с определением оптимальных значений управляющих параметров, задающих способ и конкретную реализацию размазывания теплового и гидродинамического фронтов. Следует сразу подчеркнуть, что приводимые результаты носят предварительный характер, поскольку подобное исследование является многопараметрическим и существенно зависит от конкретного алгоритма расчета уравнений гидродинамики и теплообмена. В силу этого оно требует детальной проработки, о чем свидетельствует почти десятилетний опыт исследований Voller et al.

В качестве тестовой задачи была выбрана упомянутая выше задача о плавлении чистого галлия в прямоугольной полости [42] в постановке, рассмотренной в основанных на методе сквозного счета численных работах [35, 41]. А именно, в двумерной постановке рассматривается задача плавления твердого галлия в прямоугольной полости с адиабатическими горизонтальными стенками и разнотемпературными изотермическими вертикальными. Общая схема и граничные условия приведены на рис. 1. При этом тепловые свойства (теплоемкость, теплопроводность и плотность) твердой и жидкой фазы считаются одинаковыми:

$$C_s = C_l, \quad \kappa_s = \kappa_l, \quad \rho_s = \rho_l,$$

а для описания свободной конвекции справедливо использовать приближение Буссинеска.

Необходимо подчеркнуть, что проведение натуральных экспериментов для задач с фазовыми переходами является очень трудоемкой задачей. Необходимость работать одновременно с двумя фазами рабочего материала, имеющими удобный для проведения экспериментов диапазон температур, весьма ограничивает возможности его выбора. Жидкие металлы (галлий, олово и т.д.), используемые в силу своих специфических свойств для этих целей, затрудняют визуализацию конвективного движения и получение температурного поля во всей рассматриваемой области. Основным резуль-

татом измерений является положение фронта фазового перехода, полученное на основе не слишком большого количества термопар. Наконец, задача является существенно нестационарной, что не позволяет повысить точность измерений за счет локальной адаптации измерительной техники.

Что касается рассматриваемых экспериментов [42], то необходимо отметить следующие особенности, оказывающие влияние на точность измерений. Во-первых, как отмечают сами авторы, теплопроводность использовавшегося в экспериментах материала (твердого поликристаллического галлия) существенно анизотропна и может отличаться в 5 раз по разным направлениям. Во-вторых, основным результатом измерений является положение фронта фазового перехода, определяемое по относительно небольшому числу термопар (13 на ее верхней и нижней горизонтальных стенках и 17 в среднем сечении полости), т.е. приводимый в данной работе профиль фронта построен по 3 точкам. Это приводит к достаточно произвольной трактовке промежуточных значений, что особенно заметно на пересекающихся профилях, соответствующим моментам 12 $\frac{1}{2}$, 15 и 17 минут. Далее, не совсем понятно, насколько хорошо в эксперименте решен вопрос с прилипанием жидкой фазы на верхней границе, поскольку изменение агрегатного состояния в большинстве случаев сопровождается изменением плотности вещества (и соответственно его объема). В некоторых аналогичных экспериментах факт образования воздушной прослойки над жидкостью (т.е. свободной поверхности) явно учитывается в эксперименте и приводимых измерениях. Наконец, в численных экспериментах разных авторов данная экспериментальная работа трактуется несколько по-разному в смысле начально-краевой задачи. А, именно, в работах [19, 21, 43] начальная температура твердой фазы и температура правой вертикальной стенки соответствовала температуре фазового перехода, в то время как в расчетах [35, 41] эти начальные и граничные условия были на 1.5 градуса ниже температуры плавления.

В данной работе для моделирования процесса плавления галлия использовался метод сквозного счета, основанный на температурной формулировке и модели пористой среды. Алгоритм расчета основан на разработанных ранее разностных схемах расщепления для расчета нестационарных уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска в естественных переменных [45, 46, 47, 48]. Он использует разнесенную сетку MAC-типа, на которой компоненты скорости относятся к соответствующим граням ячеек, а давление — к центрам ячеек. Для уравнений гидродинамики используются специальные аппроксимации пространственных производных, при которых разностные операторы наследуют основные свойства исходных дифференциальных операторов и обеспечивают второй порядок аппроксимации по пространству. Операторы конвективного переноса записываются в кососимметричной форме и аппроксимируются со вторым порядком на основе центральных разностей. При этом для разностных решений справедливы априорные оценки, аналогичные априорной оценке решения исходной дифференциальной задачи. Эти оценки гарантируют ограниченность решений нелинейных задач и устойчивость линеаризованных задач. Полученная схема обеспечивает второй порядок аппроксимации по пространству. В разностной схеме для уравнения температуры для аппроксимации конвективных членов в дивергентной форме использовалась схема отложенной коррекции, предложенная Khosla–Rubin [49]. Она обеспечивает второй порядок аппроксимации оператора

конвективного переноса. Для решения получаемых систем сеточных уравнений используется метод сопряженных градиентов с предобуславливанием, реализованный как для самосопряженных, так и для несамосопряженных сеточных задач. Тестовые расчеты показали, что разработанный алгоритм имеет слабые ограничения на шаг интегрирования по времени, вызванные нелинейностью решаемых уравнений. Данный метод расчета конвективного теплопереноса был успешно апробирован на стандартных тестовых задачах с использованием последовательности получаемых дроблением пополам однородных сеток и показал второй порядок точности получаемых численных результатов.

Все расчеты проводились в безразмерной постановке. В качестве параметров обезразмеривания использовались H — высота полости, ν — кинематическая вязкость и характерный перепад температуры $\Delta T = T_h - T_c$, где T_h и T_c — температура горячей и холодной стенок полости соответственно. Аспектное отношение полости составляет $AR = 0.714$. В качестве характерной температуры рассматривалась температура холодной стенки T_c . Следует подчеркнуть, что в расчетных работах [35, 41] в качестве характерного перепада температуры рассматривался $\Delta' T = T_h - T^*$, что следует учитывать при сопоставлении получаемых результатов. Безразмерные переменные при таком способе обезразмеривания выглядят следующим образом:

$$t' = t / (H^2 / \nu), \quad x'_i = x_i / H, \quad v'_i = v_i / (\nu / H), \quad i = 1, 2,$$

$$p = (p - p_0 + \rho g y) / (\rho \nu^2 / H^2), \quad \Theta = (T - T_c) / \Delta T = (T - T_c) / (T_h - T_c).$$

Числа Прандтля, Грасгофа и Стефана при таком способе обезразмеривания имеют следующие значения:

$$Pr = \frac{\nu}{k / (\rho C)} = 0.0216,$$

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T H^3}{\nu^2} = 3.31 \times 10^7,$$

$$Ste = \frac{L}{C \Delta T} = 21.66.$$

Следует отметить, что введенное здесь определение числа Стефана отличается от общепринятого [1] и использовавшегося в [35, 41] как обратное к единице и является более разумным с точки зрения физики.

Безразмерная температура плавления равна 0.15. Шаг интегрирования по времени τ выбирался из соображений удобства сопоставления и точности решения нелинейной задачи достаточно малым и равным

$\tau = 7.366 \times 10^{-6}$, что соответствует 0.1 сек. реального времени. Таким образом, для моделирования всего 20 - минутного эксперимента требуется 12000 шагов интегрирования по времени. Отметим, что в работах [35, 41] на каждом шаге уравнения решались итерационно и общее число итераций близко к нашему числу шагов интегрирования. Остальные управляющие параметры расчета, задающие относительную и квадрат абсолютной точности сходимости итерационных методов решения сеточных уравнений для скорости и давления приведены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры точности решения уравнений

ε_{vr}	1×10^{-8}
ε_{va}^2	1×10^{-20}
ε_{pr}	1×10^{-10}
ε_{pa}^2	1×10^{-20}

Следует отметить, что все обсуждаемые ниже расчеты были получены на достаточно подробной равномерной сетке 140×50 шагов. В обоих используемых для сравне-

ния численных работ [35, 41] использовалась достаточно грубая (42×32) для такого высокого числа Gr расчетная сетка. При этом никаких исследований порядка точности, в особенности в отношении конвективных членов, весьма существенных для рассматриваемых режимов сильно-конвективных течений с пограничными слоями, в указанных работах не проводилось. Хорошо известно, что в узких прямоугольных и кольцевых щелях (что соответствует начальным этапам развития процесса плавления) при высоких числах Грасгофа образуются сложные многовихревые структуры, которые невозможно разрешить (и которые не получаются в [35]) при использовании грубой расчетной сетки, не разрешающей образующиеся достаточно тонкие пограничные слои.

Целью численных экспериментов был анализ влияния и определение оптимальных значений управляющих параметров в методе сквозного счета. Использовались линейное размазывание гидродинамического фронта (16) и соответствующее ему ступенчатое представление дельта-функции (18), принимающее после обезразмеривания следующий вид:

$$\tilde{C}(\Theta, \eta) = \begin{cases} C, & \Theta < \Theta^* - \eta, \\ C + Ste/(2\eta), & \Theta^* - \eta \leq \Theta \leq \Theta^* + \eta, \\ C, & \Theta > \Theta^* + \eta. \end{cases} \quad (28)$$

где η относится уже к безразмерной температуре.

При таком подходе имеются два основных параметра, влияющих на ширину и точность размазывания гидродинамического и теплового фронтов фазового перехода. Для коэффициента сопротивления использовалось следующее значение:

$$C_e = 1 \times 10^{10},$$

а для полуширины размазывания гидродинамического и теплового фронтов применялись различные подходы.

А именно, было предложено выбирать ширину размазывания гидродинамического и теплового фронтов динамически. По заданному числу шагов $N_{1/2, front}$ определялась

полуширина η как минимальная разница между температурой плавления и температурой в заданных (отступающих от фронта на заданное число шагов сетки) узлах слева и справа от фазового фронта на верхней и нижней гранях полости.

Результаты расчетов при таком динамическом определении η показали следующие закономерности. Величина полуширины размазывания фронта η за время плавления меняется очень существенно. При полуширине размазывания фронта, определяемой по $N_{1/2, front} = 3$ шагов сетки, она менялась в 100 раз, а при $N_{1/2, front} = 7$ — в 10 раз за время плавления материала. Таким образом, очевидно, что в силу такого большого изменения градиента температуры во

времени невозможно задавать η постоянной. Ее необходимо определять динамически. При этом особенности данной задачи приводят к тому, что размазывание фронта на $N_{1/2,front}$ шагов выполняется только в твердой фазе у нижней границы полости. У верхней границы полости из-за более высоких градиентов температуры в твердой фазе такое значение η приводит к размазыванию только на вдвое меньшее число шагов. В жидкой фазе при этом фронт вообще размаывается не более чем на один узел сетки. Из-за такой неоднородности градиентов теплового поля в разных областях расчеты с $N_{1/2,front}=3$ дали скорость движения фронта в 3 раза большую, чем в эксперименте. Это объясняется тем, что при таком заданном максимальном числе шагов размазывания полуширины фазового фронта в верхней части полости фронт размаывается только на один шаг сетки и, более того, в нем образуются разрывы. Это и приводит к столь существенному различию в результатах расчета и эксперимента при таком малом значении количества узлов размазывания полуширины фазового фронта.

При значении $N_{1/2,front}=7$ расчеты показали хорошее совпадение с экспериментом. На рис. 2–10 представлены мгновенные картины течения и теплового поля, рассчитанные для данного значения полуширины размазывания фронта на соответствующие эксперименту моменты времени — 2,3,6,8,10,12.5,15,17 и 19 минут соответственно. Линии тока представлены с помощью эквидистантных изолиний, отсчитываемых от нулевого значения — 14 для основного вихря и 9 для вторичных. Аналогично тепловое поле представлено через 19 изотерм с безразмерным шагом 0.05, т.е. третья от правой холодной границы изотерма и есть граница фазового перехода со значением 0.15. На все рассмотренные моменты времени помимо основного вихря существуют несколько вторичных вихрей, существенно искривляющих фронт фазового перехода. В начальные моменты времени, когда жидкая фаза образует узкую щель, основной вихрь имеет многоглавую структуру. В дальнейшем развитии с увеличением доли жидкой фазы основной

вихрь становится одноглавым и занимает практически всю область, что приводит к значительной разнице в скорости движения фронта у нижней и верхней границ полости.

Рисунок 11 демонстрирует динамику движения фронта фазового перехода. На верхнем графике приведены результаты экспериментальных измерений на указанные моменты времени, на нижнем — полученные в данных расчетах линии фазового фронта. С учетом факта, что экспериментальные кривые построены по трем точкам измерения (расположенным на верхней и нижней границах и в среднем сечении), совпадение экспериментальных и расчетных данных можно считать удовлетворительным.

Помимо ширины размазывания фронта существенным фактором является выбор коэффициента сопротивления C_ε , определяющего степень торможения конвекции в твердой фазе. Значение $C_\varepsilon = 1 \times 10^{10}$ оказалось оптимальным для заданного числа Грасгофа. При максимальной за все время расчета интенсивности основного вихря $|\psi|_{\max} \approx 5 \times 10^2$ значения функции тока в твердой фазе составляли около $|\psi| \approx 1 \times 10^{-4}$, что вполне соответствует понятию "твердой фазы". При более высоких числах Грасгофа необходимо подбирать более высокие значения этого параметра. Следует отметить, что в данной реализации метода фиктивных областей условия непротекания через фронт фазового перехода ($\frac{\partial p}{\partial n} = 0$) не ставились. Более того, попытки реализовать это условие в расчете окончились неудачей, поскольку из-за такого резкого выделения гидродинамического фронта алгебраическая задача для поправки давления оказалась плохо обусловленной, что привело к расходимости применяемого в расчете итерационного метода решения сеточных уравнений.

Следующим шагом дальнейших исследований является использование локального определения полуширины размазывания фазового перехода, свое для каждой координатной линии сетки. Оно обеспечивает одинаковую во всей твердой фазе ширину размазывания фронта, не зависящую от локальных температурных градиентов. Первые расчеты с таким локальнодинамиче-

ским выбором η дали обнадеживающие результаты. Далее, необходимо провести исследование влияние размеров сетки на предложенный алгоритм. Наконец, следует

проанализировать различные способы размывания фазового перехода: только в твердой фазе, симметрично в твердой и жидкой фазах и т.д.

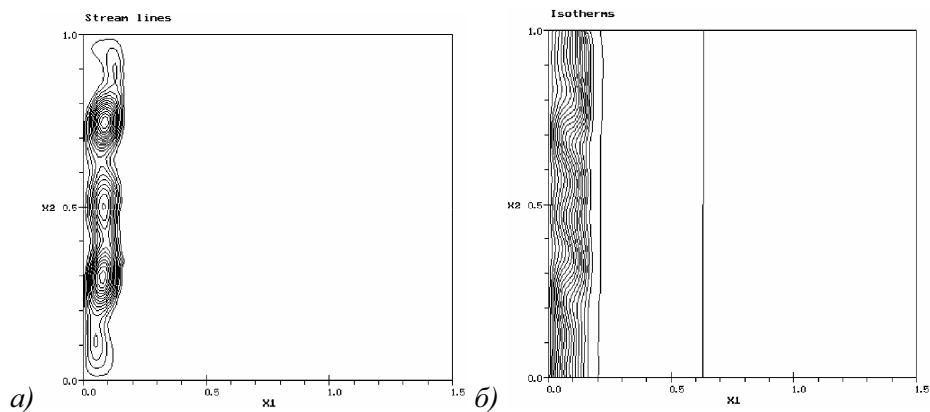


Рис. 2. Картина течения и теплового поля, $t=2$ мин

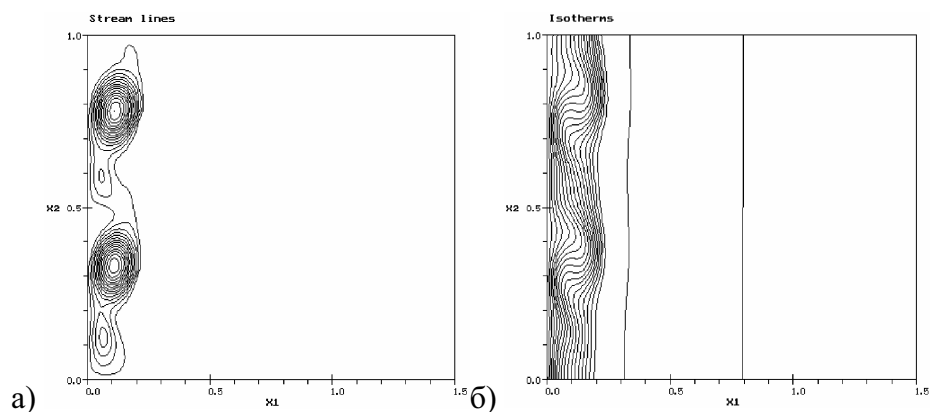


Рис. 3. Картина течения и теплового поля, $t=3$ мин

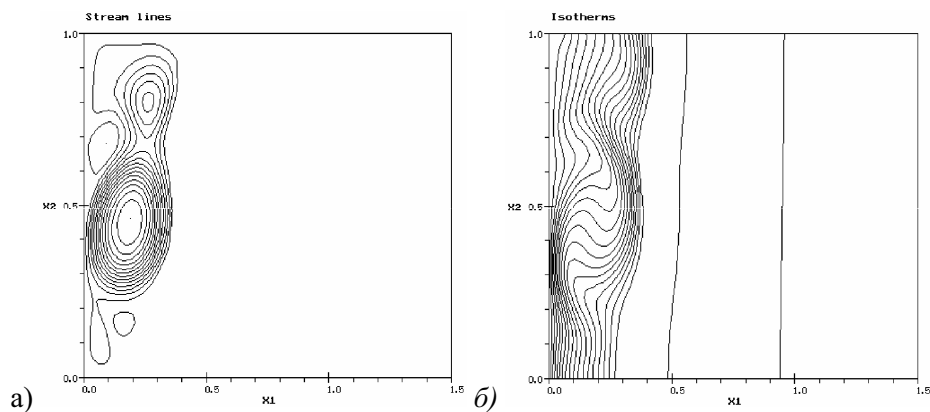


Рис. 4. Картина течения и теплового поля, $t=6$ мин

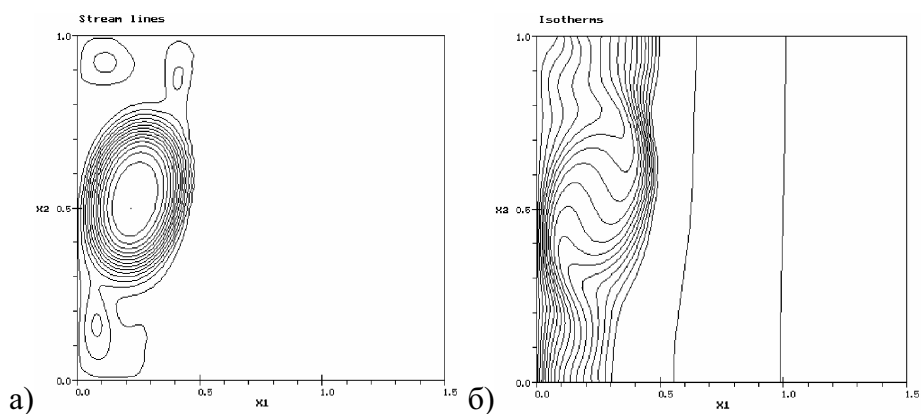


Рис. 5. Картина течения и теплового поля, $t=8$ мин

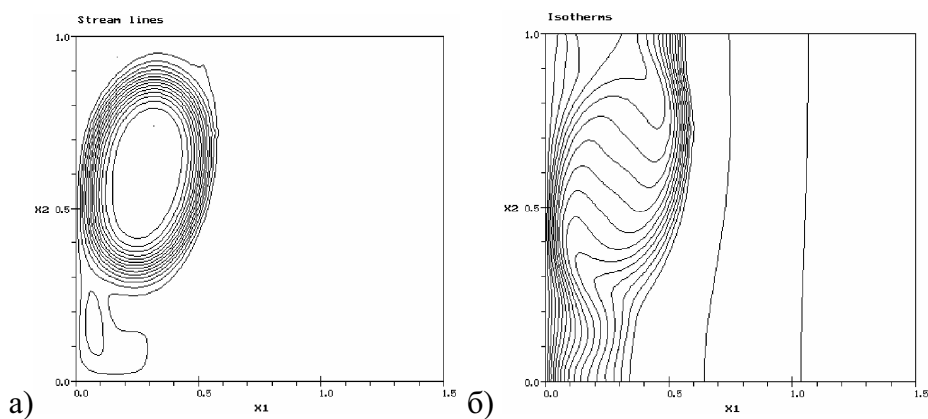


Рис. 6. Картина течения и теплового поля, $t=10$ мин

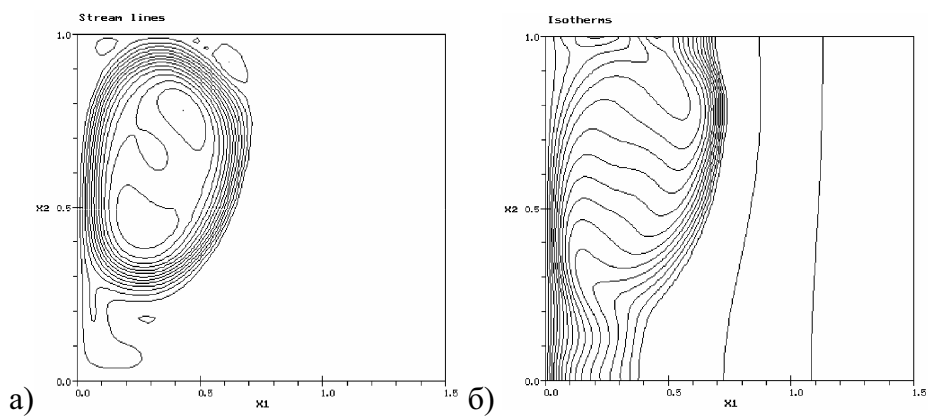


Рис. 7. Картина течения и теплового поля, $t=12 \frac{1}{2}$ мин

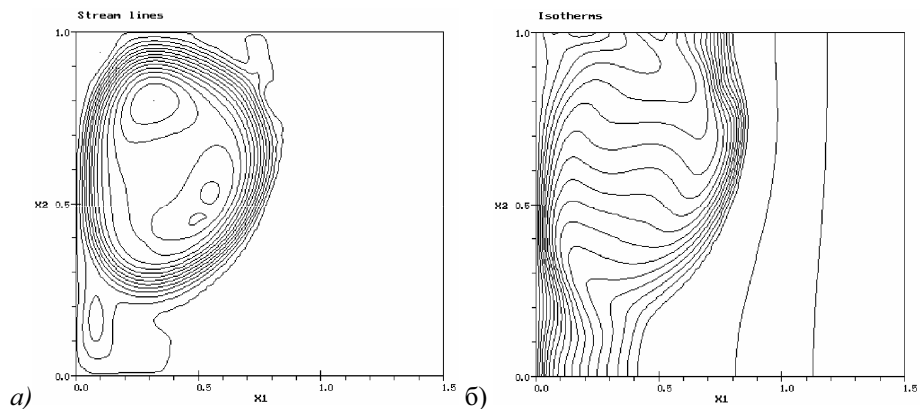


Рис. 8. Картина течения и теплового поля, $t=15$ мин

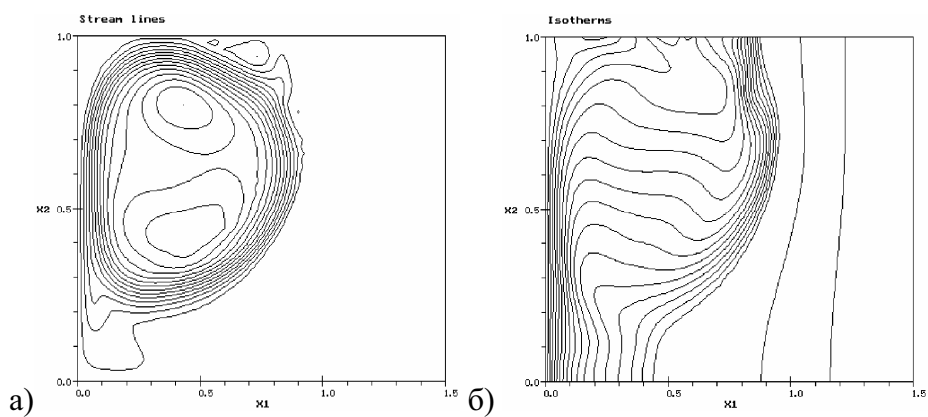


Рис. 9. Картина течения и теплового поля, $t=17$ мин

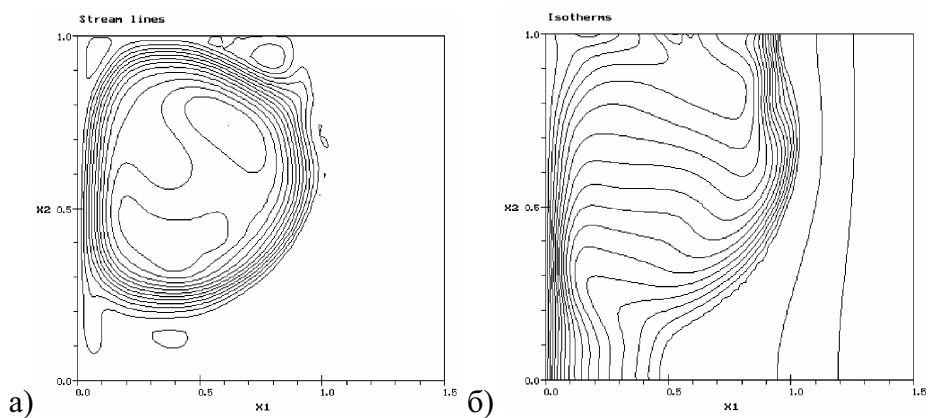


Рис. 10. Картина течения и теплового поля, $t=19$ мин

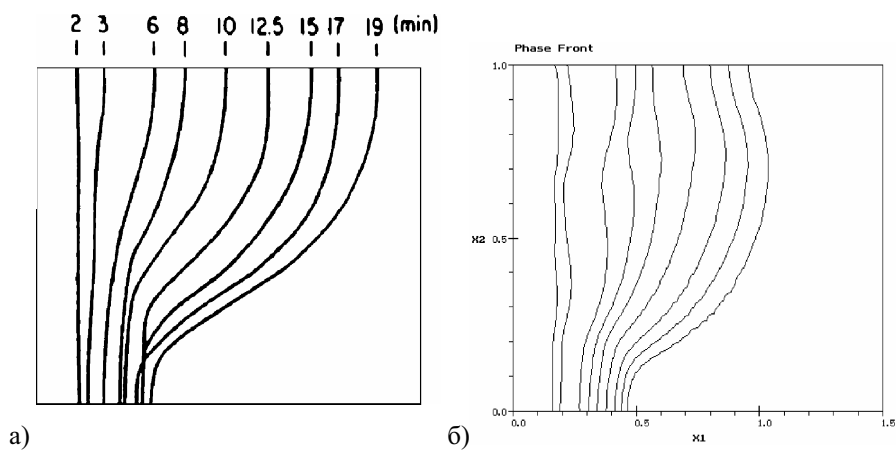


Рис. 11. Экспериментальные (а) и расчетные (б) профили фазового перехода в указанные моменты времени

Литература

1. B. Basu and A.W. Date, Numerical modelling of melting and solidification problems — A review, *Sddhand* 13, 169-213 (1988).
2. V.R. Voller, C.R. Swaminathan and B.G. Thomas, Fixed grid techniques for phase change problems: a review, *Int. J. Numer. Methods Engng.* 30, 875-898 (1990).
3. A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich, O.P. Iliev and A.G. Churbanov, Numerical simulation of convection/diffusion phase change problems — a review, *Int. I. Heat Mass Transfer* 36, 4095-4106 (1993).
4. A.E. Aksenova, P.N. Vabishchevich, V.V. Chudanov and A.G. Churbanov. Numerical simulation of solidification processes in diffusion/convection problems. A review. Preprint NSI—95—11, Nuclear Safety Institute, Russian Ac. Sci., Moscow, 1995 (in Russian).
5. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*. Pergamon, Oxford (1987).
6. V.R. Voller, Fast implicit finite-difference methods for the analysis of phase change problems, *Numer. Heat Transfer* 17B, 155-169 (1990).
7. V.R. Voller and C.R. Swaminathan, A general source-based method for solidification phase change, *Numer. Heat Transfer* 19B, 175-189 (1991).
8. O.A. Oleinik, On a method for the general Stefan problem solution, *Doklady Akademii Nauk SSSR* 135, 1054-1057 (1960) (in Russian).
9. L.I. Rubinstein, *The Stefan Problem*. Zinatne, Riga (1967) (in Russian).
10. A.N. Tikhonov and A.A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*. Nauka, Moscow (1972) (in Russian).
11. M.C. Flemings, *Solidification Processing*. McGraw-Hill, New York (1974).
12. P.N. Vabishchevich and O.P. Iliev, Numerical solution of conjugate heat and mass transfer problems including phase change, *Differentsial'nye Uravneniya* 23, 1127-1132 (1987) (in Russian).
13. M.P. Leonchuk, Yu.E. Shvetsov and L.V. Shvetsova, Numerical simulation of melting processes involving convection. Obninsk Institute for Thermophysics Preprint No. 1932. Obninsk (1988) (in Russian).
14. E.L. Tarunin, *Numerical Experiment in Free Convection Problems*. Irkutsk University Publishers, Irkutsk (1990) (in Russian).
15. D. Poirier and M. Salcudean, On numerical methods used in mathematical modeling of phase change in liquid metals, *ASME J. Heat Transfer* 110, 564-570 (1988).
16. T. Saitoh and K. Hirose, High Rayleigh number solutions to problems of latent heat thermal energy storage in a horizontal cylinder capsule, *ASME J. Heat Transfer* 104, 545-553 (1982).
17. H. Rieger, U. Projahn and H. Beer, Heat transfer during melting inside a horizontal tube, *ASME J. Heat Transfer* 105, 226-234 (1983).
18. A. Sasaki, S. Aiba and S. Fukusako, Numerical study on freezing heat transfer in water-saturated porous media, *Numer. Heat Transfer* 18A, 17-32 (1990).
19. M. Lacroix, Computation of heat transfer during melting of a pure substance from an isothermal wall, *Numer. Heat Transfer* 15B, 191-210 (1989).
20. M. Lacroix, Analysis of mixed convection melting of a pure metal, *Numer. Heat Transfer* 17A, 401-416 (1990).
21. M. Lacroix and V.R. Voller, Finite difference solutions of solidification phase change problems: transformed versus fixed grids, *Numer. Heat Transfer* 17B, 25-41 (1990).

22. M. Lacroix, Effects of buoyancy and surface tension forces on the melting of a metal, Numer. Heat Transfer 19A, 101-115 (1991).
23. M. Lacroix and A. Garon, Numerical solution of phase change problems: an Eulerian-Lagrangian approach, Numer. Heat Transfer 19B, 57-78 (1992).
24. A.A. Samarskii and B.D. Moiseenko, An efficient fixed grid scheme for the solution of the multidimensional Stefan problem, Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki 5, 816-827 (1965) (in Russian).
25. B.M. Budak, E.N. Solov'yeva and A.B. Uspenskii, A difference method with coefficients smoothing for the Stefan problem solution, Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki 5, 828-840 (1965) (in Russian).
26. N. Shamsundar and E.M. Sparrow, Analysis of multidimensional conduction phase change via the enthalpy model, ASME J. Heat Transfer 97, 333-340 (1975).
27. V.I. Mazhukin, Yu.A. Poveshchenko, S.B. Popov and Yu.P. Popov, On uniform algorithms for the Stefan problem solution, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprint N 122, Moscow (1985) (in Russian).
28. M. Yao and A. Chait, Application of the homographic approximation in the enthalpy method for phase change problems, Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow 3, 157-172 (1993).
29. P.N. Vabishchevich, The Fictitious Regions Method in Problems of Mathematical Physics. Moscow University Publishers, Moscow (1991) (in Russian).
30. V.R. Voller, N. Markatos and M. Cross, Techniques for accounting for the moving interface in convection/diffusion phase change. In Numerical Methods in Thermal Problems (Eds. R.W. Lewis and K. Morgan), Vol.4, pp.595-609. Pineridge Press, Swansea (1985).
31. V.R. Voller, N.C. Markatos and M. Cross, Solidification in convection and diffusion. In Numerical Simulations of Fluid Flow and Heat/Mass Transfer Processes (Eds. N. Markatos, D. Tatchell, M. Cross and N. Rhodes), pp.425-432. Springer, Berlin (1986).
32. V. R. Voller, A numerical method for analysis of solidification in heat and mass transfer systems. In Numerical Methods in Thermal Problems (Eds. R.W. Lewis et al), Vol.5, pp.693-704. Pineridge Press, Swansea (1987).
33. V.R. Voller, M. Cross and N.C. Markatos, An enthalpy method for convection/diffusion phase change, Int. J. Numer. Methods Engng. 24, 271-284 (1987).
34. V.R. Voller and C. Prakash, A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems, Int. J. Heat Mass Transfer 30, 1709-1719 (1987).
35. A.D. Brent, V.R. Voller and K.J. Reid, Enthalpy-porosity technique for modelling convection-diffusion phase change: application to the melting of a pure metal, Numer. Heat Transfer 13, 297-318 (1988).
36. S.E. Hibbert, N.C. Markatos and V.R. Voller, Computer simulation of moving-interface, convective, phase-change processes, Int. J. Heat Mass Transfer 31, 1785-1795 (1988).
37. C. Prakash and V. Voller, On the numerical solution of continuum mixture model equations describing binary solid-liquid phase change, Numer. Heat Transfer 15B, 171-189 (1989).
38. V.R. Voller, A.D. Brent and C. Prakash, The modelling of heat, mass and solute transport in solidification systems, Int. J. Heat Mass Transfer 32, 1719-1731 (1989).
39. V.R. Voller, A.D. Brent and C. Prakash, Modelling the mushy region in a binary alloy, Appl. Math. Modelling 14, 320-326 (1990).
40. C.R. Swaminathan and V.R. Voller, A general enthalpy method for modelling solidification processes, UMSI 91/167, Research Report of the Supercomputer Institute at the University of Minnesota (1991).
41. V. Voller and C. Swaminathan, Fixed grid solution of phase change problems, J. Theoret. Appl. Mechanics XXIII, 30-40 (1992).

42. C. Gau and R. Viskanta, melting and solidification of a pure metal on a vertical wall, ASME J. Heat Transfer 108, 174-181 (1986).
43. D.J. McDaniel and N. Zabaras, A least-squares front-tracking finite element method analysis of phase change with natural convection, Int. J. Numer. Methods Engng. 37, 2755-2777 (1994).
44. A.D. Brent, Numerical simulation of tin solidification under the influence of natural convection in a thick walled annular crucible, Int. Comm. Heat Mass Transfer 16, 693-701 (1989).
45. A.G. Churbanov, A.N. Pavlov and P.N. Vabishchevich, Operator-splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations on non-staggered grids. Part 1: First-order schemes, Int. J. Numer. Methods Fluids 21, 617-640 (1995).
46. A.G. Churbanov, A.N. Pavlov and P.N. Vabishchevich, Viscous flow prediction using non-staggered grids. In: Experimentation, Modelling and Computation in Flow, Turbulence and Combustion (Eds. J.A. Desideri, B.N. Chetverushkin, Y.A. Kuznetsov, J. Periaux and B. Stoufflet), Vol.1, pp.221-232. Wiley, Chichester, 1996.
47. P.N. Vabishchevich, A.N. Pavlov and A.G. Churbanov, Numerical methods for unsteady incompressible flows using primitive variables and non-staggered grids. Matematicheskoe Modelirovanie (Mathematical Modeling) 8, 81-108 (1996) (in Russian).
48. A.G. Churbanov, A.N. Pavlov, P.N. Vabishchevich and V.V. Chudanov, Operator-splitting schemes for the incompressible Navier-Stokes equations with consistent approximation of operators. In: Book of Abstracts of International Conference on Computational Modelling and Computing in Physics, 16-21 September, 1996, Dubna, Russia (Eds. E.P. Zhidkov et al), p.54. JINR, Dubna, 1996.
49. P.K. Khosla and S.G. Rubin, A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. Computers&Fluids 2, 207-209 (1974).

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ (ЧАСТЬ 2)

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ПЛАВЛЕНИЯ И ЗАТВЕРДЕВАНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЧИСЕЛ ОСТРОГРАДСКОГО И РЕЛЕЯ

А. Е. Аксенова, П. Н. Вабищевич, В. В. Чуданов

1. Введение

Актуальность параметрического исследования естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями обусловлена необходимостью предсказания поведения расплава топливосодержащих масс (кориума) для различных сценариев гипотетических тяжелых аварий на атомных станциях [1–6]. В результате такой аварии возможно образование достаточно больших объемов расплава кориума как непосредственно внутри активной зоны, так и в нижней части корпуса реактора после стекания туда расплава. Наличие больших масс расплава в нижней части корпуса реактора может приводить к разрушению корпуса и, в то же время, при определенных режимах охлаждения возможно удержание расплавленного топлива внутри корпуса. В связи с этим необходимо исследование механизмов теплопередачи в кориуме на основе более полной модели, учитывающей как естественно-конвективные течения, так и процессы плавления и затвердевания в кориуме.

Процесс разогрева кориума в корпусе реакторе определяется остаточным объемным тепловыделением, которое, в свою очередь, приводит к плавлению топлива и возникновению внутри расплава интенсивного вихревого течения, обусловленного архимедовыми силами. В этом случае основные характеристики тепло- и массопереноса в значительной степени определяются условиями, при которых протекает процесс естественной конвекции, а именно, режимами охлаждения расплава на

внешних границах, наличием или отсутствием фазовых превращений, свойствами расплава кориума и временем протекания процесса. Необходимо также учитывать процессы теплопроводности в корпусе и возможное плавление последнего. Полное решение проблемы теплового взаимодействия расплава кориума с корпусом реактора требует решения согласованной задачи теплообмена, а именно, задачи естественной конвекции тепловыделяющей жидкости в частично или полностью расплавленном кориуме и задачи теплопроводности с учетом плавления корпуса реактора. Большинство ранее проводимых численных и экспериментальных исследований, обзор результатов которых представлен в [1], было посвящено изучению естественной конвекции тепловыделяющей жидкости без учета фазовых превращений, где основные характеристики теплопереноса определялись в зависимости от чисел Релея, Прандтля и аспектного отношения. Однако в рамках моделирования тяжелых аварий, в случае образования большого количества твердой фазы кориума, важно учитывать зависимость теплопередачи (среднее число Нуссельта) не только от числа Релея, но и от числа Остроградского. Последнее может быть определено как отношение среднего тепловыделения в объеме к среднему потоку в твердой фазе, а обратная величина — Os^{-1} может рассматриваться как безразмерная температура фазового перехода. Заметим, что с увеличением числа Остроградского объем твердой фазы (корок) сокращается, а с уменьшени-

ем числа Остроградского наблюдается рост корок. Рассматривая результаты вышеназванных работ с точки зрения естественной конвекции тепловыделяющего расплава кориума, который образует корки вблизи охлаждаемых границ корпуса реактора, следует подчеркнуть, что эти зависимости соответствуют предельному случаю при достаточно больших числах Остроградского ($Os \geq 10^4$). Однако, для реакторного случая, а именно, при удержании кориума в нижней части корпуса реактора оценка характерных чисел Остроградского изменяется в диапазоне от 100 до 1000.

Перенесение результатов этих исследований на изучение поведения расплава кориума в нижней части корпуса реактора предполагает, что наличие корок не вносит существенных изменений в распределение тепловых потоков. Такое допущение и соответствующая постановка проблемы требуют более детального изучения. Если же рассматривать эту проблему в рамках численного исследования естественно-конвективных течений в замкнутой полости с учетом замерзания и плавления кориума на охлаждаемых стенках, то в этом случае можно было бы опустить вышеназванное допущение, при условии корректировки имеющихся корреляционных зависимостей с учетом дополнительных безразмерных параметров. В данной работе делается попытка провести дополнительные численные исследования задачи естественной конвекции при учете плавления и замерзания тепловыделяющей жидкости. Это может быть актуально с точки зрения обобщения ранее полученных результатов, а также использования найденных новых критериальных зависимостей при анализе проблемы удержания расплава кориума в корпусе реактора.

В численных расчетах применен достаточно эффективный математический алгоритм для решения нестационарных задач гидродинамики и теплопроводности. Он позволяет провести большое количество параметрических численных расчетов для создания адекватной базы данных основных тепловых характеристик в зависимости от безразмерных параметров (число Релея и число Остроградского). Поскольку для рассматриваемой проблемы зависимость основных тепловых характеристик от числа

Прандтля и аспектного отношения является менее значимой в сравнении с остальными параметрами, значения Pr и Asp принимаются равными единице.

Граничные условия в задаче удержания расплава кориума в корпусе реактора могут варьироваться в широком диапазоне. Так, например, при наличии охладителя на верхней поверхности расплава кориума граничные условия могут соответствовать большим числам Био (что, в свою очередь, приближается к изотермическим граничным условиям). Аналогично, в широком диапазоне чисел Био могут меняться граничные условия на боковой поверхности и на дне корпуса (с проплавлением и истончением корпуса число Био увеличивается). Таким образом, в рамках параметрических исследований важное место занимает изучение зависимостей тепловых характеристик от чисел Био на различных поверхностях. В этой работе круг численных расчетов ограничивается только задачами с изотермическими граничными условиями, что соответствует числу Био, равному бесконечности.

В рамках вышеуказанных ограничений и предположений удалось получить ряд зависимостей для основных тепловых характеристик (числа Нуссельта, объемов жидкой и твердой фаз, средней температуры, и т.д.) в диапазоне чисел Остроградского ($40 \div 1000$) и чисел Релея ($10^8 \div 10^{12}$). Естественная конвекция при таких параметрах носит нестационарный характер, что заставляет проводить расчеты до установления квазистационарного режима и делать осреднение вычисляемых величин по достаточно большой выборке временных результатов.

Полученные результаты представлены как в виде графиков и таблиц, так и с помощью функциональных зависимостей вида

$$Nu = C \cdot Os^n \text{ или } Nu = C \cdot Ra^n ,$$

$$10^8 \leq Ra \leq 10^{12}, \quad 40 \leq Os \leq 1000, \quad Pr = 1, \quad Asp < 1.$$

При этом необходимо отметить совпадение распределения тепловых потоков при больших числах Остроградского с полученными ранее в работах [3–6] экспериментальными результатами для тепловыделяющей жидкости без учета плавления.

2. Математическая формулировка задачи

Рассматривается двумерная задача естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения с граничными условиями третьего рода.

Пусть

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\} \quad —$$

область, в которой будем искать решение поставленной задачи. Введем следующее обозначение для границы фазового перехода $S(t)$:

$$S(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) = u_\ell\},$$

где u_ℓ — температура фазового перехода.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} v - \beta g e u = 0, x \in D, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, x \in D, 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$(c(u) + \lambda \delta(u - u_\ell)) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \operatorname{grad} u \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = q, \quad (3)$$

$$x \in \Omega, 0 < t \leq T.$$

Без ограничения общности будем рассматривать случай постоянных коэффициентов теплоемкости и теплопроводности в твердой и жидкой фазах, неменяющихся при фазовом превращении.

Рассматриваемая область течения представляет собой замкнутую полость с неподвижными твердыми стенками, поэтому на

$$k(u) \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_w) = 0, x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2. \quad (5)$$

В силу того, что в начальный момент времени жидкость покоится и имеет равновесную температуру, начальное условие для скорости имеет вид

$$v(x, 0) = 0, x \in D, \quad (6)$$

а начальное условие для температуры определяется соотношением

$$u(x, 0) = 0, x \in \Omega. \quad (7)$$

Последняя разбивает область Ω на две подобласти. Определим область, содержащую жидкую фазу вещества как $D(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) > u_\ell\}$, а область, содержащую твердую фазу вещества. — $D_0 = \Omega/D$. Задачу будем рассматривать в нестационарной постановке.

Для описания процессов тепло- и массопереноса в тепловыделяющей жидкости с однородным объемным источником тепла, с учетом фазовых превращений, используются нестационарные уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска совместно с уравнением для температуры:

границах полости ∂D задаются условия прилипания и непротекания вида:

$$v(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T. \quad (4)$$

В качестве тепловых условий выбраны граничные условия третьего рода, что позволяет моделировать различные режимы охлаждения границ полости:

Поскольку первоначально вся область представляет собой жидкую фазу вещества, то $D(0) = \Omega$.

Таким образом, соотношения (1–7) полностью описывают свободную конвекцию тепловыделяющей жидкости с учетом фазовых превращений в области Ω на любой момент времени $t > 0$. Численное исследование вышеназванной задачи проводится в безразмерной постановке с помощью вычислительного алгоритма, использующего

переменные "функция тока, вихрь скорости, температура". Компоненты скорости определяются через функцию тока $\psi(x, t)$ как:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (8)$$

поэтому условие несжимаемости (2) всегда выполнено. Для вихря скорости имеем соотношение

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (9)$$

Учитывая соотношения (8), (9) из уравнения движения (1) для вихря скорости получим следующее выражение в безразмерных переменных

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (v \nabla) w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} - \frac{Ra_q}{Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (10)$$

$$x \in D, 0 < t \leq T$$

с модифицированным числом Релея, получаемым по мощности теплового источника q . Уравнение (10) может быть переписано через безразмерное число Остроградского в виде

$$(1 + Ste \chi_{sl}) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (v \nabla) u \right) - \frac{1}{Pr} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + 1 \right) = 0, \quad (13)$$

$$x \in \Omega, 0 < t \leq T,$$

где число Стефана определяется из соотношения $Ste = \lambda / (c \cdot (u_s - u_\ell))$, где

$$\chi_{sl} = \begin{cases} 1, & u \in (u_s, u_\ell), \\ 0, & u \notin (u_s, u_\ell). \end{cases}$$

Обезразмеривание здесь проведено по высоте полости l , коэффициенту кинематической вязкости ν и величине ql^2/k , пропорциональной перепаду температуры.

Система уравнений (11)–(13) дополняется граничными и начальными условиями, вытекающими из (4)–(7). Условия прилипания и непротекания (4) на границе единичного квадрата Ω дают соотношения

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (v \nabla) w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} - \frac{Ra_u Os}{Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (11)$$

где использовано число Релея, определяемое по характерному перепаду температур

$$Ra_u = \frac{\beta g (u_\ell - u_w) l^3}{\alpha \nu}$$

и число Остроградского определяется с помощью соотношения

$$Os = \frac{ql^2}{k(u_\ell - u_w)}.$$

Здесь и далее будем использовать для безразмерных переменных те же обозначения что и для точных величин. Заметим, что везде далее по тексту под числом Релея Ra мы будем понимать модифицированное число Релея, получаемое по мощности теплового источника q , Ra_q .

Из уравнения несжимаемости (2) будем иметь уравнение Пуассона для функции тока

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha^2} = w, x \in D, 0 < t \leq T. \quad (12)$$

Уравнение энергии (3) в безразмерных переменных переписывается в виде

$$\psi(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T, \quad (15)$$

где n — внешняя нормаль к ∂D .

Из условия (6) имеем

$$\psi(x, 0) = 0, x \in D. \quad (16)$$

Граничные условия конвективного теплообмена (третьего рода) в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + Bi u = 0, 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2. \quad (17)$$

Начальное условие для температуры остается без изменений.

3. Метод решения

Для нахождения приближенного решения задачи плавления и затвердевания применяются различные вычислительные алгоритмы [7]. В этой работе для получения приближенного решения задачи (11–17) с расчетом поля течения в изменяющейся области $D(t)$ используется вариант метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам [8]. Реализация разностной схемы расщепления [9] основана на решении сеточных эллиптических задач на каждом шаге по времени. Подобный подход хорошо зарекомендовал себя при решении задач свободной конвекции

тепловыделяющей жидкости, что подтверждает совпадение полученных результатов с экспериментальным [2, 10] и численно-экспериментальным [11, 12] исследованиями для различных граничных условий и геометрий расчетной области. Результаты тестирования вычислительного алгоритма для задачи свободной конвекции тепловыделяющей жидкости опубликованы в работах [13, 14]. Кроме того, некоторые из результатов, касающиеся исследования периодической естественной конвекции в замкнутой полости прямоугольного сечения, представлены в статье [15].

4. Результаты численного моделирования

Численные расчеты задачи естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в квадратной камере были выполнены на Sun 4/80 (Sparc Station 10). Параметрическое исследование влияния основных безразмерных параметров задачи на особенности конвективного теплообмена было проведено в следующем диапазоне их значений: $10^8 \leq Ra \leq 10^{12}$, $40 \leq Os \leq 1000$, $Bi = \infty$, $Ste = 0$, $Pr = 1$, $Asp = 1$.

Исследование режимов конвекции в расплавленном топливе показывают [1], что структура течения и, как следствие, теплопередача в корииуме зависит от режима конвекции, определяемого, главным образом, числом Релея и режимами охлаждения на внешних границах. В этой работе рассматриваются осциллирующий и переходный к турбулентному режимы течения. Как известно из [11], осциллирующему режиму соответствуют значения числа Релея $10^8 \div 10^9$, поэтому в качестве нижней границы диапазона изменений числа Релея было выбрано значение 10^8 . Верхний предел диапазона определялся исходя из нескольких соображений. Оценка числа Ra , соответствующего условиям в реакторе, дает значения, начиная с 10^{12} и выше, эти же величины справедливы и при моделировании экспериментальных установок, таких, например, как SCARABEE [18] и

РАСПЛАВ [17]. В диапазоне изменений числа $Ra > 10^{12}$ характер течения существенно турбулентен, поэтому при моделировании таких течений возникает необходимость использования адекватных моделей турбулентности. В литературе предлагаются различные способы моделирования турбулентных течений начиная с алгебраических моделей и кончая многочисленными $(k - \varepsilon)$ -моделями. Однако, как показывают результаты последних работ по турбулентности [19, 20], до сих пор не выработано единого мнения по вопросу, какая из моделей турбулентности дает наиболее близкую к реальной картину происходящего при турбулентном режиме течения. Помимо сказанного выше, увеличение числа Релея предъявляет определенные требования к используемым в расчетах сеткам. Выбранное нами в качестве верхнего предела значение $Ra = 10^{12}$ позволяет адекватно моделировать переходные к турбулентному режимы течения без использования каких-либо моделей турбулентности и очень подробных сеток. Расчеты проводились на сетке размера 81×81 со сгущением вблизи границ рассматриваемой области адекватным размерам ячеек равномерных сеток 161×161 , 321×321 . Увеличение числа Релея выше 10^{12} требует применения более подробных сеток 161×161 , 321×321 с одновременным сгущением вблизи границы.

При выборе диапазона изменения числа Остроградского мы руководствовались следующими положениями. В качестве минимальной нижней границы диапазона изменения числа Остроградского можно было бы указать значение $Os \approx 16$, характеризующее случай полного затвердевания расплава. Начиная с этой точки, с увеличением значения числа Остроградского, режим течения переходит от чисто теплопроводностного режима к смешанному, кондуктивно-конвективному. При этом объем жидкой фазы начинает сильно нелинейно расти, достигая в точке $Os = 40$ состояния, когда половину области занимает расплав, а половину — твердая фаза. Но поскольку в реакторном случае маловероятно достижение полного затвердевания расплава, в качестве нижней границы было выбрано значение $Os = 40$. В качестве верхней границы диапазона было выбрано значение $Os = 1000$, соответствующее практически чистой конвекции, когда почти вся область занята жидкой фазой. Увеличение верхней границы диапазона не оказывает существенного влияния на изменение картины течения, поскольку с ростом числа Остроградского выше 1000 доля твердой фазы в области практически равна нулю. Кроме того, верхняя оценка числа Остроградского для реактора также дает 1000. Нижняя граница диапазона в реакторном случае оценивается величиной порядка $Os = 100$.

Как уже отмечалось выше, режимы конвекции в значительной степени определяются режимами охлаждения на внешних границах. Эти режимы моделируются с помощью задания числа Био. В реакторном случае интенсивный теплосъем с внешних границ корпуса соответствует конвективному теплообмену с высокими числами Био. Это обстоятельство в свою очередь позволяет интерпретировать условия теплообмена как изотермические граничные условия. Оценка диапазона изменения числа Био для реальных условий дает значения нижнего и верхнего пределов 100 и 600, соответственно, т.е. почти изотермические граничные условия. В представленной работе мы ограничились рассмотрением случая изотермических граничных условий, т.е. $Bi = \infty$.

Поскольку рассматривался квазистационарный режим течения, нас в данном случае не интересовала динамика распространения фронта плавления, определяемая с помощью числа Стефана. Поэтому численные расчеты проводились для случая $Ste = 0$. Число Прандтля во всех расчетах оставалось фиксированным и равным единице.

Расчеты проводились методом установления, до достижения квазистационарного решения. Вычисления прерывались при одновременном выполнении следующих условий:

производная по времени от средней в объеме температуры в норме L_2 осциллирует вблизи нуля;

суммарное тепловыделение на боковые, верхнюю и нижнюю грани осциллирует вблизи единицы, поскольку в квадратной каверне суммарное тепловыделение равно единице.

При обработке результатов основное внимание уделялось таким безразмерным параметрам как: интенсивность теплопередачи (локальное число Нуссельта) на боковые, верхнюю и нижнюю грани; суммарная теплопередача на все грани рассматриваемой области; средние температуры в жидкой фазе и во всей области; объем жидкой фазы, а также максимальным значениям локальных чисел Нуссельта на боковых гранях. Поскольку в процессе достижения квазистационарного решения указанные параметры осциллировали вблизи своих средних значений, проводилось осреднение вычисляемых величины по достаточно большой выборке временных результатов.

Достоверность получаемых результатов проверялась путем проведения расчетов на последовательности сгущающихся сеток со сгущением адекватным сеткам 81×81 , 161×161 , 321×321 , 641×641 и сопоставлении получаемых решений на неизменяемость в рассматриваемом диапазоне параметров. Расчеты на последовательности сгущающихся сеток для числа Релея $Ra = 10^{10}$ и числа Остроградского $Os = 1000$ представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты расчетов на последовательности сгущающихся сеток для числа Релея $Ra=10^{}10$ и числа Остроградского $Os=1000$**

Размерность сетки	Nu_{up}	Nu_{sd}	Nu_{dn}
161×161	72.8227	52.3578	14.01160
321×321	70.5175	50.8786	14.7977
641×641	70.1275	49.8037	15.0749

4.1. Тестирование методики

Проводилось сопоставление результатов численных расчетов с экспериментальными корреляциями Штейнбернера [3–6]. На ри-

сунке 1 показано распределение числа Нуссельта на верхнюю, боковую и нижнюю границы квадратной каверны.

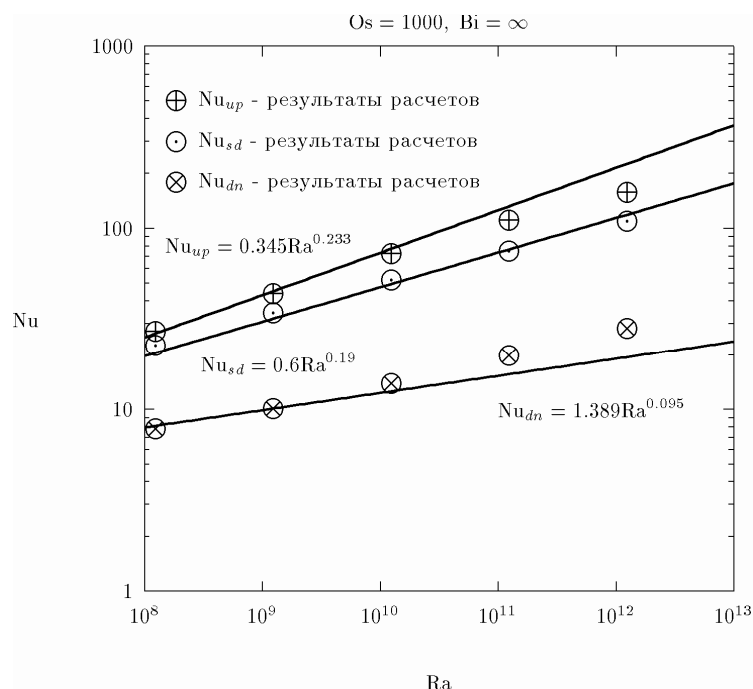


Рис. 1. Распределение числа Нуссельта на верхней, боковой и нижней границах квадратной каверны

Корреляции Штейнбернера представлены сплошными линиями и соответствуют числу Остроградского $Os = \infty$. Результаты численных расчетов обозначены маркерами, причем значения числа Нуссельта на верхней границе рассматриваемой области маркируются значком \oplus , для обозначения результатов расчетов на боковой поверхности используется значок \odot , а на нижней поверхности — символ \otimes . Представленные на рисунке 1 результаты численных расчетов для значения числа Остроградского $Os = 1000$ качественно совпадают с корреляциями Штейнбернера. Тестирование используемой в расчетах методики проводилось на задаче свободной конвекции теп-

ловыделяющей жидкости в постановках аналогичных работам [11, 12]. В результате тестирования было получено хорошее согласование наших результатов с результатами, представленными в этих численно-экспериментальных работах. Полученные результаты были опубликованы в [13] и [14]. Кроме того, предложенная методика тестировалась на задаче естественной конвекции с подвижной границей раздела фаз. Было получено хорошее совпадение результатов расчетов с экспериментом, в котором исследовалось плавление чистого галлия [16]. Результаты тестирования методики приведены в материалах рабочей группы OECD [17].

4.2. Полученные результаты

Рассматривая результаты проведенных численных расчетов с точки зрения естественной конвекции тепловыделяющего расплава кориума, который образует корку вблизи охлаждаемых границ корпуса реактора, представлялось важным оценить соотношение твердого и жидкого в рассматриваемой области. Указанное соотношение может оказывать существенное влияние на интенсивность выноса тепла к границам корпуса реактора. Так, в области со значительным

количеством твердой фазы кориума интенсивность выноса тепла к границам корпуса заметно уменьшается, что способствует удержанию расплава внутри корпуса и увеличению "продолжительности жизни" последнего. В связи с этим было проведено исследование влияния чисел Остроградского и Релея на изменение доли жидкой фазы в процентном соотношении в диапазоне числа Остроградского $16 < Os \leq 1000$ для различных значений числа Релея (см. рис. 2).

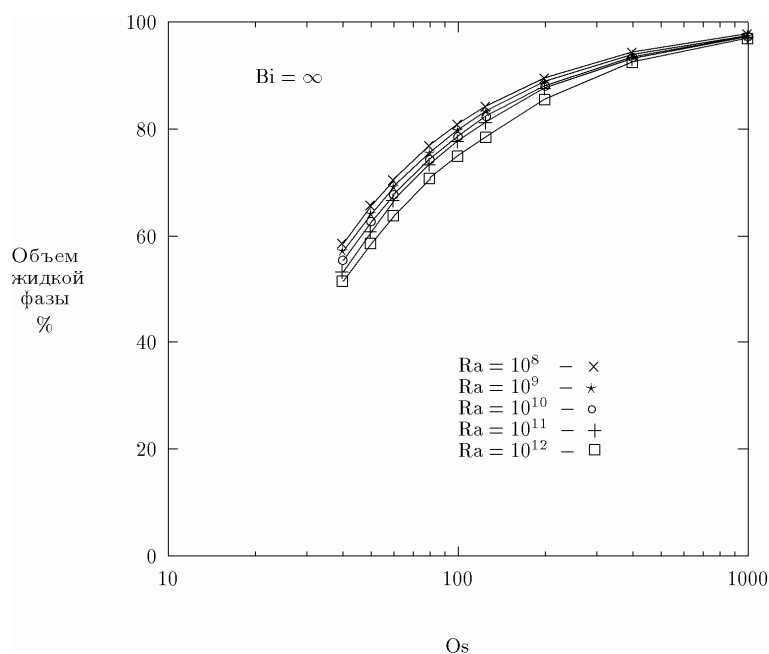


Рис. 2. Объем жидкой фазы в процентах

Как показывают результаты расчетов, малым значениям числа Остроградского ($16 < Os < 40$) соответствуют большие объемы твердой фазы. Поэтому режим теплопередачи в указанной области носит преимущественно теплопроводный характер. В то же время, при значениях числа Остроградского выше 1000 определяющее значение в характере режима теплопередачи начинают играть конвективные процессы. В рамках моделирования естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями наибольший интерес для исследования представляет область со смешанным кондуктивно-конвективным режимом теплопередачи. Эта область определяется

диапазоном изменения числа Остроградского от 40 до 1000, и характеризуется сильно нелинейным изменением объемов твердой фазы. Влияние числа Релея на изменение соотношения твердого и жидкого в рассматриваемой области не является столь существенным, как влияние числа Остроградского. Тем не менее, необходимо отметить тенденцию увеличения доли твердой фазы с ростом числа Релея в диапазоне изменения $40 \leq Os \leq 1000$.

Поскольку интенсивность теплопередачи во всей области определяется, главным образом, средними тепловыми потоками, проходящими на границу области, было про-

ведено исследование последних при варьировании числа Остроградского.

На рисунке 3 показано распределение средних безразмерных тепловых потоков,

$Q = \frac{1}{l} \int_l \frac{\partial u}{\partial n} dl$, на верхнюю, боковую и нижнюю границы рассматриваемой области.

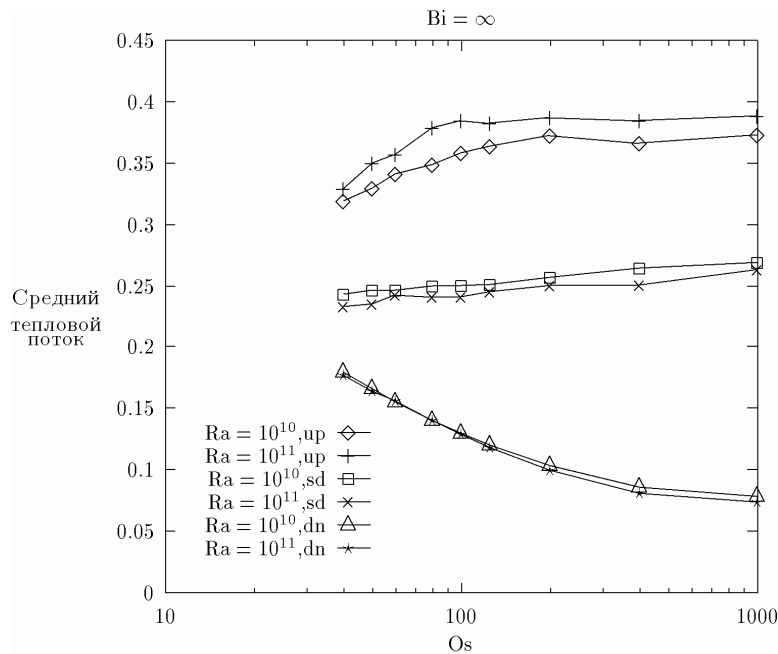


Рис. 3. Средние тепловые потоки на верхней, боковой и нижней границах рассматриваемой области для чисел Релея $Ra = 10^{10}, 10^{11}$

Как видно из этого рисунка, значения среднего теплового потока на границу области с увеличением числа Остроградского от 80 до 1000 для различных значений числа Релея практически не меняются. С уменьшением числа Остроградского от 80 до 40 доля среднего теплового потока стремится к 0.25, что соответствует предельному кондуктивному режиму теплопередачи. Следовательно, можно предположить, что интенсивность выноса тепла к границам области определяется, в основном, температурой среды, а именно, отношением разностей средней температуры в жидкой фазе и температуры фазового перехода к средней температуре всей системы и температуры на границе области.

Дальнейшее исследование интенсивности теплопередачи в рассматриваемой области было сведено к оценке влияния числа Остроградского на соотношение интенсивности выноса тепла на границу твердой и жидкой фаз к интенсивности теплопередачи во всей области. В силу того, что изменения среднего теплового потока в области не значительны по сравнению с изменениями температуры в ней, исследуемое соотношение, с учетом равенства нулю безразмерной температуры на границе области, можно записать в виде: $\zeta = (u_\ell - Os^{-1})/u_{av}$. На рисунке 4 представлены графики изменения ζ в зависимости от числа Остроградского для различных значений числа Релея.

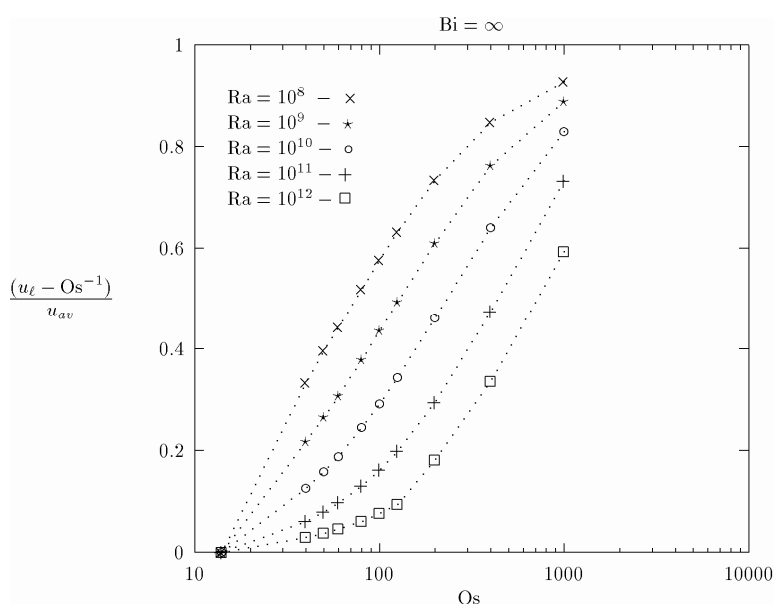


Рис. 4. Соотношение интенсивностей выноса тепла на границу раздела фаз к теплопередаче во всей области

Кривые $\zeta(Os)$ выходят из одной точки, соответствующей состоянию перехода системы от чисто теплопроводного режима к смешанному кондуктивно-конвективному. Продвижение по диапазону изменения числа Остроградского в сторону увеличения Os приводит к возрастанию величины ζ от нуля до единицы. При наличии корок, что определяется малыми значениями числа Остроградского, интенсивность выноса тепла в жидкой фазе всегда выше интенсивности во всей системе. Когда же доля твердой фазы стремится к нулю, происходит выравнивание интенсивностей выноса тепла на границу раздела фаз и на границу всей области. Равенство величины $\zeta \approx 0.5$ соответствует двукратному превышению интенсивности выноса тепла в жидкой фазе в сравнении с интенсивностью теплопередачи на границу области. С уменьшением величины ζ от 0.5 до 0 интенсивность отвода тепла от жидкой фазы к твердой начинает существенно, в 2 и более раз, превосходить интенсивность теплопередачи всей системы. В этом случае важную роль начинают играть кондуктивные механизмы теплопередачи через корку, что в свою очередь приводит к уменьшению интенсивности отвода тепла на границу области. Так, например, зная, что интенсивность теплопередачи в жидкой фазе превосходит интенсивность теплопередачи всей системы в

5 раз, т.е. $\zeta=0.2$, с помощью рисунка 4 можно указать соответствующий этим условиям диапазон изменения чисел Остроградского. Для Релеев, изменяющихся от 10^8 до 10^{12} , величина ζ принимает значение 0.2 в диапазоне чисел Остроградского от 28 до 250. Указанный диапазон изменения чисел Остроградского характеризуется значительными объемами твердой фазы. На это косвенно указывает рис.2, где показано изменение объемов жидкой фазы, которая в сумме с твердой фазой составляет 100 процентов. Таким образом, исследование интенсивности теплопередачи в такой области требует учета согласованного кондуктивно-конвективного режима теплопередачи. С увеличением числа Остроградского доля твердой фазы уменьшается до нуля, в результате чего происходит выравнивание интенсивностей выноса тепла к границам раздела фаз и на границу всей системы. Полное совпадение интенсивностей выноса тепла, т.е. $\zeta=1$ достигается при бесконечно больших числах Остроградского $\gg 10^4$. Гладкость приводимых кривых позволяет проэкстраполировать указанные зависимости на случай более высоких значений числа Релея ($10^{12} < Ra \leq 10^{14}$). Необходимо также отметить различие в тенденциях роста величины ζ для малых и больших чисел Релея. Так, при малых значениях числа Релея ($Ra \leq 10^{10}$) вначале

наблюдается стремительный рост величины (в диапазоне изменения числа Остроградского $16 < Os < 200$). Как было показано ранее на рисунке 2, в указанном диапазоне изменения Os наблюдается сильно нелинейное возрастание объемов жидкой фазы, а, следовательно, сокращение объемов корок в области. Причем если для $Os \approx 16$ вся область заполнена твердой фазой, то при $Os = 200$ корки занимают только $\approx 10\%$ всей области. В данном случае рост величины ζ характеризует увеличение интенсивности выноса на границу области в сравнении с передачей тепла к коркам. Дальнейшее увеличение числа Остроградского ведет к снижению темпов роста величины ζ , а при значениях $Os > 400$ наблюдается стремление кривых к выполаживанию. Подобные тенденции объясняются выравниванием выноса тепла к твердой фазе и границам области в связи с практически полным отсутствием корок. Последнее обстоятельство подтверждается и изменением объемов жидкой фазы в рассматриваемой области, так в диапазоне $200 < Os \leq 1000$

практически вся область заполнена жидкой фазой. Для чисел Релея $> 10^{10}$ в диапазоне изменения числа Остроградского $16 < Os \leq 100$ темпы роста величины ζ малы, а при дальнейшем увеличении числа Остроградского они резко увеличиваются. Причем, наблюдается смещение начало пологого участка кривой для чисел Релея выше 10^{10} в диапазоне изменения числа Остроградского $Os > 1000$.

Поскольку без рассмотрения поведения температурных характеристик процесса естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями картина происходящего в области была бы неполной, проводилось исследование влияния числа Остроградского на отношение средней безразмерной температуры рассматриваемой области к безразмерной температуре фазового перехода, u_{av}/Os^{-1} . Семейство кривых, описывающих влияние числа Остроградского на указанную величину при фиксированных значениях числа Релея, представлено на рисунке 5.

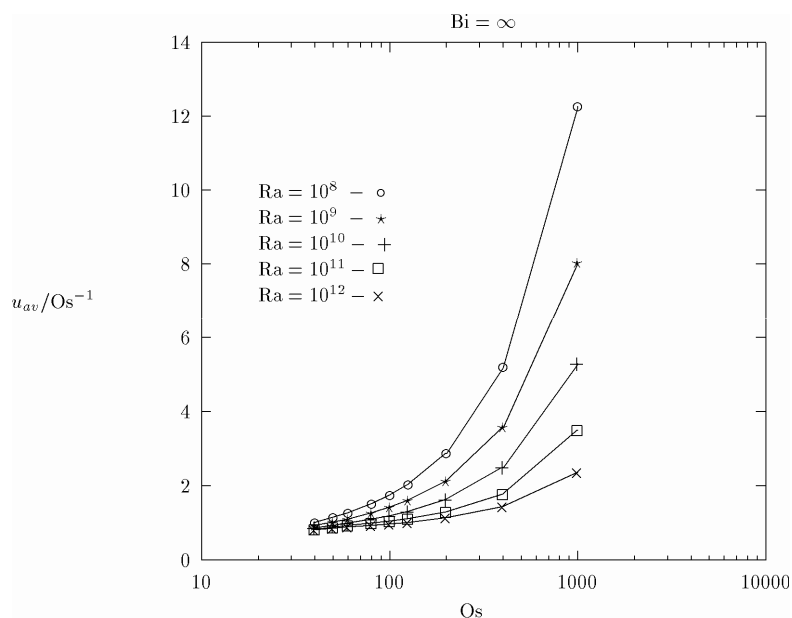


Рис. 5. Изменение величин u_{av}/Os^{-1} в зависимости от числа Остроградского

С продвижением по диапазону изменения числа Остроградского в сторону уменьшения Os наблюдается тенденция кривых к сгущению. Как уже отмечалось ранее, доля твердой фазы возрастает с уменьшением значения числа Остроградского, что и является объяснением указанного поведения

кривых. С увеличением числа Остроградского доля жидкости в рассматриваемой области увеличивается, и средняя температура области начинает значительно превосходить температуру фазового перехода. Причем, указанная тенденция усиливается с уменьшением числа Релея. Так, если для чисел

Релея выше 10^8 и не превосходящих 10^{10} исследуемая величина принимает значения от 12 до 5, соответственно, то для Релея 10^{11} , 10^{12} отношение средней температуры области к температуре фазового перехода не превосходит 3.5 и 2.2. Таким образом, отношение средней температуры расплава к температуре фазового перехода стремится к единице при увеличении числа Релея, что соот-

ветствует тенденции изменения средней температуры по закону близкому к $1/Os$.

Проводилось исследование влияния числа Остроградского на изменение среднего числа Нуссельта на границах рассматриваемой области. На рисунках 6–8 представлено распределение средних чисел Нуссельта для различных значений числа Релея на верхней, боковой и нижней стенках, соответственно.

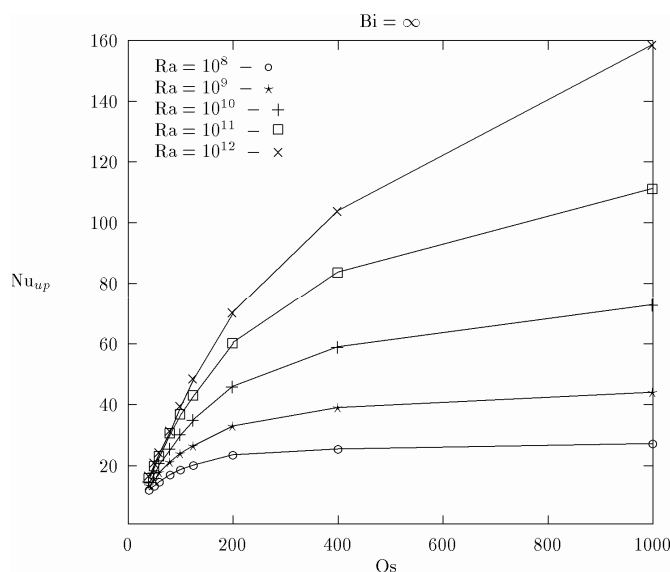


Рис. 6. Распределение среднего числа Нуссельта на верхней поверхности квадратной каверны с изотермическими стенками

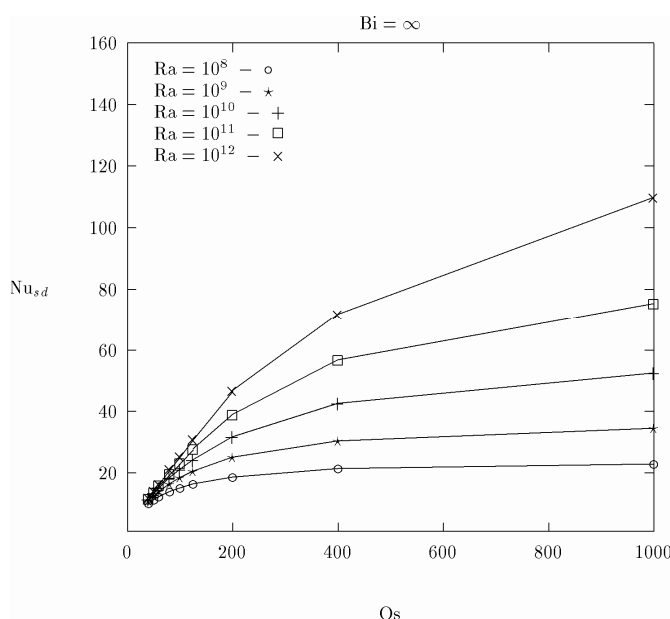


Рис. 7. Распределение среднего числа Нуссельта на боковой поверхности квадратной каверны с изотермическими стенками

При возрастании значения числа Остроградского наблюдается увеличение интен-

сивности теплопередачи на границу области. Причем, если первоначально этот процесс линеен, то с ростом значения числа

Остроградского наблюдается плавный переход к пологому участку. Начало указанного участка не может быть определено однозначно, поскольку с ростом числа Релея происходит смещение левой границы

пологого участка в сторону увеличения числа Остроградского. Это означает, что граница перехода в чисто конвективный режим смещается в сторону увеличения Os с ростом значения числа Релея.

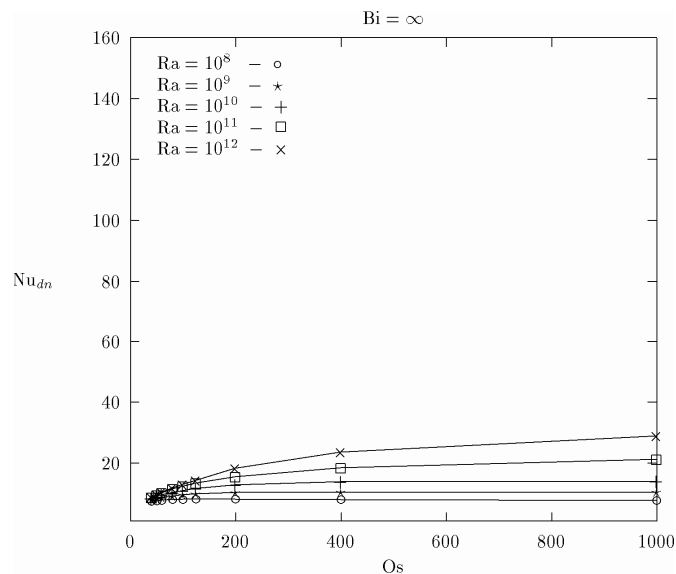


Рис. 8. Распределение среднего числа Нуссельта на нижней поверхности квадратной каверны с изотермическими стенками

Важно получить соотношение максимальной величины теплового потока в сравнении с ее средним значением. Поскольку практически половина всего выделяемого в объеме тепла отводится на боковые стенки рассматриваемой области, исследовалось отношение локального максимального числа Нуссельта на боковой поверхности к его среднему значению, (см. рис. 9).

от 16 до 400 наблюдается увеличение величины максимального безразмерного теплового потока по сравнению с его средним значением. С увеличением значения числа Остроградского выше 400 наблюдается сначала плавное, а затем более интенсивное снижение величины максимального локального числа Нуссельта на боковой поверхности и дальнейшее выполаживание этих кривых.

Результаты расчетов показывают, что в диапазоне изменения числа Остроградского

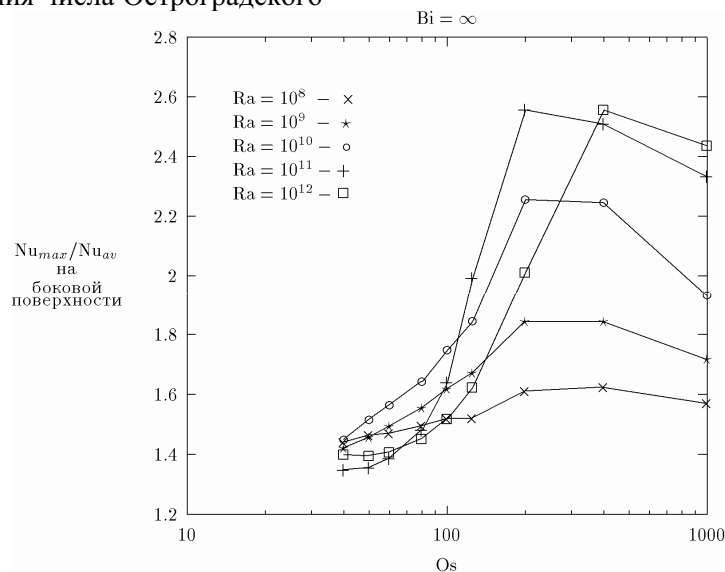


Рис. 9. Изменение величины Nu_{max}/Nu_{av} на боковой поверхности каверны

5. Корреляционные соотношения

В результате параметрических исследований естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями получен ряд корреляционных соотношений, которые имеют вид степенных зависимостей. Эти соотношения связывают основные безразмерные параметры задачи естественной конвекции, число Релея и число Остроградского с такими характеристиками процесса, как интенсивность теплопередачи (число Nu) на боковые, верхнюю и нижнюю грани рассматриваемой области. Получение корреляционных соотношений проводилось методом прямолинейной регрессии, когда с помощью метода наименьших квадратов определялись коэф-

фициенты уравнения прямой линии, связывающей $\log Nu$ с $\log Os$ или $\log Ra$. Для получения зависимостей вида $Nu = C Os^n$ диапазон изменения числа Остроградского был условно поделен на два участка. Такое разбиение диапазона было обусловлено предварительными результатами вычислений интенсивности теплопередачи (Nu) на различных границах во всем диапазоне изменения числа Остроградского. Как видно из рисунка 10, результаты численного эксперимента можно условно разделить на две группы, поскольку приближение одной линейной функцией во всем диапазоне не является удовлетворительным.

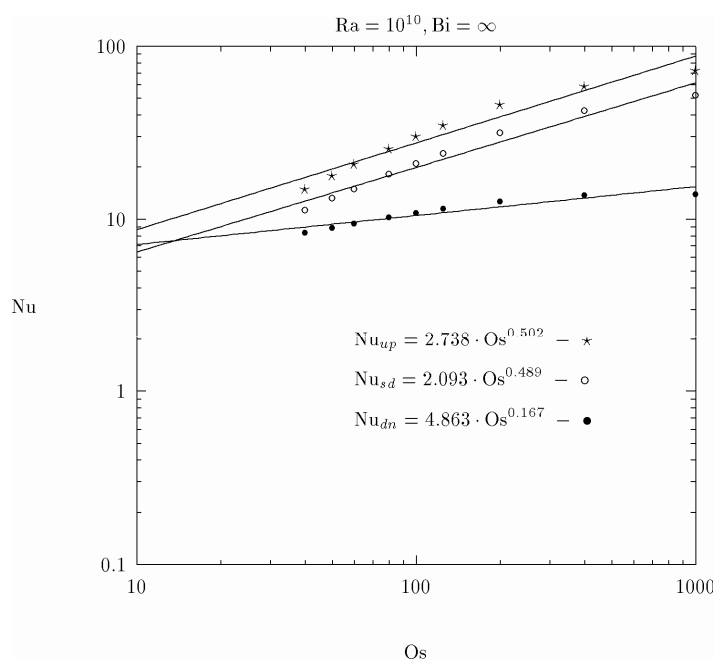


Рис. 10. Корреляционные зависимости вида $Nu = C \cdot Os^n$ для Релея $Ra = 10^{10}$

Первая группа результатов принадлежит диапазону изменения числа Остроградского от 40 до 200, включая 200, вторая — диапазону от 200 до 1000, что указывает на необходимость подбора кусочно-линейной зависимости.

Таким образом, для получения указанной зависимости было проведено разбиение

диапазона Os на следующие два участка. Первый участок включал в себя значения Os от 16 до 200. Ко второму участку были отнесены значения числа Остроградского > 200 и не превышающие 10^4 . Ниже в таблицах 2 и 3 приведены значения параметров Сип для следующих критериальных зависимостей: $Nu_{up}(Os)$, $Nu_{sd}(Os)$, $Nu_{dn}(Os)$.

Таблица 2. Критериальные зависимости $Nu(Os)$ при $Os \leq 200$

log Ra	$Nu = C \cdot Os^n$					
	up		sd		dn	
	C	n	C	n	C	n
8	2.036	0.475	2.436	0.391	5.568	0.079
9	1.460	0.602	1.754	0.505	4.449	0.162
10	1.013	0.731	1.352	0.593	3.479	0.246
11	0.757	0.836	1.045	0.671	2.769	0.322
12	0.708	0.864	0.860	0.735	2.341	0.373

Таблица 3. Критериальные зависимости $Nu(Os)$ при $Os > 200$

log Ra	$Nu = C \cdot Os^n$					
	up		sd		dn	
	C	n	C	n	C	n
8	20.590	0.038	16.880	0.041	7.323	0.016
9	28.123	0.059	21.194	0.064	7.684	0.047
10	38.154	0.079	28.271	0.076	13.079	0.009
11	44.709	0.116	28.442	0.127	14.618	0.041
12	36.069	0.194	25.197	0.192	17.048	0.063

Графики степенных зависимостей $Nu(Os)$ для различных значений числа Релея из диапазона $10^8 \leq Ra \leq 10^{12}$ представлены на рисунках 11–15.

Необходимо отметить, что с ростом числа Релея происходит изменение границ выде-

ленных нами диапазонов. Так, если для $Ra < 10^{10}$ весь диапазон чисел Остроградского поделен на два участка значением $Os = 200$, то для $Ra = 10^{11}$ это значение равно 400, а для $Ra = 10^{12}$ — $Os \approx 500$.

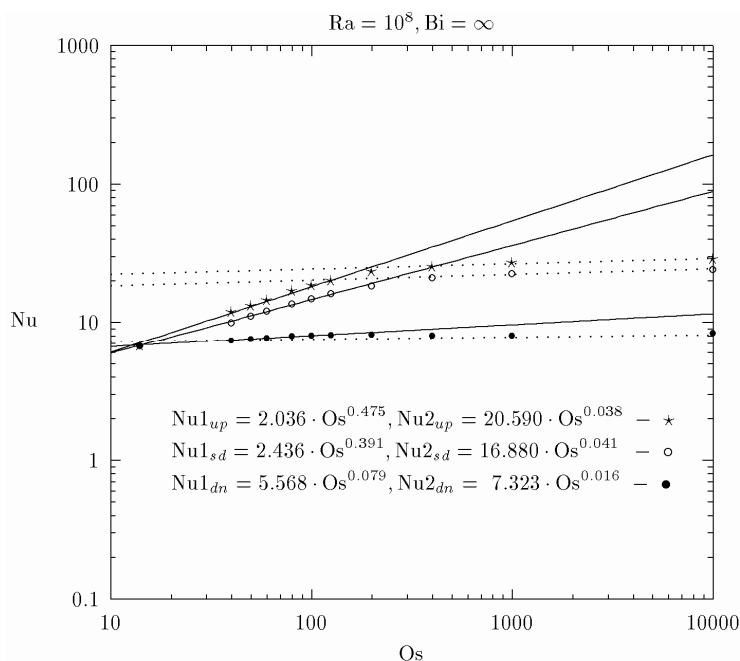


Рис. 11. Корреляционные зависимости вида $Nu = C \cdot Os^n$ для Релея $Ra = 10^8$

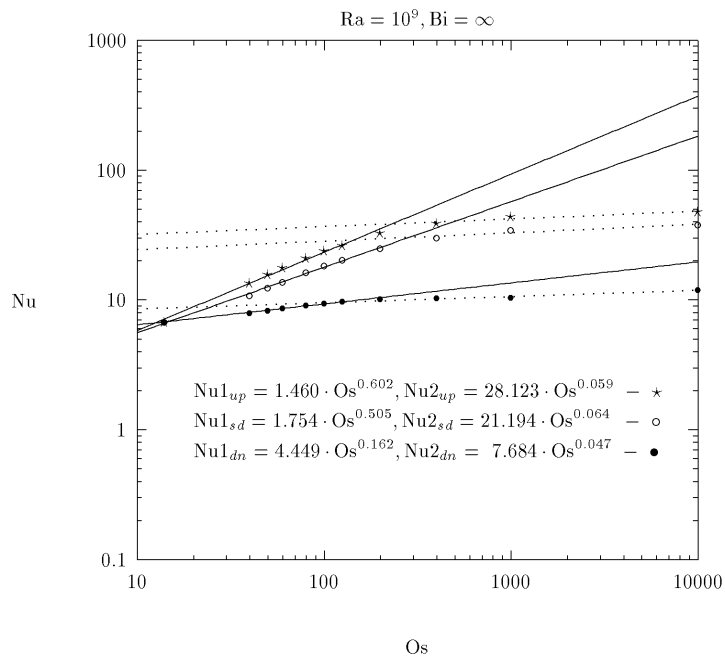


Рис. 12. Корреляционные зависимости вида $Nu = C \cdot Os^n$ для Рейля $Ra = 10^9$

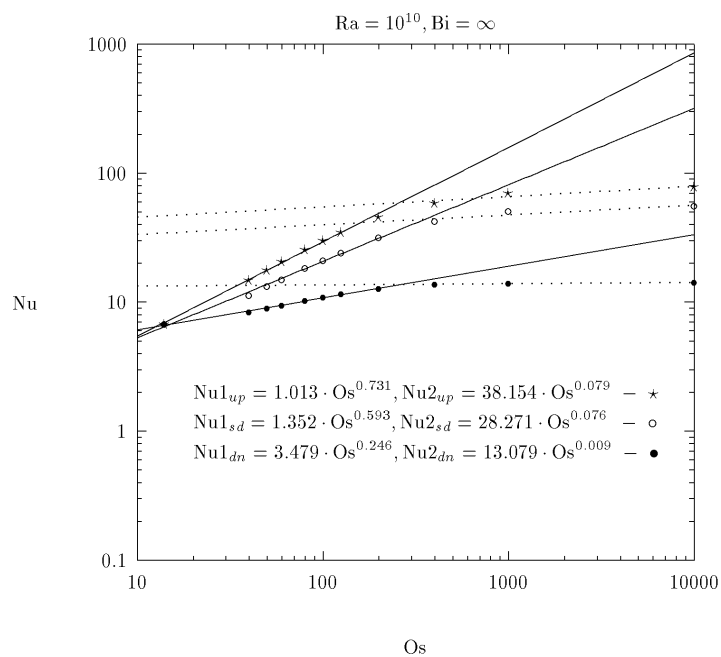


Рис. 13. Корреляционные зависимости вида $Nu = C \cdot Os^n$ для Рейля $Ra = 10^{10}$

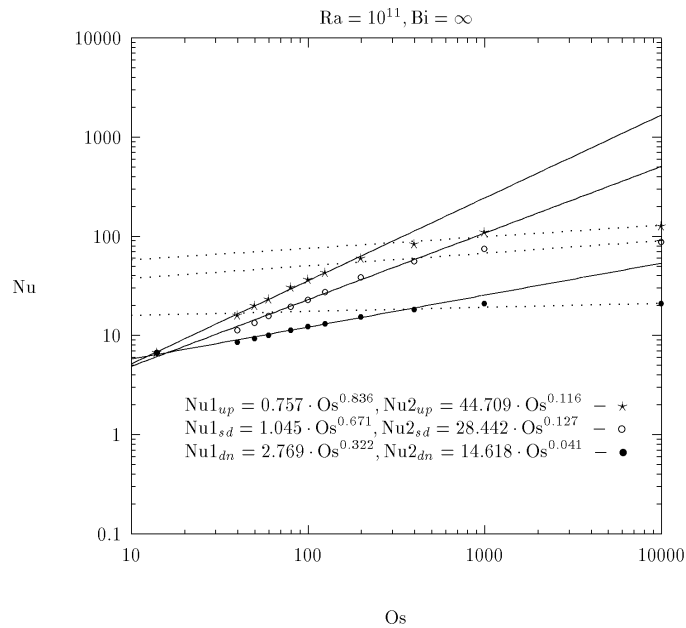


Рис. 14. Корреляционные зависимости вида $Nu = C \cdot Os^n$ для Релея $Ra = 10^{11}$

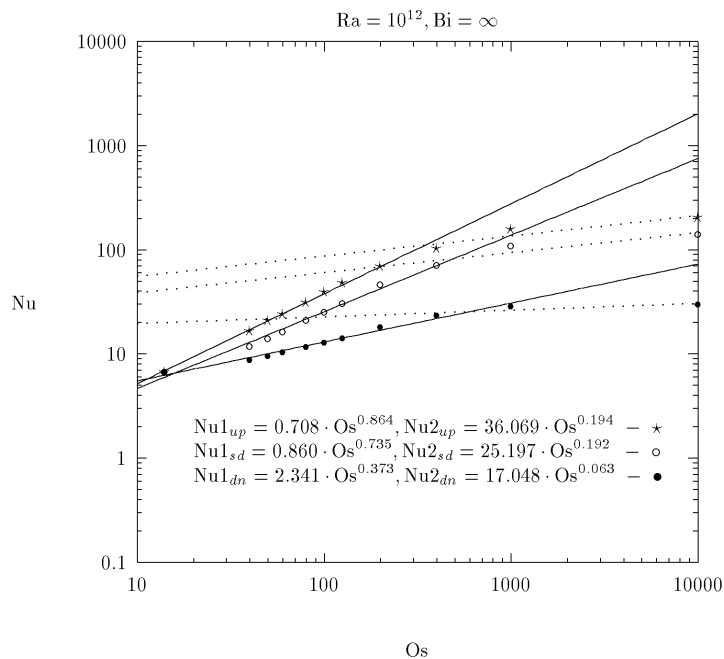


Рис. 15. Корреляционные зависимости вида $Nu = C \cdot Os^n$ для Релея $Ra = 10^{12}$

Зависимости вида $Nu = C Ra^n$ были получены во всем диапазоне чисел Релея. В таблице 4 приводятся значения параметров C и n для критериальных зависимостей

$Nu_{up}(Ra)$, $Nu_{sd}(Ra)$, $Nu_{dn}(Ra)$ для чисел Остроградского, соответствующих реальным условиям, а именно $Os = 1000, 400$ и 200 .

Таблица 4. Критериальные зависимости Nu(Ra)

Os	Nu = C · Ra ⁿ					
	up		sd		dn	
	C	n	C	n	C	n
1000	0.800	0.193	0.990	0.170	0.587	0.140
400	1.544	0.155	1.920	0.130	0.921	0.117
200	2.665	0.121	3.120	0.090	1.693	0.086

Графики степенных зависимостей Nu(Ra) представлены на рисунках 16–18. Для сравнения на рисунках приводятся графики

корреляционных зависимостей, полученные Штейнбернером [3] для чисел Остроградского $Os \gg 10^4$

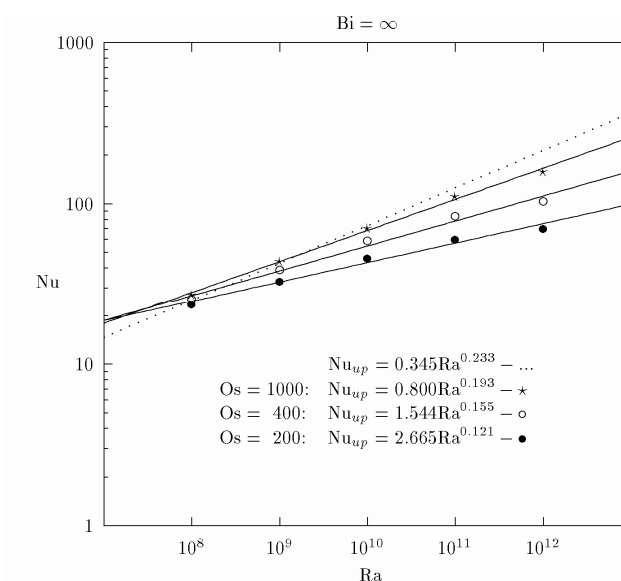


Рис. 16. Корреляционные зависимости вида $Nu_{up} = C \cdot Ra^n$, $Bi = \infty$

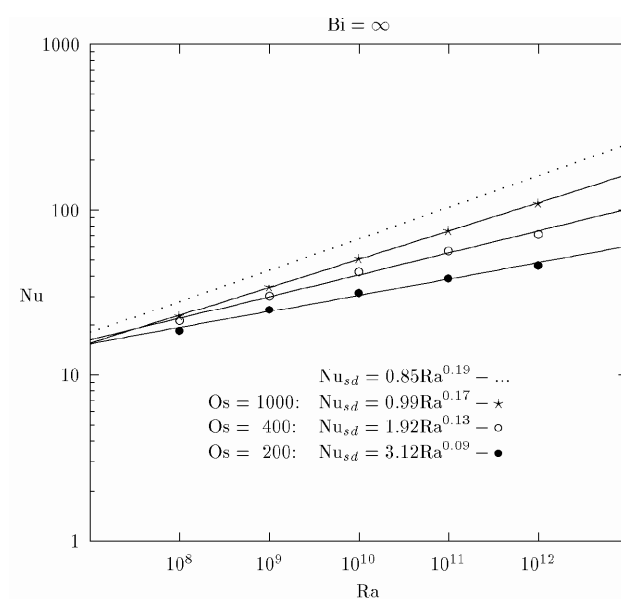


Рис. 17. Корреляционные зависимости вида $Nu_{sd} = C \cdot Ra^n$, $Bi = \infty$

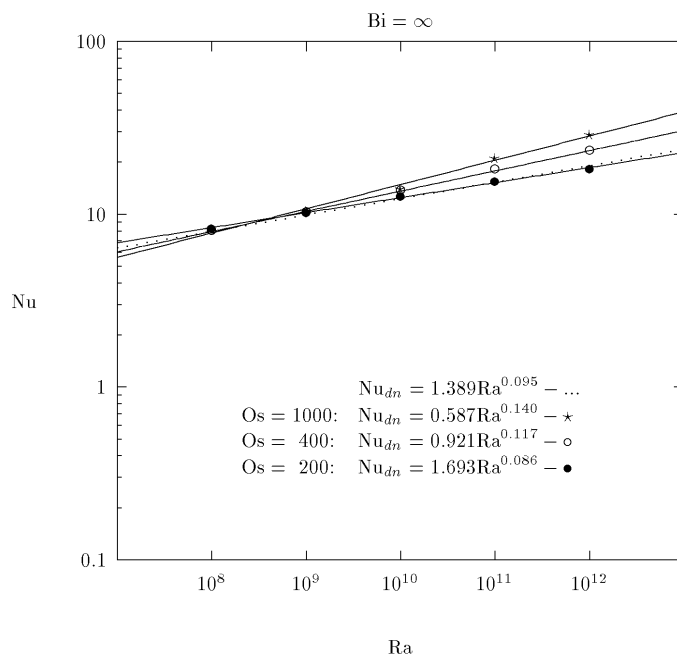


Рис. 18. Корреляционные зависимости вида $Nu_{dn} = C \cdot Ra^n$, $Bi = \infty$

6. Заключение

В результате параметрических численных исследований основных закономерностей тепло- и массопереноса тепловыделяющей жидкости с учетом фазовых превращений в квадратной камере с изотермическими границами можно заключить следующее.

1. Получены графики изменения объемов твердой и жидкой фаз в зависимости от чисел Остроградского и Релея и показано, что в диапазоне чисел Остроградского от 40 до 1000 наблюдается сильное изменение объема твердой фазы, тогда как для чисел Релея $10^8 \leq Ra \leq 10^{12}$ при фиксированном числе Остроградского изменение объемов незначительно.
2. Обнаружено, что в диапазоне чисел Остроградского больше 80 средние тепловые потоки на боковые грани изменяются незначительно, в то время как средняя температура, во всей области сильно зависит от числа Остроградского в этом же диапазоне. Кроме того, при числах Релея больше 10^{12} существует тенденция изменения средней температуры во всей области по закону $1/Os$.
3. Получено семейство кривых $\zeta = (u_\ell - Os^{-1})/u_{av}$ в диапазоне чисел Остроградского от 40 до 1000 и для Релеев $10^8 \leq Ra \leq 10^{12}$, которое позволяет указать диапазон безразмерных параметров для заданного соотношения интенсивностей теплопередачи и, наоборот, по заданному диапазону безразмерных параметров определить величину интенсивности теплопередачи.

4. Гладкость полученных кривых $\zeta(Os, Ra)$ позволяет провести экстраполяцию величины ζ на область более высоких чисел Релея в выбранном диапазоне чисел Остроградского.
5. Для задачи естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в квадратной камере с изотермическими граничными условиями были получены графики зависимостей средних значений числа Нуссельта на соответствующие грани рассматриваемой области. Было показано, что отношение максимального локального Нуссельта к его среднему значению на боковой поверхности в исследуемом диапазоне безразмерных параметров имеет достаточно явно выраженный максимум при значении $Os \approx 200$.
6. Были получены новые корреляционные зависимости $Nu(Os)$ в виде $Nu = C \cdot Os^n$, которые могут оказаться важными при разработке корреляционных точечных моделей удержания расплава топливосодержащих масс.
7. Проведенные исследования позволяют сделать вывод о необходимости рассмотрения согласованной задачи тепло- и массообмена с учетом фазовых превращений при моделировании задачи конвекции тепловыделяющей жидкости с учетом процессов плавления и замерзания в выбранном диапазоне безразмерных параметров.

Литература

1. Kelkar K.M., Schmidt R C and Patankar S.V., Numerical analysis of laminar natural convection of an internally heated fluid in a hemispherical cavity, Proceedings, International Heat Transfer Conference, San Diego, 1991, pp.355-364.
2. Kulacki F.A. and Emara A.A., Steady and transient convection in a fluid layer with uniform volumetric energy sources, J. Fluid Meek., 1977, Vol.83, pt.2, pp.375-395.
3. Mayinger F.X., Jahn M., Reineke H.H. and Steinbrenne V., Examination of Thermohydraulic Processes and Heat Transfer in a Core Melt, Federal Ministry for Research and Technology, Final Report BMFT RS 48/1, Institut fur Verfahrenstechnik der T.U., Hanover FRG, (in German), 1976
4. Kulacki E.A., Review and Evaluation of Examination of Thermohydraulic Processes and Heat Transfer in a Core Melt', by Mayinger, Jahn, Reineke, and Steinbrenner, Letter Report prepared for U.S.N.R.C. under contract AT(49-24)-0149, Mai.31, 1976.
5. Steinbrenner U. and Reineke H.H., Turbulent Bouyancy Convection Heat Transfer with Internal Heat Sources, Proceeding». 6th Int. Heat Transfer Conf, Paper NC-21, Toronto(Canada), 1978, Vol.2, pp.305-310.
6. Mayinger F.X., Fritz P., Reineke H.H. and tt. all, Theoretical and Experimental Research on the Behavior of a Core Melt on Reactor Containment and on the Basement Concrete, Bunesministerium fuer Foischung und Technologie. FT-FB (RS 166-79-05), Bonn FRG, (in German), 1980.
7. A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich, O.P. Iliev and A.G. Churbanov, Numerical simulation of convective/diffusion phase change problems - a review, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 36, No. 17, pp. 4095-4106, 1993.
8. Вабищевич П.Н., Метод фиктивных областей в задачах математической физики, Москва, Из-во МГУ, 1991.

9. Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В. и Чурбанов А.Г., Численное моделирование конвективных течений в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура", ИММ РАН, Препринт No. 28, Москва, 1993.
10. Lee J.-H. and Golstein R.J., An experimental study on natural convection heat transfer in an inclined square enclosure containing internal energy sources, ASME J, Heat Transfer, 1988, Vol 110, pp 345-349.
11. Jahn M. and Reineke H.H., Free convection heat transfer with internal heat sources, calculations and measurements, Proceedings. 5th Int. Heat Transfer Conf., Tokyo(Japan), 1974, pp.74-78.
12. May H.-O., A numerical study on natural convection in an inclined square enclosure containing internal heat sources, Int. J. Heat Mass Transfer, 1991, Vol.34, pp.919-928.
13. Chudanov V.V., Churbanov A.G., Stnzhov V.F. and Vabischevich P.N., Current Status and Validation of RASPLAV Code, Proceedings, 21st Water Reactor Safety Meeting, Washington(USA),
14. Bolshov L.A., Arutyunyan R.V., Chudanov V.V., Aksenova A.E. and et al, Numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in nuclear reactor safety problems, Proceedings, International Topical Meeting on Nuclear Thermal Hydraulics, Operations and Safety, Taipei(Taiwan), 1994.
15. A G. Churbanov, P N. Vabishchevich, V V. Chudanov, and V.F Strizhov, A numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in rectangular enclosures, Int. 3. Heat Mass Transfer, Vol. 37, No 18, pp. 2969-2984, 1994.
16. Voller V. and Swaminathan C, Fixed grid solution of phase change problems, J. of Theoretical and Applied Mechanics, Sofia, 1992, Year XXIII, Vol.2, pp.30-40.
17. Aksenova A.E., Chudanov V.V., Churbanov A.G. and et al., Molten Pool Behavior in the Lower Head, Proceedings, Workshop on Large Molten Pool Heat Transfer, France, 1994, pp.321-345.
18. Kayser G., The SCARABEE BF1 Experiment with a Molten UO2 Pool and its Interpretation, Proceedings, Workshop on Large Molten Pool Heat Transfer, France, 1994, 207-227.
19. Jones W.P. and Launder B.E., The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence, International Journal of Heat and Mass Transfer, 1972, Vol.15, pp.301-314.
20. Ince N.Z. and Launder B.E., On the Computational of Buoyancy-Driven Turbulent Flows in Rectangular Enclosures, International Journal of Heat and Fluid Flow, 1989, Vol.10, No.2, pp.110-117.
21. O'Brien J.E. and Hawks G.L., Thermal Analysis of a Reactor Lower Head with Core Relocation and External Boiling Heat Transfer. // Heat Transfer-Minneapolis, AIChE Symposium Series, 1991, Vol.97, No.283, pp.159-168.

Номенклатура

$v = (v_1, v_2)$ — вектор скорости

$Nu = -(grad u)$ — локальное число Нуссельта

p — нормализованное на плотность давление

$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ — число Прандтля

g — ускорение свободного падения

$Ra_q = \frac{\beta g q l^5}{\alpha \nu k}$ — модифицированное число Релея

u — отклонение температуры от равновесной

$$Ra_u = \frac{\beta g (u_l - u_w) l^3}{\alpha \nu} \text{ – число Релея}$$

ν – кинематическая вязкость

$$Os = \frac{q l^2}{k (u_l - u_w)} \text{ – число Остроградского}$$

β – коэффициент объемного расширения

$$Ste = \frac{\lambda}{c (u_s - u_l)} \text{ – число Стефана}$$

$e = (0, 1)$ – вектор, определяющий направление выталкивающей силы

$$Bi = \frac{hl}{k} \text{ – число Био}$$

q – мощность однородного теплового источника

δ – дельта-функция

λ – энтальпия фазового перехода

c – коэффициент теплоемкости

k – коэффициент теплопроводности

$$Asp = \frac{l}{x} \text{ – аспектное отношение}$$

$$Nu = \frac{1}{l} \int_l \frac{Nu}{u} dl \text{ – среднее число Нуссельта}$$

l – высота полости

$$u_{av} = \frac{1}{V} \int_V u dV \text{ – средняя температура}$$

x – ширина полости

h – коэффициент теплопередачи

u_l – температура фазового перехода

u_w – температура стенки

ρ – плотность

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \text{ – коэффициент температуропроводности}$$

$$Q = \frac{1}{l} \int_l Nu dl \text{ – средний тепловой поток}$$

Подиндексы

up – верхняя поверхность

sd – боковая поверхность

dn – нижняя граница

av – среднее значение

max – максимальное значение

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

А. Е. Аксенова, П. Н. Вабищевич, В. В. Чуданов, В. Ф. Стрижов

1. Введение

При моделировании гипотетических тяжелых аварий на АЭС с плавлением и разрушением активной зоны одним из важных сценариев является удержание расплавленных компонент активной зоны в корпусе реактора или в страховочном корпусе. При таком сценарии, как правило, предполагается идеальное охлаждение на боковой поверхности корпуса реактора или страховочного корпуса. Для учета теплосъема на верхней границе рассматриваются различные сценарии, которые включают в себя как залив водой на верхней границе, так и менее активные условия теплового излучения (и взаимное переизлучение) горячей поверхности кориума и разогретых конструкций реактора. При численном исследовании такой задачи многообразие граничных условий на верхней границе учитывается путем варьирования в соответствующем диапазоне основных безразмерных параметров, главным образом, числа Био. Использование подобного подхода позволяет вполне адекватно описывать основные тенденции поведения расплава тепловыделяющей жидкости, что является важным в силу достаточно большой неопределенности параметров при описании сценария тяжелой аварии.

Обычно проблема удержания расплава в корпусе реактора рассматривается в предположении гомогенности тепловыделяющего кориума [1]. Однако в действительности расплав кориума многокомпонентной активной зоны (UO_2 , ZrO_2 , Zr , Fe и т.д.) представляет собой смесь в достаточно больших объемах тяжелых оксидов UO_2 и более легких металлов Zr , Fe . Поэтому можно предположить, что в результате

продолжительной конвекции расплав может стратифицироваться на два слоя: тяжелых оксидов и легких металлов, находящихся в жидком состоянии. В этом случае распределение тепловых потоков в тепловыделяющем кориуме может существенно отличаться от распределения тепловых потоков в гомогенном тепловыделяющем расплаве кориума. Кроме того, на указанное распределение может оказывать влияние наличие или отсутствие корки на верхней границе. Так, в случае залива водой расплавленного кориума возможно формирование корки на верхней границе. Но поскольку в реакторном случае при высоких числах Релея $10^{13} \div 10^{15}$ тепловыделяющая жидкость находится в состоянии достаточно интенсивного перемешивания, можно предположить, что высокие скорости расплава кориума вблизи верхней границы не дадут сформироваться стабильной корке (даже при высоких числах Био). Поэтому при исследовании проблемы удержания расплава в корпусе реактора представляется важным рассматривать различные условия на верхней границе: в предположении отсутствия стабильной корки на верхней границе рассматривать условия проскальзывания на верхней границе, а при наличии корки — условия прилипания.

Не менее важной с точки зрения распределения тепловых нагрузок и удержания расплава кориума не только в корпусе реактора, но и в страховочном корпусе (который предполагается в конструкциях перспективных АЭС) является задача естественной конвекции тепловыделяющей жидкости при различных аспектных отношениях. Учитывая сделанные предположения, представля-

ется актуальным провести небольшую серию параметрических численных исследований с целью выявления некоторых особенностей естественной конвекции тепловыделяющей жидкости при следующих предположениях и допущениях:

- стратификация расплава кориума;
- условия прилипания или проскальзывания на верхней границе;
- различные аспектные отношения;
- различные режимы теплосъема на верхней границе (различные числа Био);

- $Ra = 10^{14}$, $Pr_{met} = 1$.
- Результаты расчетов представлены в виде таблиц и графиков;
- $Nu_{up}(Bi)$, $Nu_{sd}(Bi)$ для металлов и оксидов, $Nu_{dn}(Bi)$;
- температура в металлическом и оксидном слоях;
- профили температуры;
- поле температур и функции тока.

2. Математическая формулировка задачи

Рассматривается задача взаимодействия тепловыделяющего расплава с корпусом реактора с учетом процессов стратификации топлива. Предполагается, что расплав состоит из двух слоев. Верхний слой представлен металлами, нижний слой образован оксидами. Моделирование проводится для случая плоской геометрии.

Для решения вышеназванной задачи строится вычислительный алгоритм в переменных “функция тока, вихрь скорости и температура”. Система дифференциальных уравнений для описания процессов тепло- и массопереноса в расплавленном кориуме включает в себя уравнение тепло-

проводности и систему уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска для несжимаемой жидкости. Поскольку расплав состоит из двух слоев, для каждого слоя записывается своя система уравнений.

Так, для слоя металлов мы имеем систему уравнений вида:

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_\alpha^2} = \omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + v \text{ grad } \omega = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\alpha^2} + Gr_{met} \frac{\partial \Theta_{met}}{\partial x_1}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta_{met}}{\partial \tau} + v \text{ grad } \Theta_{met} = \frac{1}{Pr_{met}} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \Theta_{met}}{\partial x_\alpha^2} + 1 \right), \quad (3)$$

$$v = (v_1, v_2), \quad v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}.$$

А для слоя оксидов справедливы следующие соотношения:

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_\alpha^2} = \omega, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + v \text{ grad } \omega = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\alpha^2} + Gr_{ox} \frac{\partial \Theta_{ox}}{\partial x_1}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Theta_{ox}}{\partial \tau} + v \operatorname{grad} \Theta_{ox} = \frac{1}{\operatorname{Pr}_{ox}} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \Theta_{ox}}{\partial x_{\alpha}^2} + 1 \right), \quad (6)$$

$$v = (v_1, v_2), \quad v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}.$$

Число Грасгофа для системы уравнений (1–3) задается с помощью соотношения

$$Gr_{met} = \frac{\beta_{met} g H^5 q_{met}}{v_{met}^2 k_{met}}. \quad (7)$$

А для системы уравнений (4–6) число Грасгофа определяется с учетом выражения (7) как:

$$\begin{aligned} Gr_{ox} &= \frac{\beta_{ox} g H^5 q_{ox}}{v_{ox}^2 k_{ox}} = \\ &= \frac{\beta_{met} g H^5 q_{met}}{v_{met}^2 k_{met}} \frac{q_{ox}}{q_{met}} \frac{v_{met}^2 k_{met}}{v_{ox}^2 k_{ox}} \frac{\beta_{ox}}{\beta_{met}} = \\ &= Gr_{met} \frac{q_{ox}}{q_{met}} \frac{v_{met}^2 k_{met}}{v_{ox}^2 k_{ox}} \frac{\beta_{ox}}{\beta_{met}}. \end{aligned}$$

В свою очередь, число Прандтля в первом случае имеет вид

$$\Theta_{ox} = \frac{\Delta T k_{met}}{q_{met} H^2} \frac{q_{met}}{q_{ox}} \frac{k_{ox}}{k_{met}} = \Theta_{met} \frac{q_{met}}{q_{ox}} \frac{k_{ox}}{k_{met}}.$$

Таким образом, возможен переход к общей системе уравнений вида:

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_{\alpha}^2} = \omega, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + v \operatorname{grad} \omega = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_{\alpha}^2} + Gr \frac{\partial \Theta}{\partial x_1}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + v \operatorname{grad} \Theta = \frac{1}{\operatorname{Pr}} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_{\alpha}^2} + Q \right), \quad (10)$$

$$v = (v_1, v_2), \quad v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}.$$

где числа Прандтля, Грасгофа и источник определяются с помощью соотношений:

$$\operatorname{Pr} = \begin{cases} \operatorname{Pr}_{met} & \text{для слоя металлов,} \\ \operatorname{Pr}_{met} \frac{v_{ox}}{v_{met}} \frac{\alpha_{met}}{\alpha_{ox}} & \text{для слоя оксидов,} \end{cases}$$

$$\operatorname{Pr}_{met} = \frac{v_{met}}{\alpha_{met}},$$

а во втором случае

$$\operatorname{Pr}_{ox} = \operatorname{Pr}_{met} \frac{v_{ox}}{v_{met}} \frac{\alpha_{met}}{\alpha_{ox}}.$$

Безразмерная температура для слоя металлов определяется с помощью соотношения

$$\Theta_{met} = \frac{\Delta T k_{met}}{q_{met} H^2},$$

а для оксидного слоя

$$\Theta_{ox} = \frac{\Delta T k_{ox}}{q_{ox} H^2},$$

учитывая соотношение для Θ_{met}

$$Gr = \begin{cases} Gr_{met} & \text{для слоя металлов,} \\ Gr_{met} \frac{q_{ox}}{q_{met}} \frac{v_{met}^2}{v_{ox}^2} \frac{k_{met}}{k_{ox}} \frac{\beta_{ox}}{\beta_{met}} & \text{для слоя оксидов.} \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} 1 & \text{для слоя металлов,} \\ \frac{1}{\frac{q_{met}}{q_{ox}} \frac{k_{ox}}{k_{ox}}} & \text{для слоя оксидов.} \end{cases}$$

Безразмерная температура $\Theta = \Theta_{met}$.

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0,$$

Система уравнений (8–10) дополняется соответствующими граничными и начальными условиями. В качестве граничных условий для температуры

— на верхней границе задаются условия конвективного теплообмена вида

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} + Bi \Theta = 0,$$

— на внешних границах (боковые и нижняя стенки) задаются изотермические граничные условия: температура плавления металла и температура плавления оксида, соответственно.

В качестве граничных условий для скорости

— на боковой границе определены условия прилипания и непротекания

— на верхней границе были рассмотрены два типа граничных условий:

1) прилипания и непротекания;

2) проскальзывания и непротекания;

— на границе между слоями задаются условия непротекания

$$\psi = 0,$$

и непрерывности тензора касательных напряжений, которое соответствует следующему соотношению

$$\mu_{met} \omega_{met} = \mu_{ox} \omega_{ox}. \quad (11)$$

Начальное условие для скорости и температуры нулевые.

3. Метод решения

Для нахождения приближенного решения задачи (8–10) с соответствующими граничными условиями используется вариант метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам [2]. Реализация разностной схемы расщепления [3] основана на решении сеточных эллиптических задач на каждом шаге по времени. Подобный подход хорошо зарекомендовал себя при решении задач свободной конвекции тепловыделяющей жидкости, что подтверждает совпадение полученных резуль-

татов с экспериментальным [4, 5] и численно-экспериментальным [6, 7] исследованиями для различных граничных условий и геометрий расчетной области. Результаты тестирования вычислительного алгоритма для задачи свободной конвекции тепловыделяющей жидкости опубликованы в работах [8, 9]. Кроме того, некоторые из результатов, касающиеся исследования периодической естественной конвекции в замкнутой полости прямоугольного сечения, представлены в статье [10].

4. Результаты численного моделирования

В рамках моделирования теплового взаимодействия тепловыделяющего стратифицированного расплава с нижней частью корпуса реактора была проведена серия расчетов для различных значений числа Bi : 100, 400, 1000, 4000 при аспектном отношении равном $H/R = 1$. Кроме того, были выполнены расчеты для задачи с так называемым страховочным корпусом для тех же чисел Био при аспектном отношении $H/R = 0.5$.

Основные безразмерные параметры (Gr , Ra , Pr) для металлического и оксидного слоев задавались исходя из реальных свойств материалов [1].

Предполагалось, что расплав стратифицирован в отношении 1:3, т.е. 1/4 области занимает слой металлов, а 3/4 — слой оксидов, т.е. высота слоя оксидов составляет 0.75 высоты всей расчетной области.

Ниже представлены результаты расчетов для различных чисел Bi на сгущающейся сетке 161×161 для аспектного соотношения 1 и 0.5.

При обработке данных расчетов основное внимание уделялось долям теплового потока на боковые и верхнюю грани. Кроме того, рассчитывалась доля теплового потока

на границе между слоями, а также средняя температура в каждом слое. В таблицах 1–3 приводятся следующие важные безразмерные параметры, характеризующие полученное квазистационарное решение:

$\sum Nu_{met}$ — суммарное тепловыделение в металлическом слое,

$\sum Nu_{ox}$ — суммарное тепловыделение в оксидном слое,

Nu_{sdmet} — доля теплового потока на правой границе металлического слоя,

Nu_{sdox} — доля теплового потока на правой границе оксидного слоя,

Nu_{up} — доля теплового потока на верхней границе металлического слоя,

Nu_{dn} — доля теплового потока на нижней границе оксидного слоя,

Nu_{metox} — безразмерный тепловой поток на границе между металлическим и оксидным слоями.

Таблица 1.

Распределение остаточного тепловыделения по различным каналам потерь для аспектного отношения 1 с условиями прилипания для скорости на верхней границе							
Bi	$\sum Nu_{met}$	$\sum Nu_{ox}$	Nu_{sdmet}	Nu_{sdox}	Nu_{up}	Nu_{dn}	Nu_{metox}
100	0.032	0.557	0.24	0.09	0.115	≈0.14	0.31
400	0.032	0.557	0.21	0.088	0.149	≈0.14	0.32
1000	0.032	0.557	0.21	0.09	0.160	≈ 0.13	0.34
4000	0.032	0.557	0.21	0.085	0.165	≈ 0.13	0.34

Таблица 2.

Распределение остаточного тепловыделения по различным каналам потерь для аспектного отношения 1 с условиями проскальзывания для скорости на верхней границе							
Bi	$\sum Nu_{met}$	$\sum Nu_{ox}$	Nu_{sdmet}	Nu_{sdox}	Nu_{up}	Nu_{dn}	Nu_{metox}
100	0.032	0.557	0.24	0.098	0.110	≈ 0.14	0.32
400	0.032	0.557	0.23	0.095	0.130	≈ 0.14	0.33
1000	0.032	0.557	0.23	0.094	0.135	≈ 0.13	0.33
4000	0.032	0.557	0.23	0.094	0.143	≈ 0.12	0.35

Таблица 3.

Распределение остаточного тепловыделения по различным каналам потерь для аспектного отношения 0.5 с условиями прилипания для скорости на верхней границе							
Bi	$\sum Nu_{met}$	$\sum Nu_{ox}$	Nu_{sdmet}	Nu_{sdox}	Nu_{up}	Nu_{dn}	Nu_{metox}
100	0.065	1.114	0.29	0.106	0.289	≈ 0.46	0.57
400	0.065	1.114	0.28	0.089	0.372	≈ 0.44	0.60
1000	0.065	1.114	0.28	0.087	0.380	≈ 0.43	0.60
4000	0.065	1.114	0.28	0.085	0.400	≈ 0.42	0.62

В таблицах 4–6 приводятся значения средних температур в металлическом и оксидном слоях при различных числах Био. Здесь использованы следующие обозначения:

Θ_{met} — средняя безразмерная температура в слое металлов,

T_{met} — средняя размерная температура в слое металлов,

Θ_{ox} — средняя безразмерная температура в слое оксидов,

T_{ox} — средняя размерная температура в слое оксидов.

Размерная температура рассчитывалась исходя из предположения, что температура плавления металла ≈ 1800 К, а температура солидуса оксида ≈ 2200 К, $\Delta T = 400$ К, а отношение $qH^2/k \approx 4 \cdot 10^{-5}$.

Таблица 4.

Значения температуры в металлическом и оксидном слоях для различных чисел Био при аспектном отношении 1 и условии прилипания для скорости на верхней границе				
Bi	$\Theta_{met} \times 10^3$	T_{met}, K	$\Theta_{ox} \times 10^4$	T_{ox}, K
100	1.91	2564	2.55	2820
400	1.57	2428	2.43	2772
1000	1.41	2364	2.40	2760
4000	1.23	2292	2.30	2720

Таблица 5.

Значения температуры в металлическом и оксидном слоях для различных чисел Био при аспектном отношении 1 и условии проскальзывания для скорости на верхней границе				
Bi	$\Theta_{met} \times 10^3$	T_{met}, K	$\Theta_{ox} \times 10^4$	T_{ox}, K
100	1.43	2372	2.63	2852
400	1.26	2304	2.53	2812
1000	1.12	2248	2.41	2764
4000	1.01	2204	2.37	2748

Таблица 6.

Значения температуры в металлическом и оксидном слоях для различных чисел Био при аспектном отношении 0.5 и условии прилипания для скорости на верхней границе				
Bi	$\Theta_{пл} \times 10^3$	$T_{мет}, K$	$\Theta_{ок} \times 10^4$	$T_{ок}, K$
100	2.24	2696	2.57	2828
400	1.88	2552	2.51	2804
1000	1.70	2480	2.48	2792
4000	1.52	2408	2.33	2732

Рис. 1–4 демонстрируют структуру течения и температурное поле в виде эквидистантных линий тока и изотерм, соответственно. Рисунки 1, 2 соответствуют случаю $Bi = 4000$ и аспектному отношению $H/R = 1$ с условием проскальзывания для скорости на верхней границе. На рис. 3, 4 показаны изотермы и линии тока для того же значения числа Био, но при аспектном отношении равном 0.5 и с условиями прилипания для скорости на верхней границе.

Ниже на рисунках 5–8 представлено характерное поведение температуры в горизонтальном сечении в металлическом слое и вблизи боковой стенки корпуса при аспектных отношениях 1 и 0.5 соответственно.

На рис. 5 представлено характерное поведение температуры внутри металлического слоя. Как показывают результаты расчетов, на фоне достаточно большой осцилляции температуры наблюдается тенденция к возрастанию температуры от центра к боковой поверхности. Последнее обстоятельство может быть объяснено определяющим влиянием тяжелого и инертного слоя расплавленных оксидов на движение нижней части слоя расплавленных металлов; другими словами, нижние слои металлического расплава движутся в направлении движения жидкого слоя оксидов.

На рис. 6 показано распределение температуры вблизи боковой стенки корпуса (вдоль оси x_2) при $H/R = 1$. На графике наблюдается существенный перепад температуры связанный с переходом от металлического к оксидному слою.

Распределение температуры в горизонтальном сечении в металлическом слое при аспектном отношении 0.5 демонстрирует рисунок 7. Как и в случае аспектного отношения 1 (см. рис. 5), здесь сохраняется тенденция увеличения температуры от центра к

боковой поверхности, но эта тенденция менее выражена. Значения температуры при $H/R = 0.5$ значительно выше, чем для аспектного отношения 1, причем указанные значения сильно осциллируют. Последнее обстоятельство указывает на многовихревую структуру течения в металлическом слое.

Поведение температуры вблизи стенки при аспектном отношении 0.5 показано на рисунке 8. Профиль температуры в этом случае более гладкий, чем при аспектном отношении 1 в силу того, что температура в оксидном слое ниже, а в металлическом слое выше, чем для аспектного отношения 1.

На рис. 9 показано распределение чисел Нуссельта на верхней и нижней поверхностях в зависимости от числа Био для различных аспектных отношений $H/R = 0.5, 1$ и различных условий на верхней границе. Как показывают результаты расчетов, варьирование условий для скорости на верхней границе не оказывает существенного влияния на распределение нагрузок на боковой и верхней поверхностях практически для любого режима теплосъема на верхней границе (чисел Био). В то же время необходимо отметить существенное влияние аспектного отношения на распределение чисел Нуссельта на этих поверхностях, которое возрастает с увеличением числа Био. Так, при Био равном 100 разница в значениях чисел Нуссельта на верхней границе составляет около 15%, а для случая $Bi = 4000$ различие в значениях достигает и 30%. Распределение чисел Нуссельта на нижней поверхности сохраняется примерно постоянным независимо от варьирования режимов теплосъема и условий для скорости на верхней границе. Различие в значениях чисел Нуссельта для аспектных отношений 1 и 0.5 составляет примерно 30% независимо от числа Био.

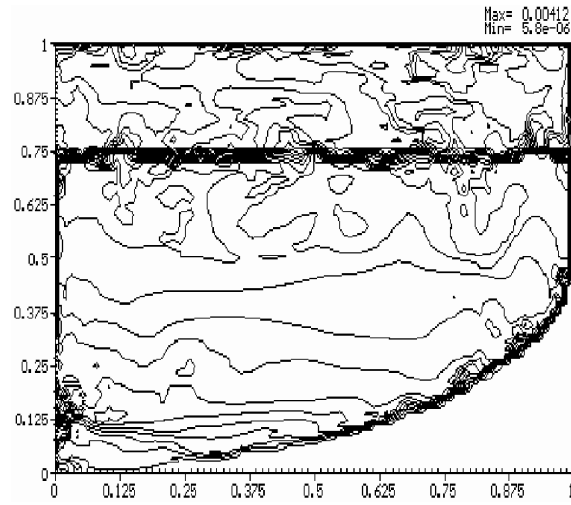


Рис.1. Изотермы для аспектного отношения $H/R = 1$ и $Bi = 4000$

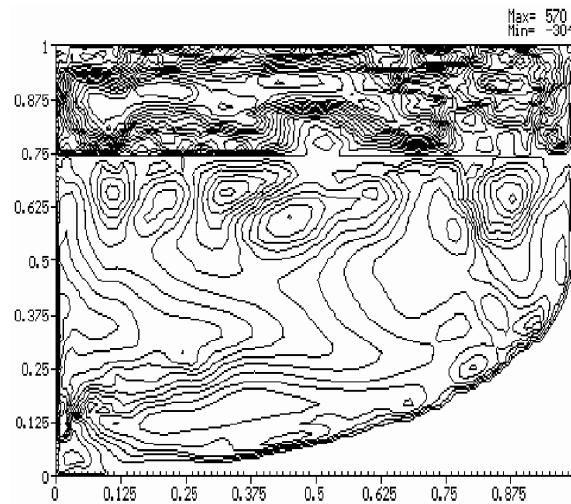


Рис.2. Функции тока для аспектного отношения $H/R = 1$ и $Bi = 4000$

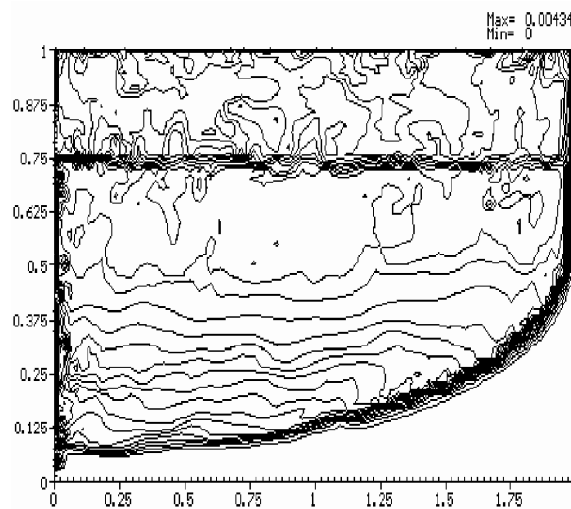


Рис.3. Изотермы для аспектного отношения $H/R = 0.5$ и $Bi = 4000$

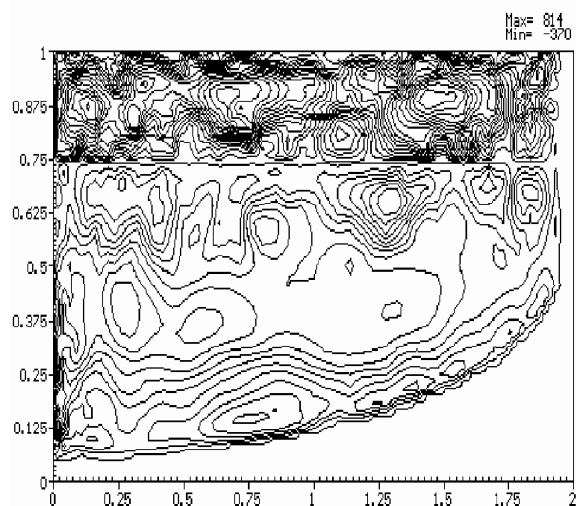


Рис.4. Функции тока для аспектного отношения $H/R = 0.5$ и $Bi = 4000$

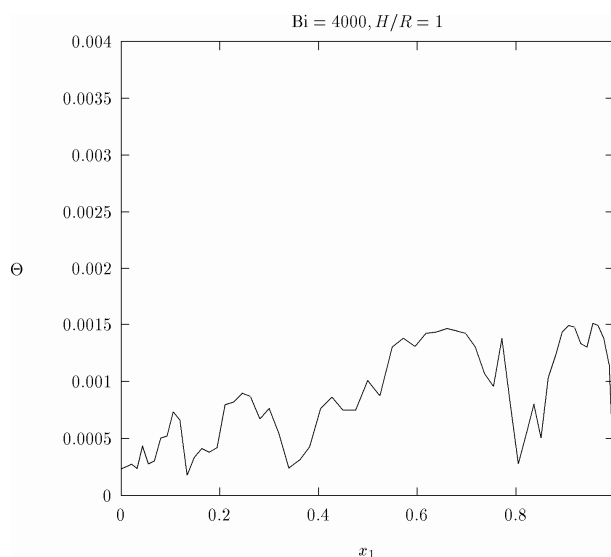


Рис.5. Распределение температуры в горизонтальном сечении в металлическом слое при $H/R = 1$ и $Bi = 4000$

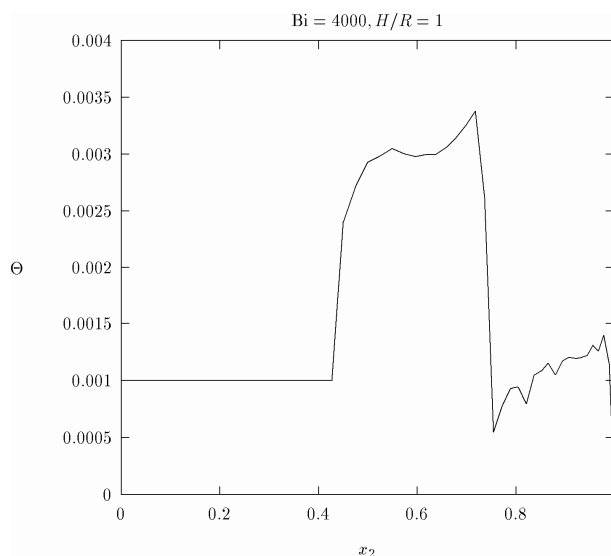


Рис.6. Распределение температуры вдоль оси X_2 вблизи боковой стенки при $H/R = 1$ и $Bi = 4000$

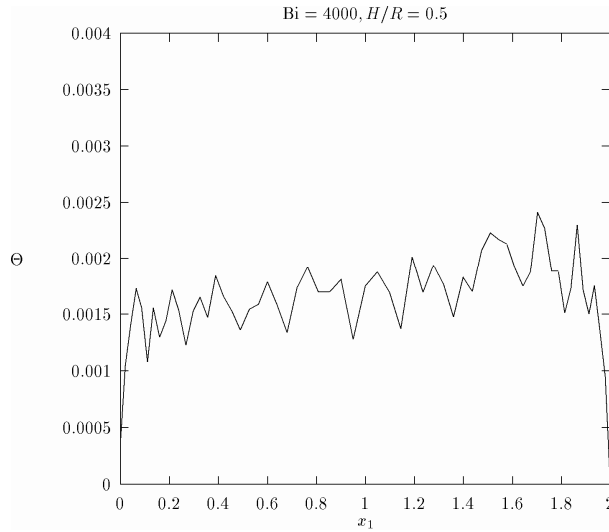


Рис.7. Распределение температуры в горизонтальном сечении в металлическом слое при $H/R = 0.5$ и $Bi = 4000$

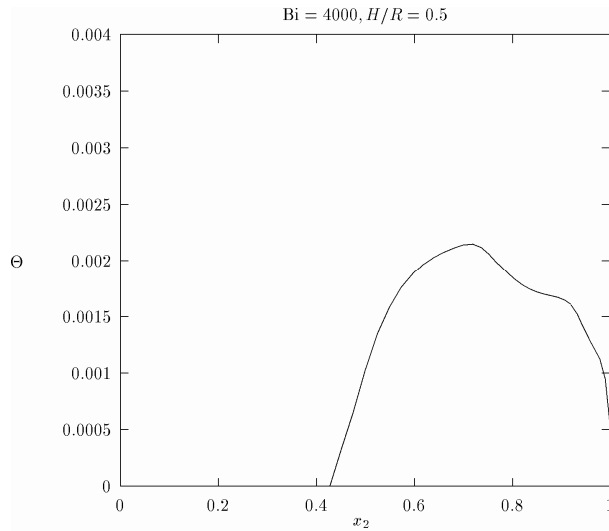


Рис.8. Распределение температуры вдоль оси X_2 вблизи боковой стенки при $H/R = 0.5$ и $Bi = 4000$

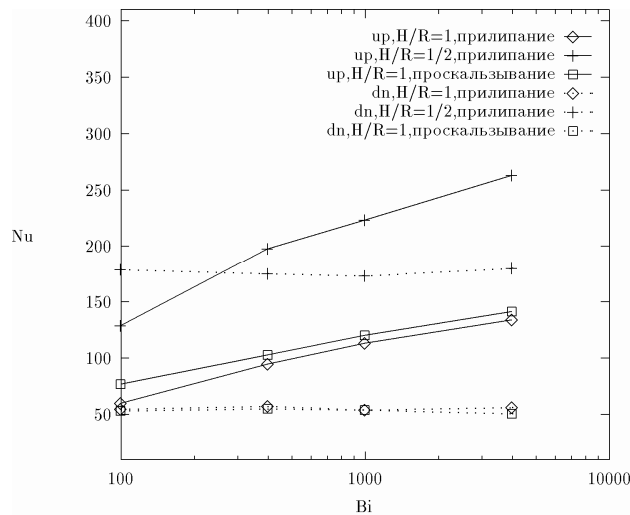


Рис.9. Распределение чисел Нуссельта на верхней и нижней поверхностях в оксидном и металлическом слоях

Рисунок 10 демонстрирует распределение чисел Нуссельта на боковой поверхности (правой стенке области) в оксидном и металлическом слоях для различных аспектных отношений и различных условий для скорости на верхней границе. Как видно из рисунка, влияние аспектного отношения на распределение тепловых нагрузок на боковую поверхность не является существенным. Но можно отметить изменение в значениях числа Нуссельта на боковой поверхности в металлическом слое при варьировании условий для скорости на верхней границе. Так, для случая условий прилипания (например, при наличии корки) значения Nu_{sd} примерно на 12.5% ниже, чем в случае условий проскальзывания для скорости на верхней границе. С увеличением числа Био это различие увеличивается, и в случае $Bi = 4000$ достигает и 18%. Для оксидного слоя влияние аспектного отношения и различных условий по скоростям не является существенным. При всех режимах

теплосъема величины Nu_{sd} практически одинаковы и лежат в диапазоне 35÷41.

На рис. 11 представлено распределение тепловых потоков на границе между слоями, отнесенное соответственно к температуре металлического и оксидного слоев для различных аспектных отношений в случае условий прилипания и проскальзывания для скорости на верхней границе.

Рисунок 12 демонстрирует изменение безразмерной температуры в металлическом и оксидном слоях для $H/R = 1$ и 0.5 и различных условий для скорости на верхней границе, а рисунок 13 демонстрирует размерную температуру для тех же случаев. В металлическом слое является существенным влияние обоих факторов, как аспектного отношения, так и граничных условий для скорости на верхней границе. Разница в значениях температуры в металлическом слое при различных аспектных отношениях и различных граничных условиях составляет около 12%.

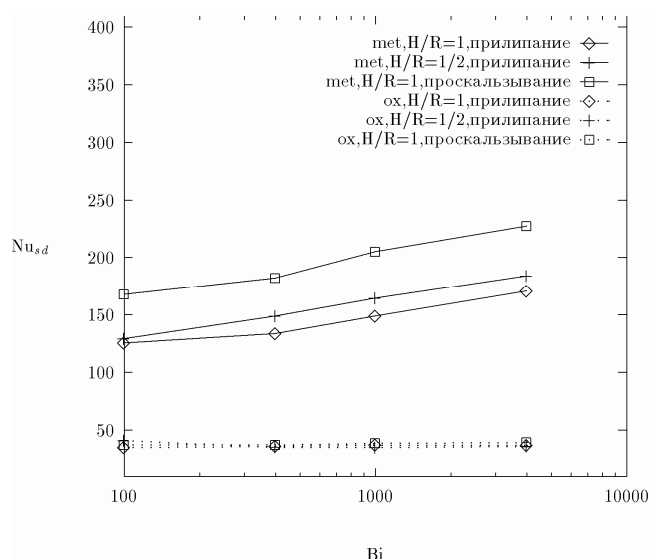


Рис. 10. Распределение чисел Нуссельта на правой поверхности в оксидном и металлическом слоях

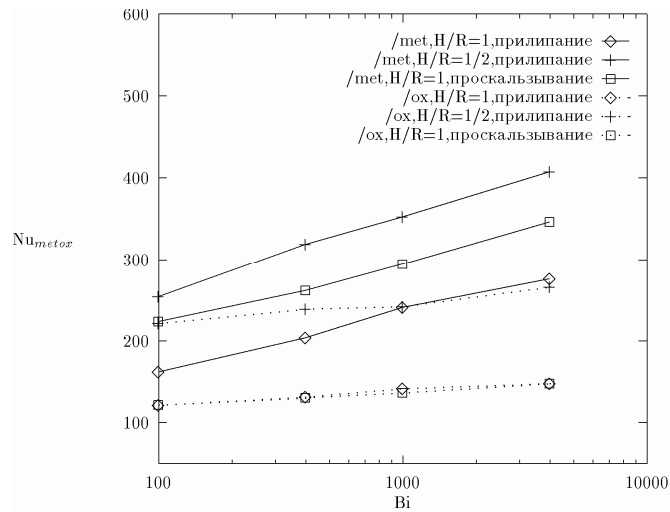


Рис. 11. Распределение чисел Нуссельта на границе металл/оксид

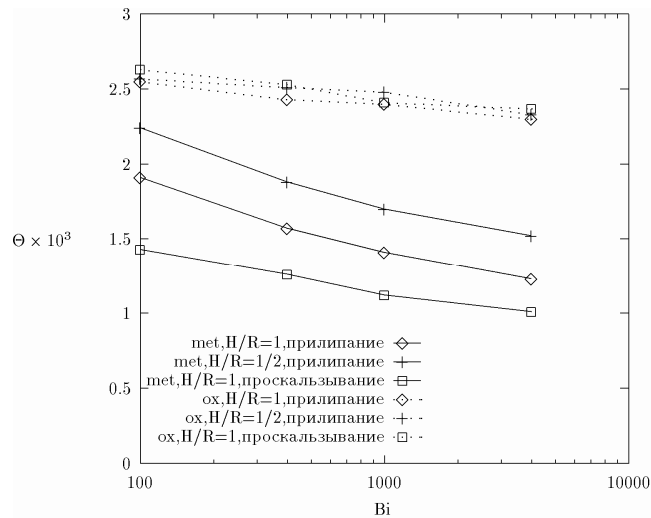


Рис. 12. Распределение безразмерной температуры в металлическом и оксидном слоях

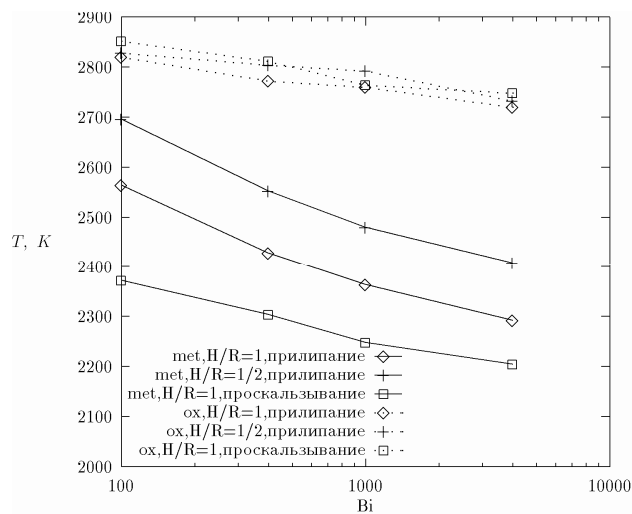


Рис. 13. Распределение размерной температуры в металлическом и оксидном слоях

Заключение

Предварительные расчеты для задачи конвективного теплообмена в тепловыделяющей стратифицированной жидкости, анализируемые с точки зрения проблемы удержания расплавленного топлива на дне корпуса реактора или в пределах страховочного корпуса позволяют сделать следующие выводы:

- 1) свободно-конвективное движение в расплаве металлического слоя в основном определяется конвективными движениями расплава оксидов в том случае, когда толщина металлического слоя меньше толщины оксидного. Это влияние проявляется в поведении температуры в металлическом слое, которая увеличивается от центра к стенкам корпуса;
- 2) основные теплофизические характеристики, такие как Nu_{up} , Nu_{sd} , Nu_{dn} в значительной степени зависят как от геометрических факторов, так и от условий движения жидкости вблизи верхней границы (условий прилипания или проскальзывания для скорости);
- 3) показаны почти линейные зависимости Nu_{up} и Nu_{sd} от Bi в логарифмической шкале и при этом практически отсутствует влияние параметра Био на Nu_{dn} .

Литература

1. SCDAP/RELAP5/MOD2 CODE, Manual, Volume 4: MATPRO-A. Library fo Material Properties for Light Water Reactors Accident Analysis. NUREG/CR - 5273, EGG-255, Vol.4 R3, 1990.
2. Вабищевич П.Н., Метод фиктивных областей в задачах математической физики, Москва, Из-во МГУ, 1991.
3. Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В. и Чурбанов А.Г., Численное моделирование конвективных течений в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура", ИММ РАН, Препринт № 28, Москва, 1993.
4. Kulacki F.A. and Emara A.A., Steady and transient convection in a fluid layer with uniform volumetric energy sources, J. Fluid Mech., 1977, Vol.83, pt.2, pp.375-395.
5. Lee J.H. and Golstein R.J., An experimental study on natural convection heat transfer in an inclined square enclosure containing internal energy sources, ASME J. Heat Transfer, 1988, Vol.110, pp.345-349.
6. Jahn M. and Reineke H.H., Free convection heat transfer with internal heat sources, calculations and measurements, Proceedings, 5th Int. Heat Transfer Conf., Tokyo(Japan), 1974, pp.74-78.
7. May H.O., A numerical study on natural convection in an inclined square enclosure containing internal heat sources, Int. J. Heat Mass Transfer, 1991, Vol.34, pp.919-928.
8. Chudanov V.V., Churbanov A.G., Strizhov V.F. and Vabischevich P.N., Current Status and Validation of RASPLAV Code, Proceedings, 21st Water Reactor Safety Meeting, Washington (USA), 1993.
9. Bolshov L.A., Arutyunyan R.V., Chudanov V.V., Aksenova A.E. and et al., Numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in nuclear reactor safety problems, Proceedings 4th International Topical Meeting on Nuclear Thermal Hydraulics, Operations and Safety, Taipei(Taiwan), 1994.
10. Churbanov A.G., Vabischevich P.N., Chudanov V.V. and Strizhov V.F., A numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in rectangular enclosures, Int J. Heat Mass Transfer, Vol. 37, № 18, pp. 2969-2984, 1994.

Номенклатура

$v = (v_1, v_2)$ – вектор скорости

x_1, x_2 – горизонтальная, вертикальная координаты

ψ – функция тока

ω – вихрь скорости

Nu – доля теплового потока

$Nu = -(\text{grad } T)$ – локальное число Нуссельта

T – размерная температура

$Gr = \frac{\beta g H^5 q}{\nu^2 k}$ – число Грасгофа

β – коэффициент объемного расширения

g – ускорение свободного падения

H – высота полости

q – мощность однородного теплового источника

ν – кинематическая вязкость

k – коэффициент теплопроводности

H/R – аспектное отношение

R – радиус полости

$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ – число Прандтля

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$ – коэффициент температуропроводности

c – коэффициент теплоемкости

ρ – плотность

$\Theta = \frac{\Delta T k}{q H^2}$ – безразмерная температура

$Bi = \frac{hl}{k}$ – число Био

h – коэффициент теплопередачи

Подиндексы

up, sd, dn – верхняя, боковая, нижняя поверхности

met – металл

ox – оксид

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ПОВЕДЕНИЯ ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов

1. Введение

В работе численно исследуется поведение распределения теплового потока на боковой поверхности квадратной каверны, заполненной тепло выделяющей жидкостью с учетом охлаждения на сторонах каверны. Проводится оценка величины $NU = Nu_{max}/Nu_{av}$, характеризующей изменение максимального теплового потока на боковую поверхность области Nu_{max} в сравнении с его средним значением Nu_{av} , а также оценивается поведение максимумов теплового потока на боковой поверхности рассматриваемой области для различных значений чисел Остроградского и Релея.

Подтверждением актуальности изучения поведения величины NU при различных числах Остроградского и Релея может служить анализ последствий аварии ТМІ-2. Результаты работы международной комиссии по оценке последствий происшедшего на ТМІ-2 [1] указывают на то обстоятельство, что на определенной стадии аварии происходит образование блокады из корки, сформировавшейся на уровне охладителя. Поверх этой блокады скапливается слой обломков топлива, которые в дальнейшем плавятся и превращаются в достаточно большую расплавленную область, 'molten pool'. В результате повторного залива охладителя происходит формирование корки сверху и по бокам расплавленной области, т.е. расплав оказывается заблокированным корками со всех сторон. Естественно-конвективные процессы, происходящие в тепло выделяющей 'molten pool' приводят к перераспределению тепловых потоков на твердые стенки (корки), окружающие область. Поэтому в местах локализации максимального теплового потока вероятнее

всего ожидать проплавление и разрушение корок окружающих 'molten pool', что и наблюдалось в случае аварии на ТМІ-2 [1]. Как показывают результаты численных исследований [2], доля твердой фазы в области в значительной степени определяется числом Остроградского. Поэтому можно предположить, что в 'molten pool' развитие естественной конвекции тепло выделяющей жидкости, которая ведет к перераспределению тепловых потоков на твердые стенки, будет характеризоваться не только числами Релея и Прандтля, но и числом Остроградского. Подобное утверждение требует проведения более подробного исследования поведения максимального теплового потока для более широкого набора безразмерных параметров (Ra , Pr , Os) при различных режимах теплопередачи [2].

Необходимость проведения численных исследований по изучению распределения тепловых потоков на боковых стенках области в зависимости от таких безразмерных параметров как числа Релея и Остроградского вызвана также тем фактом, что имеющиеся в литературе корреляционные зависимости как теоретические, так и экспериментальные в основном отражают соотношение средних величин, таких, например, как среднее значение числа Нуссельта. В то время как распределение числа Нуссельта на боковой поверхности имеет явно выраженный максимум, величина которого и локализация его на границе области будут определяться не только значениями числа Релея, но и, возможно, числом Остроградского.

Подтверждение тому факту, что распределение числа Нуссельта на боковой поверхности имеет явно выраженный максимум, можно найти во многих работах, а именно:

- в экспериментальной работе Jahn [3], где приведены многочисленные температурные интерферограммы, с помощью которых можно сделать вывод о том, что максимальное значение теплового потока на боковой стенке полуцилиндрической области локализуется в ее верхней части;
- этот же факт подтверждается результатами экспериментальных исследований Steinbrennera [4]. К сожалению, из этой работы трудно получить количественное соотношение величины максимального теплового потока к его среднему значению, NU . Тем не менее можно предположить, что максимальное значение теплового потока на боковой поверхности приблизительно совпадает с значением Nu_{up} на верхней границе;
- в экспериментальной работе Kumpulainen [5] (СОРО эксперимент), где исследуются естественно-конвективные течения в геометрической области, подобной днищу корпуса реактора ВВЭР-440. В работе приводятся измеренные значения теплового потока на боковой поверхности, на основании которых можно сделать вывод о том, что значение величины NU лежит в диапазоне $2 \div 3$, причем величина Нуссельта на боковой поверхности Nu_{sd} монотонно увеличивается с высотой, а значение Нуссельта в нижней точке рассматриваемой области близко к нулю;
- в расчетно-теоретической работе Kelkara [6], которая носит характер системных исследований естественной конвекции в широком диапазоне чисел Релея и Прандтля и охватывает широкий спектр геометрических областей, таких как: квадратная каверна, прямоугольная область, полуцилиндр и полусфера. Оценка величины NU для этих исследований при изотермических граничных условиях дает следующий диапазон изменения $NU \approx 2.0 \div 2.6$.

Рассматривая результаты вышеназванных работ с точки зрения конвекции тепловыделяющего расплава кориума, образующего корки вблизи охлаждаемых границ корпуса реактора, необходимо отметить, тот факт, что все вышеперечисленные работы ограничиваются исследованием лишь чисто конвективного режима теплопередачи [2],

что соответствует достаточно большим числам Остроградского ($Os \geq 10^4$). В то время как для реакторного случая, а именно, при удержании расплава кориума в нижней части корпуса реактора числа Остроградского изменяются в диапазоне от 100 до 1000 [2], что соответствует смешанному кондуктивно-конвективному режиму теплопередачи.

Эта работа является продолжением исследований, начатых в [2], где были представлены лишь отдельные результаты по оценке величины максимального теплового потока в сравнении с его средним значением (Nu_{max}/Nu_{av}), характерные для естественно-конвективных течений при различных числах Релея, но для менее подробного чем в представленной работе набора чисел Остроградского.

Напомним основные тенденции в поведении величины Nu_{max}/Nu_{av} , которые были отмечены в ходе проведенных предварительных исследований [2]:

- в кондуктивном режиме теплопередачи ($Os < 40$) отношение Nu_{max}/Nu_{av} , остается более или менее постоянным и значения указанной величины NU для чисел Релея из диапазона $10^8 \leq Ra \leq 10^{12}$ принадлежат диапазону $1.2 \div 1.4$;
- в смешанном режиме теплопередачи ($40 \leq Os \leq 1000$) наблюдается практически линейный рост указанной величины с увеличением значения числа Остроградского до значения величины Nu_{max}/Nu_{av} , соответствующей чисто конвективному режиму теплопередачи;
- в чисто конвективном режиме теплопередачи ($Os > 1000$) отношение Nu_{max}/Nu_{av} , оставалось близким к величине, достигаемой величиной NU в задаче естественной конвекции тепловыделяющей жидкости без учета фазовых превращений при соответствующих числах Релея.

В результате численного эксперимента удалось показать, что основное изменение в распределении теплового потока, а именно, увеличение значения максимальной величины теплового потока и эволюция координаты локального максимума наблюдаются в диапазоне чисел Остроградского, соответствующих

смешанному кондуктивно-конвективному режиму теплопередачи. В случае же доминирования одного из режимов теплопередачи в области кондукционного или конвективного распределения теплового потока носит более или менее осциллирующий характер вблизи своего среднего значения.

В ходе численных исследований естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с учетом плавления и затвердевания была проведена проверка на сходимость на последовательности сгущающихся сеток и было показано, что для чисел Релея $Ra = 10^{11}, 10^{12}$ и для чисел Остроградского из диапазона $40 \leq Os \leq 1000$ достаточной является сетка размера 81×81 со сгущением вблизи границы, эквивалентным размеру ячейки равномерной сетки 321×321 . Такое сгущение обеспечивало не менее 3-4 твердых ячеек сетки вблизи охлаждаемой боковой стенки в области максимального теплового потока.

В силу стохастического характера естественной конвекции для рассматриваемых в работе диапазонов изменения безразмерных параметров все расчеты проводились методом установления до достижения квазистационарного решения [2] и выполнялось осреднение вычисляемых величин по достаточно большой выборке временных результатов.

2. Математическая формулировка задачи

Рассматривается двумерная задача естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения с граничными условиями третьего рода.

Пусть

$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\}$ — область, в которой будем искать решение поставленной задачи. Введем следующее обозначение для границы фазового перехода $S(t)$:

$$S(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) = u_\ell\}$$

Полученные результаты представлены в виде графиков. Некоторые из этих результатов, а именно, величина, характеризующая изменение максимального теплового потока на боковую поверхность области Nu_{\max} по сравнению с его средним значением Nu_{av} , могут быть записаны в виде интерполяционных зависимостей вида

$$Nu_{\max} / Nu_{av} = C \cdot Os^n$$

для чисел Остроградского, соответствующих смешанному режиму теплопередачи. Эти зависимости могут быть использованы при построении простейших моделей поведения расплава топливосодержащих масс.

Следует подчеркнуть, что в настоящей работе отмечены лишь основные тенденции поведения NU в диапазоне чисел Релея $10^8 \leq Ra \leq 10^{12}$ и чисел Остроградского $40 \leq Os \leq 1000$. Более точные количественные оценки требуют проведения численных расчетов на более подробных сетках и значительных вычислительных ресурсов для обеспечения достаточной временной выборки при достижении квазистационарного решения.

где u_ℓ — температура фазового перехода. Последняя разбивает область Ω на две подобласти. Определим область, содержащую жидкую фазу вещества как $D(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) > u_\ell\}$, а область, содержащую твердую фазу вещества. — $D_0 = \Omega / D$. Задачу будем рассматривать в нестационарной постановке.

Для описания процессов тепло- и массопереноса в тепловыделяющей жидкости с однородным объемным источником тепла, с учетом фазовых превращений, используются нестационарные уравнения Навье–Стокса в приближении Буссинеска совместно с уравнением для температуры:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} v - \beta g e u = 0, x \in D, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, x \in D, 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$(c(u) + \lambda \delta(u - u_t)) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \operatorname{grad} u \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = q, \quad (3)$$

$$x \in \Omega, 0 < t \leq T.$$

Без ограничения общности будем рассматривать случай постоянных коэффициентов теплоемкости и теплопроводности в твердой и жидкой фазах, не меняющихся при фазовом превращении.

Рассматриваемая область течения представляет собой замкнутую полость с неподвижными твердыми стенками, поэтому на

границах полости ∂D задаются условия прилипания и непротекания вида:

$$v(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T. \quad (4)$$

В качестве тепловых условий выбраны граничные условия третьего рода, что позволяет моделировать различные режимы охлаждения границ полости:

$$k(u) \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_w) = 0, x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2. \quad (5)$$

где n – внешняя нормаль.

В силу того, что в начальный момент времени жидкость покоится и имеет равновесную температуру, начальное условие для скорости имеет вид

$$v(x, 0) = 0, x \in D, \quad (6)$$

а начальное условие для температуры определяется соотношением

$$u(x, 0) = 0, x \in \Omega. \quad (7)$$

Поскольку первоначально вся область представляет собой жидкую фазу вещества, то $D(0) = \Omega$.

Таким образом, соотношения (1)-(7) полностью описывают свободную конвекцию тепловыделяющей жидкости с учетом фазовых превращений в области Ω на любой момент времени $t > 0$. Численное исследование вышеназванной задачи проводится в безразмерной постановке с помощью вычислительного алгоритма, использующего переменные "функция тока, вихрь скорости, температура". Компоненты скорости определяются через функцию тока $\psi(x, t)$ как:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (8)$$

поэтому условие несжимаемости (2) всегда выполнено. Для вихря скорости имеем соотношение

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (9)$$

Учитывая соотношения (8),(9) из уравнения движения (1) для вихря скорости получим следующее выражение в безразмерных переменных

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (v \nabla) w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} - \frac{Ra_q}{Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (10)$$

$$x \in \Omega, 0 < t \leq T$$

с модифицированным числом Релея, получаемым по мощности теплового источника q . Уравнение (10) может быть переписано через безразмерное число Остроградского в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (v \nabla) w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} - \frac{Ra_u Os}{Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (11)$$

где использовано число Релея, определяемое по характерному перепаду температур

$$Ra_u = \frac{\beta g (u_\ell - u_w) l^3}{\alpha \nu}$$

и число Остроградского определяется с помощью соотношения

$$Os = \frac{q l^2}{k (u_\ell - u_w)}.$$

Здесь и далее будем использовать для безразмерных переменных те же обозначения что и для точных величин.

Уравнение энергии (3) в безразмерных переменных переписывается в виде

$$(1 + Ste \chi_{sl}) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (v \nabla) u \right) - \frac{1}{Pr} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + 1 \right) = 0, \quad (13)$$

$$x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T,$$

где число Стефана определяется из соотношения $Ste = \lambda / (c \cdot (u_s - u_\ell))$, где

$$\chi_{sl} = \begin{cases} 1, & u \in (u_s, u_\ell), \\ 0, & u \notin (u_s, u_\ell), \end{cases}$$

а u_s – температура солидус.

Обезразмеривание здесь проведено по высоте полости l , коэффициенту кинематической вязкости ν и величине $q l^2 / k$, пропорциональной перепаду температуры.

Система уравнений (11–13) дополняется граничными и начальными условиями, вытекающими из (4–7). Условия прилипания и непротекания (4) на границе единичного квадрата Ω дают соотношения

Заметим, что везде далее по тексту под числом Релея Ra мы будем понимать модифицированное число Релея, получаемое по мощности теплового источника q

$$Ra_q = \frac{\beta g q l^5}{\alpha \nu k}.$$

Из уравнения несжимаемости (2) будем иметь уравнение Пуассона для функции тока

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha^2} = w, \quad x \in D, \quad 0 < t \leq T. \quad (12)$$

$$\psi(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad 0 < t \leq T, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad 0 < t \leq T, \quad (15)$$

Из условия (6) имеем

$$\psi(x, 0) = 0, \quad x \in D. \quad (16)$$

Граничные условия конвективного теплообмена (третьего рода) в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + Bi u = 0, \quad 0 < x_\alpha < 1, \quad \alpha = 1, 2. \quad (17)$$

Начальное условие для температуры остается без изменений.

3. Метод решения

Для нахождения приближенного решения задачи плавления и затвердевания применяются различные вычислительные алгоритмы [8]. В этой работе для получения приближенного решения задачи (11–17) с расчетом поля течения в изменяющейся области $D(t)$ используется вариант метода фиктивных

областей с продолжением по младшим коэффициентам [9]. Реализация разностной схемы расщепления [10] основана на решении сеточных эллиптических задач на каждом шаге по времени. Подобный подход хорошо зарекомендовал себя при решении задач свободной конвекции тепловыделяющей

жидкости, что подтверждается совпадением полученных результатов с экспериментальным [7, 11] и численно-экспериментальным [12, 13] исследованиями для различных граничных условий и геометрий расчетной области. Результаты тестирования вычислительного алгоритма для задачи свободной

конвекции тепловыделяющей жидкости опубликованы в работах [14, 15]. Кроме того, некоторые из результатов, касающиеся исследования периодической естественной конвекции в замкнутой полости прямоугольного сечения, представлены в статье [16].

4. Результаты численного моделирования

Численное исследование некоторых особенностей поведения тепловыделяющей жидкости с учетом замерзания было проведено на Sun 4/80 (Sparc Station 10) в следующем диапазоне основных безразмерных параметров задачи: $10^8 \leq Ra \leq 10^{12}$, $40 \leq Os \leq 1000$, $30 \leq Bi_{up} \leq 600$, $Bi_{sd} = \infty$, $Bi_{dn} = \infty$, $Ste = 0$, $Pr = 1$.

Расчеты проводились методом установления, до достижения квазистационарного решения. Вычисления прерывались при одновременном выполнении следующих условий: производная по времени от средней в объеме температуры в норме L_2 осциллирует вблизи нуля; суммарное тепловыделение на боковые, верхнюю и нижнюю грани осциллирует вблизи единицы (в квадратной каверне суммарное тепловыделение равно единице).

При обработке результатов основное внимание уделялось таким безразмерным параметрам, как:

- NU , характеризующим изменение максимального теплового потока на боковую поверхность в сравнении с его средним значением,
- эволюции координаты максимального теплового потока на боковой поверхности,
- объемам жидкой фазы,
- максимальной температуре на боковой поверхности.

Поскольку в процессе достижения квазистационарного решения указанные параметры осциллировали вблизи своих средних значений, проводилось осреднение вычисляемых величин по достаточно большой выборке временных результатов.

Достоверность получаемых результатов проверялась путем проведения расчетов на последовательности сгущающихся сеток со сгущением адекватным сеткам 81×81 , 161×161 , 321×321 , 641×641 и сопоставлении получаемых решений на неизменяемость в рассматриваемом диапазоне параметров. Результаты проверки на последовательности сгущающихся сеток и тестирование используемой методики представлены в [2].

В результате предварительных исследований [2] были получены следующие зависимости $NU(Os)$ для чисел Релея из диапазона $10^8 \leq Ra \leq 10^{11}$ и чисел Остроградского, принадлежащих интервалу $40 \leq Os \leq 1000$ (см. рис. 1). В ходе предварительных исследований была отмечена тенденция значительного нарастания отношения максимального теплового потока на боковой поверхности к его среднему значению с увеличением числа Релея для чисел Остроградского из диапазона $100 \leq Os \leq 1000$. В то же время в диапазоне чисел Остроградского $40 \leq Os < 100$, как видно из рисунка 1, наблюдалось незначительные изменения исследуемой величины NU . Представленные результаты были получены в ходе расчетов на сетке 81×81 со сгущением вблизи границы, эквивалентным ячейке равномерной сетки 161×161 . При таком выборе сгущения сетки и числах Остроградского из диапазона $200 \leq Os < 600$ вблизи стенки на область максимального теплового потока приходится не более 1-2 ячейки сетки, что является недостаточным для разрешения фазовых превращений вблизи границы.

Поэтому далее численные исследования проводились на более подробной сетке со сгущением вблизи границы,

эквивалентным размеру ячейки равномерной сетки 321×321 . На рисунке 2 показаны результаты серии расчетов для величины NU в диапазоне чисел Рейля $10^{10} \leq Ra \leq 10^{12}$ и чисел Остроградского $40 \leq Os \leq 1000$. При таком сгущении сетки вблизи границы в диапазоне чисел Остроградского $200 \leq Os < 600$ вблизи стенки на область максимального теплового потока приходилось уже от 3 до 4 ячеек сетки. Заметим, что использование более подробной сетки не оказывает значительного влияния на изменение основных тенденции нарастания величины NU с ростом числа Рейля в диапазоне чисел Остроградского $100 \leq Os \leq 1000$. Однако по сравнению с предварительными расчетами наблюдается небольшое снижение отноше-

ния максимального теплового потока на боковой поверхности к его среднему значению (при $Ra = 10^{10}, 10^{11}$). В диапазоне чисел Остроградского $100 \leq Os \leq 600$ кривые становятся более пологими, в отличие от предварительных результатов. Можно предположить, что тенденции к выполаживанию будут сохраняться и в случае дальнейшего измельчения сетки. Однако при значениях числа Остроградского $Os \approx 1000$ тепловое сопротивление корок уже не будет столь значительным в силу очень малой толщины корок и, следовательно, измельчение сетки вблизи границы области не должно оказывать существенного влияния на результат разрешения фазовых превращений вблизи границы.

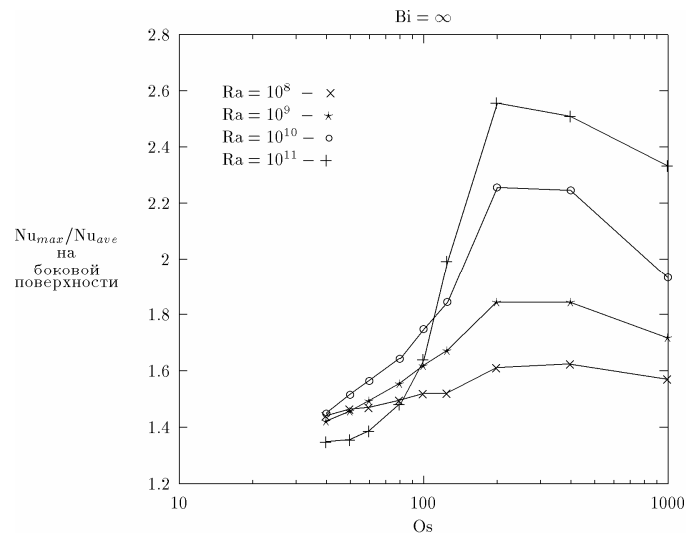


Рис. 1. Изменение величины Nu_{max}/Nu_{av} на боковой поверхности каверны со сгущением вблизи границы, эквивалентным ячейке равномерной сетки 161×161

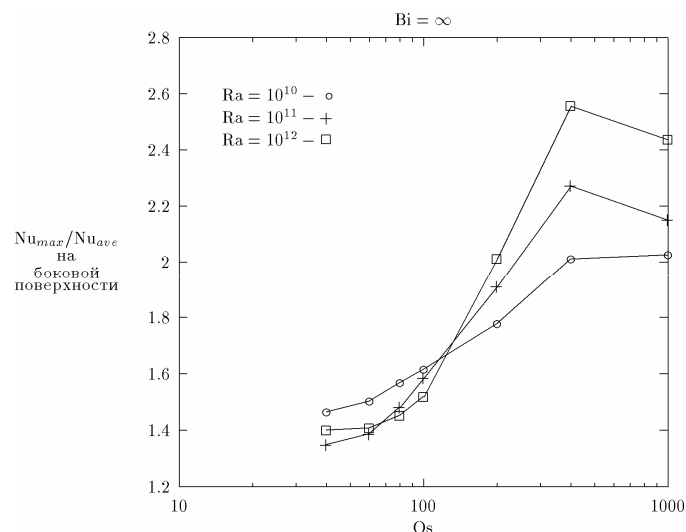


Рис. 2. Изменение величины Nu_{max}/Nu_{av} на боковой поверхности каверны со сгущением вблизи границы, эквивалентным ячейке равномерной сетки 321×321

Описанные выше зависимости соответствуют задаче (11–17) при полностью изотермических граничных условиях на всех границах. Иначе говоря, такие условия соответствуют идеальному теплосъему со всех границ области, что маловероятно в случае тяжелой аварии реактора. Наиболее адекватной, с точки зрения такой аварии, является ситуация, когда теплосъем с верхней границы менее интенсивен, чем с боковых стенок и днища. Другими словами, на боковой и нижней поверхности теплосъем характеризуется высокими числами Био. В связи с этим были проведены две серии расчетов для чисел Релея $Ra = 10^{10}$, 10^{11} на более подробном, чем в предыдущей работе [2] наборе чисел Остроградского из диапазона $40 \leq Os \leq 1000$. Исследовалось изменение величины NU при различных значениях числа Био из диапазона $30 \leq Bi_{up} \leq 600$ на верхней поверхности и идеальном теплосъеме на боковой и нижней поверхностях. На рис. 3 представлены графики зависимости отношения максимального теплового потока на боковой поверхности к среднему значению в зависимости от числа Остроградского для Релея $Ra = 10^{10}$.

Практически во всем диапазоне чисел Остроградского $40 \leq Os \leq 600$ наблюдается линейное возрастание величины NU , а при числах Остроградского более 600 — падение значений рассматриваемой величины. Наибольшее значение величина NU принимает при режимах теплосъема на верхней границе $Bi_{up} = 30 \div 100$. Так, при режиме теплосъема с верхней границы $Bi_{up} = 30$ величина NU превосходит указанное значение при режиме теплосъема $Bi_{up} = 600$ примерно в 1.5 раза.

Подобная картина наблюдается и при $Ra = 10^{11}$ (см. рис. 4). Изменение величины NU при варьировании режима теплосъема на верхней границе области от 600 до 30 составляет 1.5-2 раза. Заметим, что режимы теплосъема $Bi_{up} = 300, 600$ в обоих случаях ($Ra = 10^{10}, 10^{11}$) практически не отличаются от условий идеального теплосъема.

В силу стохастического (осциллирующего) и непериодического режима течения при числах Релея $Ra \geq 10^{10}$ важное значение приобретает положение максимума теплового потока на границе области. Картина течения при таких числах Релея в верхней части области представляет собой постоянно меняющуюся во времени систему вихрей, которые могут влиять на эволюцию во времени координаты максимума теплового потока. Для описания эволюции z_{max} удобно воспользоваться так называемой функцией распределения, которая строится на основании достаточно большой выборки наблюдений: $F(z) = P\{z_{max} > z\}$, где P — количество наблюдений максимумов теплового потока в некоторой точке относительно всей выборки. Одна из таких функций распределения $F(z)$ при $Bi_{up} = 600$ и числе Остроградского равно 400 для числа Релея 10^{11} приведена на рис. 5. Характерной особенностью этой функции является ее монотонность. Как и предполагалось, большинство максимумов теплового потока приходится на верхнюю четверть боковой поверхности.

Влияние различных режимов теплосъема на верхней границе на эволюцию координаты максимума теплового потока на боковой поверхности показано на рис. 6. Графики зависимости $z_{max}(Os)$ построены с использованием функции распределения $F(z)$:

$$z_{max} : F(z_{max}) = 0.5.$$

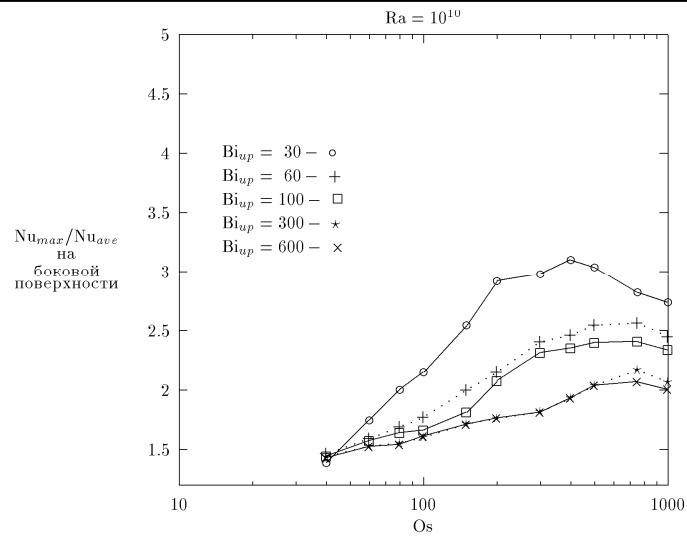


Рис. 3. Изменение величины Nu_{max}/Nu_{av} на боковой поверхности при различных числах Био на верхней границе для Релея 10^{10}

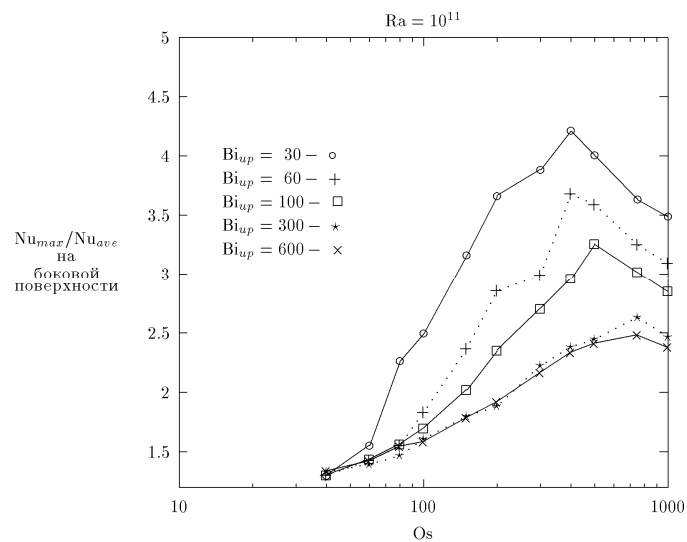


Рис. 4. Изменение величины Nu_{max}/Nu_{av} на боковой поверхности при различных числах Био на верхней границе для Релея 10^{11}

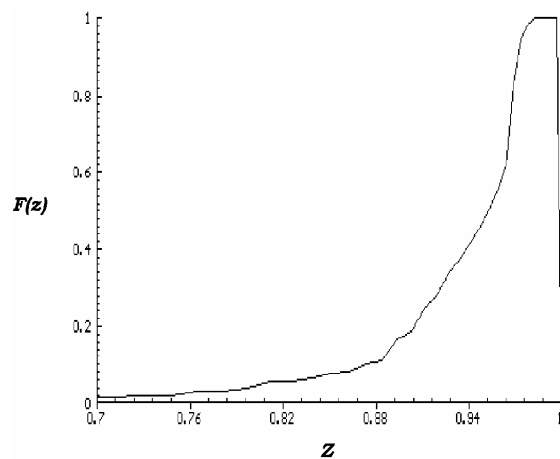


Рис. 5. Функция распределения z_{max} на боковой поверхности для случая $Bi_{up}=600$ и $Os=400$

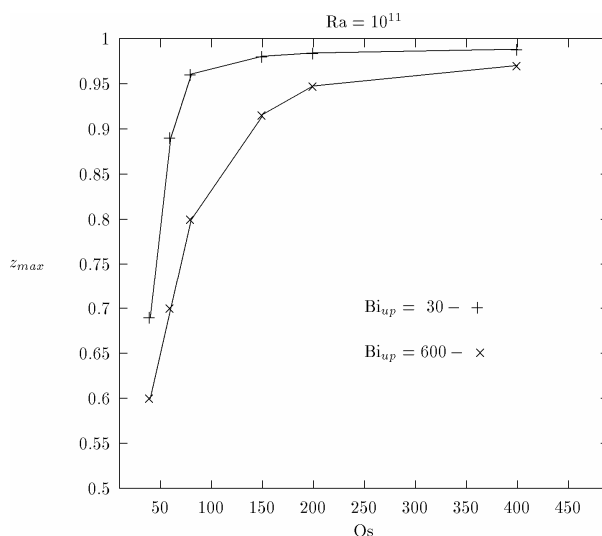


Рис. 6. Изменение z_{max} на боковой поверхности при различных числах Био на верхней границе

Ниже на рисунках 7–11 представлено распределение температуры вблизи боковой поверхности при различных режимах теплосъема на верхней границе для различных чисел Остроградского. На рис.7 показано распределение температуры для случая $Os=40$, что соответствует ситуации [2], когда половина области занята расплавом, а другая половина — корками. Как видно из рисунка, варьирование режимом теплосъема на верхней границе при этих условиях практически не оказывает влияния на распределение температуры вблизи боковой поверхности области. Кривые являются гладкими. Наибольшее значение температуры при таком режиме достигается в интервале чисел Остроградского $[0.5; 0.8]$ и равняется ≈ 0.002 .

С увеличением числа Остроградского картина распределения температуры начинает меняться (см. рис. 8). Так, если при $Bi_{ур} = 300$ распределение температуры на боковой поверхности аналогично случаю $Os = 40$, то для $Bi_{ур} = 30, 100$ на графике распределения температуры можно выделить два участка. Первый участок $[0; 0.8]$ характеризуется плавным нарастанием температуры на боковой поверхности области, на втором участке $[0.8; 1]$ наблюдается резкое возрастание температуры. Причем, при $Bi_{ур} = 30$ максимум температуры составляет ≈ 0.00525 , а в случае $Bi_{ур} = 100$ почти в 2 раза меньше ≈ 0.0026 . Кроме того, в случае

$Bi_{ур} = 30$ максимум температуры располагается правее, чем при $Bi_{ур} = 100$.

На рис. 9 представлено распределение температуры для $Os = 150$. В этом случае наблюдается снижение максимального значения температуры на участке $[0; 0.8]$ до 0.001 в сравнении с $Os = 40, 80$. Для режима теплосъема на верхней границе $Bi_{ур} = 300$ качественных изменений в картине распределения температуры на боковой поверхности не происходит. Кривая в этом случае довольно гладкая. Как и на предыдущем графике для $Bi_{ур} = 30$ и $Bi_{ур} = 100$ можно определить два участка $[0; 0.8]$ и $[0.8; 1]$. Однако максимумы температур в этом случае будут ниже, так при $Bi_{ур} = 30$ максимум составляет ≈ 0.0046 , а в случае $Bi_{ур} = 100$ он будет существенно ниже, чем в случае $Os = 80$ и составит примерно 0.0016. Разница в максимумах температуры в этом случае для различных режимов теплопередачи составит примерно 3. Таким образом, с увеличением числа Остроградского наблюдается возрастание разницы в максимумах температуры для различных режимов теплопередачи. Кроме того, максимальные значения при различных режимах теплопередачи при $Os = 150$ достигаются практически в одной точке.

Распределение температуры вблизи боковой поверхности для случая $Os = 300$ представлено на рис.10. На участке $[0; 0.8]$ наблюдается снижение среднего значения до $0.0012 \div 0.0019$ в сравнении с предыдущими случаями $Os = 40, 80, 150$. На интервале

[0.4; 0.8] наблюдается сильный дребезг, что свидетельствует о многовихревой структуре течения. На участке [0.8; 1] наблюдается сильное возрастание максимального значения температуры. В этом случае максимумы температуры для всех режимов тепло-сьема очень близки и попадают в интервал [0.0022÷0.0032]. Как и в случае $Os = 150$ максимальные значения при различных режимах теплопередачи достигаются практически в одной точке.

Распределение температуры вблизи боковой поверхности для случая $Os = 750$ представлено на рис. 11. В этом случае гладкость кривых нарушается, на интервале [0.2; 0.8] наблюдаются сильные скачки, особенно для $Bi_{up} = 300$. Нижняя граница среднего значения продолжает опускаться до 0.001. В то же время для $Bi_{up} = 30, 100$ в отличие от предыдущих картин распределения температуры на участке [0.8; 1] наблюдается монотонное возрастание максимума температуры.

На рис.12–16 представлено распределение температуры в области при различных значениях числа Остроградского для двух режимов теплосьема на верхней границе. Левая половина каждого из указанных рисунков демонстрирует поле температур вблизи границ области при условии конвективного теплообмена на верхней границе и значении числа Био $Bi_{up} = 30$, а на правой половине каждого рисунка показаны изотермы для случая $Bi_{up} = 600$. Как показывают результаты расчетов, при $Bi_{up} = 30$ корка на верхней границе присутствует только в случае $Os = 40$, с увеличением числа Остроградско-

го корка на верхней границе исчезает. Одновременно с этим наблюдается выравнивание температуры в верхней части области. На боковой поверхности и на дне области с увеличением числа Остроградского корка равномерно утоньшается. При $Bi_{up}=600$ корка на верхней границе области исчезает при числе Остроградского $Os=200÷400$. Тенденция равномерного утоньшения корки на боковой поверхности и на дне области сохраняется, при этом необходимо отметить, что толщина корки на нижней границе области практически не зависит от режима теплосьема на верхней границе. С утоньшением корки на боковой поверхности при высоких числах Остроградского $Os = 200$ возрастает немонотонность профиля корки по сравнению с предыдущим режимом теплосьема.

На рис. 17 представлено изменение объема жидкой фазы в зависимости от различных режимов теплосьема на верхней границе, а именно для $Bi_{up} = 30, 600$. Как видно из рисунка, влияние режима теплосьема на изменение объема жидкой фазы проявляется в диапазоне чисел Остроградского $40 \leq Os < 150$, когда доля твердой фазы в области составляет 15÷40%. Различия в долях твердой фазы для различных режимов теплосьема составляет около 5%. С увеличением числа Остроградского $Os > 150$ изменение режимов теплосьема перестает оказывать влияние на изменение объемов твердого и жидкого в рассматриваемой области.

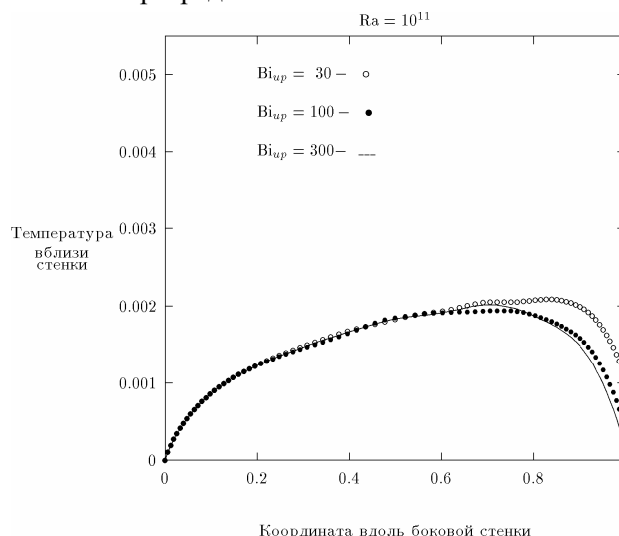


Рис. 7. Распределение температуры вблизи боковой поверхности для $Os = 40$

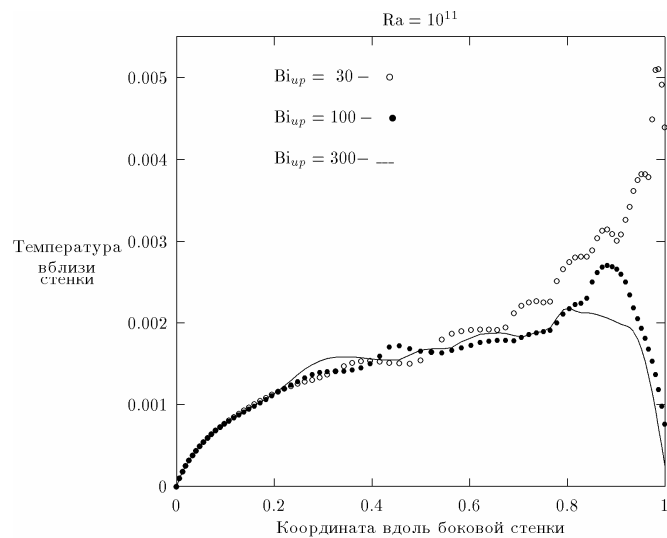


Рис. 8. Распределение температуры вблизи боковой поверхности для $Os = 80$

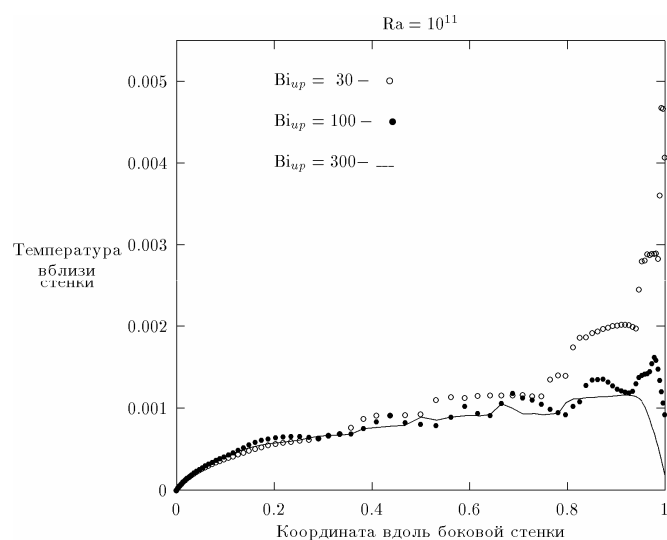


Рис. 9. Распределение температуры вблизи боковой поверхности для $Os = 150$

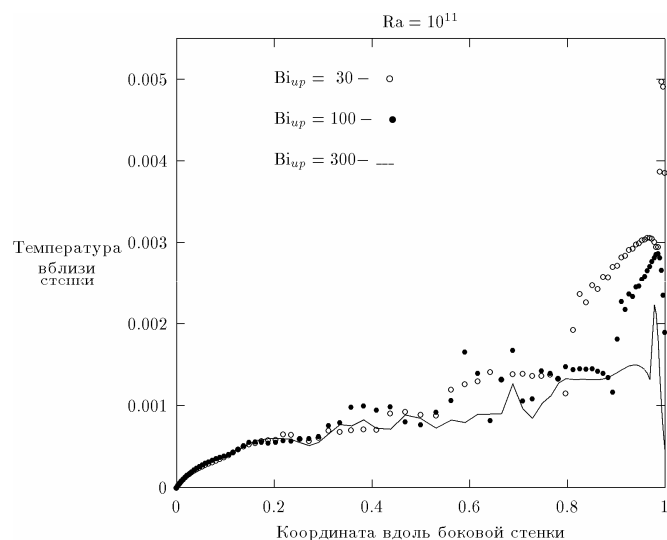


Рис. 10. Распределение температуры вблизи боковой поверхности для $Os = 300$

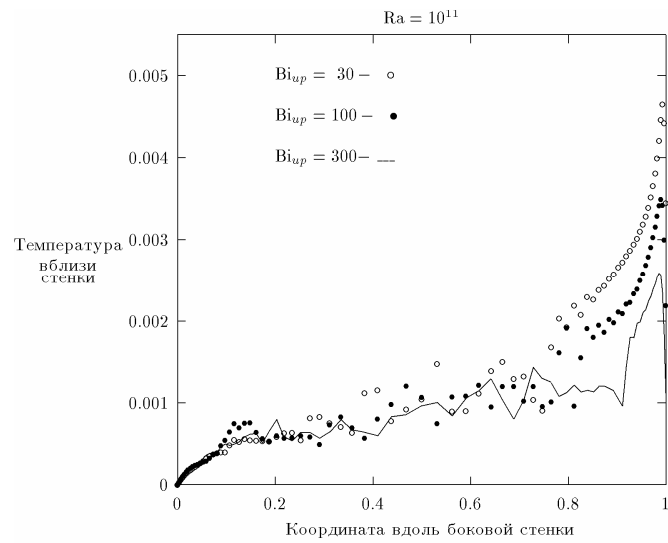


Рис. 11. Распределение температуры вблизи боковой поверхности для $Os = 750$

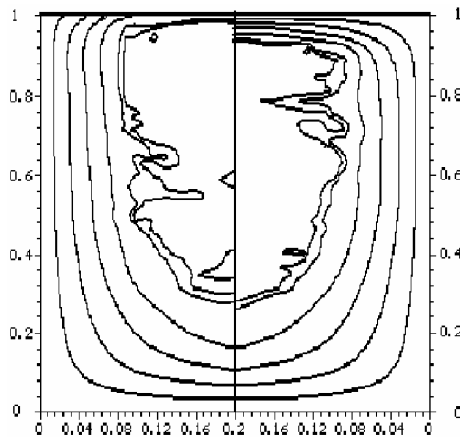


Рис. 12. Поле температур для случая $Os = 40$

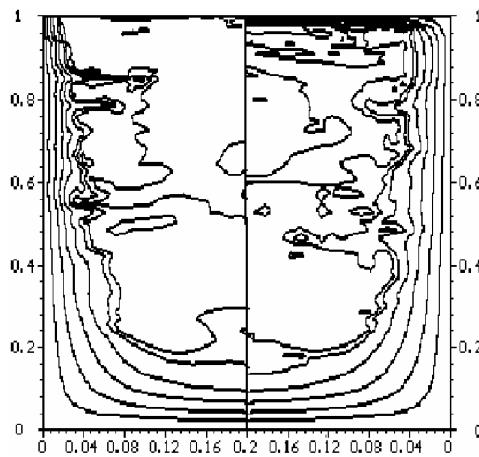


Рис. 13. Поле температур для случая $Os = 80$

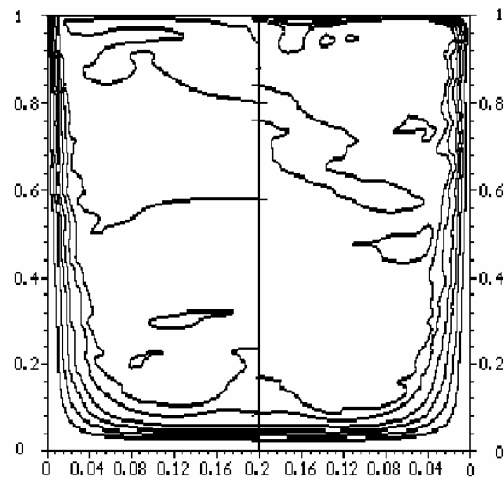


Рис. 14. Поле температур для случая $Os = 150$

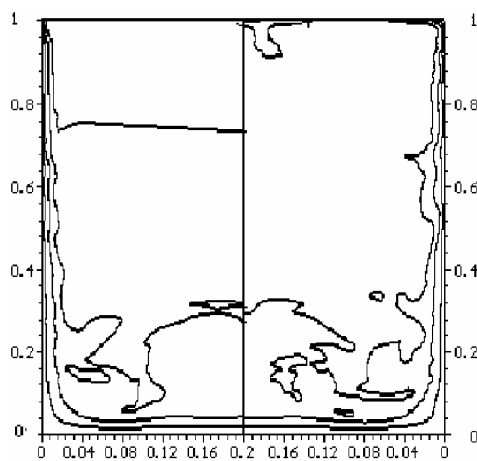


Рис. 15. Поле температур для случая $Os = 400$

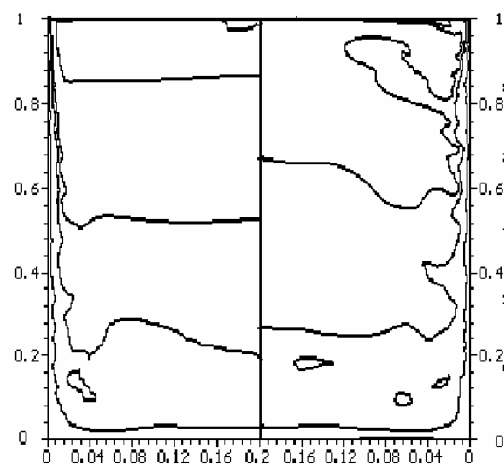


Рис. 16. Поле температур для случая $Os = 750$

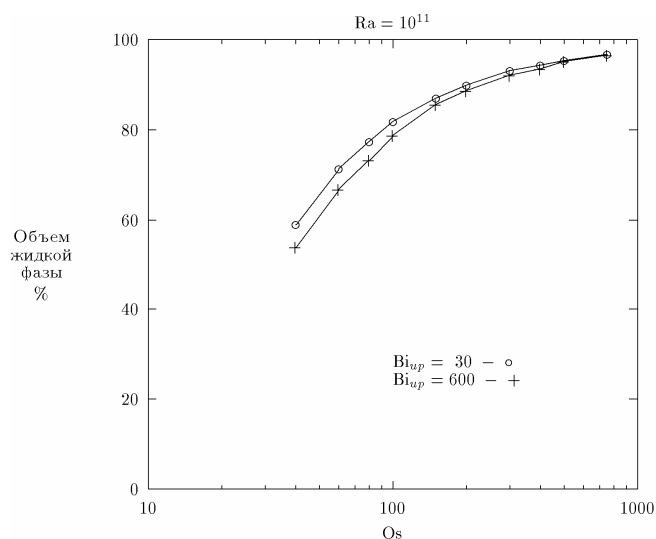


Рис. 17. Изменение объема жидкой фазы при различных режимах теплообмена на верхней границе

6. Заключение

- Описаны основные тенденции поведения величины NU в зависимости от чисел Остроградского и Релея.
- Исследовано поведение указанной величины на подробном наборе чисел Остроградского из диапазона $40 \leq Os \leq 1000$ и различных режимах теплообмена на верхней границе.
- Показано характерное поведение координаты максимума теплового потока на боковой поверхности $z_{max}(Os)$ при различных режимах теплообмена на верхней границе.
- Продемонстрирована эволюция поведения распределения теплового потока и корок на боковой поверхности в зависимости от чисел Остроградского и при различных режимах теплообмена на верхней границе.

Литература

1. E L.Tolman, P.Kuan and J.M Broughton, TMI-2 accident scenario update, J. Nuclear Engineering and Design 108(1988), pp.45-54.
2. Аксенова, А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Параметрическое численное исследование теплообмена, тепловыделяющей жидкости с учетом плавления и затвердевания в зависимости от чисел Остроградского и Релея. ИБРАЭ-95-01, Москва, 1995.
3. Jahn M., Holographische untersuchung der frein konvektion in volumetrisch beheizten fluiden. Dissertation, Von der Fakultat fur Maschinenwesen der Technischen Universitat Hannover, zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur, 1975.
4. Steinbrenner U. and Reineke H.H., Turbulent Bouyancy Convection Heat Transfer with Internal Heat Sources, *Proceedings, 6th Int. Heat Transfer Conl.*, Paper NC-21, Toronto(Canada), 1978, Vol.2, pp.305-310.

5. Kymalainen O., Hongisto O., Antman J. and et al., COPO: Experiments for heat flux distribution from volumetrically heated corium pool, Transactions of the Twentieth Water Reactor Safety Information Meeting, NUREC/CP-0125 (1992), 7-11, 7-12.
6. Kelkar K.M., Schmidt, R.C. and Patankar S.V., Numerical analysis of laminar natural convection of an internally heated fluid in a hemispherical cavity, *Proceedings, International Heat Transfer Conference*, San Diego, 1991, pp.355-364.
7. Kulacki F.A and Emara A.A., Steady and transient convection in a fluid layer with uniform volumetric energy sources, *J. Fluid Mech.*, 1977, Vol.83, pt.2, pp.375-395
8. A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich, O.P. Iliev and A.G. Ghurbanov, Numerical simulation of convective/diffusion phase change problems — a review, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, No. 17, pp. 4095-4106, 1993.
9. Вабищевич П.Н., Метод фиктивных областей в задачах математической физики, Москва, Из-во МГУ, 1991.
10. Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В. и Чурбанов А.Г., Численное моделирование конвективных течений в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура", ИММ РАН, Препринт No. 28, Москва, 1993.
11. Lee J.-H. and Golstein R.J., An experimental study on natural convection heat transfer in an inclined square enclosure containing internal energy sources, *ASME J. Heat Transfer*, 1988, Vol.110, pp.345-349.
12. Jahn M. and Reineke H.H., Free convection heat transfer with internal heat sources, calculations and measurements, *Proceedings, 5th Int. Heat Transfer Conf.*, Tokyo(Japan), 1974, pp.74-78.
13. May H.-O., A numerical study on natural convection in an inclined square enclosure containing internal heat sources, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1991, Vol.34, pp.919-928.
14. Chudanov V.V., Churbanov A.G., Strizhov V.F. and Vabishchevich P.N., Current Status and Validation of RASPLAV Code, *Proceedings. 21st Water Reactor Safety Meeting*, Washington (USA), 1993.
15. Bolshov L.A., Arutyunyan R.V., Chudanov V.V., Aksenova A.E. and et al., Numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in nuclear reactor safety problems, *Proceedings 4th International Topical Meeting on Nuclear Thermal Hydraulics, Operations and Safety*, Taipei(Taiwan), 1994.
16. A.G. Churbanov, P.N. Vabishchevich, V.V. Chudanov, and V.F. Strizhov, A numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in rectangular enclosures, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, No. 18, pp. 2969-2984, 1994.

Номенклатура

$v = (v_1, v_2)$ – вектор скорости

$Nu = -(\text{grad } u)$ – локальное число Нуссельта

$NU = Nu_{\max}/Nu_{\text{av}}$ – изменение максимального теплового потока на боковую поверхность области Nu_{\max} в сравнении с его средним значением Nu_{av}

p – нормализованное на плотность давление

$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ – число Прандтля

g – ускорение свободного падения

$Ra_q = \frac{\beta g q l^5}{\alpha \nu k}$ – модифицированное число Релея

u – отклонение температуры от равновесной

$$Ra_u = \frac{\beta g (u_l - u_w) l^3}{\alpha \nu} - \text{число Релея}$$

ν – кинематическая вязкость

$$Os = \frac{q l^2}{k (u_l - u_w)} - \text{число Остроградского}$$

β – коэффициент объемного расширения

$$Ste = \frac{\lambda}{c (u_s - u_l)} - \text{число Стефана}$$

$e = (0, 1)$ – вектор, определяющий направление выталкивающей силы

$$Bi = \frac{hl}{k} - \text{число Био}$$

q – мощность однородного теплового источника

δ – дельта-функция

λ – энтальпия фазового перехода

c – коэффициент теплоемкости

k – коэффициент теплопроводности

$$Asp = \frac{l}{x} - \text{аспектное отношение}$$

$$Nu = \frac{1}{l} \int_{u_{av}}^{Nu} Nu dl - \text{среднее число Нуссельта}$$

l – высота полости

$$u_{av} = \frac{1}{V} \int_V u dV - \text{средняя температура}$$

x – ширина полости

h – коэффициент теплопередачи

u_l – температура фазового перехода

u_w – температура стенки

ρ – плотность

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} - \text{коэффициент температуропроводности}$$

$$Q = \frac{1}{l} \int_l Nu dl - \text{средний тепловой поток}$$

Подиндексы

up – верхняя поверхность

sd – боковая поверхность

dn – нижняя граница

av – среднее значение

max – максимальное значение

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ОХЛАЖДЕНИЯ НА ГРАНИЦАХ

Раздел 1

А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов

1. Введение

Представленная работа является продолжением параметрических численных исследований естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями, начатых в работах [1, 2, 3]. В указанных работах задача естественной конвекции была решена для случая квадратной полости с изотермическими граничными условиями [1], затем последовательно исследовалось влияние аспектного отношения и возможной стратификации находящегося в полости вещества на распределение тепловых нагрузок на границы полости [2], а также проводилась оценка локализации максимальных тепловых нагрузок на боковой поверхности [3].

В этой работе численно исследуется естественная конвекция тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания в полости квадратного сечения при различных режимах охлаждения, характеризующихся наибольшим разнообразием и неопределенностью при тяжелых авариях.

Актуальность подобного исследования обусловлена необходимостью предсказания поведения расплава топливосодержащих масс (кориума) для различных сценариев гипотетических тяжелых аварий на атомных станциях [4–9]. В результате такой аварии с разрушением и плавлением активной зоны реактора возможно образование достаточно больших объемов расплава кориума или, другими словами, 'molten pool', приводящего к разрушению корпуса реактора. Замедление процесса разрушения и/или его полное приостановление и удержание расплава внутри корпуса может быть достигнуто с помощью соответствующего режима охлаждения расплавленной облас-

ти. При этом выбор режима охлаждения, характеризующийся большим разнообразием, во многом зависит от того на ранней или на поздней стадии разрушения активной зоны сформировалась 'molten pool' и от ее места положения в реакторе. Так, формирование расплава кориума может происходить на различных стадиях тяжелой аварии, например:

- 1) на ранней стадии развития аварии, непосредственно внутри активной зоны при условии водяного охлаждения и отводе тепла с верхней границы 'molten pool', как в случае аварии на ТМ1-2 [10];
- 2) на поздней стадии разрушения активной зоны, в нижней части корпуса реактора после стекания туда расплава при условии достаточно эффективного внешнего охлаждения на корпусе реактора и утоньшении стенок корпуса за счет плавления или/и их химического растворения.

В обоих случаях условия на верхней границе расплавленной области могут варьироваться в широком диапазоне, начиная с условия практически полного теплового равновесия с окружающими конструкциями, и заканчивая условием идеального теплоотвода в случае залива водой сверху. Что касается условий теплоотвода на боковых поверхностях и дне 'molten pool', то они характеризуются большими числами Био, что практически соответствует условиям изотермического охлаждения указанных поверхностей.

Подтверждением вышесказанного может служить авария на ТМ1-2 [10], когда для предотвращения разогрева активной зоны был осуществлен повторный залив водой, в

результате чего происходило достаточно эффективное охлаждение боковых поверхностей расплавленной области и образование топливных корок. Что касается верхней границы расплавленного кориума, то предположительно на указанной границе вода отсутствовала или же верхняя граница расплавленной области находилась при менее эффективном режиме охлаждения, чем боковые поверхности 'molten pool'. И вероятно, указанное различие в режимах охлаждения верхней и боковой поверхностей 'molten pool' могло оказывать определенное влияние на поведение расплава теплового кориума и образование топливных корок и приводить к изменению привычной картины распределения тепловых потоков. Поэтому, можно было ожидать значительного влияния таких параметров, как число Био на верхней границе Bi_{up} и числа Остроградского Os , определяющего долю твердой фазы кориума (корок) на основные теплофизические характеристики расплава теплового кориума. В связи с вышесказанным необходимо более подробно исследовать влияние различных режимов охлаждения на механизм теплопередачи в тепловыделяющем кориуме с учетом возможного затвердевания последнего.

Среди множества экспериментальных работ, посвященных конвекции теплового кориума

жидкости, практически отсутствуют работы, учитывающие затвердевание последней. Тем не менее, можно отметить серию из 14 тестов, проведенную IPSN в 1983–1990 гг. в Cadarache, в которой исследовались процессы кипения теплового кориума. Среди этих тестов наибольшего внимания с точки зрения конвекции расплавленного UO_2 при высоких температурах с образованием корок заслуживает первый эксперимент, названный SCARABEE BF1 [11].

Приведем основные параметры этого эксперимента. Используемая в эксперименте капсула, куда загружалось топливо, представляла собой цилиндрический тонкостенный тигель диаметром 6 см. Охлаждение стенок цилиндра осуществлялось с помощью жидкого Na при температуре 250°C. Масса загружаемого в экспериментальную установку UO_2 составляла 5 кг. Рассматривались два режима постоянной тепловой нагрузки продолжительностью около 10 минут: I) 48 Вт/см³ и II) 140 Вт/см³, соответственно. Высота расплава для указанных режимов составляла соответственно 18 и 20 см. Ниже в таблице 1 представлена оценка результатов проведенного эксперимента с точки зрения основных безразмерных параметров задачи естественной конвекции теплового кориума с учетом фазовых превращений:

Таблица 1. Оценка результатов эксперимента SCARABEE с точки зрения основных безразмерных параметров задачи естественной конвекции теплового кориума с учетом фазовых превращений.

	I	II
Диапазон изменения числа Релея	$3 \cdot 10^{11}$	$\approx 10^{12}$
Характерный размер $\approx (\pi d^2 l)^{1/3}$	0.080 м	0.083 м
Диапазон изменения числа Остроградского	40÷50	120÷150
Отношение твердой фазы к полному объему	0.50÷0.60	0.13÷0.15
Отношение максимального теплового потока к его среднему значению	1.72	1.38
Доля теплового потока, приходящаяся на различные поверхности:		
бок	0.75	0.73
дно	0.00	0.02
верх	0.25	0.25

В силу недостаточности данных об эксперименте трудно было получить точную оценку чисел Био на верхней и боковых поверхно-

стях экспериментальной капсулы, однако можно с уверенностью утверждать, что значения параметров Bi_{up} и Bi_{sd} достаточно велики. Так, значение числа Био на верхней гра-

нице велико в силу эффективного теплового излучения при достаточно высокой температуре $UO_2 \approx 3000$ К, при том, что температура плавления металлической стенки ≈ 1800 К. Высокое же значение параметра Био на боковой поверхности объясняется незначительной толщиной стенок тигля.

Сравнение экспериментальных данных с численными расчетами [1] и представленными ниже численными результатами по таким величинам, как:

- отношение твердой фазы к полному объему $V_{\text{crust}}/V_{\text{full}}$
- отношение максимального теплового потока к его среднему значению $HF_{\text{max}}/HF_{\text{av}}$,

позволяет говорить о неплохом совпадении результатов. Так, в численных расчетах отношение твердой фазы к полному объему при числах Остроградского из диапазонов $40 \leq Os \leq 50$ и $120 \leq Os \leq 150$ имеет сильное отличие друг от друга вне зависимости от числа Релея и достаточно хорошо согласуется с экспериментом [11]. Как показывают результаты численных расчетов [1, 3], картина изменения величины $HF_{\text{max}}/HF_{\text{av}}$, также совпадает с результатами эксперимента SCARABEE BF1 [11]. И в том и в другом случаях отношение максимального теплового потока к его среднему значению изменяется в диапазоне от 1 до 2 (что гораздо меньше значения указанной величины при чисто конвективном режиме).

К сожалению, недостаточность информации о максимальном и среднем значениях температуры в эксперименте не позволяет про-

вести оценку чисел Нуссельта на верхней и боковой поверхностях. Невозможно также провести адекватного сравнения долей теплового потока, приходящихся на различные поверхности, в силу неопределенности граничных условий на верхней поверхности экспериментальной установки и различия в геометрических факторах. В численных расчетах рассматривается полость квадратного сечения, тогда как в эксперименте капсула в сечении представляет собой сильно вытянутый по высоте прямоугольник. Тем не менее совпадение по двум вышеуказанным пунктам может служить основанием для использования полученных результатов при анализе проблемы удержания расплава кориума в корпусе реактора.

В численных расчетах применен достаточно эффективный математический алгоритм для решения нестационарных задач гидродинамики и теплопроводности. Он позволяет провести большое количество параметрических численных расчетов для создания адекватной базы данных основных тепловых характеристик в зависимости от безразмерных параметров (Ra , Os , Bi). Поскольку для рассматриваемой проблемы зависимость основных тепловых характеристик от числа Прандтля и аспектного отношения является менее значимой в сравнении с остальными параметрами, значения Pr и Asp принимаются равными единице.

Полученные результаты представлены в виде графиков.

2. Математическая формулировка задачи

Рассматривается двумерная задача естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения с граничными условиями третьего рода.

Пусть $\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\}$ — область, в которой будем искать решение поставленной задачи. Введем следующее обозначение для границы фазового перехода $S(t)$:

$$S(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) = u_\ell\}$$

где u_ℓ — температура фазового перехода. Последняя разбивает область Ω на две подобласти. Определим область, содержащую жидкую фазу вещества как $D(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) > u_\ell\}$, а область, содержащую твердую фазу вещества — $D_0 = \Omega/D$. Задачу будем рассматривать в нестационарной постановке.

Для описания процессов тепло- и массопереноса в тепловыделяющей жидкости с однородным объемным источником тепла, с учетом фазовых превращений, используют

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} v - \beta g e u = 0, x \in D, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, x \in D, 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$\left(c(u) + \lambda \delta(u - u_i) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \operatorname{grad} u \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = q, \quad (3)$$

$$x \in \Omega, 0 < t \leq T.$$

Без ограничения общности будем рассматривать случай постоянных коэффициентов теплоемкости и теплопроводности в твердой и жидкой фазах, не меняющихся при фазовом превращении.

Рассматриваемая область течения представляет собой замкнутую полость с неподвижными твердыми стенками, поэтому на

$$k(u) \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_w) = 0, x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2. \quad (5)$$

где n – внешняя нормаль.

В силу того, что в начальный момент времени жидкость покоится и имеет равновесную температуру, начальное условие для скорости имеет вид

$$v(x, 0) = 0, x \in D, \quad (6)$$

а начальное условие для температуры определяется соотношением

$$u(x, 0) = 0, x \in \Omega. \quad (7)$$

Поскольку первоначально вся область представляет собой жидкую фазу вещества, то $D(0) = \Omega$.

Таким образом, соотношения (1-7) полностью описывают свободную конвекцию тепловыделяющей жидкости с учетом фазовых превращений в области Ω на любой момент времени $t > 0$. Численное исследование вышеназванной задачи проводится в безразмерной постановке с помощью вычислительного алгоритма, использующего переменные "функция тока, вихрь скорости,

Навье–Стокса в приближении Буссинеска совместно с уравнением для температуры:

границах полости ∂D задаются условия прилипания и непротекания вида:

$$v(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T. \quad (4)$$

В качестве тепловых условий выбраны граничные условия третьего рода, что позволяет моделировать различные режимы охлаждения границ полости:

температура". Компоненты скорости определяются через функцию тока $\psi(x, t)$ как:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (8)$$

поэтому условие несжимаемости (2) всегда выполнено. Для вихря скорости имеем соотношение

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (9)$$

Учитывая соотношения (8),(9) из уравнения движения (1) для вихря скорости получим следующее выражение в безразмерных переменных

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (v \nabla) w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} - \frac{Ra_q}{Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (10)$$

$$x \in \Omega, 0 < t \leq T$$

с модифицированным числом Релея, получаемым по мощности теплового источника q . Уравнение (10) может быть переписано че-

рез безразмерное число Остроградского в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (v \nabla) w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} - \frac{Ra_u Os}{Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (11)$$

где использовано число Релея, определяемое по характерному перепаду температур

$$Ra_u = \frac{\beta g (u_\ell - u_w) l^3}{\alpha \nu}$$

и число Остроградского определяется с помощью соотношения

$$Os = \frac{ql^2}{k(u_\ell - u_w)}.$$

$$(1 + Ste \chi_{sl}) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (v \nabla) u \right) - \frac{1}{Pr} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + 1 \right) = 0, \quad (13)$$

$$x \in \Omega, 0 < t \leq T,$$

где число Стефана определяется из соотношения $Ste = \lambda / (c \cdot (u_s - u_\ell))$, где

$$\chi_{sl} = \begin{cases} 1, & u \in (u_s, u_\ell), \\ 0, & u \notin (u_s, u_\ell), \end{cases}$$

а u_s – температура солидус.

Обезразмеривание здесь проведено по высоте полости l , коэффициенту кинематической вязкости ν и величине ql^2/k , пропорциональной перепаду температуры.

Система уравнений (11–13) дополняется граничными и начальными условиями, вытекающими из (4–7). Условия прилипания и непротекания (4) на границе единичного квадрата Ω дают соотношения

3. Метод решения

Для нахождения приближенного решения задачи (11–17) с расчетом поля течения в изменяющейся области $D(t)$ используется вариант метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам [12]. Реализация разностной схемы

Здесь и далее будем использовать для безразмерных переменных те же обозначения что и для точных величин. Заметим, что везде далее по тексту под числом Релея Ra мы будем понимать модифицированное число Релея, получаемое по мощности теплового источника q , $Ra_q = \frac{\beta g q l^5}{\alpha \nu k}$.

Из уравнения несжимаемости (2) будем иметь уравнение Пуассона для функции тока

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_\alpha^2} = w, x \in D, 0 < t \leq T. \quad (12)$$

Уравнение энергии (3) в безразмерных переменных переписывается в виде

$$\Psi(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n}(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T. \quad (15)$$

Из условия (6) имеем

$$\Psi(x, 0) = 0, x \in D. \quad (16)$$

Граничные условия конвективного теплообмена (третьего рода) в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + Bi u = 0, 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2. \quad (17)$$

Начальное условие для температуры остается без изменений.

расщепления [13] основана на решении сеточных эллиптических задач на каждом шаге по времени. Подобный подход хорошо зарекомендовал себя при решении задач свободной конвекции тепловыделяющей жидкости, что подтверждается совпадением полученных результатов с экспериментальным

[5, 14] и численно-экспериментальным [15, 16] исследованиями для различных граничных условий и геометрий расчетной области. Результаты тестирования вычислительного алгоритма для задачи свободной конвекции тепловыделяющей

жидкости опубликованы в работах [17, 18]. Кроме того, некоторые из результатов, касающиеся исследования периодической естественной конвекции в замкнутой полости прямоугольного сечения, представлены в статье [19].

4. Результаты численного моделирования

Численное исследование тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания при различных режимах охлаждения на границах было проведено на Sun 4/80 (Sparc Station 10) в следующем диапазоне основных безразмерных параметров задачи: $10^8 \leq Ra \leq 10^{12}$, $40 \leq Os \leq 1000$, $30 \leq Bi_{up} \leq 600$, $Bi_{sd} = \infty$, $Bi_{dn} = \infty$, $Ste = 0$, $Pr = 1$.

Расчеты проводились методом установления, до достижения квазистационарного решения. Вычисления прерывались при одновременном выполнении следующих условий: производная по времени от средней в объеме температуры в норме L_2 осциллирует вблизи нуля; суммарное тепловыделение на боковые, верхнюю и нижнюю грани осциллирует вблизи единицы (в квадратной каверне суммарное тепловыделение равно единице).

При обработке результатов основное внимание уделялось таким безразмерным параметрам, как: интенсивность теплопередачи (локальное число Нуссельта) на боко-

вые, верхнюю и нижнюю грани; суммарная теплопередача на все грани рассматриваемой области; средняя температуры в жидкой фазе; объем жидкой фазы, а также максимальным значениям локальных чисел Нуссельта на боковых гранях по отношению к их среднему значению, Nu_{max}/Nu_{av} .

Поскольку в процессе достижения квазистационарного решения указанные параметры осциллировали вблизи своих средних значений, проводилось осреднение вычисляемых величины по достаточно большой выборке временных результатов.

Достоверность получаемых результатов проверялась путем проведения расчетов на последовательности сгущающихся сеток со сгущением, адекватным сеткам 81×81 , 161×161 , 321×321 , 641×641 и сопоставлении получаемых решений на неизменяемость в рассматриваемом диапазоне параметров. Результаты проверки на последовательности сгущающихся сеток и тестирование используемой методики представлены в [1].

4.1 Полученные результаты

Проблема удержания расплава внутри корпуса реактора и увеличение продолжительности жизни последнего зависит от уровня нагрузок, которые испытывают стенки реактора, после того как произошла авария. Снижение нагрузок и, следовательно, увеличение продолжительности жизни корпуса реактора достигается с помощью соответствующих режимов охлаждения стенок корпуса и снижения интенсивности выноса тепла к его границам. Последнее обстоятельство тесно связано с количеством твердой фазы кориума, находящегося в реакторе:

чем больше количество твердого кориума, тем меньше интенсивность отвода тепла к границам корпуса. Поэтому в первую очередь была проведена оценка соотношения твердого и жидкого в рассматриваемой области. На рис. 1 представлено семейство кривых, описывающее изменение объема твердой фазы при различных режимах охлаждения (числах Био) на верхней границе. Как показывают результаты расчетов, при достаточно широком диапазоне изменения числа Био на верхней границе от 30 до 600 разброс кривых незначителен. Так, в

диапазоне чисел Остроградского больше 100 различие в объемах твердой фазы при варьировании режимов охлаждения на верхней границе практически отсутствует. В указанном диапазоне изменения Os , характеризующимся незначительными объемами твердой фазы (менее 20%), определяющий характер в режиме теплопередачи начинают играть конвективные процессы. Поэтому в указанной области варьирование режимов охлаждения не оказывает влияния на соотношения твердого и жидкого в об-

ласти. Для чисел Остроградского из интервала $40 \leq Os \leq 100$ различие в объемах твердой фазы при изменении Bi_{up} , становится более заметным, поскольку указанный диапазон изменения числа Остроградского характеризуется значительными объемами твердого кориума. Так, различие в долях твердой фазы для режимов охлаждения $Bi_{up} = 30$ и 600 составляет около 10%, причем с ростом Bi_{up} доля твердой фазы увеличивается.

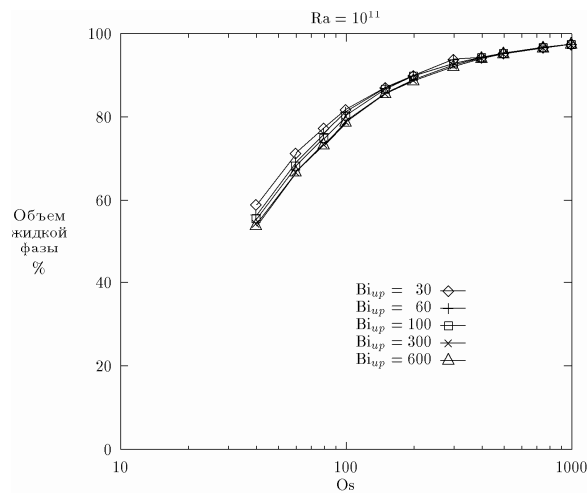


Рис. 1. Объем жидкой фазы в процентах

Поскольку интенсивность теплопередачи в области определяется, главным образом, средними тепловыми потоками, приходящими на границу области, далее будут представлены кривые изменения указанной величины на, верхней, боковой и нижней границах области, соответственно, для случая $Ra = 10^{11}$. На рис.2 представлены графики изменения доли теплового потока на верхней поверхности в отношении к интегральному тепловому потоку при различных режимах охлаждения верхней границы. Представленное семейство кривых может быть охарактеризовано следующими двумя тенденциями:

- 1) при высоких числах Остроградского, выше 100, разброс представленных кривых достаточно велик. Это означает, что в указанном диапазоне доминирует чисто конвективный теплообмен на верхней границе без наличия корок в области;
- 2) при малых числах Остроградского, меньше 100, наблюдается стремление кривых к сближению. Это обстоятельство указывает на переход от чисто конвективного теплообмена к режиму, при котором формируются корки на верхней границе.

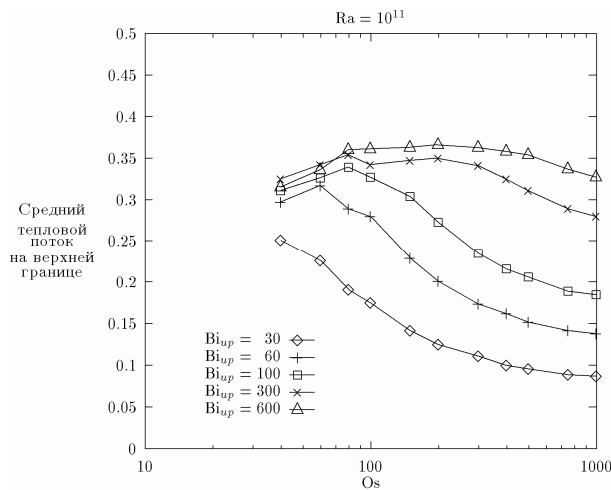


Рис. 2. Средний тепловой поток на верхней границе

Рис. 3 демонстрирует изменение среднего теплового потока, приходящегося на боковую границу рассматриваемой области при различных значениях $Bi_{верх}$. С уменьшением значения числа Био на верхней границе доля среднего теплового потока на боковой поверхности увеличивается и достигает величины 0.42. При числах Остроградского из диапазона выше 200 наблюдается выполаживание кривых при всех режимах охлаж-

дения на верхней границе. В области же малых чисел Остроградского, менее 200, доли среднего теплового потока независимо от режимов охлаждения на верхней границе стремятся к значению 0.25, что соответствует кондуктивному режиму теплопередачи. Сближение кривых к сгущению объясняется наличием больших объемов твердой фазы в области.

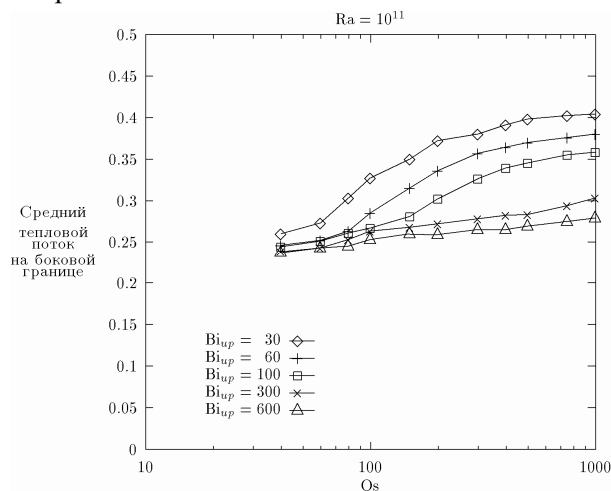


Рис. 3. Средний тепловой поток на боковой границе

Влияние параметра $Bi_{верх}$ на изменение средних значений теплового потока на нижней границе области практически отсутствует (см. рис. 4). Так, разница в значениях долей среднего теплового потока для двух предельных случаев режима охлаждения на верхней границе $Bi_{верх} = 30$ и $Bi_{верх} = 600$ составляет не более 2.2%. Как и в случае с распределением среднего теплового потока на боковой границе при $Os > 200$ наблюдается выполаживание кривых. При числах Остроградского меньше

200 доля теплового потока резко уходит вверх. Последнее обстоятельство объясняется доминированием кондуктивного режима теплопередачи в области. Таким образом, варьирование различных режимов теплопередачи на верхней границе оказывает влияние, главным образом, на распределение средних тепловых потоков, приходящихся на верхнюю и боковую границы рассматриваемой области и практически незначительно для нижней границы области.

Чего нельзя сказать об изменении величины u_{lig}/Os^{-1} , характеризующей изменение средней безразмерной температуры рассматриваемой области по отношению к средней температуре фазового перехода. Семейство кривых, описывающих изменение указанной величины при фиксированных значениях числа Релея, для двух предельных случаев охлаждения верхней границы представлено на рисунке 5. С продвижением по диапазону изменения числа Остроградского в сторону уменьшения Os ($40 \leq Os < 100$) наблюдается тенденция кривых к сгущению независимо от режима охлаждения на верхней границе. Как отмечалось ранее, доля твердой фазы возрастает с уменьшением значения числа Остро-

градского, что и является объяснением указанного поведения кривых. С увеличением числа Остроградского доля жидкости в рассматриваемой области увеличивается, и средняя температура области начинает значительно превосходить температуру фазового перехода. Причем указанная тенденция усиливается с уменьшением числа Релея. Кроме того, при изменении числа Био на верхней границе в диапазоне от 30 до 600 наблюдается изменение средней температуры в жидкой фазе от 10 до 15%. Указанная тенденция сохраняется в диапазоне чисел Остроградского больше 1000 для всех рассматриваемых значений числа Релея.

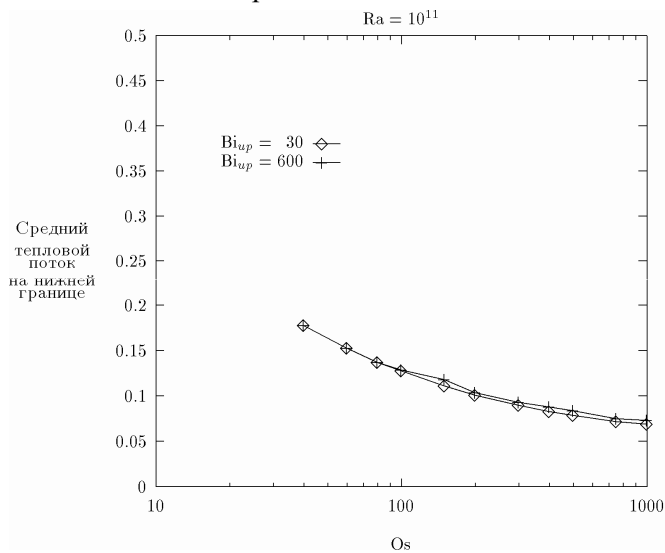


Рис. 4. Средний тепловой поток на нижней границе

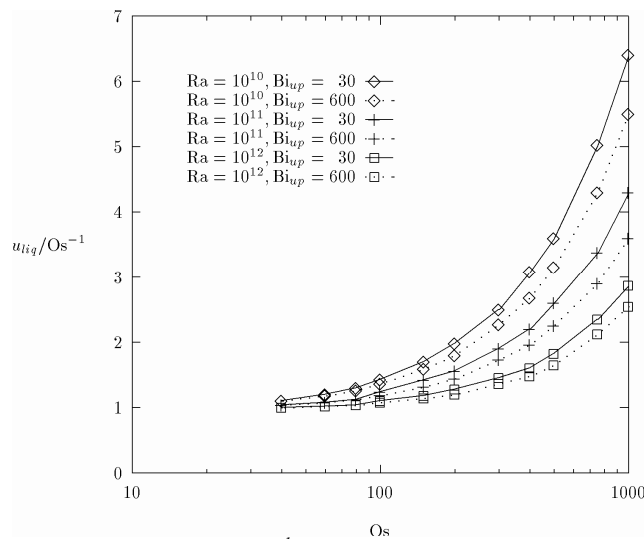


Рис. 5. Изменение величины u_{lig}/Os^{-1} в зависимости от числа Остроградского

Исследовано влияние числа Био на верхней границе на изменение среднего числа Нуссельта на границах рассматриваемой области. На рисунках 6-8 представлено распределение средних чисел Нуссельта для фиксированных значений числа Релея 10^{10} , 10^{11} , 10^{12} на верхней боковой и нижней стенках, соответственно. На каждом рисунке проводится сопоставление указанных величин для двух предельных случаев охлаждения верхней границы, а именно, при $Bi_{up} = 30$ и $Bi_{up} = 600$ (см. рис.6). При режиме охлаждения на верхней границе $Bi_{up} = 30$ интенсивность теплопередачи на границу области практически не зависит ни от числа Релея, ни от числа Остроградского. В другом предельном случае при $Bi_{up} = 600$ кривые $Nu_{up}(Os)$ ведут себя практически как в случае изотермического охлаждения всех границ области. Начиная со значения $Os > 200$, наблюдается расхождение кривых, а в диапазоне числа Остроградского выше 500 кривые выполаживаются и далее различие в значениях Nu_{up} между соседними значениями числа Релея сохраняется на уровне $\approx 23\%$.

Изменение среднего значения числа Нуссельта на боковой поверхности демонстрирует рисунок 7. В диапазоне чисел Остроградского выше 100 кривые интенсивности

начинают расходиться, причем различие в значениях Nu_{sd} при изменении числа Био на верхней границе от 30 до 600 составляет около $10\div 15\%$. Чем выше значение числа Релея, тем больше указанное различие между средними числами Нуссельта на боковой поверхности. При малых числах Остроградского, меньше 100, кривые сближаются, не зависимо от того, какой режим охлаждения на верхней границе, в силу доминирования кондуктивного режима теплопередачи в области.

Распределение среднего числа Нуссельта на нижней поверхности рассматриваемой области демонстрирует рисунок 8. Как показывают результаты вычислительного эксперимента, варьирование режимом теплоотдачи на верхней границе области практически не оказывает влияния на значение параметра Nu_{dn} , так разница для различных режимов охлаждения составляет не более 1%. С увеличением числа Релея различие несколько увеличивается, но все равно не превышает 2%.

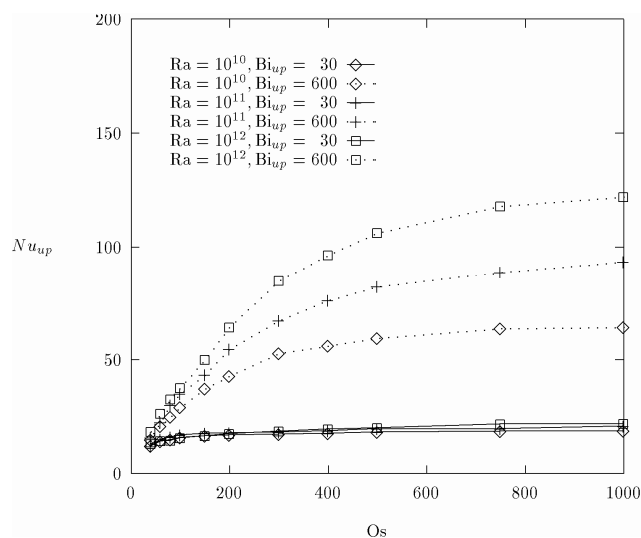


Рис. 6. Распределение среднего числа Нуссельта на верхней поверхности

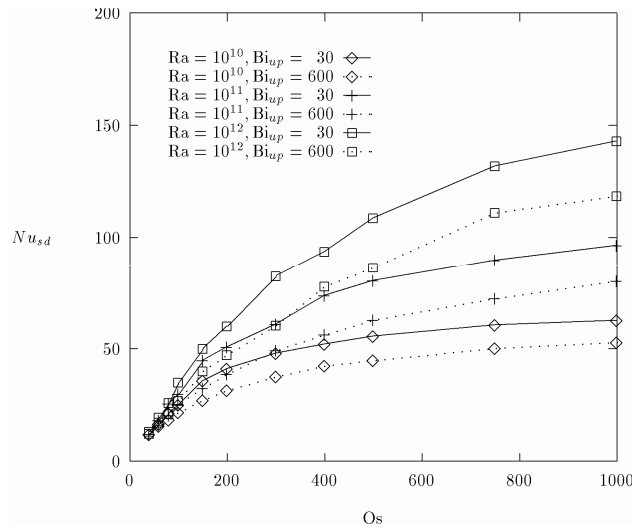


Рис. 7. Распределение среднего числа Нуссельта на боковой поверхности

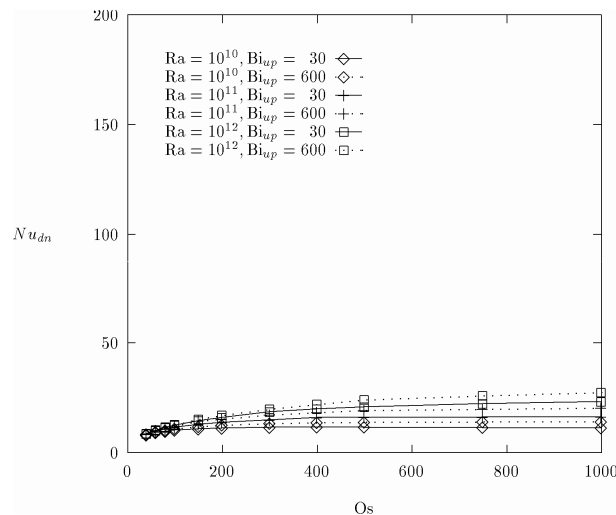


Рис. 8. Распределение среднего числа Нуссельта на нижней поверхности

Далее на рисунках 9–11 показано влияние параметра Bi_{up} на изменение среднего числа Нуссельта на границах рассматриваемой области на примере фиксированного значения числа Релея $Ra = 10^{11}$. На рис. 9 представлено семейство кривых $Nu_{up}(Os)$ для различных режимов охлаждения верхней границы рассматриваемой полости. Представленное семейство ограничено сверху графиком $Nu_{up}(Os)$ для предельного случая $Bi_{up} = \infty$, соответствующим изотермическим граничным условиям на верхней границе. Другими словами, кривые, характеризующие различные режимы охлаждения, сходятся к графику для случая $Bi_{up} = \infty$. Наилучшим образом повторяет график для предельного случая ($Bi_{up} = \infty$) кривая для случая граничных условий на верхней границе $Bi_{up} = 600$. Однако указан-

ное совпадение справедливо не во всем диапазоне чисел Остроградского, а лишь для значений Os не превосходящих 500. В диапазоне чисел Остроградского выше 500 кривые для случая $Bi_{up} = \infty$ и $Bi_{up} = 600$ начинают расходиться. График, соответствующий предельному случаю $Bi_{up} = \infty$, уходит вверх, а кривая для случая граничных условий $Bi_{up} = 600$ начинает выполаживаться. Последнее обстоятельство указывает на необходимость более осторожного использования изотермических граничных условий для интерпретации условий теплообмена при моделировании последствий тяжелых аварий. Так в реакторном случае интенсивный теплотъем с внешних границ корпуса соответствует конвективному теплообмену с высокими числами Био, ($Bi_{up} = \infty$). Основываясь на

этом факте, исследователи интерпретируют условия теплообмена как изотермические граничные условия. Однако в реальных ситуациях верхняя граница диапазона изменения числа Био дает величину 600, т.е. не изотермические, а почти изотермические граничные условия. Обнаруженное нами расхождение требует более подробного исследования и более адекватного подхода к моделированию условий охлаждения. Отмеченное ранее выполаживание кривой для случая $Bi_{up}=600$ наблюдается при всех режимах охлаждения, однако начало пологого участка с ростом значения числа Био на верхней границе смещается вправо в сторону увеличения числа Остроградского. Так, если в случае $Bi_{up}=30$ началу пологого участка соответствует число Остроградского 60, то для $Bi_{up}=60$ это значение равняется уже 100, а для условий на верхней границе $Bi_{up}=100$ и $Bi_{up}=300$ начало участка совпадает с числом Остроградского 150 и 400, соответственно. Если соединить точки, характеризующие начало выполаживания кривых $Nu_{up}(Os)$, то они образуют линию (сепаратриссу), представляющую собой границу образования корки. Ниже указанной линии корки в области отсутствуют, выше этой линии область характеризуется наличием корок и доминирующим влиянием кондуктивного режима теплопередачи.

На рис. 10 представлены графики изменения $Nu_{sd}(Os)$ для различных режимов охлаждения верхней границы полости. Как и в предыдущем случае, для сравнения на ри-

сунке представлен график для случая изотермических граничных условий на верхней границе. Этот график ограничивает представленное семейство $Nu_{sd}(Os)$ снизу. С увеличением значения параметра Bi_{up} наблюдается снижение среднего числа Нуссельта на боковой поверхности. Максимальная разница между средними значениями числа Нуссельта на боковой поверхности для двух предельных режимов охлаждения $Bi_{up}=30$ и $Bi_{up}=600$ достигается начиная со значения числа Остроградского 500 и далее сохраняется на протяжении всего диапазона изменения Os около 20%. Наиболее низкие значения Nu_{sd} наблюдаются при режимах охлаждения $Bi_{up}=300$ и 600, которые практически совпадают со случаем изотермических граничных условий ($Bi_{up} = \infty$). Выделение пологих участков кривых, как в случае с Nu_{up} , затруднено, поскольку начало этих участков лежит за пределами исследуемого диапазона чисел Остроградского.

Что касается влияния различных режимов охлаждения верхней границы на параметр Nu_{dn} , то, как видно из рисунка 11, оно незначительно. Семейство кривых $Nu_{dn}(Os)$ ограничено сверху графиком для случая изотермических граничных условий и практически полностью совпадает с ним. Расхождения в значения Nu_{dn} , наблюдаемые в диапазоне чисел Остроградского выше 300, составляют не более 10% для $Os = 300$, в случае $Os = 1000$ не превышают 20%.

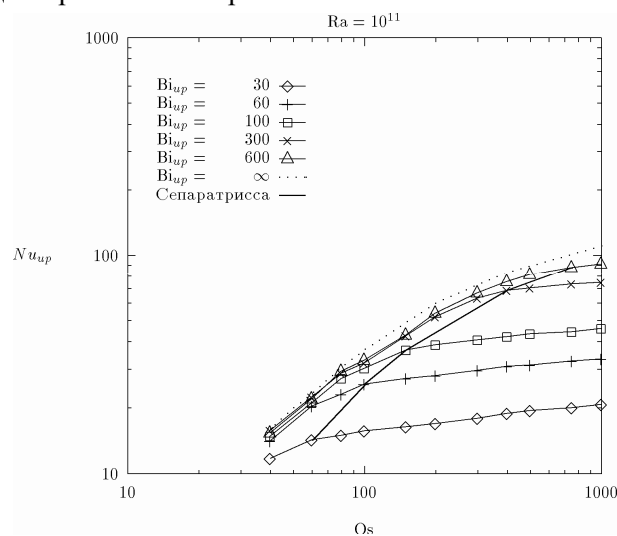


Рис. 9. Распределение среднего числа Нуссельта на верхней поверхности в зависимости от числа Остроградского при различных режимах охлаждения на верхней границе в случае $Ra = 10^{11}$

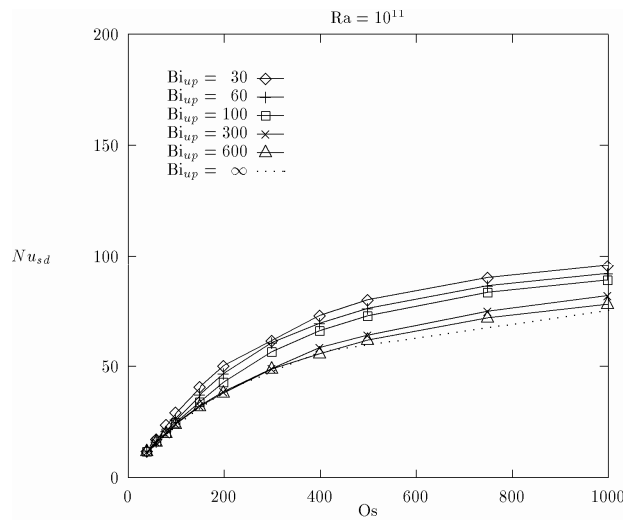


Рис. 10. Распределение среднего числа Нуссельта на боковой поверхности в зависимости от числа Остроградского при различных режимах охлаждения на верхней границе в случае $Ra = 10^{11}$

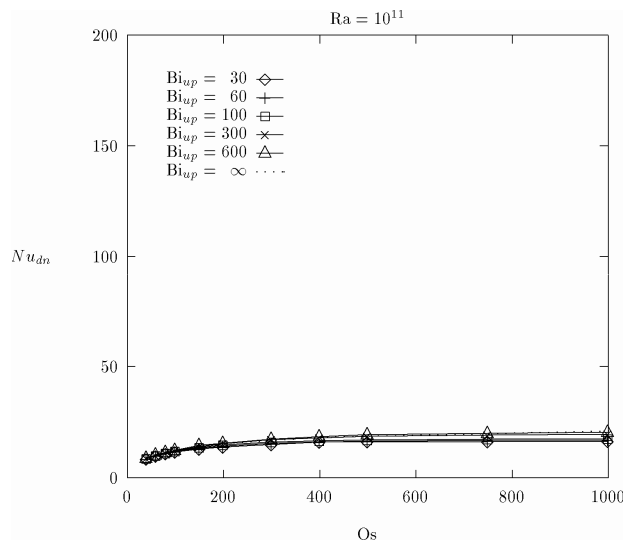


Рис. 11. Распределение среднего числа Нуссельта на нижней поверхности в зависимости от Os при различных режимах охлаждения на верхней границе в случае $Ra = 10^{11}$

Ниже на рисунках 12,13 представлены семейства кривых $Nu_{up}(Bi_{up})$ и $Nu_{sd}(Bi_{up})$ для различных значений числа Остроградского. Графики зависимости $Nu_{up}(Bi_{up})$ на рисунке 12, как и в случае обратной зависимости $Nu_{up}(Os)$ (см. рис. 9), имеют две области: 1) резкого возрастания и 2) пологий участок. Причем, начало пологих участков для всех режимов охлаждения на верхней границе остается таким же, как и в случае обратной зависимости $Nu_{up}(Os)$. Следовательно, можно построить сепаратриссу, соединяющую начала этих пологих участков, которая позволит определить границу формирования твердой фазы. В случае зависимости $Nu_{up}(Bi_{up})$

корка будет формироваться в области параметров, находящихся ниже сепаратриссы. Тогда как для обратной зависимости $Nu_{up}(Os)$ область формирования корки будет располагаться выше указанной кривой. Слева от сепаратриссы простирается область параметров, при которых на верхней границе области корка отсутствует и доминирует чисто конвективный режим теплопередачи.

Рисунок 13 демонстрирует графики зависимости $Nu_{sd}(Bi)$ для различных значений числа Остроградского.

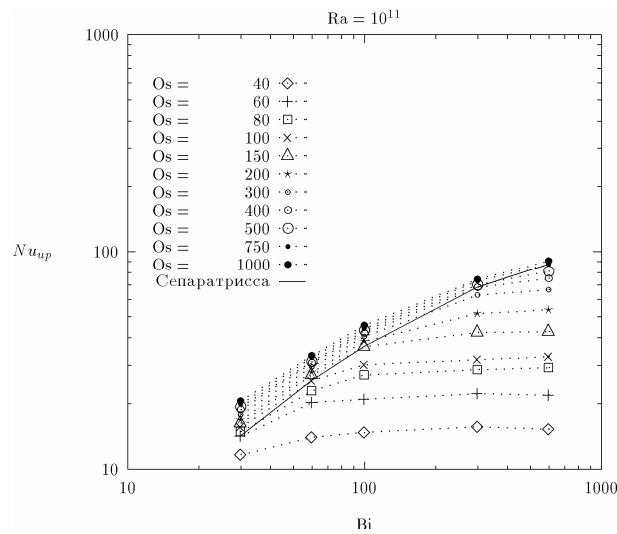


Рис. 12. Распределение $Nu_{up}(Bi)$ для различных чисел Остроградского в случае $Ra = 10^{11}$

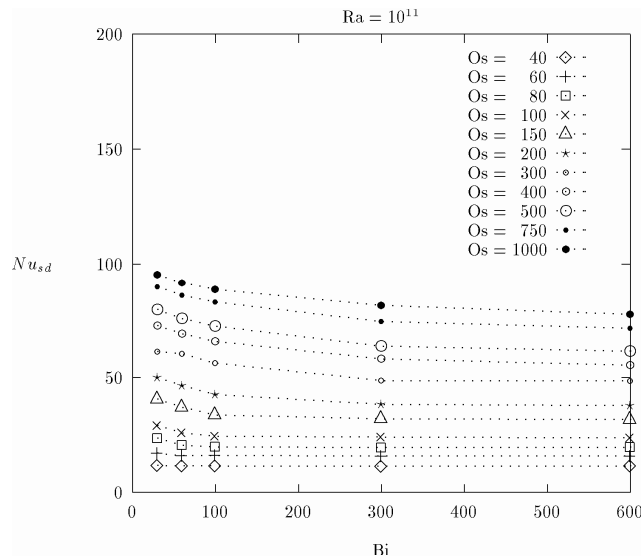


Рис. 13. Распределение $Nu_{sd}(Bi)$ для различных чисел Остроградского в случае $Ra=10^{11}$

Рисунки 14–16 представляют влияние различных режимов теплопередачи на изменение величины Nu_{max}/Nu_{av} , характеризующей изменение максимального теплового потока на боковую поверхность области Nu_{max} в сравнении с его средним значением Nu_{av} , для чисел Релея 10^{12} , 10^{11} и 10^{10} , соответственно. Как показывают результаты численного исследования, максимальные значения исследуемой величины для всех значений числа Релея достигаются при режиме охлаждения верхней границы

$Bi_{up} = 30$. Что касается сравнения семейства кривых для различных значений числа Релея, то можно отметить тот факт, что с возрастанием числа Релея верхняя граница диапазона изменения величины Nu_{max}/Nu_{av} , поднимается вверх. Так, если для $Ra = 10^{10}$ значения исследуемой величины попадают в интервал от 1 до 3, а в случае $Ra = 10^{11}$ верхняя граница диапазона поднимается до 4.5, то при $Ra = 10^{12}$ интервал изменения исследуемой величины имеет вид $1 \leq Nu_{max}/Nu_{av} \leq 7.5$.

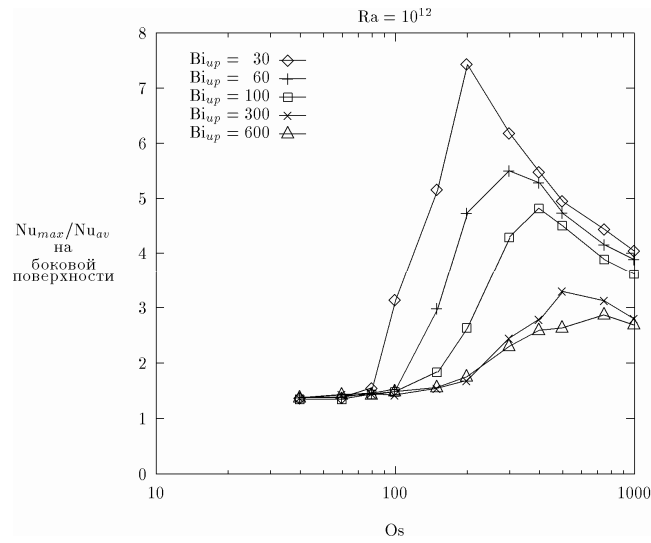


Рис. 14. Изменение величины Nu_{max}/Nu_{av} на боковой поверхности каверны в случае $Ra=10^{12}$

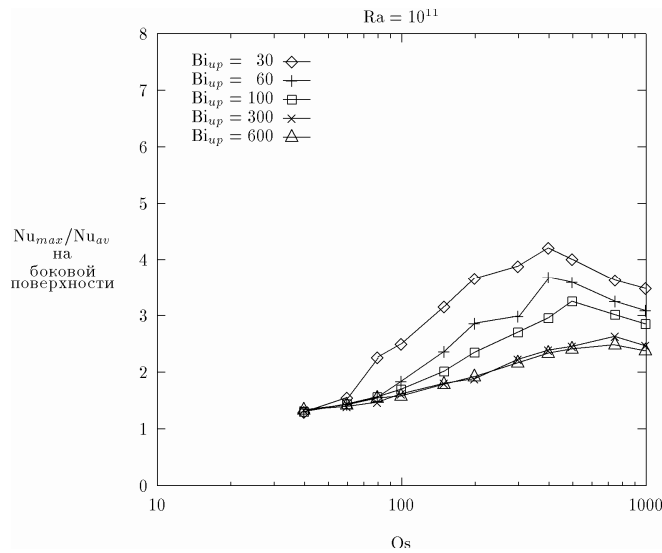


Рис. 15. Изменение величины Nu_{max}/Nu_{av} на боковой поверхности каверны в случае $Ra=10^{11}$

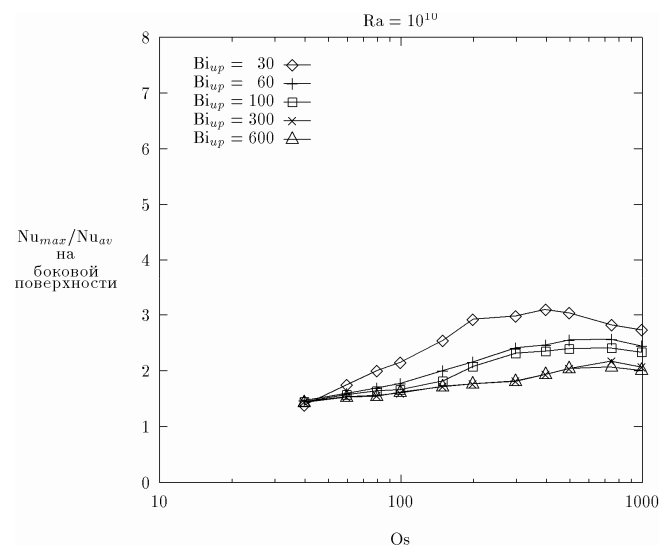


Рис. 16. Изменение величины Nu_{max}/Nu_{av} на боковой поверхности каверны в случае $Ra=10^{10}$

Заключение

В результате численного исследования тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания при различных режимах охлаждения на границах можно заключить следующее.

1. Изменение объемов твердой фазы при различных режимах охлаждения на верхней границе незначительно.
2. Варьирование различных режимов теплопередачи на верхней границе рассматриваемой полости оказывает влияние, главным образом, на распределение средних тепловых потоков приходящихся на верхнюю и боковую границы полости и незначительно для нижней границы.
3. Наиболее существенные отличия в значениях средних чисел Нуссельта при варьировании режимов охлаждения на верхней границе проявляются на боковой поверхности полости, а также при

высоких числах Bi_{up} на верхней границе. Распределение средних чисел Нуссельта на нижней границе практически не зависит от режимов охлаждения верхней поверхности полости.

4. Построена серпаратрисса, соединяющая участки выполаживания семейства кривых $Nu_{up}(Os)$ при различных режимах охлаждения верхней границы, позволяющая определять границу формирования твердой фазы в полости. Подобная кривая построена и для случая обратной зависимости $Nu_{up}(Bi)$ для различных значений числа Остроградского.
5. Продемонстрирована эволюция поведения распределения Nu_{max}/Nu_{av} на боковой поверхности в зависимости от чисел Остроградского и при различных режимах теплосъема на верхней границе и различных значений числа Релея.

Литература

6. Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Параметрическое численное исследование теплообмена тепловыделяющей жидкости с учетом плавления и затвердевания в зависимости от чисел Остроградского и Релея. ИБРАЭ-95-01, Москва, 1995.
7. Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Стрижов В.Ф., Чуданов В.В., Численное моделирование свободно-конвективных движений стратифицированной тепловыделяющей жидкости. ИБРАЭ-95-03, Москва, 1990.
8. Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Численное исследование некоторых особенностей поведения тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания. ИБРАЭ-95-04, Москва, 1995.
9. Kelkar K.M., Schmidt R.C. and Patankar S.V., Numerical analysis of laminar natural convection of an internally heated fluid in a hemispherical cavity, Proceedings, International Heat Transfer Conference, San Diego, 1991, pp.355-364.
10. Kulacki F.A. and Emara A.A., Steady and transient convection in a fluid layer with uniform volumetric energy sources, J. Fluid Mech., 1977, Vol.83, pt.2, pp.375-395.
11. Maying F.X., Jahn M., Reineke H.H. and Steinbrenne V., Examination of Thermohydraulic Processes and Heat Transfer in a Core Melt, Federal Ministry for Research and Technology, Final Report BMFT RS 48/1, Institut für Verfahrenstechnik der T.U., Hanover FRG, (in German), 1976.
12. Kulacki E.A., Review and Evaluation of 'Examination of Thermohydraulic Processes and Heat Transfer in a Core Melt', by Maying, Jahn, Reineke, and Steinbrenner. Letter Report prepared for U.S.N.R.C. under contract AT (49-24)-0149, Mar 31, 1976.
13. Steinbrenner U. and Reineke H.H., Turbulent Bouyancy Convection Heat Transfer with Internal Heat Sources, Proceedings, 6th Int. Heat Transfer Conf., Paper NC-21, Toronto(Canada), 1978, Vol.2, pp.305-310.

14. Mayinger F.X., Fritz P., Reineke H.H. and et al., Theoretical and Experimental Research on the Behavior of a Core Melt on Reactor Containment and on the Basement Concrete, Bundesministerium fuer Forschung und Technologie. FT-FB (RS 166-79-05), Bonn FRG, (in German), 1980.
15. E.L.Tolman, P.Kuan and J.M.Broughton, TMI-2 accident scenario update, J. Nuclear Engineering and Design 108(1988), pp.45-54.
16. Kayser G., The SCARABEE BF1 Experiment with a Molten UO₂ Pool and its Interpretation, Proceedings. Workshop on Large Molten Pool Heat Transfer, France, 1994, 207-227.
17. Вабищевич П.Н., Метод фиктивных областей в задачах математической физики, Москва, Из-во МГУ, 1991.
18. Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В. и Чурбанов А.Г., Численное моделирование конвективных течений в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура", ИММ РАН, Препринт No. 28, Москва, 1993.
19. Lee J.-H. and Golstein R.J., An experimental study on natural convection heat transfer in an inclined square enclosure containing internal energy sources, ASME J. Heat Transfer, 1988, Vol.110, pp.345-349,
20. Jahn M. and Reineke H.H., Free convection heat transfer with internal heat sources, calculations and measurements, Proceedings, 5th Int. Heat Transfer Conf, Tokyo(Japan), 1974, pp.74-78.
21. May H.-O., A numerical study on natural convection in an inclined square enclosure containing internal heat sources, Int. J. Heat Mass Transfer, 1991, Vol.34, pp.919-928.
22. Chudanov V.V., Churbanov A.G., Strizhov V.F. and Vabishchevich P.N., Current Status and Validation of RASPLAV Code, Proceedings, 21st Water Reactor Safety Meeting, Washington (USA), 1993.
23. Bolshov L.A., Arutyunyan R.V., Chudanov V.V., Aksenova A.E. and et al., Numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in nuclear reactor safety problems, Proceedings 4th International Topical Meeting on Nuclear Thermal Hydraulics, Operations and Safety, Taipei(Taiwan), 1994.
24. A.G. Churbanov, P.N. Vabishchevich, V.V. Chudanov, and V.F. Strizhov, A numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in rectangular enclosures, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 37, No. 18, pp. 2969-2984, 1994.

Номенклатура

d – диаметр экспериментальной установки

l – высота полости

V – объем

HF – тепловой поток

$v = (v_1, v_2)$ – вектор скорости

$Nu = -(\text{grad } u)$ – локальное число Нуссельта

p – нормализованное на плотность давление

$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ – число Прандтля

g – ускорение свободного падения

$Ra_q = \frac{\beta g q l^5}{\alpha \nu k}$ – модифицированное число Релея

u – отклонение температуры от равновесной

$$Ra_u = \frac{\beta g (u_l - u_w)^3}{\alpha \nu} - \text{число Релея}$$

ν – кинематическая вязкость

$$Os = \frac{g l^2}{k (u_l - u_w)} - \text{число Остроградского}$$

β – коэффициент объемного расширения

$$Ste = \frac{\lambda}{c (u_s - u_l)} - \text{число Стефана}$$

$e = (0, 1)$ – вектор, определяющий направление выталкивающей силы

$$Bi = \frac{hl}{k} - \text{число Био}$$

q – мощность однородного теплового источника

δ – дельта-функция

λ – энтальпия фазового перехода

c – коэффициент теплоемкости

k – коэффициент теплопроводности

$Asp = l/x$ – аспектное отношение

$$Nu = \frac{1}{l} \int_l \frac{Nu}{u_{av}} dl - \text{среднее число Нуссельта}$$

$$u_{av} = \frac{1}{V} \int_V u dV - \text{средняя температура}$$

x – ширина полости

h – коэффициент теплопередачи

u_l – температура фазового перехода

u_w – температура стенки

ρ – плотность

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} - \text{коэффициент температуропроводности}$$

$$Q = \frac{1}{l} \int_l Nu dl - \text{средний тепловой поток}$$

Подиндексы

up – верхняя поверхность

sd – боковая поверхность

dn – нижняя граница

av – среднее значение

max – максимальное значение

$crust$ – корка

$full$ – полный

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ОХЛАЖДЕНИЯ НА ГРАНИЦАХ Раздел 2

А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов

1. Введение

Представленная работа является продолжением параметрических численных исследований конвективного теплообмена тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями начатых в работах [1, 2, 3, 4]. В работе [1] были рассмотрены особенности конвективного теплообмена тепловыделяющей жидкости для случая квадратной полости с изотермическими граничными условиями на всех границах [1]. Затем последовательно исследовалось влияние аспектного отношения и возможной стратификации находящегося в полости вещества на распределение тепловых нагрузок на границы полости [2], а также проводилась оценка локализации максимальных тепловых нагрузок на боковой поверхности [3]. Продолжение этих исследований нашло свое отражение в работе [4], где основное внимание было уделено исследованию влияния различных режимов охлаждения на верхней границе на основные безразмерные параметры задачи естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями.

В этой работе было продолжено исследование естественной конвекции тепловыделяющей жидкости при различных режимах охлаждения на границах. Однако в отличие от предыдущей работы [4], где задача решалась в полости квадратного сечения с различными режимами охлаждения верхней границы и изотермическими остальными поверхностями, в этой работе вместе с условиями на верхней границе варьировались также и граничные условия на боковых и нижней стенках полости.

Важность подобного исследования обусловлена необходимостью предсказания поведения расплава топливосодержащих масс (ко-

риума) для различных сценариев гипотетических тяжелых аварий на атомных станциях [5–8]. В ходе такой аварии, с разрушением и плавлением активной зоны реактора, возможно формирование достаточно больших объемов расплава кориума или, другими словами, 'molten pool', приводящего к разрушению корпуса реактора. Замедление процесса разрушения и/или его полное приостановление и удержание расплава внутри корпуса может быть достигнуто с помощью соответствующего режима охлаждения расплавленной области. В свою очередь, выбор режима охлаждения во многом зависит от того, на какой стадии развития аварии (ранней или поздней) формируется расплавленная область и от места формирования последней в реакторе. Так, формирование расплава кориума может происходить на ранней стадии протекания тяжелой аварии, непосредственно внутри активной зоны реактора при наличии водяного охлаждения и отводе тепла с верхней границы 'molten pool', как было в случае аварии на ТМІ-2 [9]. Возможно также образование 'molten pool' на поздней стадии разрушения активной зоны, в нижней части корпуса реактора после стекания туда расплава при условии достаточно эффективного внешнего охлаждения на корпусе реактора и утоньшении стенок корпуса за счет плавления или/и их химического растворения. В обоих случаях условия на верхней границе расплавленной области отличаются большим разнообразием, начиная с условия практически полного теплового равновесия с окружающими конструкциями и заканчивая условием идеального теплоотвода в случае залива водой сверху. Условия теплоотвода на боковых поверхностях и дне 'molten pool' могут характеризоваться боль-

шими числами Био, что близко к условиям изотермического охлаждения указанных поверхностей.

Подтверждением вышесказанного может служить авария на ТМІ-2 [9], когда для предотвращения разогрева активной зоны был осуществлен повторный залив водой, в результате чего происходило достаточно эффективное охлаждение боковых поверхностей расплавленной области и образование корок. На верхней границе расплавленного кориума, предположительно, вода отсутствовала или же верхняя граница указанной области находилась при менее эффективном режиме охлаждения, чем боковые поверхности 'molten pool'. И вероятно, указанное различие в режимах охлаждения верхней и боковой поверхностей 'molten pool' могло оказывать определенное влияние на поведение расплава тепловыделяющего кориума и образование топливных корок и приводить к изменению привычной картины распределения тепловых потоков. Поэтому, можно было ожидать значительного влияния таких параметров, как число Био и число Остроградского на основные теплофизические характеристики расплава тепловыделяющего кориума. В связи с вышесказанным необходимо более подробное исследование влияния различных режимов охлаждения на механизм теплопередачи в тепловыделяющем кориуме с учетом возможного затвердевания последнего.

Оценка диапазона изменения числа Био, с помощью которого моделируются режимы охлаждения на границах, для верхней границы расплавленной области дает значения нижнего и верхнего пределов 30 и 600, соответственно. Так, при характерном размере $L \approx 2 \cdot 10^2$ см и коэффициенте теплопроводности $\kappa_{ox} \approx 3 \cdot 10^{-2}$ Вт/(см К) из соотношений

$$h \sim \sigma u^3, \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-12} \text{ Вт}/(\text{см} \cdot \text{К});$$

$$Bi_{up} = \frac{hL}{\kappa_{ox}}$$

для различных температурных режимов на поверхности расплавленной области мы будем иметь следующие значения числа Био на верхней границе:

для u , К	Bi_{up}
1000	≈ 40
2000	≈ 300
2500	≈ 600

На боковой поверхности расплавленной области условия теплосъема в основном определяются толщиной стенок корпуса реактора. Учитывая вышесказанное, можно переписать выражение для числа Био на боковой поверхности через коэффициент теплоотдачи корпуса $h_{met} = h = \kappa_{met}/b_{met}$.

В этом случае для безразмерного параметра Bi_{sd} мы будем иметь соотношение вида

$$Bi_{sd} = \frac{\kappa_{met}}{\kappa_{ox}} \frac{L}{b_{met}}. \quad (1)$$

Полученное выражение (1) для разных толщин металлических стенок корпуса и при условии, что отношение коэффициентов теплопроводности κ_{met}/κ_{ox} равняется 15, дает нам следующие характерные значения числа Био на боковой поверхности расплавленной области:

Толщина стенки корпуса b_{met} , см	Bi_{sd}
Min= 5	≈ 600
Max=30	≈ 100

Диапазон изменения числа Био: $100 \leq Bi_{sd} \leq 600$, позволит учесть различные режимы охлаждения боковой поверхности 'molten pool'. Таким образом, проводя исследование конвективного теплообмена тепловыделяющей жидкости при числах Био $Bi_{up} = 30, 100$ и $Bi_{sd} = 30, 100, 300$ мы получим оценки для большинства наиболее вероятных режимов охлаждения 'molten pool'.

В численных расчетах применен достаточно эффективный математический алгоритм для решения нестационарных задач гидродинамики и теплопроводности. Он позволяет провести большое количество параметрических численных расчетов для создания адекватной базы данных основных тепловых характеристик в зависимости от безразмерных параметров (Ra , Os , Bi). Поскольку для рассматриваемой проблемы зависимость основных тепловых характеристик от числа Прандтля и аспектного отношения является менее значимой в сравнении с остальными параметрами, значения Pr и Asp принимаются равными единице.

Полученные результаты представлены в виде графиков.

2. Математическая формулировка задачи

Рассматривается двумерная задача естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения с граничными условиями третьего рода.

Пусть

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\} \quad \text{—}$$

область, в которой будем искать решение поставленной задачи. Введем следующее обозначение для границы фазового перехода $S(t)$:

$$S(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) = u_\ell\} \quad (1)$$

где u_ℓ — температура фазового перехода. Последняя разбивает область Ω на две подобласти. Определим область,

содержащую жидкую фазу вещества как

$$D(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) > u_\ell\}, \text{ а область,}$$

содержащую твердую фазу вещества — $D_0 = \Omega/D$. Задачу будем рассматривать в нестационарной постановке.

Для описания процессов тепло- и массопереноса в тепловыделяющей жидкости с однородным объемным источником тепла, с учетом фазовых превращений, используются нестационарные уравнения Навье–Стокса в приближении Буссинеска совместно с уравнением для температуры:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} v - \beta g e u = 0, \quad x \in D, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in D, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$(c(u) + \lambda \delta(u - u_\ell)) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \operatorname{grad} u \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = q, \quad (4)$$

$$x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T.$$

Без ограничения общности будем рассматривать случай постоянных коэффициентов теплоемкости и теплопроводности в твердой и жидкой фазах, не меняющихся при фазовом превращении.

Рассматриваемая область течения представляет собой замкнутую полость с неподвижными твердыми стенками, поэтому на

границах полости ∂D задаются условия прилипания и непротекания вида:

$$v(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad 0 < t \leq T. \quad (5)$$

В качестве тепловых условий выбраны граничные условия третьего рода, что позволяет моделировать различные режимы охлаждения границ полости:

$$k(u) \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_w) = 0, \quad x = (x_1, x_2), \quad 0 < x_\alpha < 1, \quad \alpha = 1, 2. \quad (6)$$

где n — внешняя нормаль.

В силу того, что в начальный момент времени жидкость покоится и имеет равновесную температуру, начальное условие для скорости имеет вид

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in D, \quad (7)$$

а начальное условие для температуры определяется соотношением

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

Поскольку первоначально вся область представляет собой жидкую фазу вещества, то $D(0) = \Omega$.

Таким образом, соотношения (2–8) полностью описывают свободную конвекцию тепловыделяющей жидкости с учетом фазовых превращений в области Ω на любой момент времени $t > 0$. Численное исследование вышеназванной задачи проводится в безразмерной постановке с помощью вычислительного алгоритма, использующего переменные "функция тока, вихрь скорости, температура". Компоненты скорости определяются через функцию тока $\psi(x, t)$ как:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (9)$$

поэтому условие несжимаемости (3) всегда выполнено. Для вихря скорости имеем соотношение

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (10)$$

Учитывая соотношения (9), (10) из уравнения движения (2) для вихря скорости получим следующее выражение в безразмерных переменных

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (v \nabla) w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} - \frac{Ra_q}{Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (11)$$

$$x \in D, 0 < t \leq T$$

с модифицированным числом Релея, получаемым по мощности теплового источника q . Уравнение (11) может быть переписано

$$(1 + Ste \chi_{sl}) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (v \nabla) u \right) - \frac{1}{Pr} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + 1 \right) = 0, \quad (14)$$

$$x \in \Omega, 0 < t \leq T,$$

где число Стефана определяется из соотношения $Ste = \lambda / (c \cdot (u_s - u_\ell))$, где

$$\chi_{sl} = \begin{cases} 1, & u \in (u_s, u_\ell) \\ 0, & u \notin (u_s, u_\ell), \end{cases}$$

а u_s – температура солидус.

Обезразмеривание здесь проведено по высоте полости l , коэффициенту кинематической вязкости ν и величине ql^2/k , пропорциональной перепаду температуры.

Система уравнений (12–14) дополняется граничными и начальными условиями, вытекающими из (5–8). Условия прилипания и непро-

через безразмерное число Остроградского в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (v \nabla) w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} - \frac{Ra_u Os}{Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (12)$$

где использовано число Релея, определяемое по характерному перепаду температур

$$Ra_u = \frac{\beta g (u_\ell - u_w) l^3}{\alpha \nu}$$

и число Остроградского определяется с помощью соотношения

$$Os = \frac{ql^2}{k(u_\ell - u_w)}.$$

Здесь и далее будем использовать для безразмерных переменных те же обозначения что и для точных величин. Заметим, что везде далее по тексту под числом Релея Ra мы будем понимать модифицированное число Релея, получаемое по мощности теплового источника q , $Ra_q = \frac{\beta g q l^5}{\alpha \nu k}$.

Из уравнения несжимаемости (3) будем иметь уравнение Пуассона для функции тока

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha^2} = w, x \in D, 0 < t \leq T. \quad (13)$$

Уравнение энергии (4) в безразмерных переменных переписывается в виде

текания (5) на границе единичного квадрата Ω дают соотношения

$$\psi(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T, \quad (16)$$

Из условия (7) имеем

$$\psi(x, 0) = 0, x \in D. \quad (17)$$

Граничные условия конвективного теплообмена (третьего рода) в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial n} + Bi u = 0, 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2. \quad (18)$$

Начальное условие для температуры остается без изменений.

3. Метод решения

Для нахождения приближенного решения задачи (12–18) с расчетом поля течения в изменяющейся области $D(t)$ используется вариант метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам [10]. Реализация разностной схемы расщепления [11] основана на решении сеточных эллиптических задач на каждом шаге по времени. Подобный подход хорошо зарекомендовал себя при решении задач свободной конвекции тепловыделяющей жидкости, что подтверждает совпадение полученных результатов с экспе-

риментальным [6,12] и численно-экспериментальным [13,14] исследованиями для различных граничных условий и геометрий расчетной области. Результаты тестирования вычислительного алгоритма для задачи свободной конвекции тепловыделяющей жидкости опубликованы в работах [15, 16]. Кроме того, некоторые из результатов, касающиеся исследования периодической естественной конвекции в замкнутой полости прямоугольного сечения, представлены в статье [17].

4. Результаты численного моделирования

Численное исследование влияния различных режимов охлаждения верхней и боковой поверхностей полости квадратного сечения на основные параметры задачи естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания было проведено в следующем диапазоне безразмерных параметров: $10^{10} \leq Ra \leq 10^{12}$, $40 \leq Os \leq 1000$, $Bi_{up}=30, 100$, $Bi_{sd} = 30, 100, 300$, $Bi_{dn} = 30, 100, 300$, $Ste = 0$, $Pr = 1$. Расчеты проводились на Sun 4/80 (Sparc Station 10) методом установления, до достижения квазистационарного решения. Вычисления прерывались при одновременном выполнении следующих условий: производная по времени от средней в объеме температуры в норме L_2 осциллирует вблизи нуля; суммарное тепловыделение на боковые, верхнюю и нижнюю грани осциллирует вблизи единицы (в квадратной каверне суммарное тепловыделение равно единице).

Основное внимание уделялось таким характеристикам, как: объем жидкой фазы, средним тепловым потокам на верхнюю, боковую и нижнюю поверхности полости, температуре жидкой фазы и средним значениям чисел Нуссельта на соответствующие поверхности.

Поскольку в процессе достижения квазистационарного решения, исследуемые па-

раметры осциллировали вблизи своих средних значений, проводилось осреднение вычисляемых величин по достаточно большой выборке временных результатов.

Достоверность получаемых результатов проверялась путем проведения расчетов на последовательности сгущающихся сеток и сопоставлении получаемых решений на неизменяемость в рассматриваемом диапазоне параметров. Результаты проверки на последовательности сгущающихся сеток и тестирование используемой методики представлены в [1].

Полученные результаты представлены в виде графиков. На каждом из приводимых ниже рисунков будут показаны два семейства кривых. Первое семейство соответствует режиму охлаждения верхней границы $Bi_{up} = 30$ и различным режимам охлаждения боковой и нижней поверхностей полости, а именно, числам Био $Bi_{sd} = 30, 100, 300$. Второе семейство соответствует режиму охлаждения верхней границы $Bi_{up} = 100$ при тех же, что и для первого семейства, значениях числа Био на боковой и нижней поверхностях.

На рис. 1 представлено изменение объема жидкой фазы в зависимости от числа Остроградского для фиксированного значения числа Релея, равного 10^{11} . Помимо вышеупомянутых семейств на рисунке 1

представлен график изменения объема жидкой фазы в случае изотермического охлаждения всех граней полости. Как показывают результаты расчетов, в диапазоне чисел Остроградского меньше 100, наблюдается тенденция к резкому сокращению доли жидкости в рассматриваемой области, и, следовательно, возрастает объем твердой фазы (корок). С увеличением числа Остроградского (выше 100) различие в долях твердой фазы при различных режимах охлаждения боковой поверхности начинает исчезать в силу конвективного характера режима теплопередачи в указанном диапазоне изменения Os и наличия в полости значительных объемов жидкой фазы. С увеличением параметра Bi_{sd} наблюдается увеличение объемов твердой фазы в полости, и кривые

начинают монотонно стремиться к предельному случаю, соответствующему изотермическому охлаждению всех поверхностей. Однако необходимо отметить, что, несмотря на увеличение объема твердой фазы с ростом параметра Bi_{sd} темпы роста твердой фазы с увеличением значения Bi_{sd} замедляются. Так, например, для $Os = 100$ в случае изменения режима охлаждения $Bi_{sd} = 30$ на режим $Bi_{sd} = 100$ доля твердой фазы увеличивается на 10%, при переходе от режима охлаждения $Bi_{sd} = 100$ к режиму $Bi_{sd} = 300$ объем твердой фазы возрастает лишь на 5%, а при дальнейшем увеличении Bi_{sd} ($Bi_{sd} = \infty$), что соответствует изотермическому охлаждению боковой поверхности полости объем твердой фазы увеличится только на 2%.

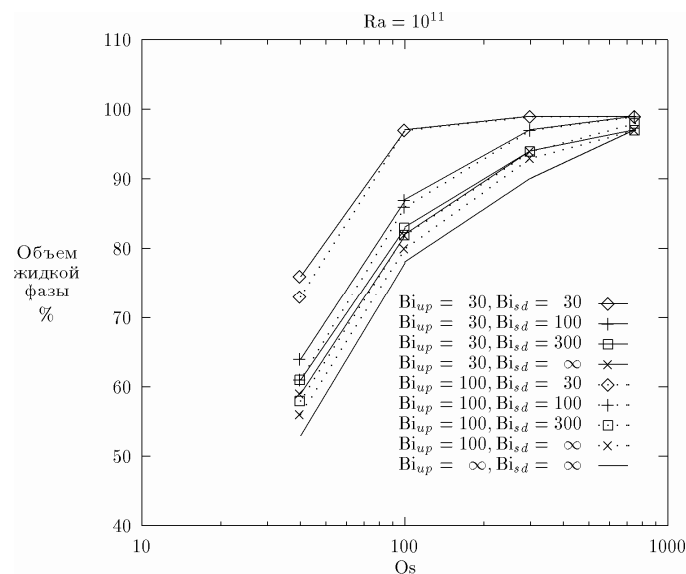


Рис. 1. Объем жидкой фазы в процентах

На рис. 2–4 показано изменение средних тепловых потоков приходящихся на границы рассматриваемой полости для случая $Ra = 10^{11}$. Рисунок 2 демонстрирует изменение доли теплового потока на верхней поверхности. Как видно из рисунка 2, с уменьшением значения числа Остроградского наблюдается стремление кривых к значению 0.25 для совпадающих режимов охлаждения верхней и боковых поверхностей полости, что соответствует предельному кондуктивному режиму теплопередачи. При числах Остроградского выше 300 наблюдается тенденция к выполажи-

ванию, что объясняется увеличением объемов жидкой фазы в полости и преобладанием в ней конвективного режима теплопередачи. С увеличением числа Остроградского и возрастанием величины параметра Bi_{sd} доля среднего теплового потока, приходящегося на верхнюю границу полости, сокращается. А при изменении значения параметра Bi_{up} на верхней границе от 30 до 100 различие в долях среднего теплового потока увеличивается.

На рис. 3 показано изменение среднего теплового потока на боковой поверхности. Так же как и в предыдущем случае, при совпа-

дающих режимах охлаждения поверхностей полости наблюдается стремление кривых к значению 0.25 с уменьшением значения числа Остроградского. С продвижением по диапазону изменения числа Остроградского в сторону увеличения Os и с ростом параметра Bi_{sd} доля среднего теплового потока, приходящегося на боковую поверхность полости, увеличивается. А в диапазоне чисел Остроградского выше 300 наблюдается стремление кривых к выполаживанию, что связано с преобладанием жидкой фазы в полости и конвективным характером режима теплопередачи в ней. С возрастанием параметра Bi_{up} при совпадающих значениях Bi_{sd} доля среднего теплового потока, приходящаяся на боковую поверхность рассматриваемой области, уменьшается.

Изменение доли среднего теплового потока на нижней границе полости показано на рисунке 4. Увеличение значения параметра Bi_{sd} приводит к снижению доли среднего теплового потока, приходящегося на нижнюю поверхность полости. Так, например, для случая $Os = 750$ при изменении режима охлаждения боковой поверхности полости с $Bi_{sd}=30$ на $Bi_{sd} = 300$ наблюдается практически двукратное сокращение доли теплового потока приходящегося на нижнюю границу полости. С уменьшением числа Остроградского наблюдается стремление доли средне-

го теплового потока к величине 0.25 для одинаковых режимов охлаждения всех поверхностей. С увеличением числа Остроградского наблюдается расхождение кривых и стремление их к выполаживанию. Влияние параметра Bi_{up} на распределение средних тепловых потоков на нижней границе полости незначительно. Тем не менее, необходимо отметить тот факт, что в диапазоне чисел Остроградского 60–200 наблюдается пересечение кривых соответствующих различным режимам охлаждения боковой поверхности, и точка пересечения кривых сдвигается влево с увеличением параметра Bi_{up} . Так, для семейства кривых с $Bi_{up} = 30$ для числа Остроградского равного 100 мы можем говорить о совпадении средних тепловых потоков, приходящихся на нижнюю границу полости независимо от режимов охлаждения боковой поверхности. Подобные тенденции в поведении кривых характерны и для второго семейства с $Bi_{up} = 100$, для которого совпадение средних тепловых потоков, приходящихся на нижнюю границу полости, наблюдается при $Os=60$. Дальнейшее расхождение кривых от точки пересечения с увеличением или уменьшением значений числа Остроградского связано с увеличением и сокращением, соответственно, объемов жидкой фазы в полости.

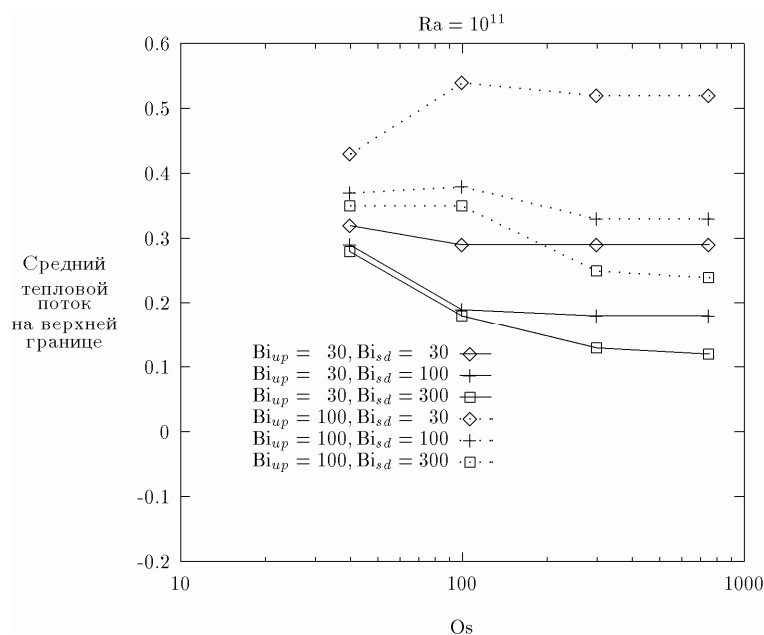


Рис. 2. Средний тепловой поток на верхней границе

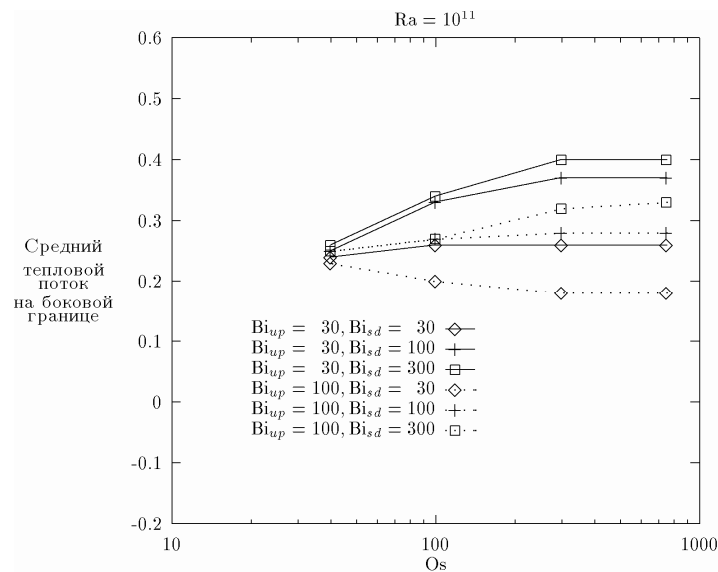


Рис. 3. Средний тепловой поток на боковой границе

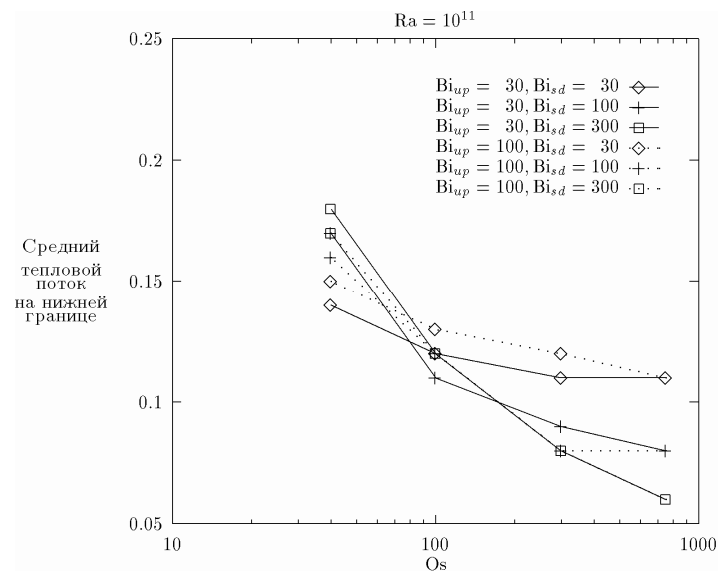


Рис. 4. Средний тепловой поток на нижней границе

На рисунке 5 представлено изменение температуры жидкой фазы в зависимости от числа Остроградского. С ростом числа Остроградского кривые начинают расходиться и, одновременно, наблюдается тенденция к выполаживанию, причем граница начала полого участка сдвигается вправо с увеличением параметра Bi_{sd} . С возрастанием величины Bi_{sd} и ростом числа Остроградского наблюдается уменьшение температуры жидкой фазы в каждом из семейств. Увеличение значения параметра Bi_{up} приводит к дальнейшему уменьшению температуры

жидкой фазы при совпадающих значениях Bi_{sd} . С уменьшением параметра Bi_{sd} увеличивается расхождение в значениях температуры жидкой фазы для двух различных семейств. Так, в случае режима охлаждения боковой поверхности $Bi_{sd} = 30$ температура жидкой фазы при $Bi_{up} = 30$ в ≈ 1.4 раза (13%) превышает ее значение для режима охлаждения верхней границы $Bi_{up} = 100$ ($Os \geq 300$), а при режиме охлаждения боковой поверхности $Bi_{sd} = 300$ одно значение превышает другое примерно в 1.1 раза (около 2%).

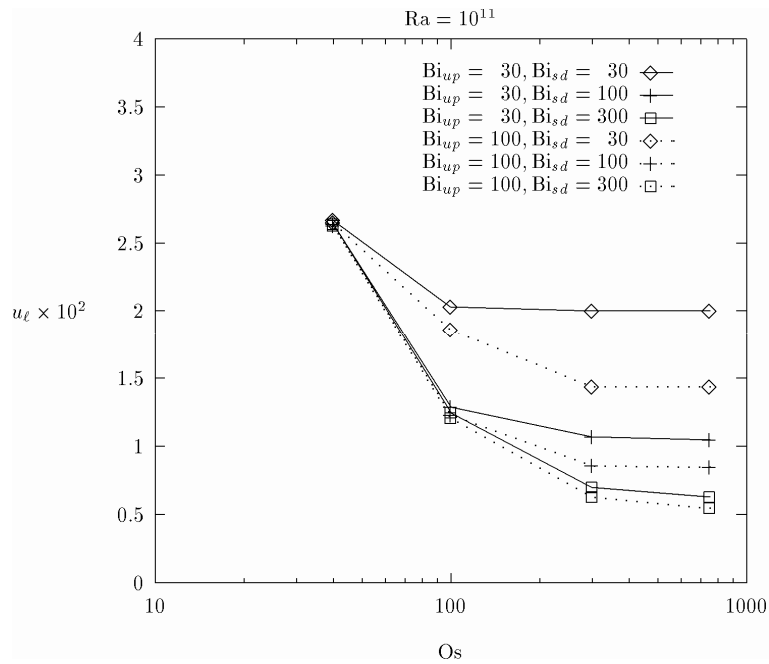


Рис. 5. Изменение температуры жидкой фазы u_ℓ

Рисунок 6 демонстрирует изменение температуры жидкой фазы по отношению к безразмерной температуре фазового перехода, u_ℓ / Os^{-1} . С продвижением по диапазону изменения числа Остроградского в сторону уменьшения Os наблюдается тенденция кривых к сгущению. Такое поведение кривых объясняется увеличением доли твердой фазы с уменьшением значения числа Остроградского. С увеличением параметра Bi_{sd} значение величины u_ℓ / Os^{-1} уменьшается. Так, в диапазоне чисел Остроградского выше 100 при переходе от режима охлаждения боковой поверхности $Bi_{sd} = 30$ к режиму $Bi_{sd} = 300$ значение исследуемой величины уменьшается от 1.5 до 3 раз. Для одинаковых режимов охлаждения боковой поверхности и разных числах Био на верхней границе с уменьшением параметра Bi_{sd} увеличивается различие в значениях исследуемой величины. Так, при $Bi_{sd} = 30$ и $Os \geq 300$ величина u_ℓ / Os^{-1} для первого семейства кривых ($Bi_{up} = 30$) в 1.4 раза ($\approx 22\%$) превышает значение соответствующее второму режиму охлаждения верхней границы ($Bi_{up} = 100$), а для случая $Bi_{sd} = 300$ одна

величина превосходит другую лишь в 1.1 раза (и 4%).

На рисунках 7–9 представлено распределение средних чисел Нуссельта на верхнюю, боковую и нижнюю поверхности рассматриваемой области. Рисунок 7 демонстрирует распределение числа Нуссельта на верхней поверхности. С увеличением числа Остроградского и возрастанием параметра Bi_{sd} значение числа Нуссельта на верхней границе увеличивается. Значения числа Нуссельта на верхней границе для всех режимов охлаждения боковых поверхностей в случае $Bi_{up} = 100$ примерно в 3.3 раза превосходят значения числа Нуссельта для режима охлаждения верхней границы $Bi_{up} = 30$. С увеличением числа Остроградского наблюдается тенденция кривых $Nu_{up}(Os)$ к выполаживанию, причем начало пологого участка смещается вправо в диапазоне чисел Остроградского с ростом числа Bi_{sd} .

На рис. 8 показано распределение средних значений числа Нуссельта на боковой поверхности полости квадратного сечения. При малых значениях Bi_{sd} изменение средних тепловых потоков, приходящихся на боковую поверхность, не зависит от Bi_{up} . С увеличением же величины Bi_{sd} наблюдается расхо-

ждение кривых, $Nu_{sd}(Os)$ первого и второго семейств. Однако с ростом числа Остроградского кривые, соответствующие одинаковым режимам охлаждения боковой поверхности, сближаются. Причем начало участка совпадения Nu_{sd} смещается вправо с ростом числа Остроградского независимо от режима охлаждения верхней границы. Так, в случае режима охлаждения боковой поверхности $Bi_{sd}=100$ участок совпадающих значений для первого и второго семейства кривых начинается в диапазоне чисел Остроградского выше 300, а при увеличении значения Bi_{sd} до 300 начало участка смешается в диапазон чисел Остроградского $Os \geq 750$.

Что касается влияния различных режимов охлаждения верхней и боковой поверхностей полости на распределение средних чисел Нуссельта на нижней грани полости квадратного сечения, то оно является незначительным (см. рис. 9). С увеличением Bi_{sd} значения Nu_{dn} незначительно увеличиваются. Так, при переходе от одного режима охлаждения к другому разница в значениях средних чисел Нуссельта не превышает 3–5% независимо от режима охлаждения на верхней границе. Но все же необходимо отметить, что при режиме охлаждения верхней границы $Bi_{up} = 100$ значения средних чисел Нуссельта несколько выше, чем для случая $Bi_{up} = 30$.

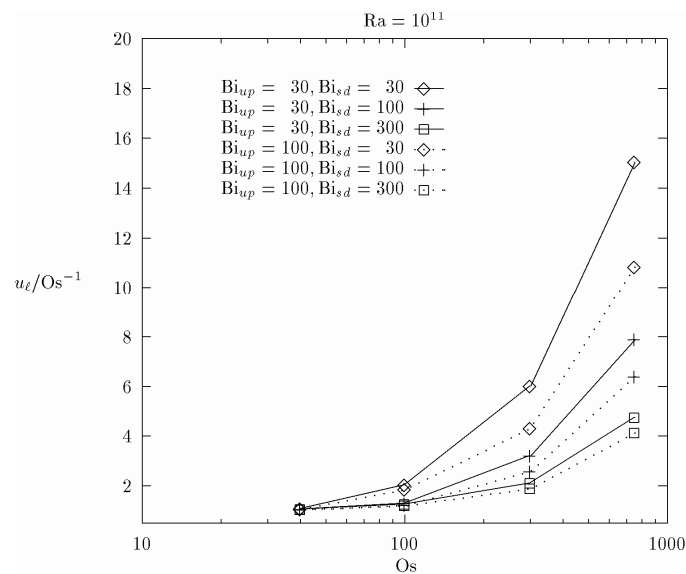


Рис. 6. Изменение величины u_{ℓ} / Os^{-1}

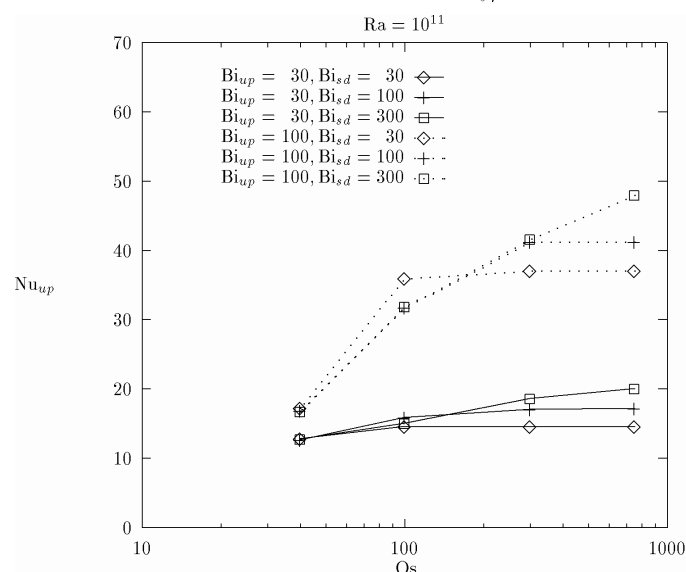


Рис. 7. Распределение среднего значения числа Нуссельта на верхней границе

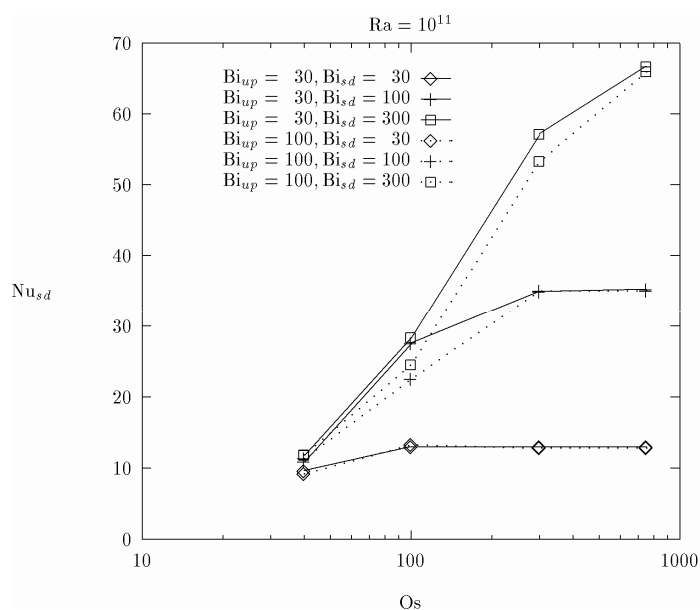


Рис. 8. Распределение среднего значения числа Нуссельта на боковой границе

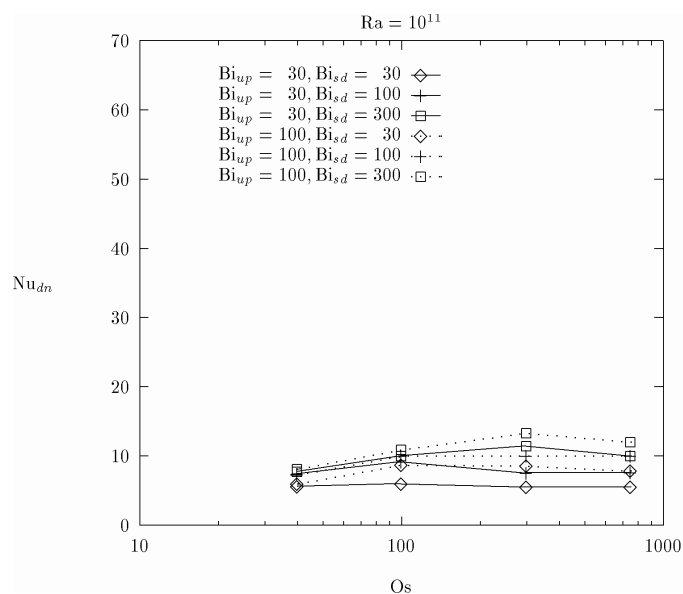


Рис. 9. Распределение среднего значения числа Нуссельта на нижней границе

Заключение

В результате численного исследования тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания при различных режимах охлаждения на границах можно заключить следующее:

- варьирование режимов охлаждения боковой и нижней поверхностей существенным образом влияет на основные характеристики конвективного теплообмена тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями, и в частности,

на распределение тепловых потоков приходящихся на различные границы полости;

- полученные зависимости распределения чисел Нуссельта на различные поверхности рассматриваемой полости могут в дальнейшем использоваться для уточнения простейших моделей удержания расплава кориума в корпусе реактора.

Литература

1. Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Параметрическое численное исследование теплообмена тепловыделяющей жидкости с учетом плавления и затвердевания в зависимости от чисел Остроградского и Релея. ИБРАЭ-95-01, Москва, 1995.
2. Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Стрижов В.Ф., Чуданов В.В., Численное моделирование свободноконвективных движений стратифицированной тепловыделяющей жидкости. ИБРАЭ-95-03, Москва, 1995.
3. Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Численное исследование некоторых особенностей поведения тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания. ИБРАЭ-95-04, Москва, 1995.
4. Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Численное исследование некоторых особенностей поведения тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания при различных режимах охлаждения на границах. ИБРАЭ-95-06, Москва, 1995.
5. Kelkar K.M., Schmidt R.C. and Patankar S.V., Numerical analysis of laminar natural convection of an internally heated fluid in a hemispherical cavity, Proceedings, International Heat Transfer Conference, San Diego, 1991, pp.355-364.
6. Kulacki F.A. and Emara A.A., Steady and transient convection in a fluid layer with uniform volumetric energy sources, J. Fluid Mech., 1977, Vol.83, pt.2, pp.375-395.
7. Steinbrenner U. and Reineke H.H., Turbulent Bouyancy Convection Heat Transfer with Internal Heat Sources, Proceedings, 6th Int. Heat Transfer Conf., Paper NC-21, Toronto(Canada), 1978, Vol.2, pp.305-310.
8. Mayinger F.X., Fritz P., Reineke H.H. and et al., Theoretical and Experimental Research on the Behavior of a Core Melt on Reactor Containment and on the Basement Concrete, Bundesministerium fuer Forschung und Technologie. FT FB (RS 166-79-05), Bonn FRG, (in German), 1980.
9. E.L.Tolman, P.Kuan and J.M.Broughton, TMI-2 accident scenario update, J. Nuclear Engineering and Design 108(1988), pp.45-54.
10. Вабищевич П.Н., Метод фиктивных областей в задачах математической физики, Москва, Из-во МГУ, 1991.
11. Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В. и Чурбанов А.Г., Численное моделирование конвективных течений в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура", ИММ РАН, Препринт No. 28, Москва, 1993.
12. Lee J.-H. and Golstein R.J., An experimental study on natural convection heat transfer in an inclined square enclosure containing internal energy sources, ASME J. Heat Transfer, 1988, Vol.110, pp.345-349.
13. Jahn M. and Reineke H.H., Free convection heat transfer with internal heat sources, calculations and measurements, Proceedings, 5th Int. Heat Transfer Conf, Tokyo(Japan), 1974, pp.74-78.
14. May H.-O., A numerical study on natural convection in an inclined square enclosure containing internal heat sources, Int. J. Heat Mass Transfer, 1991, Vol.34, pp.919-928.
15. Chudanov V.V., Churbanov A.G., Strizhov V.F. and Vabischevich P.N., Current Status and Validation of RASPLAV Code, Proceedings, 21st Water Reactor Safety Meeting, Washington(USA), 1993.
16. Bolshov L.A., Arutyunyan R.V., Chudanov V.V., Akseanova A.E. and et. all. Numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in nuclear reactor safety problems, Proceedings 4th International Topical Meeting on Nuclear Thermal Hydraulics, Operations and Safety, Taipei(Taiwan), 1994.
17. A.G. Churbanov, P.N. Vabishchevich, V.V. Chudanov, and V.F. Strizhov, A numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in rectangular enclosures, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 37, No. 18, pp. 2969-2984, 1994.

Номенклатура

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$ – коэффициент температуропроводности

$Asp = l/x$ – аспектное отношение

b – ширина стенки корпуса

$Bi = \frac{hl}{k}$ – число Био

c – коэффициент теплоемкости

$e = (0, 1)$ – вектор, определяющий направление выталкивающей силы

h – коэффициент теплопередачи

g – ускорение свободного падения

k – коэффициент теплопроводности

l – высота полости

L – характерный размер

$Nu = -(\text{grad } u)$ – локальное число Нуссельта

$Nu = \frac{1}{l} \int_l \frac{Nu}{u_{av}} dl$ – среднее число Нуссельта

$Os = \frac{ql^2}{k(u_l - u_w)}$ – число Остроградского

p – нормализованное на плотность давление

$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ – число Прандтля

q – мощность однородного теплового источника

$Q = \frac{1}{l} \int_l Nu dl$ – средний тепловой поток

$Ra_u = \frac{\beta g (u_l - u_w) l^3}{\alpha \nu}$ – число Релея

$Ra_q = \frac{\beta g q l^5}{\alpha \nu k}$ – модифицированное число Релея

$Ste = \frac{\lambda}{c(u_s - u_l)}$ – число Стефана

u – отклонение температуры от равновесной

$u_{av} = \frac{1}{V} \int_V u dV$ – средняя температура

u_l – температура фазового перехода

u_w – температура стенки

$v = (v_1, v_2)$ – вектор скорости

V – объем

x – ширина полости

Греческие символы

β – коэффициент объемного расширения

δ – дельта-функция

λ – энтальпия фазового перехода

ν – кинематическая вязкость

ρ – плотность

Подиндексы

av' max – максимальное, среднее значение

up' sd' dn – верхняя, боковая, нижняя поверхности

met' ox – металл, оксид

ЕСТЕСТВЕННО–КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ОХЛАЖДЕНИЯ

А.Е. Аксенова, П.Н. Вабищевич, В.В. Чуданов

1. Введение

Настоящая работа является обобщением предыдущих параметрических численных исследований конвективного теплообмена тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в квазистационарном режиме, начатых в работах [1–4]. В работе [1] были рассмотрены особенности конвективного теплообмена тепловыделяющей жидкости для случая квадратной полости с изотермическими граничными условиями на всех границах [1]. В работе [2] проводилась оценка локализации максимальных тепловых нагрузок на боковой поверхности при изотермических граничных условиях. Продолжение этих исследований нашло свое отражение в работах [3, 4], где основное внимание было уделено исследованию влияния различных режимов охлаждения на верхней и боковой границах на распределение тепловых потоков на различные грани полости квадратного сечения для задачи естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями.

В этой работе основное внимание уделяется таким вопросам, как:

- поведение чисел Нуссельта на различных границах и величины u_{av}/Os^{-1} в зависимости от числа Релея при разных значениях числа Остроградского и полностью изотермических условиях, а также возможной экстраполяции этих зависимостей в область высоких Релеев ($Ra > 10^{12}$);
- влияние числа Vi (различных режимов охлаждения) на верхней границе на поведение чисел Нуссельта на разных границах в зависимости от Релея и экстраполяция результатов в диапазон числа Релея выше 10^{12} ;

- влияние числа Остроградского на изменение объемов твердой фазы и поведение величины $Os^{-1}/(u_l - Os^{-1})$ для разных значений числа Рэлея при полностью изотермических условиях и экстраполяция этих зависимостей в область высоких Релеев;
- обобщение полученных результатов и представление их в виде корреляционных зависимостей от чисел Релея, Остроградского.

В случае гипотетических тяжелых аварий на АЭС с образованием достаточно больших 'molten pool' в нижней части корпуса реактора при продолжительном удержании расплава в корпусе реактора естественная конвекция, образующаяся в расплавленной области, характеризуется числами Релея $10^{12} \leq Ra \leq 10^{16}$. Проведение вычислительных экспериментов для оценки изменения перечисленных выше параметров в реакторном случае в указанном диапазоне чисел Релея требует значительных вычислительных ресурсов, что очень дорого при современном уровне развития вычислительных методов и вычислительной техники.

Важность предсказания поведения таких параметров задачи приводит к необходимости проведения параметрических численных исследований поведения чисел Нуссельта и т.д. в диапазоне умеренных чисел Релея $10^8 \leq Ra \leq 10^{12}$. Полученные результаты могут быть представлены в виде корреляционных зависимостей исследуемых параметров от чисел Релея и Остроградского, что позволяет экстраполировать их в область высоких Релеев.

Полученные таким образом экстраполяционные зависимости: чисел Нуссельта на различные поверхности области, температуры расплава, жидкой и твердой фаз кориума могут быть использованы для оценки последствий протекания тяжелой аварии с плавлением и разрушением активной зоны.

В численных расчетах применен достаточно эффективный математический алгоритм для решения нестационарных задач гидродинамики и теплопроводности. Он позволяет провести большое количество параметриче-

ских численных расчетов для создания адекватной базы данных тепловых характеристик в зависимости от безразмерных параметров (Ra , Os , Bi). Поскольку для рассматриваемой проблемы зависимость исследуемых тепловых характеристик от числа Прандтля и аспектного отношения является менее значимой в сравнении с остальными параметрами, численные расчеты проводятся при фиксированных значениях Pr и Asp .

Полученные результаты представлены в виде графиков и корреляционных зависимостей.

2. Математическая формулировка задачи

Рассматривается двумерная задача естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями в полости квадратного сечения с граничными условиями третьего рода.

Пусть

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2\} \quad —$$

область, в которой будем искать решение поставленной задачи. Введем следующее обозначение для границы фазового перехода $S(t)$:

$$S(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) = u_\ell\}$$

где u_ℓ — температура фазового перехода.

Последняя разбивает область Ω на две по-

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} v - \beta g e u = 0, \quad x \in D, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in D, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$\left(c(u) + \lambda \delta(u - u_\ell) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \operatorname{grad} u \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = q, \quad (3)$$

$$x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T.$$

Без ограничения общности будем рассматривать случай постоянных коэффициентов теплоемкости и теплопроводности в твердой и жидкой фазах, не меняющихся при фазовом превращении.

Рассматриваемая область течения представляет собой замкнутую полость с неподвижными твердыми стенками, поэтому на

добласти. Определим область, содержащую жидкую фазу вещества как

$D(t) = \{x | x \in \Omega, u = (x, t) > u_\ell\}$, а область, содержащую твердую фазу вещества — $D_0 = \Omega / D$. Задачу будем рассматривать в нестационарной постановке.

Для описания процессов тепло- и массопереноса в тепловыделяющей жидкости с однородным объемным источником тепла, с учетом фазовых превращений, используются нестационарные уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска совместно с уравнением для температуры:

границах полости ∂D задаются условия прилипания и непротекания вида:

$$v(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

В качестве тепловых условий выбраны граничные условия третьего рода, что позволяет моделировать различные режимы охлаждения границ полости:

$$k(u) \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_w) = 0, \quad x = (x_1, x_2), \quad 0 < x_\alpha < 1, \quad \alpha = 1, 2. \quad (5)$$

где n – внешняя нормаль.

В силу того, что в начальный момент времени жидкость покоится и имеет равновесную температуру, начальное условие для скорости имеет вид

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in D, \quad (6)$$

а начальное условие для температуры определяется соотношением

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (7)$$

Поскольку первоначально вся область представляет собой жидкую фазу вещества, то $D(0) = \Omega$.

Таким образом, соотношения (1–7) полностью описывают свободную конвекцию тепловыделяющей жидкости с учетом фазовых превращений в области Ω на любой момент времени $t > 0$. Численное исследование вышеназванной задачи проводится в безразмерной постановке с помощью вычислительного алгоритма, использующего переменные "функция тока, вихрь скорости, температура". Компоненты скорости определяются через функцию тока $\psi(x, t)$ как:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (8)$$

поэтому условие несжимаемости (2) всегда выполнено. Для вихря скорости имеем соотношение

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (9)$$

Учитывая соотношения (8),(9) из уравнения движения (1) для вихря скорости получим следующее выражение в безразмерных переменных

$$(1 + Ste \chi_{st}) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (v \nabla) u \right) - \frac{1}{Pr} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + 1 \right) = 0, \quad (13)$$

$$x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T,$$

где число Стефана определяется из соотношения $Ste = \lambda / (c(q l^2) / k)$, где

$$\chi_{st} = \begin{cases} 1, & u \in (u_s, u_\ell) \\ 0, & u \notin (u_s, u_\ell) \end{cases},$$

а u_s – температура солидус.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (v \nabla) w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} - \frac{Ra_q}{Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (10)$$

$$x \in D, \quad 0 < t \leq T$$

с модифицированным числом Релея, получаемым по мощности теплового источника q . Уравнение (10) может быть переписано через безразмерное число Остроградского в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (v \nabla) w - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} - \frac{Ra_u Os}{Pr} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (11)$$

где использовано число Релея, определяемое по характерному перепаду температур,

$$Ra_u = \frac{\beta g (u_\ell - u_w) l^3}{\alpha \nu}$$

а число Остроградского определяется с помощью соотношения

$$Os = \frac{q l^2}{k(u_\ell - u_w)}.$$

Здесь и далее будем использовать для безразмерных переменных те же обозначения, что и для точных величин. Заметим, что везде далее по тексту под числом Релея Ra мы будем понимать модифицированное число Релея, получаемое по мощности теплового источника q , $Ra_q = \frac{\beta g q l^5}{\alpha \nu k}$.

Из уравнения несжимаемости (2) будем иметь уравнение Пуассона для функции тока

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\alpha^2} = w, \quad x \in D, \quad 0 < t \leq T. \quad (12)$$

Уравнение энергии (3) в безразмерных переменных переписывается в виде

Обезразмеривание здесь проведено по высоте полости l , коэффициенту кинематической вязкости ν и величине ql^2/k , пропорциональной перепаду температуры.

Система уравнений (11–13) дополняется граничными и начальными условиями, вытекающими из (4–7). Условия прилипания и непротекания (4) на границе единичного квадрата Ω дают соотношения

$$\psi(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x, t) = 0, x \in \partial D, 0 < t \leq T, \quad (15)$$

3. Метод решения

Для нахождения приближенного решения задачи (11–17) с расчетом поля течения в изменяющейся области $D(t)$ используется вариант метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам [9]. Реализация разностной схемы расщепления [10] основана на решении сеточных эллиптических задач на каждом шаге по времени. Подобный подход хорошо зарекомендовал себя при решении задач свободной конвекции тепловыделяющей жидкости, что подтверждается совпадением полученных

Из условия (6) имеем

$$\psi(x, 0) = 0, x \in D. \quad (16)$$

Граничные условия конвективного теплообмена (третьего рода) в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial n} + Bi u = 0, 0 < x_\alpha < 1, \alpha = 1, 2. \quad (17)$$

Начальное условие для температуры остается без изменений.

результатов с экспериментальным [6, 11] и численно-экспериментальным [12, 13] исследованиями для различных граничных условий и геометрий расчетной области. Результаты тестирования вычислительного алгоритма для задачи свободной конвекции тепловыделяющей жидкости опубликованы в работах [14, 15]. Кроме того, некоторые из результатов, касающиеся исследования периодической естественной конвекции в замкнутой полости прямоугольного сечения, представлены в статье [16].

4. Результаты численного моделирования

Численное исследование влияния различных режимов охлаждения верхней и боковой поверхностей полости квадратного сечения на поведение чисел Нуссельта на различных поверхностях, соотношение твердой и жидкой фазы, распределение температуры и т.д. для задачи естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания было проведено в следующем диапазоне безразмерных параметров: $10^8 \leq Ra \leq 10^{12}$, $40 \leq Os \leq 1000$, $30 \leq Bi_{\text{up}} \leq 600$, $Ste = 0$, $Pr = 1$. Расчеты проводились на Sun 4/80 (Sparc Station 10) методом установления, до достижения квазистационарного решения. Вычисления прерывались при одновременном выполнении следующих условий: производная по времени от средней в объеме температуры в

норме L_2 осциллирует вблизи нуля; суммарное тепловыделение на боковые, верхнюю и нижнюю грани осциллирует вблизи единицы (в квадратной камере суммарное тепловыделение равно единице). Основное внимание уделялось таким характеристикам, как: объем жидкой фазы, средним тепловым потокам на верхнюю, боковую и нижнюю поверхности полости, температуре жидкой фазы и средним значениям чисел Нуссельта на соответствующие поверхности.

Поскольку в процессе достижения квазистационарного решения исследуемые параметры осциллировали вблизи своих средних значений, проводилось осреднение вычисляемых величин по достаточно большой выборке временных результатов.

Достоверность получаемых результатов проверялась путем проведения расчетов на последовательности сгущающихся сеток и сопоставлении получаемых решений на неизменяемость в рассматриваемом диапазоне параметров. Результаты проверки на последовательности сгущающихся сеток и тестирование используемой методики представлены в [1].

В результате параметрических исследований естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями получен ряд корреляционных соотношений, которые имеют вид степенных зависимостей.

Первоначально были получены соотношения, связывающие число Релея с такими характеристиками исследуемого процесса, как: интенсивность теплопередачи (число Nu) на боковые, верхнюю и нижнюю грани рассматриваемой области; отношение средней безразмерной температуры рассматриваемой области к безразмерной температуре фазового перехода ($\zeta = u_{av}/Os^{-1}$).

Получение корреляционных соотношений проводилось методом прямолинейной регрессии, когда с помощью метода наименьших квадратов определялись коэффициенты уравнения прямой линии, связывающей $\log Nu$ или $\log \zeta$ с $\log Ra$.

Зависимости вида $Nu = C \cdot Ra^n$ и $\zeta = C \cdot Ra^n$ были получены в диапазоне чисел Релея $10^{10} \leq Ra \leq 10^{12}$. В таблице 1 приводятся значения параметров C и n для критериальных зависимостей $Nu_{up}(Ra)$, $Nu_{sd}(Ra)$, $Nu_{dn}(Ra)$ для чисел Остроградского, соответствующих реальным условиям, а именно $Os = 1000, 400, 200, 100, 80$ и 50 .

Таблица 1.
Критериальные зависимости Nu(Ra)

Os	$Nu = C \cdot Ra^n$					
	up		sd		dn	
	C	n	C	n	C	n
1000	0.800	0.193	0.990	0.170	0.587	0.140
400	1.544	0.155	1.920	0.130	0.921	0.117
200	2.665	0.121	3.120	0.090	1.693	0.086
100	4.146	0.084	5.607	0.056	3.208	0.052
80	4.898	0.070	6.252	0.045	3.713	0.043
50	5.428	0.051	7.469	0.024	4.879	0.025

Графики степенных зависимостей $Nu(Ra)$ представлены на рисунках 1–3. Для сравнения на этих же рисунках приводятся графики корреляционных зависимостей, полученные Штейнбрэннером [7] при чистой конвекции, что соответствует бесконечно большим числам Остроградского ($Os \gg 10^4$). Как видно из этих рисунков, наибольшее совпадение с корреляциями Штейнбрэннера чисел Нуссельта на верхней и боковой поверхностях наблюдается для корреляционной зависимости, полученной для числа Остроградского равного 1000, соответствующего реакторному случаю. В то же время для числа Нуссельта на нижней границе наибольшее совпадение с корреляциями Штейнбрэннера наблюдается для Остроградского равного 200.

Графики степенных зависимостей $\zeta(Ra)$ представлены на рисунке 4.

В таблице 2 приводятся значения параметров C и n критериальных зависимостей $\zeta(Ra)$ для различных чисел Остроградского $Os = 1000, 400, 200, 100, 80$ и 50 .

Таблица 2. Критериальные зависимости
 $\zeta = u_{av}/Os^{-1} = C \cdot Ra^n$

Os	C	n
1000	332.171	-.179
400	69.678	-.143
200	18.023	-.102
100	5.459	-.064
80	3.808	-.053
50	1.994	-.032

Представленные корреляционные зависимости с достаточно хорошей степенью точности описывают поведение чисел Нуссельта на различных поверхностях области и величины ζ (коэффициент определенности $r \in [0.985; 0.999]$). Поэтому возможно говорить об экстраполяции указанных величин в область высоких Релеев. На это обстоятельство указывает и монотонность графиков, описывающих распределение тепловых потоков на различные грани области при числах Релея выше 10^{12} (см. рис. 5). Участки кривых, обозначенные пунктирной линией, построены на основании полученных авторами корреляционных зависимостей и неплохо согласуются с результатами вычислительных экспериментов в области умеренных чисел Релея (сплошные линии).

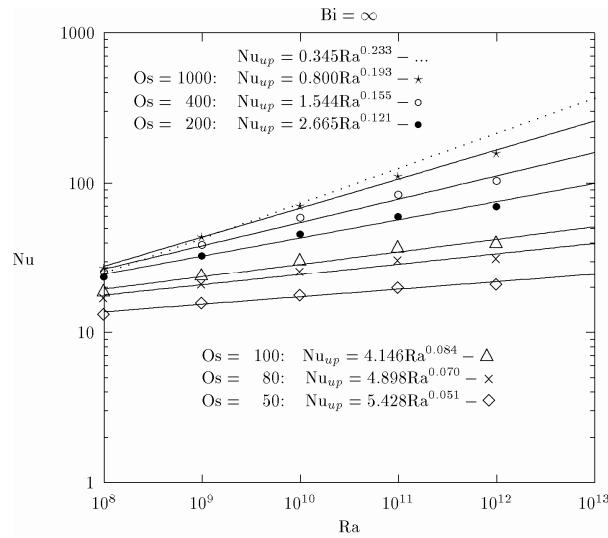


Рис. 1. Корреляционные зависимости вида $Nu_{up} = C \cdot Ra^n$ для $Os = 50, 80, 100, 200, 400, 1000$

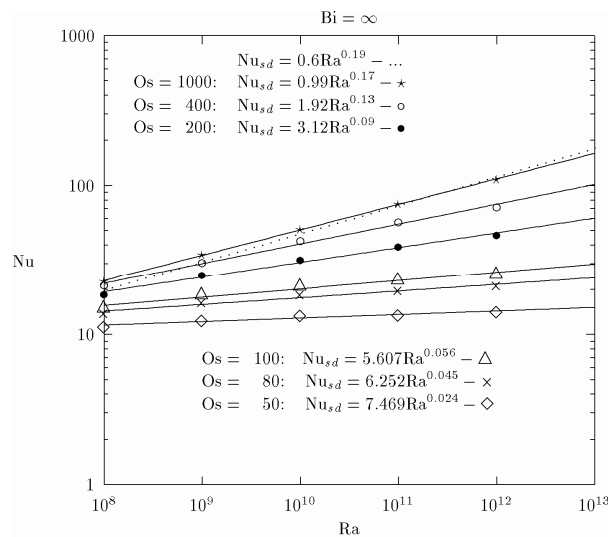


Рис. 2. Корреляционные зависимости вида $Nu_{sd} = C \cdot Ra^n$ для $Os = 50, 80, 100, 200, 400, 1000$

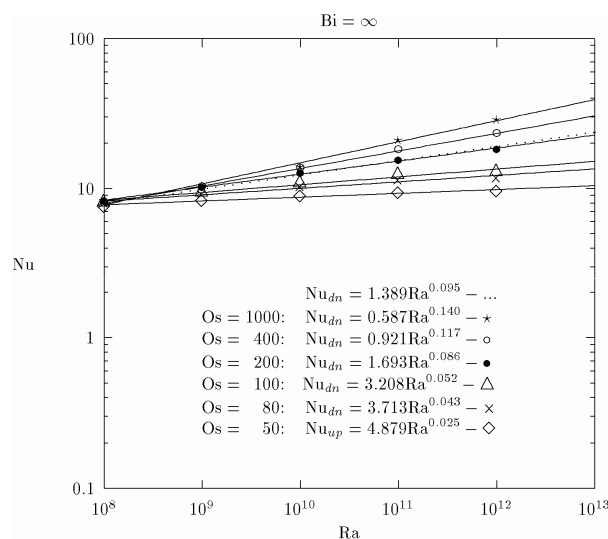


Рис. 3. Корреляционные зависимости вида $Nu_{dn} = C \cdot Ra^n$ для $Os = 50, 80, 100, 200, 400, 1000$

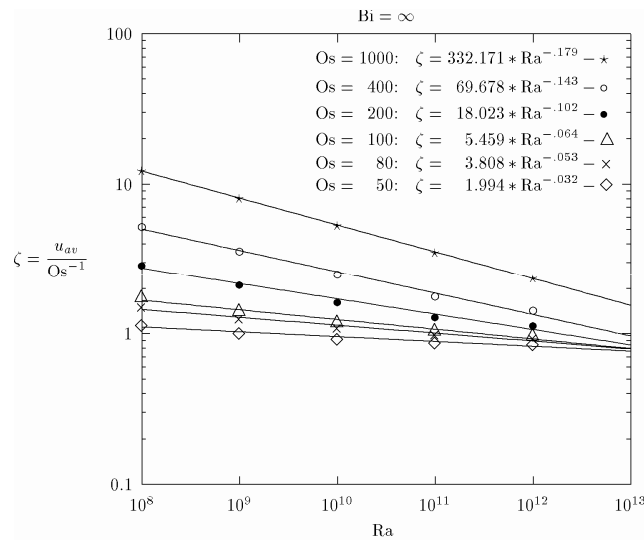


Рис. 4. Корреляционные зависимости вида $\zeta = C \cdot Ra^n$ для $Os = 50, 80, 100, 200, 400, 1000$

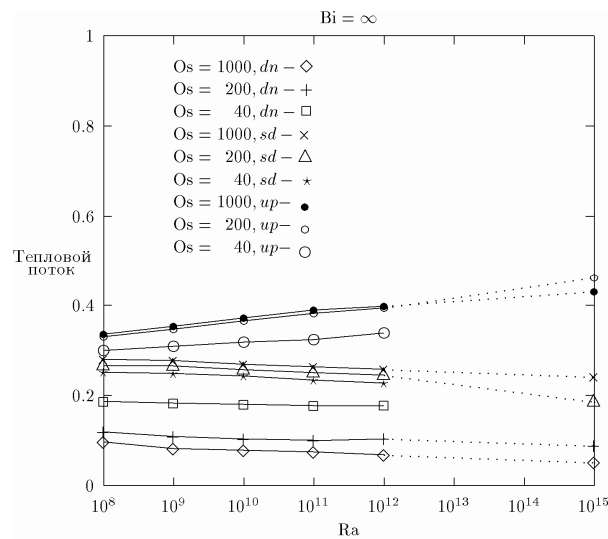


Рис. 5. Распределение теплового потока на различных поверхностях области

Ниже будут представлены корреляционные зависимости $Nu(Ra)$, полученные на основании результатов параметрических численных исследований естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с фазовыми превращениями при варьировании режимов охлаждения верхней границы [3]. Как известно, проблема удержания расплава внутри корпуса реактора и увеличение продолжительности жизни последнего зависит от уровня нагрузок, которые испытывают стенки реактора после того как произошла авария. Снижение последних и,

следовательно, увеличение продолжительности жизни корпуса достигается с помощью соответствующих режимов охлаждения стенок корпуса реактора. Поэтому представлялось важным оценить влияние различных режимов охлаждения верхней границы, которые характеризуются безразмерным числом Био, на поведение чисел Нуссельта на различных поверхностях исследуемой области. В этой связи была проведена серия расчетов с варьированием чисел Био на верхней границе [3]. В результате этих исследований было обнаружено, что

варьирование режимов теплопередачи на верхней границе полости оказывает влияние, главным образом, на распределение средних тепловых потоков, приходящихся на верхнюю и боковую границы полости, и незначительно для нижней границы. Наиболее существенные отличия в значениях средних чисел Нуссельта при варьировании режимов охлаждения на верхней границе были отмечены на боковой поверхности полости, а также при высоких числах Bi_{up} на верхней границе. Распределение средних чисел Нуссельта на нижней границе практически не зависит от режимов охлаждения верхней поверхности полости. В настоящей работе мы приводим корреляционные соотношения, полученные методом прямолинейной регрессии на основе исследований [3] в виде $Nu = C \cdot Ra^n$. Эти зависимости соответствуют наиболее характерным для условий в реакторе значениям числа Остроградского $Os = 60, 200, 750$ и числам Био $Bi = 30, 100, 600$. Коэффициент определенности r для всех приводимых ниже соотношений равняется 0.985.

На рис.6–8 представлены корреляционные зависимости чисел Нуссельта на верхней, боковой и нижней поверхности полости в зависимости от числа Релея для $Os = 750$. С уменьшением значения числа Релея в распределении чисел Нуссельта на верхней и боковой поверхностях наблюдается тенденция кривых к пересечению, с увеличением значения числа Релея кривые расходятся. Так, значения чисел Нуссельта на верхней границе в случае $Bi_{up} = 600$ превосходят аналогичное значение для $Bi_{up} = 30$ примерно в 6 раз в случае $Ra = 10^{12}$. Что касается распределения чисел Нуссельта на боковой поверхности, то графики корреляционных зависимостей идут практически параллельно, начиная с $Ra \geq 10^{11}$. Разница в значениях чисел Нуссельта на боковой поверхности для двух предельных режимов охлаждения верхней границы составляет 0.7.

В распределении чисел Нуссельта на нижней поверхности с увеличением числа Релея наблюдается тенденция кривых к сближению.

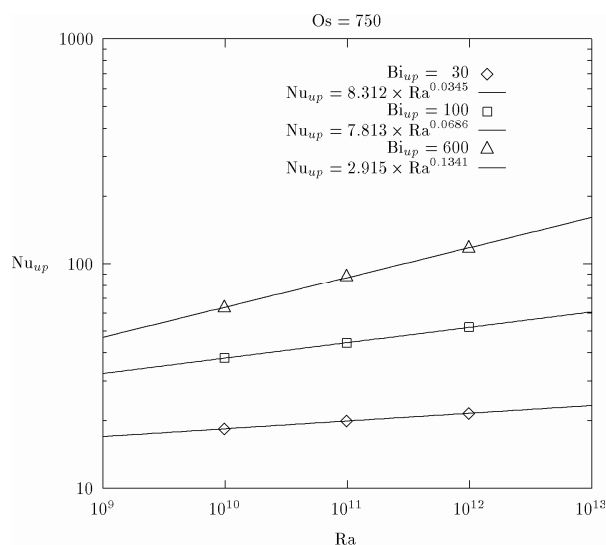


Рис. 6. Корреляционные зависимости вида $Nu_{up} = C \cdot Ra^n$ для $Os = 750$ и $Bi_{up} = 30, 100, 600$

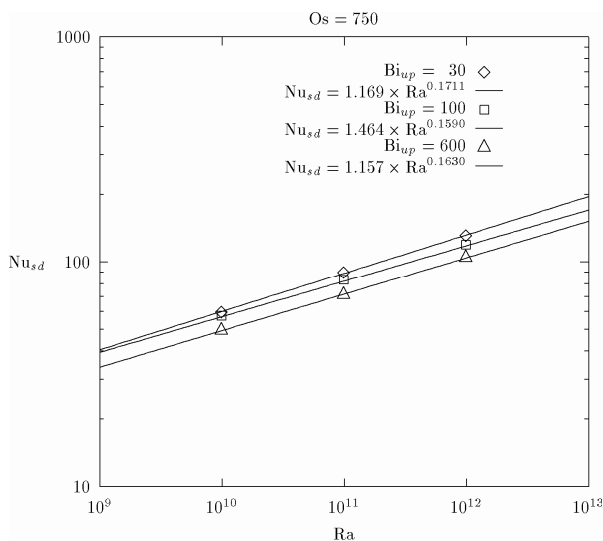


Рис. 7. Корреляционные зависимости вида $Nu_{sd} = C \cdot Ra^n$ для $Os = 750$ и $Bi_{up} = 30, 100, 600$

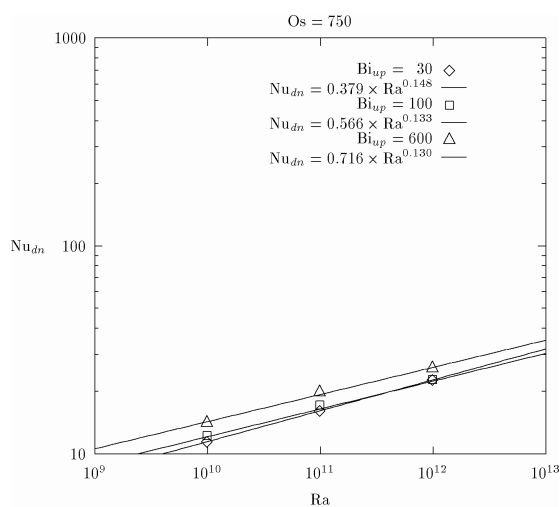


Рис. 8. Корреляционные зависимости вида $Nu_{dn} = C \cdot Ra^n$ для $Os = 750$ и $Bi_{up} = 30, 100, 600$

Аналогичные тенденции в поведении чисел Нуссельта на верхней, боковой и нижней поверхностях наблюдаются и в случае $Os = 200$ (см. рис.9–11), а именно: тенденция кривых к пересечению с уменьшением Ra и расхождение кривых с увеличением Ra в распределении чисел Нуссельта на верхней и боковой поверхностях, а также сближение кривых с ростом значения числа Релея для распределения чисел Нуссельта на нижней поверхности. Различие в значениях для двух предельных режимов охлаждения верхней границы несколько меньше, по сравнению с

предыдущим случаем. Так, значения чисел Нуссельта на верхней границе в случае $Bi_{up} = 600$ превосходят аналогичное значение для $Bi_{up} = 30$ примерно в 4 раза для $Ra = 10^{12}$, в то время как в случае $Os = 750$ отношение чисел Нуссельта для двух предельных случаев охлаждения верхней поверхности равнялось приблизительно 6.

Что касается поведения чисел Нуссельта на нижней поверхности, то с увеличением числа Релея выше 10^{11} различные режимы охлаждения верхней границы не оказывают влияния на значение Nu_{dn} .

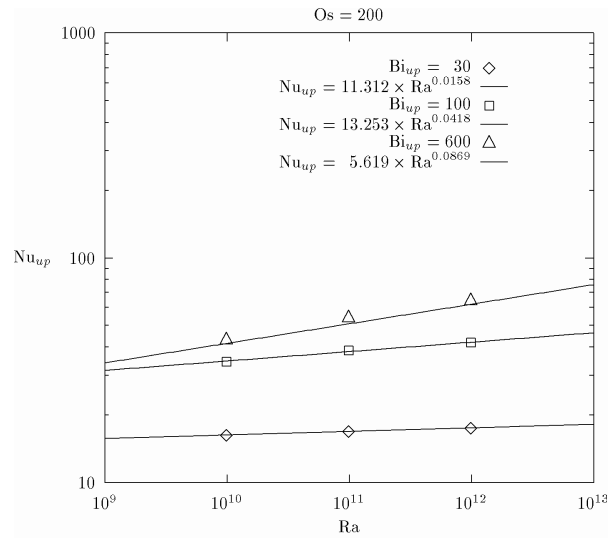


Рис. 9. Корреляционные зависимости вида $Nu_{up} = C \cdot Ra^n$ для $Os = 200$ и $Bi_{up} = 30, 100, 600$

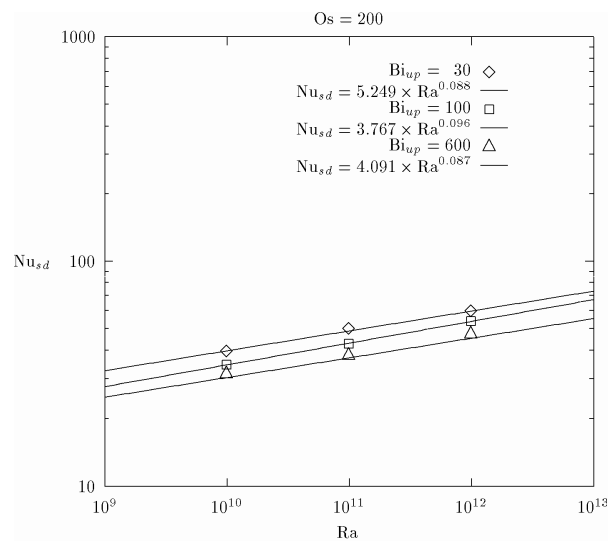


Рис. 10. Корреляционные зависимости вида $Nu_{sd} = C \cdot Ra^n$ для $Os = 200$ и $Bi_{up} = 30, 100, 600$

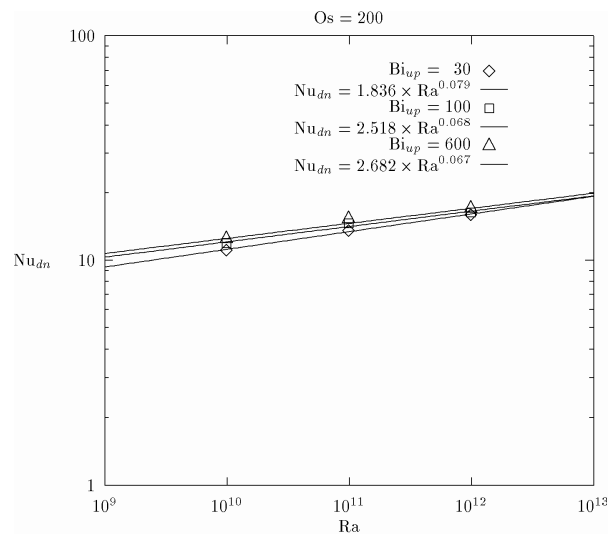


Рис. 11. Корреляционные зависимости вида $Nu_{dn} = C \cdot Ra^n$ для $Os = 200$ и $Bi_{up} = 30, 100, 600$

Графики корреляционных зависимостей вида $Nu = C \cdot Ra^n$ на различные поверхности для числа Остроградского $Os = 60$ представлены на рис. 12–14.

Для $Os = 60$ значения чисел Нуссельта на верхней границе в случае $Bi_{up} = 600$ превосходят аналогичное значение для $Bi_{up} = 30$ примерно в 2 раза при $Ra = 10^{12}$. Кроме того, при таком значении числа Остроградского, которое может трактоваться как безразмерная температура фазового перехода, различие в значениях чисел Нуссельта на верхней границе при режимах охлаждения $Bi_{up} = 100$ и $Bi_{up} = 600$ практически отсутст-

вует во всем рассматриваемом диапазоне чисел Релея, а при $Os = 750$ оно составляет порядка 3.

Аналогично поведению чисел Нуссельта на верхней поверхности, на боковой поверхности значения чисел Нуссельта для упомянутых выше режимов охлаждения $Bi_{up} = 100$ и $Bi_{up} = 600$ совпадают.

При $Os = 60$ различные режимы охлаждения верхней поверхности не оказывают влияния на распределение чисел Нуссельта на нижней границе во всем рассматриваемом диапазоне чисел Релея.

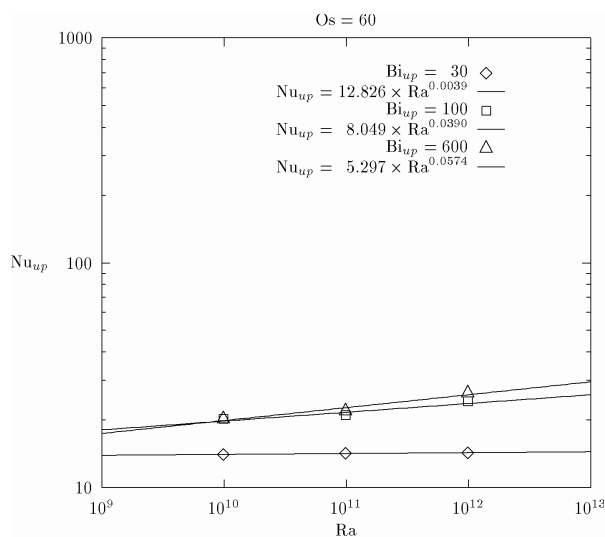


Рис. 12. Корреляционные зависимости вида $Nu_{up} = C \cdot Ra^n$ для $Os = 60$ и $Bi_{up}=30, 100, 600$

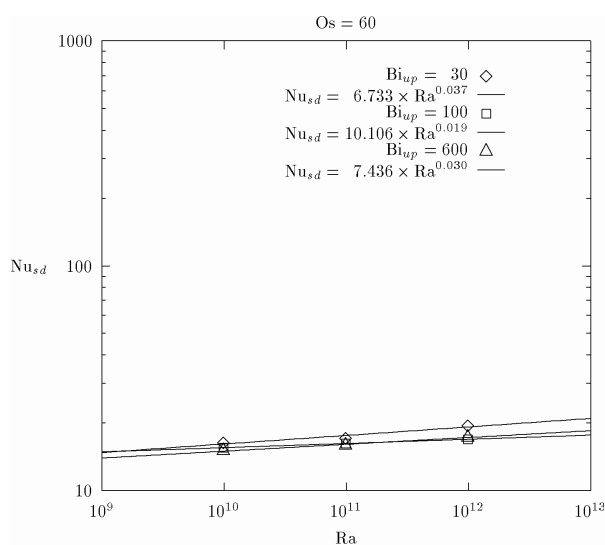


Рис. 13. Корреляционные зависимости вида $Nu_{sd} = C \cdot Ra^n$ для $Os = 60$ и $Bi_{up}=30, 100, 600$

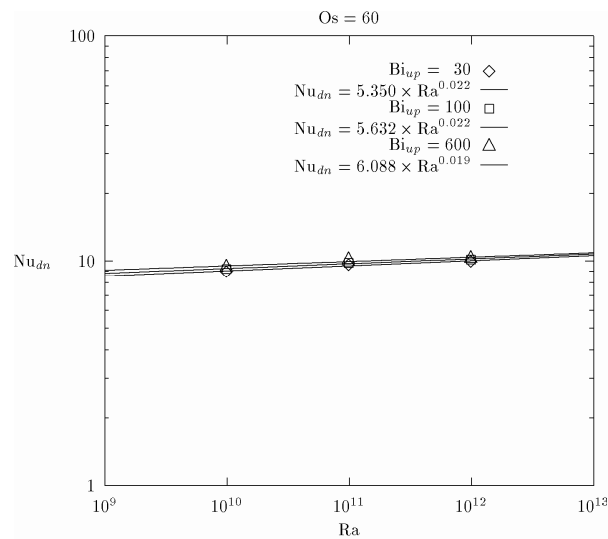


Рис. 14. Корреляционные зависимости вида $Nu_{dn} = C \cdot Ra^n$ для $Os = 60$ и $Bi_{up} = 30, 100, 600$

Далее будут представлены функциональные зависимости, связывающие объем твердой фазы с числом Остроградского для различных значений числа Релея, поскольку наличие значительных объемов твердой фазы кориума, образующихся вблизи охлаждаемых границ корпуса реактора, способствует снижению интенсивности выноса тепла к границам корпуса и, следовательно, увеличивает "продолжительность жизни" последнего. Подобные зависимости применительно к реактору позволили бы оценить, при каких значениях параметров Ra и Os будет образовываться достаточное, с точки зрения безопасности реактора, количество твердой фазы кориума.

На рис.15 показаны графики корреляционных зависимостей изменения объемов твердой фазы от числа Остроградского, полученные путем обобщения результатов численных исследований представленных в работе [1]. Как отмечалось ранее в указанной работе, малым значениям числа Остроградского ($14 < Os < 40$) соответствуют большие объемы твердой фазы, поэтому режим теплопередачи в указанной области носит преимущественно теплопроводный характер. Как видно из рисунка, все корреляционные зависимости имеют общее начало в точке $Os = 14$, которая соответствует полному затвердеванию квадратной каверны. С увеличением значения числа Остроградского доля твердой фазы начинает

уменьшаться, объем жидкой фазы расти и при значениях числа Остроградского выше 1000 определяющее значение в характере режима теплопередачи начинают играть конвективные процессы. В рамках моделирования естественной конвекции теплопередающей жидкости с фазовыми превращениями наибольший интерес для исследования представляет область со смешанным кондуктивно-конвективным режимом теплопередачи

($40 \leq Os \leq 1000$), характеризующаяся сильным сокращением объемов твердой фазы, от 50 до 2%. При построении корреляций для указанного диапазона изменения Os мы разбили последний на два участка: 1) $[40:80]$ и 2) $[80:1000]$. Корреляции, принадлежащие первому участку, обозначены на рисунке сплошными линиями, а корреляции для второго участка проведены пунктиром. Как и ранее приводимые корреляционные зависимости, представленные соотношения получены методом прямолинейной регрессии и имеют коэффициент определенности $r=0.99$. На первом участке наблюдается расхождение графиков с ростом числа Остроградского, на втором участке графики корреляционных зависимостей идут практически параллельно друг другу. На втором участке доля твердой фазы не превышает 20% и преобладает конвективный режим переноса тепла.

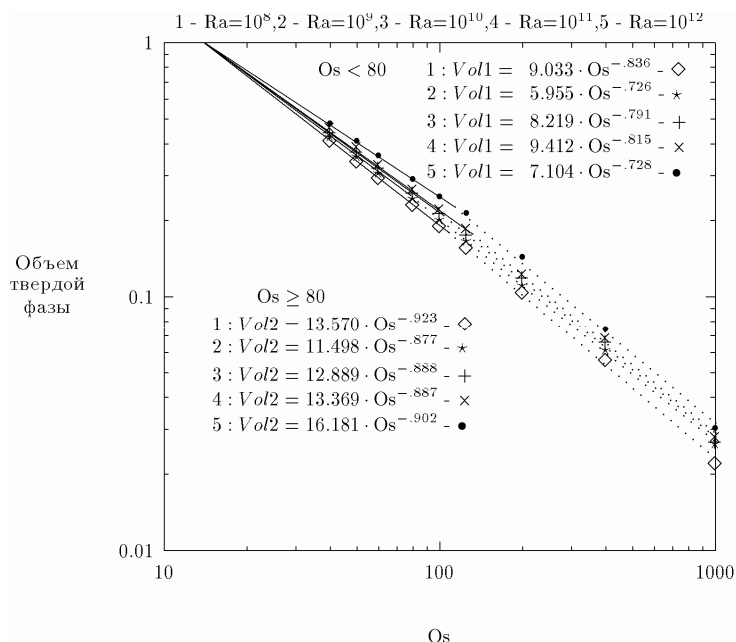


Рис.15. Корреляционные зависимости вида $Volume = C \cdot Os^n$

При фиксированном значении числа Остроградского можно отметить незначительное увеличение доли твердой фазы с ростом числа Рейля. Это подтверждает и рис.16, на котором показано изменение объемов твердой фазы с изменением числа Рейля для различных значений числа Остроградского. Как видно из рисунка, линии расположены параллельно друг другу и почти параллельно горизонтальной оси.

Итак, были получены корреляционные зависимости для чисел Нуссельта, характеризующие интенсивность отвода тепла на твердые границы области и объемов твердой фазы. Одновременно было отмечено, что в диапазоне чисел Остроградского $100 \leq Os \leq 1000$, как видно из Рисунка 15, наблюдаются незначительные объемы твердой фазы. В этом случае величина обратная числу Нуссельта будет определяться как:

$$\frac{1}{Nu} = \frac{u_l - u_w}{F_{out}} = \frac{u_l - u_s}{F_{out}} - \frac{u_s - u_w}{F_{out}},$$

где F_{out} — доля теплового потока, приходящегося на границу области.

Умножая и деля первое и второе слагаемое на долю теплового потока, приходящегося

на границу твердого и жидкого, F_s , а второе слагаемое еще и на величину $u_l - u_s$

$$\frac{1}{Nu} = \frac{u_l - u_s}{F_s} \frac{F_s}{F_{out}} - \frac{u_l - u_s}{F_s} \frac{F_s}{F_{out}} \frac{u_s - u_w}{u_l - u_s}$$

и вынося за скобки одинаковые сомножители

$$\frac{1}{Nu} = \frac{u_l - u_s}{F_s} \frac{F_s}{F_{out}} \left(1 - \frac{u_s - u_w}{u_l - u_s} \right)$$

получим окончательно соотношение вида:

$$\frac{1}{Nu} = \frac{1}{Nu_s} \frac{F_s}{F_{out}} \left(1 - \frac{u_s - u_w}{u_l - u_s} \right).$$

Здесь Nu_s есть интенсивность отвода тепла от жидкости к твердой фазе. Границы твердой и жидкой фаз определяются температурой фазового перехода, а величина Os^{-1} может рассматриваться как безразмерная температура фазового перехода, поэтому вместо соотношения $(u_s - u_w)/(u_l - u_s)$ мы будем рассматривать выражение вида $Os^{-1}/(u_l - Os^{-1})$, которое для удобства описания в дальнейшем будем обозначать ξ .

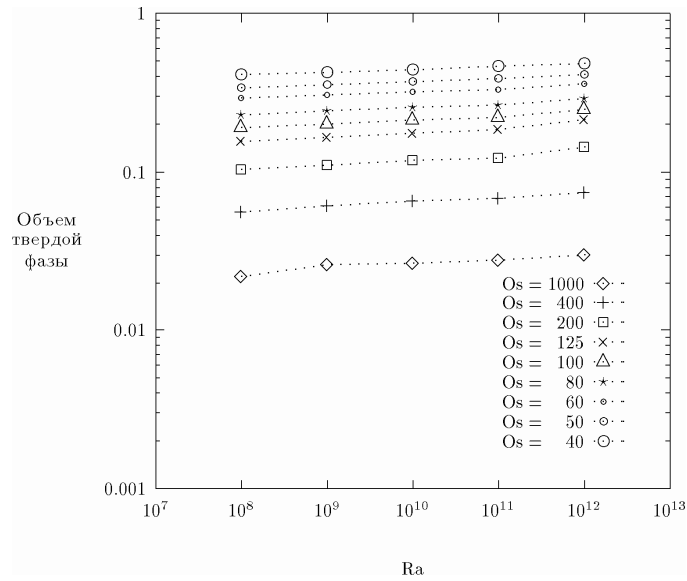


Рис.16. семейство кривых $Volume(Ra)$ для $Os = 1000, 400, 200, 125, 100, 80, 60, 50, 40$

На рис.17 представлены корреляционные зависимости величины $\xi = Os^{-1} / (u_\ell - Os^{-1})$ от Os для различных значений числа Релея. Указанная величина характеризует отношение отвода тепла от твердой фазы к границам об-

ласти к интенсивности отвода тепла от жидкой фазы на границу твердого и жидкого. Корреляционные зависимости получены методом прямолинейной регрессии в диапазоне чисел Остроградского $40 \leq Os \leq 1000$.

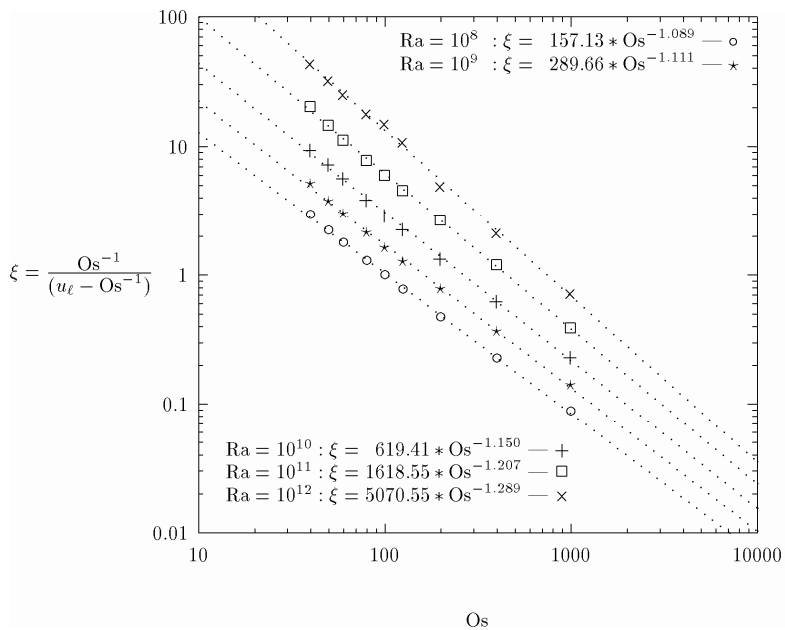


Рис. 17. Корреляционные зависимости вида, $\xi = C \cdot Os^n$

Рис.18 демонстрирует изменение величины ξ в зависимости от Релея для различных значений числа Остроградского.

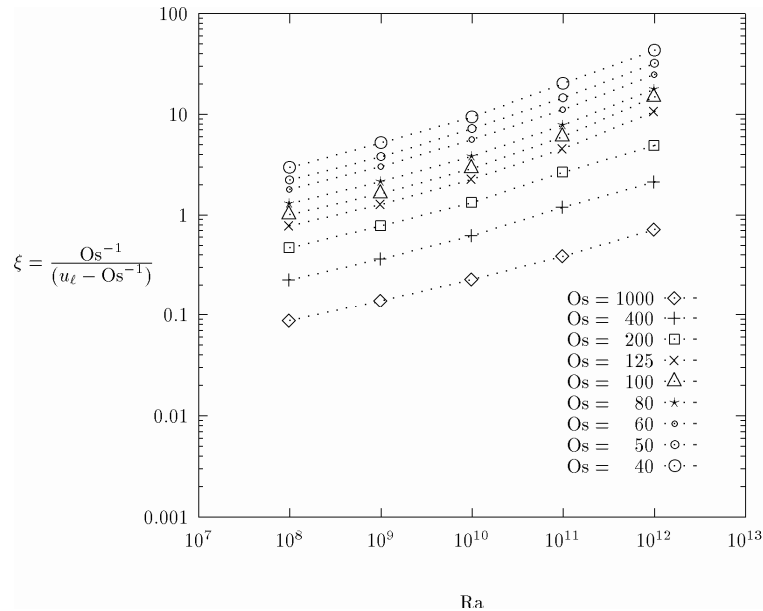


Рис. 18. Семейство кривых $\xi(Ra)$ для $Os = 1000, 400, 200, 125, 100, 80, 60, 50, 40$

Заключение

В результате численного исследования тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания при различных режимах охлаждения на границах можно заключить следующее:

- построены корреляционные соотношения для чисел Нуссельта на различных границах и величины u_{av}/Os^{-1} в зависимости от числа Релея при разных значениях числа Остроградского и полностью изотермических условиях;
- исследовано влияние числа Bi (различных режимов охлаждения) на верхней границе на поведение чисел Нуссельта на разных границах в зависимости от числа Релея и выведены корреляционные соотношения в виде $Nu = C \cdot Ra^n$ для наиболее характерных для реакторного случая значений Bi_{up} ;
- получены корреляционные зависимости объема твердой фазы и величины $Os^{-1}/(u_l - Os^{-1})$ от числа Остроградского для разных значений числа Релея при полностью изотермических условиях;
- результаты проведенных параметрических численных исследований могут быть использованы для создания базы данных тепловых характеристик в зависимости от безразмерных параметров Ra, Os, Bi ;
- полученные корреляционные зависимости могут быть применимы к построению простейших моделей удержания расплава в корпусе реактора.

Литература

1. Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Параметрическое численное исследование теплообмена тепловыделяющей жидкости с учетом плавления и затвердевания в зависимости от чисел Остроградского и Релея. ИБРАЭ—95—01, Москва, 1995.
2. Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Численное исследование некоторых особенностей поведения тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания. ИБРАЭ-95-04, Москва, 1995.
3. Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Численное исследование некоторых особенностей поведения тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания при различных режимах охлаждения на границах. ИБРАЭ—95—06, Москва, 1995.
4. Аксенова А.Е., Вабищевич П.Н., Чуданов В.В., Численное исследование некоторых особенностей поведения тепловыделяющей жидкости с учетом затвердевания при различных режимах охлаждения на границах. Часть II. ИБРАЭ-95-09, Москва, 1995.
5. Kelkar K.M., Schmidt R.C. and Patankar S.V., Numerical analysis of laminar natural convection of an internally heated fluid in a hemispherical cavity, Proceedings, International Heat Transfer Conference, San Diego, 1991, pp.355-364.
6. Kulacki F.A. and Emara A.A., Steady and transient convection in a fluid layer with uniform volumetric energy sources, J. Fluid Mech., 1977, Vol.83, pt.2, pp.375-395.
7. Steinbrenner U. and Reineke H.H., Turbulent Bouyancy Convection Heat Transfer with Internal Heat Sources, Proceedings, 6th Int. Heat Transfer Conf., Paper NC—21, Toronto(Canada), 1978, Vol.2, pp.305-310.
8. Maying F.X., Fritz P., Reineke H.H. and et al., Theoretical and Experimental Research on the Behavior of a Core Melt on Reactor Containment and on the Basement Concrete, Bundesministerium fuer Forschung und Technologie. FT-FB (RS 166-79-05), Bonn FRG, (in German), 1980.
9. Вабищевич П.Н., Метод фиктивных областей в задачах математической физики, Москва, Из-во МГУ, 1991.
10. Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В. и Чурбанов А.Г., Численное моделирование конвективных течений в переменных "функция тока, вихрь скорости, температура", ИММ РАН, Препринт No. 28, Москва, 1993.
11. Lee J.-H. and Golstein R.J., An experimental study on natural convection heat transfer in an inclined square enclosure containing internal energy sources, ASME J. Heat Transfer, 1988, Vol.110, pp.345-349.
12. Jahn M. and Reineke H.H., Free convection heat transfer with internal heat sources, calculations and measurements, Proceedings, 5th Int. Heat Transfer Conf., Tokyo(Japan), 1974, pp.74-78.
13. May H.-O., A numerical study on natural convection in an inclined square enclosure containing internal heat sources, Int. J. Heat Mass Transfer, 1991, Vol.34, pp.919-928.
14. Chudanov V.V., Churbanov A.G., Strizhov V.F. and Vabischevich P.N., Current Status and Validation of RASPLAV Code, Proceedings, 21st Water Reactor Safety Meeting, Washington (USA), 1993.
15. Bolshov L.A., Arutyunyan R.V., Chudanov V.V., Aksenova A.E. and et al., Numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in nuclear reactor safety problems, Proceedings 4th International Topical Meeting on Nuclear Thermal Hydraulics, Operations and Safety, Taipei(Taiwan), 1994.
16. A.G. Churbanov, P.N. Vabishchevich, V.V. Chudanov, and V.F. Strizhov, A numerical study of natural convection of a heat-generating fluid in rectangular enclosures, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 37, No. 18, pp. 2969-2984, 1994.

Номенклатура

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$ – коэффициент температуропроводности

$Asp = l/x$ – аспектное отношение

b – ширина стенки корпуса

$Bi = \frac{hl}{k}$ – число Био

c – коэффициент теплоемкости

$e = (0, 1)$ – вектор, определяющий направление выталкивающей силы

F_{out} – доля теплового потока, приходящаяся на границу области

h – коэффициент теплопередачи

g – ускорение свободного падения

k – коэффициент теплопроводности

l – высота полости

$Nu = -(\text{grad } u)$ – локальное число Нуссельта

$Nu = \frac{1}{l} \int_l \frac{Nu}{u_{av}} dl$ – среднее число Нуссельта

$Os = \frac{ql^2}{k(u_l - u_w)}$ – число Остроградского

p – нормализованное на плотность давление

$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ – число Прандтля

q – мощность однородного теплового источника

$Q = \frac{1}{l} \int_l Nu dl$ – средний тепловой поток

$Ra_u = \frac{\beta g (u_l - u_w) l^3}{\alpha \nu}$ – число Релея

$Ra_q = \frac{\beta g q l^5}{\alpha \nu k}$ – модифицированное число Релея

$Ste = \frac{\lambda}{c(q l^2)/k}$ – число Стефана

u – отклонение температуры от равновесной

$u_{av} = \frac{1}{V} \int_V u dV$ – средняя температура

u_l – температура фазового перехода

u_w – температура стенки

$v = (v_1, v_2)$ – вектор скорости

V – объем

x – ширина полости

Греческие символы

β – коэффициент объемного расширения

δ – дельта-функция

λ – энтальпия фазового перехода

ν – кинематическая вязкость

ρ – плотность

Подиндексы

ip – верхняя поверхность

sd – боковая поверхность

dn – нижняя поверхность

L – ликвидус

s – солидус

Труды ИБРАЭ РАН

Под общей редакцией чл.-кор. РАН Л.А.Большова

Выпуск 2

**ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
ЕСТЕСТВЕННО-КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ
ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ**

Под научной редакцией докт. физ.-мат. наук В.Ф.Стрижова

*Утверждено к печати Ученым советом
Института проблем безопасного развития атомной энергетики
Российской академии наук*

Оригинал-макет подготовлен в
Институте проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

Сдано в набор 15 октября 2007 г. Подписано в печать 12 ноября 2007 г.
Формат 60 x 90^{1/8}. Бумага офсетная 80 г/м². Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 15. Тираж 500. Заказ 16732.

Заказное

Отпечатано с готовых диапозитивов типографией ООО «Инфолио-принт».

Издательство «Наука»
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

